

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Алгазина, А. Ф.** Актуальные проблемы таможенной классификации (на примере Товарной номенклатуры внешнеэкономической деятельности Евразийского экономического союза) / А. Ф. Алгазина // Правоприменение. – 2019. – № 1. – URL: [https:// cyberleninka.ru/article/n/aktualnye-problemy-tamozhennoy-klassifikatsii-na-primere-tovarnoy-nomenklatury-vneshneekonomicheskoy-deyatelnosti-evraziyskogo](https://cyberleninka.ru/article/n/aktualnye-problemy-tamozhennoy-klassifikatsii-na-primere-tovarnoy-nomenklatury-vneshneekonomicheskoy-deyatelnosti-evraziyskogo) (дата обращения: 26.04.2026).

2 **Трофимович, А. В.** Роль таможенной экспертизы при проведении таможенного контроля после выпуска товаров / А. В. Трофимович // НИРС-74 : материалы науч.-практ. конф. студентов и курсантов, Минск, 25 апр. 2018 г. / сост.: Е. С. Голубцова [и др.]. – Минск : БНТУ, 2018. – URL: <https://rep.bntu.by/handle/data/44503> (дата обращения: 26.04.2026).

3 **Пяткова, Е. В.** Правовые аспекты назначения и производства таможенной экспертизы при классификации товаров по ТН ВЭД ЕАЭС / Е. В. Пяткова, А. И. Начкин // Правоведение. – СПб. : Изд-во Университета при МПА ЕврАзЭС, 2022. – URL: https://miep.spb.ru/upload/science/izdaniya-universiteta-pri-mpa-evrazes/pyatkova_nachkin_pravovedenie.pdf (дата обращения: 26.04.2026).

4 **Попова, Л. И.** Товароведение и экспертиза в таможенном деле : учеб. пособие для вузов / Л. И. Попова. – 4-е изд., испр. и доп. – М. : Юрайт, 2023. – 205 с.

Получено 03.05.2026

ISSN 2227-1155. Сборник студенческих научных работ.

Вып. 31. Гомель, 2026

УДК 539.3

Д. А. БУДНИКОВА (магистрант)

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук *Э. И. СТАРОВОЙТОВ*

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЯТИСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ

Исследованы вынужденные поперечные колебания стержня, выполненного из пяти-слоистой симметричного по толщине композита. Нагрузка равномерно распределена по всей внешней поверхности верхнего слоя. Для трех несущих слоев приняты гипотезы Бернулли. В легких относительно толстых заполнителях учитывается относительный сдвиг, т. е. справедлива гипотеза Тимошенко. Уравнения движения получены вариационными методами. Предложена постановка начально-краевой задачи. Аналитическое решение построено методом разложения перемещений в ряд по системе собственных ортонормированных функций. Проведен параметрический численный анализ зависимости максимальных перемещений от материала несущих слоев.

Необходимость разработки методики расчета пятислойного стержня обусловлена повсеместным применением слоистых композитных материалов в технике и строительстве. Этой проблеме посвящен ряд публикаций.

Статика и динамика трехслойных стержней и пластин рассмотрена в монографиях [1–3]. Предложенные методики построения расчетных моделей основываются на кинематической гипотезе ломанной линии, законе Гука и соотношениях теории малых упругопластических деформаций Ильюшина. Прикладные проблемы применения и расчета трехслойных элементов конструкций анализируются в [4, 5]. Колебания многослойных круговых пластин с легкими заполнителями при воздействии силовых и термосиловых нагрузок исследованы в [6–8]. Решения соответствующих задач строятся с помощью разложения прогибов и сдвигов в ряды по системам собственных ортонормированных функций. Уравнения собственных колебаний и построение системы собственных ортонормированных функций для пятислойных стержней симметричной структуры приведены в работах [9–15].

1 Постановка задачи. На пятислойный стержень симметричной структуры воздействует мгновенно приложенная равномерно распределенная нагрузка $q_0 = \text{const}$ (рисунок 1). Несущие слои 1, 2, 4 служат для восприятия внешней нагрузки, для них справедливы гипотезы Бернулли, согласно которым поперечные сечения после приложения нагрузки остаются плоскими и перпендикулярными деформированной оси слоя. Два относительно толстых легких заполнителя 3, 5 предназначены для связи несущих слоев и перераспределения напряжений в стержне. Для них выполняется гипотеза Тимошенко, т. е. учитывается дополнительный относительный сдвиг нормали.

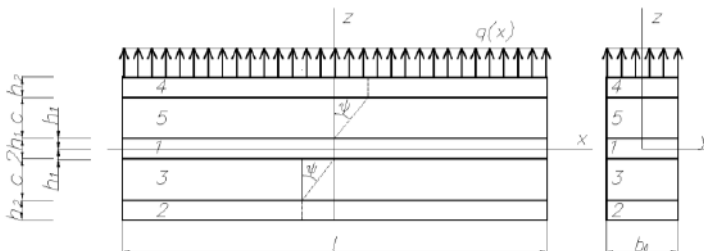


Рисунок 1 – Деформационная схема и нумерация слоев

Система уравнений собственных колебаний подобного стержня получена в [11]. Для описания вынужденных колебаний в правую часть второго уравнения этой системы необходимо добавить внешнюю нагрузку:

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= 0; \\ a_2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - a_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - M_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -q_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$a_1 = 2c^2 \left(\frac{1}{3} (K_3 + \frac{4}{3} G_3) c + (K_2 + \frac{4}{3} G_2) h_2 \right);$$

$$a_2 = h_2 c \left(K_2 + \frac{4}{3} G_2 \right) (h_2 + 2h_1 + 2c) + \frac{1}{3} c^2 \left(K_2 + \frac{4}{3} G_2 \right) (3h_1 + 2c);$$

$$a_4 = \frac{2}{3} \left[h_1^3 \left(K_1 + \frac{4}{3} G_1 \right) + h_2 \left(K_2 + \frac{4}{3} G_2 \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(h_2^2 + 3(h_2 + h_1 + c)(h_1 + c) + cK_3 + \frac{4}{3} G_3 (c^2 + 3h_1 c + 3h_1^2) \right) \right];$$

G_k, K_k – модули упругости материалов k -го слоя.

Начальные условия (прогиб и скорость) однородные:

$$w(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0. \quad (2)$$

Граничные условия. При жесткой заделке торцов стержня ($x = 0; l$)

$$\psi(0, t) = w(0, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0; \quad \psi(l, t) = w(l, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(l, t) = 0. \quad (3)$$

При шарнирном опирании

$$\psi(0, t) = w(0, t) = M(0, t) = 0; \quad \psi(l, t) = w(l, t) = M(l, t) = 0, \quad (4)$$

где $M(x, t)$ – изгибающий момент.

2 Решение задачи. С помощью линейных преобразований система (1) приводится к виду

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - \frac{a_1}{a_2^2 - a_1 a_4} q_0;$$

$$\psi = \frac{a_2}{a_1} \frac{\partial w}{\partial x} + C_1 x + C_2, \quad (5)$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования.

Прогиб, относительный сдвиг и нагрузка, входящие в уравнения (5), раскладываются в ряд по системе собственных функций, построенной в [11] при условиях (3), (4):

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t); \quad \psi(x, t) = \frac{a_2}{a_1} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t); \quad q(x, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t), \quad (6)$$

где $v_n = \frac{1}{d_n} (\text{sh}(\beta_n x) - \sin(\beta_n x) - S_n (\text{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x)))$;

$$\varphi_n = \frac{\beta_n}{d_n} (\text{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x) - S_n (\text{sh}(\beta_n x) + \sin(\beta_n x))), \quad S_n = \frac{\text{sh}(\beta_n l) - \sin(\beta_n l)}{\text{ch}(\beta_n l) - \cos(\beta_n l)},$$

d_n – нормирующие множители; β_n – собственные числа.

Коэффициенты разложения нагрузки в ряд $q_n(t)$ получим умножив третье из соотношений в (6) на v_n и проинтегрировав его по длине стержня

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^l q_0 v_n dx = \frac{q_0}{M_0 d_n \beta_n} (\operatorname{ch}(\beta_n l) + \cos(\beta_n l) - S_n (\operatorname{sh}(\beta_n l) - \sin(\beta_n l)) - 2). \quad (7)$$

После подстановки в (5)₁ разложений (6) для функции времени получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = q_n, \quad (8)$$

где ω_n – частоты собственных колебаний, причем $\beta_n^4 = a_1 M_0 \omega_n^2 / (a_4 a_1 - a_2^2)$.

Общее решение уравнения (8) известно [1]. В нашем случае

$$T_n(t) = \frac{q_n}{\omega_n^2} (1 - \cos(\omega_n t)), \quad (9)$$

где коэффициенты q_n определяются выражением (7).

3 Численные результаты. Прогиб и относительный сдвиг рассчитывались по формулам (6) с учетом функции (9), в случае граничных условий (2), (3). При суммировании рядов (6) учитывались первые 10 членов, как это было показано при исследовании их сходимости [11].

Рисунок 2 иллюстрирует изменения прогиба (a) и относительного сдвига (b) вдоль стержня в зависимости ($t = \pi / \omega_0$). Заполнители в стержне – фторопласт-4, внутренний слой – дюралюминий, внешние несущие слои: 1 – Д16Т; 2 – титан; 3 – кордиерит.

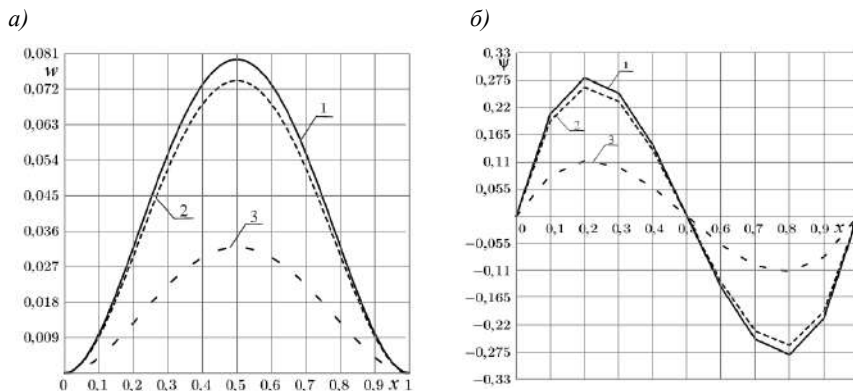


Рисунок 2 – Изменение перемещений по длине стержня (заделка)

При замене дюралюминия во внешних слоях на титан максимальный

прогиб в рассматриваемый момент времени уменьшается на 8 %, относительный сдвиг – на 7,4 %; при кордиеритовых внешних слоях перемещения уменьшаются примерно в 3 раза.

На рисунке 3 показаны графики изменения частоты основного тона ω_0 в зависимости от толщины: *a* – центрального слоя h_1 ; *б* – внешних несущих слоев h_2 . Материалы внешних несущих слоев различны. Нумерация кривых прежняя. Существенное различие наблюдается при достаточно тонком центральном слое, между кривыми, соответствующими слоям из дюралюминия и титанового сплава. При изменении толщины внешних слоев графики ω_0 при дюралюминиевых и титановых слоях практически неразличимы. В случае несущих слоев из кордиерита, частота увеличивается в 2,15 раза.

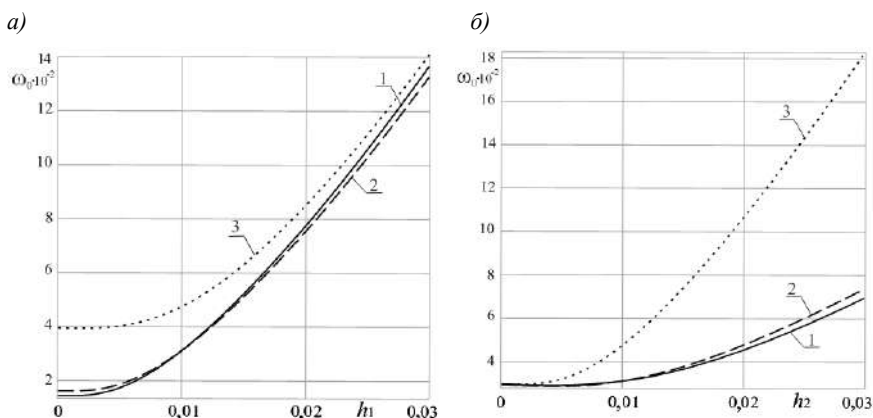


Рисунок 3 – Зависимость частоты ω_0 от толщины несущих слоев (заделка)

Предложенная постановка начально-краевой задачи о вынужденных колебаниях пятислойного симметричного по толщине стержня, полученное аналитическое решение позволяют исследовать его динамические перемещения и частоты колебаний в зависимости от толщин и материалов слоев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Zhuravkov, M. A.** Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2023. – 317 p.
- 2 Deformation of Three-layer Structural Elements in Thermal Radiation Fields / E. I. Starovoitov, M. A. Zhuravkov, D. V. Leonenko, Lyu Yongtao. – Springer Nature Singapore, Pte Ltd, 2024. – 384 p.

3 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках /

Э. И. Старовойтов, Ю. В. Шафиева, А. В. Нестерович, А. Г. Козел. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.

4 **Яровая, А. В.** Строительная механика. Статика стержневых систем / А. В. Яровая. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 447 с.

5 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2025. – 396 с.

6 **Горшков, А. Г.** Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – Т. 1, № 1. – С. 45–52.

7 **Могилевич, Л. И.** Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым наполнителем / Л. И. Могилевич, В. С. Попов, Э. И. Старовойтов // Наука и техника транспорта. – 2006. – № 2. – С. 56–63.

8 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговой трехслойной пластины под действием внешней нагрузки / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 1. – С. 49–63.

9 **Лачугина, Е. А.** Собственные колебания пятислойной круговой пластины при различных закреплениях контура / Е. А. Лачугина // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 25–30.

10 **Будникова, Д. А.** Анализ собственных колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 33–39.

11 **Старовойтов, Э. И.** Собственные колебания пятислойного стержня, вызванные начальным прогибом / Э. И. Старовойтов, Д. А. Будникова // Механика машин, механизмов и материалов. – 2025. – № 2 (71). – С. 70–77.

12 **Старовойтов, Э. И.** Собственные колебания симметричного по толщине пятислойного стержня / Э. И. Старовойтов, Д. А. Будникова // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2025. – Т. 31, № 1. – С. 25–39.

13 **Будникова, Д. А.** Собственные частоты колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 11–15.

14 **Будникова, Д. А.** Влияние условий закрепления пятислойного стержня на частоты собственных колебаний / Д. А. Будникова // Актуальные вопросы машиноведения. – 2025. – Т. 14. – С. 66–69.

15 **Будникова, Д. А.** Колебания пятислойного стержня под действием мгновенно приложенной равномерно распределенной нагрузки / Д. А. Будникова // Механика. Исследования и инновации. – 2025. – Вып. 18. – С. 13–18.

Получено 03.06.2026