

УДК 539.31:62-419

*В. С. САЛИЦКИЙ*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **ДЕФОРМИРОВАНИЕ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ КРУГЛОЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ**

Представлена постановка краевой задачи об изгибе несимметричной по толщине упругой круглой пятислойной пластины с двумя заполнителями. Деформирование несущих слоев удовлетворяет гипотезам Кирхгофа, сравнительно толстых заполнителей – гипотезе Тимошенко. Вариационным методом Лагранжа получены уравнения равновесия с учетом работы касательных напряжений в заполнителях. Из системы выделено дифференциальное неоднородное уравнение четвертого порядка относительно сдвига в одном из заполнителей. Решение соответствующего однородного уравнения сведено к решению двух модифицированных уравнений Бесселя второго порядка. Общее решение неоднородного уравнения выписано в конечном виде. Приведен пример численного расчета.

**Ключевые слова:** круглая пятислойная пластина, асимметрия по толщине, аналитическое решение, численные результаты.

**Введение.** Слоистые стержни, пластины и оболочки находят широкое практическое применение в различных отраслях техники, поэтому создание механико-математических моделей их деформирования представляет собой актуальную задачу.

В книгах [1–3] проведен анализ применимости различных кинематических гипотез при постановке и решению прикладных задач механики неоднородных конструкций и представлены исследования напряженно-деформированного состояния упругих трехслойных стержней и пластин при различных видах нагружения.

В статьях [4, 5] выполнен анализ колебаний трехслойных стержней и пластин под действием нагрузок разной природы. В работе [6] изучаются свободные колебания пятислойной круговой пластины на основе предположения о том, что кинематика конструкций подчиняется гипотезе ломаной линии.

Квазистатическому деформированию упругой трехслойной цилиндрической оболочки посвящена статья [7]. Учтено воздействие температурного поля и сжимаемость заполнителя. Изгиб круговых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием исследован в [8, 9]. Воздействие косинусоидальной нагрузки на трехслойную круговую пластину в своей плоскости анализируется в работе [10]. Учет физической нелинейности несущих слоев, в том числе при использовании материалов с памятью, а также вязкоупругости заполнителя осуществлен в [11]. Вариационная постановка краевой задачи обратимой термомеханики для многослойных конструкций представлена в статье [12].

Деформированию пятислойных упругих круговых *симметричных* по толщине пластин посвящены публикации [13–16]. В данной работе представлена постановка и получено аналитическое решение задачи о деформировании под действием статической нагрузки *несимметричной* по толщине пятислойной пластины.

**1 Постановка краевой задачи.** Рассматривается деформирование несимметричной по толщине пятислойной круговой пластины (рисунок 1). Полагается, что для достаточно тонких жестких несущих слоев 1, 2 и 4 выполняются гипотезы Кирхгофа, в соответствии с которыми нормаль несжимаема, она сохраняет прямолинейную форму и остается перпендикулярной к деформированной срединной поверхности слоя. Относительно толстые заполнители несжимаемы по толщине и воспринимают нагрузку в тангенциальном направлении. Нормали в них сохраняют прямолинейность, но поворачиваются на дополнительный угол  $\psi_i(r)$  ( $i = 1, 2$ ).

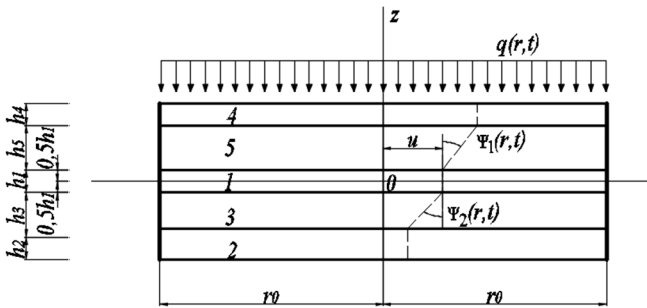


Рисунок 1 – Нумерация слоев и нагрузка в пятислойной пластине

Свяжем цилиндрическую систему координат со срединной плоскостью центрального несущего слоя. Из гипотезы прямолинейности нормалей заполнителей следует

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{rz}^{(5)} &= u_r^{(5)} + w_{,r} = \psi_1 \\ 2\varepsilon_{rz}^{(3)} &= u_r^{(3)} + w_{,r} = \psi_2 \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\psi_1(r)$ ,  $\psi_2(r)$  – относительные сдвиги в верхнем (5) и нижнем (3) заполнителях; запятая в индексе означает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; числовые индексы соответствуют номерам слоев.

Интегрирование соотношений (1) дает формулы для вычисления радиальных перемещений  $u_r^{(k)}$ :

$$\begin{aligned} u_r^{(4)} &= u - zw_{,r} + h_5 \psi_1, & \frac{h_1}{2} + h_3 \leq z \leq \frac{h_1}{2} + h_5 + h_4; \\ u_r^{(5)} &= u - zw_{,r} + \left(z - \frac{h_1}{2}\right) \psi_1, & \frac{h_1}{2} \leq z \leq \frac{h_1}{2} + h_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_r^{(1)} &= u - zw_{,r}, & -\frac{h_1}{2} \leq z \leq \frac{h_1}{2}; \\
u_r^{(3)} &= u - zw_{,r} + \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\Psi_2, & -\frac{h_1}{2} - h_3 \leq z \leq -\frac{h_1}{2}; \\
u_r^{(2)} &= u - zw_{,r} - h_3\Psi_2, & -\frac{h_1}{2} - h_3 - h_2 \leq z \leq -\frac{h_1}{2} - h_3,
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $z$  – координата рассматриваемой точки поперечного сечения;  $h_5\Psi_1, -h_3\Psi_2$  – смещения верхнего и нижнего несущих слоев за счет относительного сдвига в предстоящих заполнителях;  $u(r)$  – радиальное перемещение срединной плоскости центрального слоя.

В качестве искоемых функций выступают прогиб  $w(r)$ , радиальное перемещение  $u(r)$ , относительные сдвиги  $\Psi_1(r)$  и  $\Psi_2(r)$ . Выражения деформаций следуют из (2) и соотношений Коши [1]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r^{(4)} &= u_{,r} - zw_{,rr} + h_5\Psi_{1,r}; & \varepsilon_\varphi^{(4)} &= \frac{1}{r}(u - zw_{,r} + h_5\Psi_1); & \varepsilon_{rz}^{(4)} &= 0; \\
\varepsilon_r^{(5)} &= u_{,r} - zw_{,rr} + \left(z - \frac{h_1}{2}\right)\Psi_{1,r}; & \varepsilon_\varphi^{(5)} &= \frac{1}{r}\left(u - zw_{,r} + \left(z - \frac{h_1}{2}\right)\Psi_1\right); & \varepsilon_{rz}^{(5)} &= \frac{\Psi_1}{2}; \\
\varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} - zw_{,rr}; & \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{r}(u - zw_{,r}); \\
\varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} - zw_{,rr} + \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\Psi_{2,r}; & \varepsilon_\varphi^{(3)} &= \frac{1}{r}\left(u - zw_{,r} + \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\Psi_2\right); & \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{\Psi_2}{2}; \\
\varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - zw_{,rr} - h_3\Psi_{2,r}; & \varepsilon_\varphi^{(2)} &= \frac{1}{r}(u - zw_{,r} - h_3\Psi_2); & \varepsilon_{rz}^{(2)} &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Напряжения определяются с использованием формул (3) из закона Гука. При выводе с помощью вариационного принципа Лагранжа системы уравнений равновесия учтена работа касательных напряжений  $\sigma_{rz}^{(3)}, \sigma_{rz}^{(5)}$  в заполнителях. В операторном виде получена система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
L_2(a_1u + a_2\Psi_1 - a_3\Psi_2 - a_4w_{,r}) &= 0; \\
L_2(a_2u + a_5\Psi_1 - a_6w_{,r}) - h_5G_5\Psi_1 &= 0; \\
L_2(-a_3u + a_7\Psi_2 - a_8w_{,r}) - h_3G_3\Psi_2 &= 0; \\
L_3(a_4u + a_6\Psi_1 + a_8\Psi_2 - a_9w_{,r}) &= -q,
\end{aligned} \tag{4}$$

коэффициенты в которой:

$$a_1 = K_4^+ h_4 + K_5^+ h_5 + K_1^+ h_1 + K_3^+ h_3 + K_2^+ h_2; \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3}G_k; \quad K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3}G_k;$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= K_5^+ \frac{h_5^2}{2} + K_4^+ h_4 h_5; \quad a_3 = K_3^+ \frac{h_3^2}{2} + K_2^+ h_2 h_3; \\
a_4 &= K_4^+ \frac{h_4}{2} (h_1 + 2h_5 + h_4) + K_5^+ \frac{h_5}{2} (h_1 + h_5) - K_3^+ \frac{h_3}{2} (h_1 + h_3) - K_2^+ \frac{h_2}{2} (h_1 + 2h_3 + h_2); \\
a_5 &= K_4^+ h_4 h_5^2 + K_5^+ \frac{h_5^3}{3}; \quad a_6 = K_4^+ \frac{h_4 h_5}{2} (h_1 + 2h_5 + h_4) + K_5^+ h_5 \left( \frac{h_1 h_5}{4} + \frac{h_5^2}{3} \right); \\
a_7 &= K_2^+ h_2 h_3^2 + K_3^+ \frac{h_3^3}{3}; \quad a_8 = K_2^+ \frac{h_2 h_3}{2} (h_1 + 2h_3 + h_2) + K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right); \\
a_9 &= K_4^+ h_4 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_4}{2} + h_1 h_5 + \frac{h_4^2}{3} + h_4 h_5 + h_5^2 \right) + K_5^+ h_5 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_5}{2} + \frac{h_5^2}{3} \right) + \\
&+ K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right);
\end{aligned}$$

дифференциальные операторы

$$\begin{aligned}
L_2(g) &\equiv \left( \frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\
L_3(g) &\equiv \frac{1}{r} (rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3};
\end{aligned}$$

$G_k, K_k$  – модули упругости материалов,  $k$  – здесь и далее номер слоя.

При жесткой заделке контура должны выполняться граничные условия:

$$u(r_0) = \Psi_1(r_0) = \Psi_2(r_0) = w(r_0) = w_{,r}(r_0) = 0. \quad (5)$$

Граничные условия (5) с уравнениями равновесия (4) замыкают краевую задачу об изгибе пятислойной несимметричной по толщине круговой пластины.

**2 Решение краевой задачи.** Применив оператор

$$L_1^{-1}(g) \equiv \frac{1}{r} \int rg \, dr; \quad L_1^{-1} L_3 = L_2$$

к четвертому уравнению системы (4), сведем ее к виду

$$\begin{aligned}
L_2(u) &= -L_2 \left( \frac{a_4}{a_1} w_{,r} - \frac{a_2}{a_1} \Psi_1 + \frac{a_3}{a_1} \Psi_2 \right); \\
b_1 L_2(\Psi_1) + b_2 L_2(\Psi_2) - h_5 G_3 \Psi_1 &= -\gamma_1 L_1^{-1}(q); \\
b_2 L_2(\Psi_1) + b_3 L_2(\Psi_2) - h_3 G_3 \Psi_2 &= -\gamma_2 L_1^{-1}(q); \\
L_2(w_{,r}) &= -\gamma L_1^{-1}(q) - \gamma_1 L_2(\Psi_1) - \gamma_2 L_2(\Psi_2).
\end{aligned} \quad (6)$$

Здесь введены коэффициенты

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{a_1}{a_4^2 - a_1 a_9}; \quad \gamma_1 = \frac{a_1 a_6 - a_2 a_4}{a_4^2 - a_1 a_9}; \quad \gamma_2 = \frac{a_1 a_8 + a_3 a_4}{a_4^2 - a_1 a_9}; \\ b_1 &= \frac{a_5 a_4^2 - a_1 a_3 a_9 + a_2^2 a_9 - 2 a_2 a_4 a_6 + a_1 a_6^2}{a_4^2 - a_1 a_9}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_6 a_8 + a_3 a_4 a_6 - a_2 a_4 a_8 - a_2 a_3 a_9}{a_4^2 - a_1 a_9}; \\ b_3 &= \frac{a_4^2 a_7 - a_1 a_7 a_9 + 2 a_3 a_4 a_8 + a_3^2 a_9 + a_1 a_8^2}{a_4^2 - a_1 a_9}.\end{aligned}$$

Из второго и третьего уравнений системы (6) для случая  $q = \text{const}$  получаем отдельное дифференциальное уравнение для сдвига  $\psi_1$ :

$$L_2^2(\psi_1) - 2A_1^2 L_2(\psi_1) + A_2^4 \psi_1 = f, \quad (7)$$

где 
$$A_1^2 = \frac{h_5 G_5 b_3 + b_1 h_3 G_3}{2(b_1 b_3 - b_2^2)}; \quad A_2^4 = \frac{h_5 G_5 h_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2}; \quad f = \frac{\gamma_1 h_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2} L_1^{-1}(q).$$

Искомое общее решение уравнения (7) имеет вид

$$\psi_1 = C_2 I_1(\beta_1 r) + C_3 K_1(\beta_1 r) + C_4 I_1(\beta_2 r) + C_5 K_1(\beta_2 r) + \psi_{1r}, \quad (8)$$

где  $\psi_{1r}$  – частное решение уравнения (7);  $C_2, \dots, C_5$  – константы интегрирования;

$$\beta_1 = \lambda_1 A_2; \quad \beta_2 = \lambda_2 A_2; \quad \lambda_1^2 = \left| -A_0^2 + \sqrt{(A_0^2)^2 - 1} \right|; \quad \lambda_2^2 = \left| -A_0^2 - \sqrt{(A_0^2)^2 - 1} \right|; \quad A_0^2 = \frac{A_1^2}{A_2^2}.$$

Поскольку перемещения в центре пластины ограничены, а функции  $K_1(r)$  при  $r = 0$  не ограничены, то в (8) необходимо положить  $C_3 = C_5 = 0$ .

После интегрирования оставшихся уравнений системы (6) получаем искомое общее решение задачи в перемещениях, которое описывает деформирование сплошной круговой *несимметричной* по толщине упругой пятислойной пластины при изгибе равномерно распределенной нагрузкой  $q = \text{const}$ :

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{\gamma_1 q r}{2 h_5 G_5} + C_2 I_1(\beta_1 r) + C_4 I_1(\beta_2 r); \quad \psi_2 = \frac{\gamma_2 q r}{2 h_3 G_3} + C_2 k_1 I_1(\beta_1 r) + C_4 k_2 I_1(\beta_2 r); \\ w &= -\frac{q r^2}{4} \left( \frac{\gamma_1^2}{h_5 G_5} + \frac{\gamma_2^2}{h_3 G_3} + \frac{\gamma r^2}{16} \right) - \frac{C_2 I_0(\beta_1 r)}{\beta_1} (\gamma_1 + \gamma_2 k_1) - \\ &\quad - \frac{C_4 I_0(\beta_2 r)}{\beta_2} (\gamma_1 + \gamma_2 k_2) - \frac{C_5 \gamma r^2}{4} + C_8; \\ u &= \frac{1}{a_1} \left[ \left( a_4 \left( \gamma_1 + \gamma_2 \frac{h_5 G_5 b_3}{h_3 G_3 b_2} \right) + a_2 - \frac{h_5 G_5 a_3 b_3}{h_3 G_3 b_2} \right) \frac{\gamma_1 q r}{2 h_5 G_5} + \frac{(b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1)}{h_3 G_3 b_2} (a_4 \gamma_2 - a_3) \frac{q r^2}{4} + \right. \\ &\quad \left. + a_4 \gamma \left( \frac{q r^4}{64} + \frac{C_5 r^2}{4} \right) + C_2 I_1(\beta_1 r) (a_4 (\gamma_1 + \gamma_2 k_1) + a_2 - a_3 k_1) + \right.\end{aligned}$$

$$+C_4 I_1(\beta_2 r) (a_4 (\gamma_1 + \gamma_2 k_2) + a_2 - a_3 k_2) \Big] + C_9 r, \quad (9)$$

где  $C_2, C_4, C_5, C_8, C_9$  – константы интегрирования;  
коэффициенты

$$k_1 = \frac{(\beta_1^2 (b_2^2 - b_1 b_3) + h_3 G_5 b_3)}{h_3 G_3 b_2}, \quad k_2 = \frac{(\beta_2^2 (b_2^2 - b_1 b_3) + h_5 G_3 b_3)}{h_5 G_3 b_2}.$$

При жесткой заделке контура пластины константы интегрирования получаем, обеспечивая решением (9) выполнение граничных условий (4):

$$C_2 = \frac{q}{2I_1(\beta_1)(k_2 - k_1)} \left( \frac{\gamma_2}{h_3 G_3} - \frac{\gamma_1 k_2}{h_5 G_5} \right); \quad C_4 = -\frac{q}{2I_1(\beta_2)(k_2 - k_1)} \left( \frac{\gamma_2}{h_3 G_3} - \frac{\gamma_1 k_1}{h_5 G_5} \right);$$

$$C_5 = -\frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma_1 q}{h_5 G_5} \left( \gamma_1 + \gamma_2 \frac{h_3 G_5 b_3}{h_3 G_3 b_2} \right) + \frac{\gamma_2 q (b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1)}{h_3 G_3 b_2} + \frac{\gamma q}{6} + \right. \\ \left. + 2C_2 I_1(\beta_1) (\gamma_1 + \gamma_2 k_1) + 2C_4 I_1(\beta_2) (\gamma_1 + \gamma_2 k_2) \right);$$

$$C_8 = \frac{q}{4} \left( \frac{\gamma_1^2}{h_5 G_5} + \frac{\gamma_2^2}{h_3 G_3} + \frac{\gamma}{16} \right) + \frac{C_2 I_0(\beta_1)}{\beta_1} (\gamma_1 + \gamma_2 k_1) + \frac{C_4 I_0(\beta_2)}{\beta_2} (\gamma_1 + \gamma_2 k_2) + \frac{C_5 \gamma}{4};$$

$$C_9 = -\frac{1}{a_1} \left[ \left( a_4 \left( \gamma_1 + \gamma_2 \frac{h_3 G_5 b_3}{h_3 G_3 b_2} \right) + a_2 - \frac{h_5 G_5 a_3 b_3}{h_3 G_3 b_2} \right) \frac{\gamma_1 q}{2h_5 G_5} + a_4 \gamma \left( \frac{q}{12} + \frac{C_5}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{(b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1)}{h_3 G_3 b_2} (a_4 \gamma_2 - a_3) \frac{q}{2} + C_2 I_1(\beta_1) (a_4 (\gamma_1 + \gamma_2 k_1) + a_2 - a_3 k_1) + \right. \\ \left. + C_4 I_1(\beta_2) (a_4 (\gamma_1 + \gamma_2 k_2) + a_2 - a_3 k_2) \right]. \quad (10)$$

**3 Численные результаты** получены для пятислойной круговой пластины единичного радиуса при равномерно распределенной нагрузке  $q_0 = -1$  МПа. При расчетах использовался базовый пакет Д16-Т-фторопласт-4–Д16-Т-фторопласт-4–Д16-Т. Механические характеристики используемых материалов приведены в [1]. Толщины слоев:  $h_1 = h_2 = h_4 = 0,02$ ,  $h_3 = h_5 = 0,1$ . Перемещения и сдвиги рассчитывались по формулам (9), (10).

Рисунок 2 иллюстрирует зависимость перемещений в базовой модели от материала нижнего заполнителя: 1 – фторопласт-4; 2 – пенопласт; 3 – пенополиуретан. Материалы остальных слоев и их толщины соответствуют базовой модели.

Результаты расчета показали, что при замене фторопласта-4 на пенопласт перемещения увеличиваются: прогиб – примерно в 1,6 раза, относительный сдвиг  $\psi_1$  – на 54 %;  $\psi_2$  – на 61 %. При использовании пенополиуретана прогиб увеличивается в 1,8 раза, сдвиг  $\psi_1$  – на 62 %;  $\psi_2$  – на 71 %.

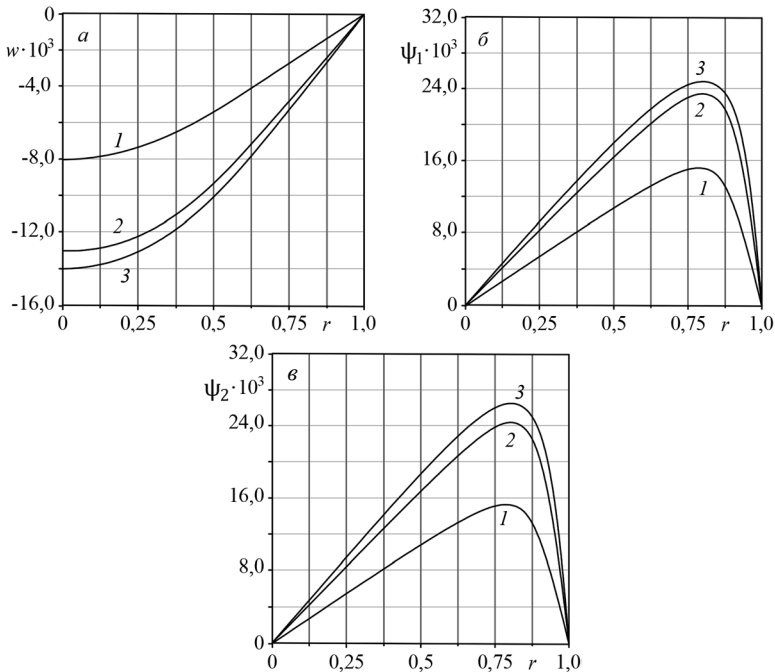


Рисунок 2 – Влияние материала нижнего заполнителя на перемещения  $w$  (а),  $\psi_1$  (б),  $\psi_2$  (в)

**Заключение.** Рассмотренная математическая модель позволяет анализировать влияние геометрической и физической несимметричности пятислойной упругой круглой пластины на ее напряженно-деформированное состояние при непрерывных и локальных кольцевых нагрузках.

*Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025».*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Zhuravkov, M. Mechanics of Solid Deformable Body / M. Zhuravkov, Y. Lyu, E. Starovoitov. – Singapore : Springer Verlag, 2023. – 317 p.
- 2 Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : Ideal Press, 2023. – 381 с.
- 3 Яровая, А. В. Строительная механика. Статика стержневых систем / А. В. Яровая. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 447 с.
- 4 Vakhneev, S. Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev , E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol. 18, is. 4. – P. 699–704.
- 5 Леоненко, Д. В. Колебания круговой трехслойной пластины под действием внешней нагрузки / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 1. – С. 49–63.

6 **Лачугина, Е. А.** Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // Теоретическая и прикладная механика. – 2023. – Вып. 38. – С. 227–233.

7 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

8 **Захарчук, Ю. В.** Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 66–75.

9 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.

10 **Нестерович, А. В.** Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 1 (42). – С. 85–90.

11 **Мовчан, А. А.** Учет нелинейности диаграммы перехода и изменения упругого модуля во внешних слоях трехслойной полосы из сплава с памятью формы и вязкоупругим внутренним слоем / А. А. Мовчан // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т. 29, № 2. – С. 272–292.

12 **Белов, П. А.** Вариационная постановка задач обратимой термомеханики для слоистых структур / П. А. Белов, С. А. Лурье // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2024. – Т. 30, № 1. – С. 101–117.

13 **Салицкий, В. С.** Изгиб защемлённой по контуру круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 209–213.

14 **Салицкий, В. С.** Изгиб круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2023. – Вып. 38. – С. 234–239.

15 **Салицкий, В. С.** Круглая пятислойная пластина под действием осесимметричной кольцевой нагрузки / В. С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 114–119.

16 **Салицкий, В. С.** Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

*V. S. SALITSKY*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **DEFORMATION OF A CIRCULAR FIVE-LAYER PLATE ASYMMETRICAL IN THICKNESS**

The boundary value problem is presented for the bending of an elastic circular five-layer plate, asymmetric in thickness, with two fillers. The deformation of the load-bearing layers satisfies Kirchhoff's hypotheses, while that of relatively thick cores satisfies the Timoshenko's hypothesis. Using the Lagrange variational method, the equilibrium equations are obtained, taking into account the work of shear stresses in the cores. A fourth-order inhomogeneous differential equation with respect to shear in one of the cores is extracted from the system. The solution to the corresponding homogeneous equation is reduced to solving two modified second-order Bessel equations. The general solution to the inhomogeneous equation is written out in its final form. An example of numerical calculation is provided.

**Keywords:** circular five-layer plate, thickness asymmetry, analytical solution, numerical results.

Получено 01.09.2025