

УДК 531.15: 621.825.6

А. С. ИВАНОВ, Д. П. РЕЙФШНЕЙДЕР, Е. В. ФАЛЬКОВА  
 Сибирский государственный университет науки и технологий  
 им. академика М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

## НЕРАВНОМЕРНОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ВЕДОМОГО ВАЛА ШАРНИРА ГУКА

Анализируется работа шарнирных соединений, где передача вращения между валами зависит от угла их взаимного расположения и положения ведущей вилки. Показано, что передаточное отношение достигает максимума при совпадении плоскостей вилки и осей валов и минимума – при их перпендикулярности, вызывая неравномерность вращения. Рост угла усиливает эту неравномерность, а при критических значениях передача движения становится невозможной. Результаты подчеркивают важность учета геометрических параметров при проектировании шарнирных систем для предотвращения неустойчивости и поломок.

**Ключевые слова:** шарнирное соединение, направляющие косинусы, передаточное отношение, коэффициент неравномерности.

Шарнирные соединения как важные компоненты механических систем требуют строгого соответствия геометрическим параметрам для гарантии безотказной работы и долговечности конструкции [1, 2].

Для определения взаимосвязи между углами поворота ведущего и ведомого валов шарнира Гука, в качестве которых выступают углы Эйлера  $\alpha$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , формируется таблица направляющих косинусов, характеризующих ориентацию осей подвижной системы координат  $x'y'z'$  относительно неподвижной  $xuz$ . Она имеет вид, представленный в таблице 1.

Таблица 1 – Направляющие косинусы

Неподвижные оси	Подвижные оси		
	$x'$	$y'$	$z'$
$x$	$\cos \alpha \cos \varphi_2$	$\cos \varphi_1$	0
$y$	$\sin \varphi_2$	$\sin \varphi_1$	0
$z$	$\sin \alpha \cos \varphi_2$	0	1

В матрице направляющих косинусов скалярное произведение любых двух строк, как и любых двух столбцов, равно нулю. Такое утверждение следует из ортогональности соответствующих осей координатных систем. Применительно к осям  $Ox'$  и  $Oy'$  получим

$$\cos \alpha \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \varphi_1, \quad (1)$$

где  $\varphi_1$  – некоторая функция времени,  $\varphi_1 = f(t)$ .

Выражение (1) называют кинематическим уравнением вращения ведомого вала. В случае равномерного вращения ведущего вала

$$\varphi_1 = \omega_1 t; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\operatorname{ctg}(\omega_1 t) \cdot \cos \alpha.$$

Угловая скорость  $\omega_2$  ведомого вала может быть найдена дифференцированием (1) по времени. При  $\alpha = \operatorname{const}$  получаем

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}.$$

Из данного выражения следует, что угловая скорость ведомого вала зависит не только от значения угловой скорости  $\omega_1$ , но и от текущего угла поворота ведущего вала. При равномерном вращении ведущего вала  $\omega_1 = \operatorname{const}$  в случае фиксированного угла  $\alpha = \operatorname{const}$  угловая скорость  $\omega_2$  является функцией угла  $\varphi_1$ , поэтому вращение ведомого вала происходит с переменной скоростью.

Передаточное отношение

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}.$$

При фиксированном угле  $\alpha$  максимальное передаточное отношение наблюдается при значениях угла  $\varphi_1 = 0, \pi, 2\pi$  и т. д., что соответствует положениям, при которых плоскость ведущей вилки совпадает с плоскостью осей валов. В этих случаях достигается максимальное значение передаточного отношения, которое определяется геометрической конфигурацией механизма:

$$\left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)_{\max} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Минимальное передаточное отношение наблюдается при углах  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ , то есть когда плоскость ведущей вилки расположена перпендикулярно плоскости осей валов. При такой геометрической конфигурации передаточное отношение минимально и составляет

$$\left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)_{\min} = \cos \alpha.$$

Таким образом, передаточное отношение находится в интервале

$$\cos \alpha \leq \frac{\omega_2}{\omega_1} \leq \frac{1}{\cos \alpha}.$$

На рисунке 1 представлены графики зависимости передаточного отношения от угла поворота ведущего вала для  $\alpha = 0,1$  и  $0,5$  рад. Из этих графиков следует, что увеличение угла  $\alpha$  приводит к росту неравномерности вращения ведомого вала. Для количественной оценки этой нестабильности используется параметр,

известный как коэффициент неравномерности передачи, который отражает степень отклонения скорости ведомого вала от равномерного движения.

$$k = \frac{\omega_{2\max} - \omega_{2\min}}{\omega_1} = \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha.$$

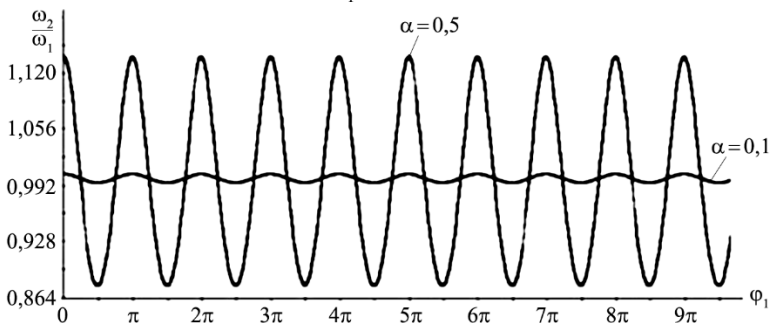


Рисунок 1 – Зависимость передаточного отношения от угла поворота ведущего вала

Результаты анализа показывают, что при  $\alpha = 0^\circ$  коэффициент  $k$  равен нулю. Для небольших значений угла  $\alpha$  параметр  $k$  остается незначительным, однако при увеличении данного угла наблюдается резкий рост коэффициента. При достижении  $\alpha = 90^\circ$  значение  $k$  стремится к бесконечности, что делает передачу движения невозможной из-за критического нарушения кинематики механизма.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Крайнев, А. Ф.** Словарь-справочник по механизмам / А. Ф. Крайнев. – М. : Машиностроение, 1981. – 438 с.

2 **Шатров, А. К.** Механические устройства космических аппаратов. Конструктивные решения и динамические характеристики : учеб. пособие / А. К. Шатров, Л. П. Назарова, А. В. Машуков. – Красноярск : Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т., 2006. – 84 с.

A. S. IVANOV, D. P. REIFSCHNEIDER, E. V. FALKOVA

*Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia*

## ROTATIONAL UNEVENNESS OF A HOOKE'S JOINT DRIVEN SHAFT

This paper analyzes the operation of articulated joints where the transmission of rotation between the shafts depends on the angle of their relative positions and the position of the drive yoke. It is shown that the gear ratio reaches a maximum when the yoke planes and shaft axes coincide, and a minimum when they are perpendicular, causing rotational unevenness. Increasing the angle intensifies this unevenness, and at critical values, motion transmission becomes impossible. The results highlight the importance of considering geometric parameters when designing articulated systems to prevent instability and failure.

**Keywords:** articulated joint, direction cosines, gear ratio, unevenness coefficient.

Получено 14.05.2025