

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ПУБЛИКАЦИИ (EDUCATIONAL AND METHODOLOGICAL PUBLICATIONS)

ISSN 2519-8742. Механика. Исследования и инновации. Вып. 18. Гомель, 2025

УДК 531.31

Э. А. АСЛАНОВ, Г. Г. САФАРОВ

Азербайджанский технический университет, Баку, Азербайджан

УСЛОВИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Приводится доказательство теоремы об условии эквивалентности двух систем связанных векторов. Она является исходной для доказательства соответствующих теорем о количестве движения, о моменте количества движения и о кинетической энергии системы.

Ключевые слова: механическая система, динамика, эквивалентность связанных векторов, вириал.

Допустим, что механическая система, состоящая из n материальных точек, под действием внешних и внутренних сил движется относительно инерциальной системы отсчета. Запишем для каждой материальной точки второй закон Ньютона:

$$m_i \bar{w}_i = \bar{E}_i + \bar{I}_i, \quad (1)$$

где m_i , \bar{w}_i – масса и ускорение i -й точки системы ($i = 1, 2, \dots, n$); \bar{E}_i и \bar{I}_i – равнодействующие внешних (External) и внутренних (Internal) сил, приложенных к этой материальной точке [1–3].

При движении материальной системы относительно инерциальной системы отсчета произведения масс на ускорения ее точек должны быть эквивалентны силам, которые являются причиной ускоренного движения этой системы. Другими словами, система векторных равенств (1) должна сопровождаться условиями эквивалентности двух названных систем векторов, то есть

$$m_i \bar{w}_i \sim (\bar{E}_i, \bar{I}_i).$$

Применим условия эквивалентности второго закона Ньютона [1] к системе векторов, связанных с каждой материальной точкой механической системы. Помимо уравнения (1) они включают записанные в скалярно-геометрической форме условия:

$$\bar{M}_o(m_i \bar{w}_i) = \bar{M}_o(\bar{E}_i) + \bar{M}_o(\bar{I}_i); \quad (2)$$

$$V_o(m_i \bar{w}_i) = V_o(\bar{E}_i) + V_o(\bar{I}_i), \quad (3)$$

где \bar{M}_o и V_o – момент и вириал вектора относительно центра O .

Эти условия эквивалентности описывают движение механической системы. Однако практически реализовать исследование движения системы удастся только для систем, состоящих из двух или трех материальных точек, которые известны как «задача двух тел» или «задача трех тел». Эти задачи лежат в основе небесной механики, а также используются при исследовании столкновения и рассеяния элементарных частиц. Сложность использования этих систем состоит, прежде всего, в том, что заранее не известно аналитическое выражение внутренних сил и реакций связей [4–7]. В теоретической механике разработаны методы, которые позволяют обойти эти трудности. Как известно, система скользящих векторов определяется главным вектором и главным моментом. Иначе обстоит дело в системе связанных векторов, которая определяется главным вектором, главным моментом и главным вириалом. Потому проанализируем три вида систем векторов: свободных, скользящих и связанных.

Главным вектором систем свободных, скользящих и связанных векторов называется сумма всех векторов, которые входят в систему:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i.$$

Система, состоящая из свободных векторов, полностью характеризуется одним вектором – главным вектором \bar{R} этой системы.

Главным моментом скользящих и связанных векторов относительно некоторого центра называется сумма вектор-моментов всех векторов относительно этого же центра:

$$\bar{M}_o = \sum_{i=1}^n \bar{M}_o(\bar{a}_i).$$

Система скользящих векторов характеризуется уже двумя векторами: главным вектором \bar{R} и главным моментом \bar{M}_o относительно центра [8].

Главным вириалом связанных векторов относительно некоторого центра называется алгебраическая сумма вириалов всех векторов относительно того же центра:

$$V_o = \sum_{i=1}^n V_o(\bar{a}_i).$$

Система, состоящая из связанных векторов полностью характеризуется тремя параметрами: двумя векторами – главным вектором \bar{R} , главным вектор-моментом \bar{M}_O и еще одной скалярной величиной – главным вириалом V_O относительно того же центра [9, 10].

Далее рассмотрим эквивалентность систем связанных векторов $(m_i \bar{w}_i)_n$ и $(\bar{E}_i, \bar{I}_i)_n$, каждая из которых задается своим главным вектором, главным моментом и главным вириалом, то есть

$$(\bar{E}_i, \bar{I}_i)_n = \{\bar{R}(t), \bar{M}_O(t), V_O(t)\}; \quad (m_i \bar{w}_i)_n = \{\bar{R}^*(t), \bar{M}_O^*(t), V_O^*(t)\}.$$

Теорема. Две системы связанных векторов $(m_i \bar{w}_i)_n$ и $(\bar{E}_i, \bar{I}_i)_n$ эквивалентны тогда и только тогда, когда при приведении к произвольной точке каждой из этих систем их результирующие главные векторы, главные вектор-моменты а также главные вириалы равны, то есть

$$\text{если } \bar{R} = \bar{R}^*; \quad \bar{M}_O = \bar{M}_O^*; \quad V_O = V_O^*, \quad \text{тогда и } (\bar{E}_i, \bar{I}_i)_n \sim (m_i \bar{w}_i)_n.$$

Доказательство. Докажем достаточность условий эквивалентности.

Первое условие. Потребуем, чтобы главные векторы систем были геометрически равны: $\bar{R} = \bar{R}^*$.

Для выполнения этого требования главные векторы этих систем должны иметь одинаковые направления и равные модули. Но поскольку точки приложения и линии действия этих главных векторов различны, их нельзя считать эквивалентными.

Второе условие. Потребуем, чтобы и главные вектор-моменты этих систем относительно выбранного центра были геометрически равны: $\bar{M}_O = \bar{M}_O^*$.

Чтобы выполнялось это требование, главные векторы сил \bar{R} и главные векторы \bar{R}^* , соответствующие ускорениям, расположатся на одной и той же прямой. Так как точки приложения этих векторов могут быть различными, их нельзя считать эквивалентными.

Третье условие. Потребуем, чтобы и главные вириалы этих систем векторов относительно выбранного центра были равны, то есть $V_O = V_O^*$.

Так как точки приложения рассматриваемых векторов определяются их вириалами, при выполнении последнего требования точки их приложения совпадают.

Теорема доказана.

Прежде отметим, что по третьему закону Ньютона внутренние силы обладают следующими двумя свойствами: геометрическая сумма всех внутренних сил системы (главный вектор внутренних сил) и геометрическая сумма моментов всех внутренних сил относительно произвольной точки пространства (главный момент внутренних сил) равны нулю, то есть

$$\sum_{i=1}^n \bar{I}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\bar{I}_i) = 0.$$

Учитывая изложенные замечания, сложим соответственно левые и правые части равенств (1), (2), (3) и получим условия эквивалентности двух систем связанных векторов:

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{w}_i = \sum_{i=1}^n \bar{E}_i; \quad \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(m_i \bar{w}_i) = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\bar{E}_i);$$

$$\sum_{i=1}^n V_O(m_i \bar{w}_i) = \sum_{i=1}^n V_O(\bar{E}_i) + \sum_{i=1}^n V_O(\bar{I}_i).$$

Основная роль условий эквивалентности состоит в том, что они или следствие из них являются исходными для получения соответствующих теорем о количестве движения, о моменте движения и о кинетической энергии системы. Они, в свою очередь, определяют характер движения механических систем.

Теорема об изменении количества движения материальной системы.

Движение механической системы всегда сопровождается изменением трех характеризующих его динамических величин: количества движения, кинетического момента и кинетической энергии. Теорема об изменении количества движения применяется, когда механическое движение передается от одной системы к другой.

Определение. Количеством движения называется мера механического движения, выражающаяся геометрической суммой произведений массы каждой частицы материальной системы на ее скорость:

$$\bar{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i.$$

Теорема. Производная по времени от количества движения механической системы геометрически равна главному вектору внешних сил, действующих на эту систему:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^E.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы пользуемся условием эквивалентности двух систем связанных векторов. По условию эквивалентности, главный вектор, характеризующий ускорения, геометрически равен главному вектору внешних сил:

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{w}_i = \sum_{i=1}^n \bar{E}_i; \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^n \bar{E}_i.$$

Отсюда
$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^E. \quad (4)$$

Теорема доказана.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы.

Допустим, что механическая система, состоящая из n материальных точек движется относительно неподвижного центра под действием внешних и внутренних сил. Момент количества движения материальной точки относительно выбранного центра является динамической характеристикой механического движения, определяющей положение материальной точки относительно этого центра.

Определение. Кинетическим или главным моментом количества движения механической системы относительно данного центра называем вектор, равный геометрической сумме вектор-моментов количества движения всех материальных точек системы относительно этого центра:

$$\bar{L}_O = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i).$$

Теорема. Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра геометрически равна главному моменту внешних сил, действующих на эту систему относительно того же центра:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_O^E.$$

Доказательство. Из условия эквивалентности двух систем связанных векторов запишем равенство главных вектор-моментов этих систем с учетом того, что главный вектор-момент внутренних сил равен нулю:

$$\sum_{i=1}^n \bar{M}_O(m_i \bar{w}_i) = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\bar{E}_i); \quad \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times m_i \bar{w}_i) = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{E}_i);$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i) - \sum_{i=1}^n (\bar{v}_i \times m_i \bar{v}_i) = \bar{M}_O^E;$$

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_O^E. \quad (5)$$

Теорема доказана.

Теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек. Кинетическая энергия характеризует способность механического движения превращаться в эквивалентное количество другого вида движения, например, в теплоту, в потенциальную энергию, в электричество и пр.

Определение. Кинетическая энергия системы материальных точек есть динамическая величина, выражающаяся половиной суммы произведения массы каждой частицы системы на квадрат скорости:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Теорема. Производная от кинетической энергии по времени равна сумме мощностей всех внешних и внутренних сил, приложенных к системе материальных точек:

$$\frac{dT}{dt} = N^E + N^I,$$

где N^E, N^I – сумма мощностей всех внешних и внутренних сил.

Доказательство. Пользуемся условием эквивалентности двух связанных систем векторов. Запишем равенство главных вириалов:

$$\sum_{i=1}^n V_O(m_i \bar{w}_i) = \sum_{i=1}^n V_O(\bar{E}_i) + \sum_{i=1}^n V_O(\bar{I}_i).$$

Это равенство запишем в явном виде и с обеих частей возьмем производную по времени

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (m_i \bar{w}_i \cdot \bar{r}_i) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\bar{E}_i \cdot \bar{r}_i) + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\bar{I}_i \cdot \bar{r}_i).$$

С учетом равенства

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{w}_i - \sum_{i=1}^n \bar{E}_i - \sum_{i=1}^n \bar{I}_i \right) = 0$$

получим

$$\sum_{i=1}^n (m_i \bar{w}_i \cdot \bar{v}_i) = \sum_{i=1}^n (\bar{E}_i \cdot \bar{v}_i) + \sum_{i=1}^n (\bar{I}_i \cdot \bar{v}_i).$$

Далее имеем

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n N_i^E + \sum_{i=1}^n N_i^I.$$

$$\frac{dT}{dt} = N^E + N^I. \quad (6)$$

Теорема доказана.

Таким образом, в статье выведены общие теоремы динамики для систем свободных материальных точек на основе условия эквивалентности связанных векторов. Если рассматриваемая система является замкнутой, то дифференциальные уравнения (1), (2) и (3) приведут к первым интегралам, т. е. к законам сохранения:

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = \text{const}; \quad \sum_{i=1}^n (r_i \times m_i \bar{v}_i) = \text{const}; \quad \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + U = \text{const}.$$

Следует отметить, что все законы сохранения, полученные из условия эквивалентности второго закона Ньютона, как в традиционных изложениях связаны со свойствами пространства и времени, которые постулируются в классической механике. Сохранение количества движения системы связано

с однородностью пространства, в силу которой механические свойства замкнутой системы в целом не меняются при любом параллельном переносе системы.

Сохранение момента количества движения связано с изотропностью пространства, в силу которой механические свойства замкнутой системы в целом не изменяются при любом повороте системы.

Сохранение вириала системы связано с однородностью времени, в силу которой механические свойства замкнутой системы не меняются при любом переносе системы во времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Геронимус, Я. Л. Теоретическая механика : очерки об основных положениях / Я. Л. Геронимус. – М. : Наука, 1973. – 511 с.

2 Ольховский, И. И. Курс теоретической механики для физиков : учеб. пособие / И. И. Ольховский. – М. : Наука, 1970. – 447 с.

3 Бекташи, Т. Г. Основной курс теоретической механики / Т. Г. Бекташи. – Баку : Элм, 1999. – 689 с.

4 Айзерман, М. А. Классическая механика / М. А. Айзерман. – М. : Наука, 1974. – 367 с.

5 Березкин, Е. Н. Лекции по теоретической механике / Е. Н. Березкин. – М. : МГУ, 1967. – 314 с.

6 Кильчевский, Н. А. Курс теоретической механики : в 2 т. / Н. А. Кильчевский. – М. : Наука, 1977. – Т. 1. – 480 с.

7 Яблонский, А. А. Курс теоретической механики : в 2 ч. / А. А. Яблонский. – М. : Высш. школа, 1977. – Ч. 2. – 429 с.

8 Меркин, Д. Р. Алгебра свободных и скользящих векторов / Д. Р. Меркин. – М. : Физматлит, 1962. – 162 с.

9 Сафаров, Г. Г. Геометрическая интерпретация основных теорем динамики / Г. Г. Сафаров // *Nəzəri və tətbiqi mexanika*. – 2008. – № 3. – С. 19.

10 Сафаров, Г. Г. Условия эквивалентности второго закона Ньютона / Г. Г. Сафаров // *Elmi əsərlər – fundamental elmlər*. – 2009. – Cild VIII (29), № 1. – S. 42–46.

E. A. ASLANOV, G. G. SAFAROV

Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan

EQUIVALENCE CONDITIONS AND BASIC THEOREMS OF A MATERIAL POINTS SYSTEM DYNAMICS

The proof of the theorem on the equivalence condition of two systems of coupled vectors is presented in the paper. It serves as the starting point for proving the corresponding theorems on the momentum, angular momentum, and kinetic energy of the system.

Keywords: mechanical system, dynamics, equivalence of coupled vectors, virial.

Получено 31.10.2025