

Здесь  $E$  – модуль Юнга;  $\mu_0$  – коэффициент Пуассона материала оболочки,  $\sigma_x, \sigma_\theta$  – напряжения в элементе оболочки;  $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$  – деформации элемента оболочки;  $\varepsilon_u$  – интенсивность деформаций;  $m$  – положительный параметр, имеющий размерность напряжения, который определяется из опытов на растяжение-сжатие.

Уравнения движения оболочки выведены аналогично [3, 6], а затем поставлена задача гидроупругости. При проведении асимптотического анализа данной задачи в подходе по [6, 7] было получено следующее эволюционное уравнение, обобщающее уравнение Шамлея:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 6|\varphi|^{1/2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} - \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \sigma_* \varphi + \sigma_{**} \varphi = 0, \quad (2)$$

где  $c_3 = \left[ \frac{3m}{4E} \right]^2 \frac{\sqrt{3}}{1+\mu_0} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/2}$ ;  $c_1 = \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{c_3}{3} \right]^{1/2}$ ;  $c_2 = \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{6} c_3 c_1$ .  $\frac{\partial u_1}{\partial \xi} = c_3 \varphi$ ,  $\eta = c_1 \xi$ ,  $t = c_2 \tau$ ,

$$\sigma = \frac{c_1}{c_2} \frac{\rho R}{\rho_0 h_0} \varepsilon^{-1/2} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{12} [(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2], \sigma_* = \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{\varepsilon^{1/2} R c_0} 2(1-2\mu_0)^2 \frac{1}{c_2}, \sigma_{**} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon^{1/2}} \frac{1}{2c_2}.$$

В (2) обозначено  $\tau = \varepsilon^{1/2} t^*$  – медленное время;  $t^* = \bar{t} c_0 / l$  – безразмерное время;  $\bar{t}$  – время,  $l$  – длина волны;  $\xi = x/l - \sqrt{1-\mu_0^2} t^*$  – «бегущая» переменная;  $u_1$  – безразмерное продольное перемещение;  $\varepsilon = h_0/R$  – малый параметр задачи;  $\varepsilon_1$  – безразмерный коэффициент демпфирования материала оболочки;  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки;  $\rho_0$  – плотность материала оболочки;  $h_0$  – толщина оболочки;  $c_0 = E/(\rho_0(1-\mu_0^2))$  – скорость звука в материале оболочки.

Уравнение (2) в дальнейшем может быть использовано для численного исследования особенностей эволюции нелинейных уединенных волн продольной деформации в рассматриваемой оболочке.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-29-00071.*

#### Список литературы

- 1 Углов, А. Л. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации / А. Л. Углов, В. И. Ерофеев, А. Н. Смирнов. – М. : Наука, 2009. – 280 с.
- 2 Кореньков, А. Н. Уединенные волны на цилиндрической оболочке с жидкостью / А. Н. Кореньков // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2019. – Т. 6, № 1. – С. 131–143.
- 3 Mogilevich, L. Waves in two coaxial elastic cubically nonlinear shells with structural damping and viscous fluid between them / L. Mogilevich, S. Ivanov // Symmetry. – 2020. – Vol. 12 (3). – Art. no. 335.
- 4 The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells / A. I. Zemlyanukhin, A. V. Bochkarev, I. V. Andrianov, V. I. Erofeev // Journal of Sound and Vibration. – 2021. – Vol. 491. – Art. № 115752.
- 5 The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells / A. I. Zemlyanukhin, I. V. Andrianov, A. V. Bochkarev, L. I. Mogilevich // Nonlinear Dynamics. – 2019. – Vol. 98 (1). – P. 185–194.
- 6 Mogilevich, L. I. Longitudinal waves in the walls of an annular channel filled with liquid and made of a material with fractional nonlinearity / L. I. Mogilevich, E. V. Popova // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. – 2023. – Vol. 31, № 3. – P. 365–376.
- 7 Эволюция уединенных гидроупругих волн деформации в двух коаксиальных цилиндрических оболочках с физической нелинейностью Шамлея / Ю. А. Блинков, Л. И. Могилевич, В. С. Попов, Е. В. Попова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2023. – Т. 16, № 4. – С. 430–444.

УДК 539.3

## К ВОПРОСУ ИНЖЕНЕРНОГО РАСЧЕТА НАПРЯЖЕНИЙ ЗУБЬЕВ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ СЛОИСТОСТИ

*В. В. МОЖАРОВСКИЙ, Д. С. КУЗЬМЕНКОВ, С. В. КИРГИНЦЕВА*

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Республика Беларусь*

В последнее время всё шире начали применяться зубчатые колеса из армированных высокопрочных пластмасс [1]. Расчет на прочность зубьев при статическом изгибе с учетом деформированности зубьев пластмассовых колес приведен в многочисленных работах. Существенными факторами, которые необходимо учитывать при расчете и проектировании зубчатых передач из

армированных волокнами пластмасс, являются перемещение, контактные напряжения и износ зубьев зубчатых колес [1–4]. Необходимо знать эффективность армирования волокнами, рассчитывать распределения нагрузки между зацепляющимися зубьями, определение фактического коэффициента перекрытия и т. д. Известно, что значительные напряжения от изгиба возникают только вблизи поверхности зуба колеса, поэтому следует армировать волокнами поверхностный слой зуба. На рисунке 1 показан зуб, армированный вдоль профиля зуба тканью на основе углеродных волокон и стеклотканью. Необходимо определить контактные напряжения и местные перемещения в зубчатом зацеплении. Контакт моделируется в виде локального сжатия двух цилиндров, радиусы которых  $R_1$  и  $R_2$  равны радиусам кривизны профилей зубьев колеса и шестерни в точке контакта. Ранее проводились исследования в этом направлении [1], но без учета фактора износа. Как и ранее, здесь при расчетах на прочность нужно различать несколько вариантов зацеплений:

- зуб шестерни контактирует с пластмассовым зубом, армированным волокнами на глубине  $h$ , жестко скреплен с основанием, армированным рубленными, хаотически расположенными волокнами (считаем, изотропное основание);
- зуб шестерни контактирует с пластмассовым зубом, армированным волокнами на глубине  $h$ , жестко скреплен с жестким основанием;
- зуб шестерни контактирует с пластмассовым зубом, армированным хаотически расположенными волокнами на глубине  $h$  (изотропная среда), жестко скреплен с жестким основанием;
- зуб шестерни контактирует с пластмассовым зубом, армированным хаотически расположенными волокнами на глубине  $h$  (изотропная среда), жестко скреплен с ортотропным основанием (волокнистый композит).

Аналогичные схемы контакта можно рассмотреть в случае замены материала, моделирующего жесткий зуб шестерни, на упругий ортотропный (изотропный) волокнистый материал под действием силовых и температурных полей в зависимости от схемы контакта, максимальные напряжения и местные перемещения определяем из графиков и диаграмм расчетных данных, приведенных в таблицах.

Следует отметить, что необходимо также рассчитать на контактную прочность зубьев шестерни из армированной пластмассы. Поверхностный слой зуба армировался, например, углеродными волокнами на глубину  $h$ , а тело зуба армировалось рубленными, хаотически расположенными стеклянными волокнами. Матрицей для армированных волокнами зубчатых колес служила эпоксидная смола. Такое сочетание материалов дает возможность выдерживать максимальные напряжения на изгибе  $\sigma_u$  и подобрать необходимую толщину  $h$  армирования, соотношение объемного числа волокон и матрицы. Для расчета данной схемы зацепления зубьев, армированного пластмассового и жесткого металлического, рассмотрим сжатие двух цилиндрических тел, радиусы которых  $R_1$  и  $R_2$  равны радиусам кривизны профилей зубьев колеса и шестерни в точке контакта. Для упрощения и наглядности методики определения допускаемых напряжений в точке контакта считаем, что один цилиндр жесткий, и так как область контакта значительно меньше радиусов цилиндров, то имеет место локальный контакт. Тогда можем моделировать данную техническую задачу как задачу о вдавливании жесткого цилиндра в ортотропную упругую полосу на упругом изотропном основании. Теоретической основой реализации поставленной задачи являются решения о контактном взаимодействии цилиндров с покрытием из ортотропного материала, которые моделируют контакт зубьев зубчатых колес. Для иллюстрации влияния анизотропии на напряжения в покрытии рассмотрим пример. На рисунке 2 представлены кривые, показывающие изменения напряженного состояния, на границе раздела «покрытие – основание» при вдавливании цилиндрического индентора при отношениях полуширины зоны контакта  $a$  к толщине покрытия  $h$  при  $a/h = 2$ ,  $x/a = 0$  для разных величин  $\gamma = E_x/E_y$ . Для упрощения расчетов при исследовании различных волокнистых композитных материалов было принято, что модуль сдвига мало изменяется, примерно равен  $G_{xy} = 5$  ГПа, а коэффициент Пуассона  $\nu = 0,27$ . Давление на поверхности покрытия принималось параболическим и единица измерения напряжений  $p = 3P/4a$ , т. е. максимальное.

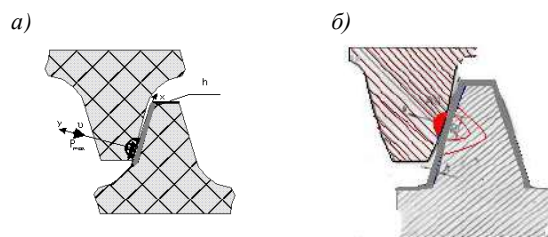


Рисунок 1 – Зуб зубчатого колеса из композита:  
 а – слой, армированный волокнами (углеродными, стекловолкнами) вдоль профиля зуба;  
 б – схема расчета при контакте зубьев

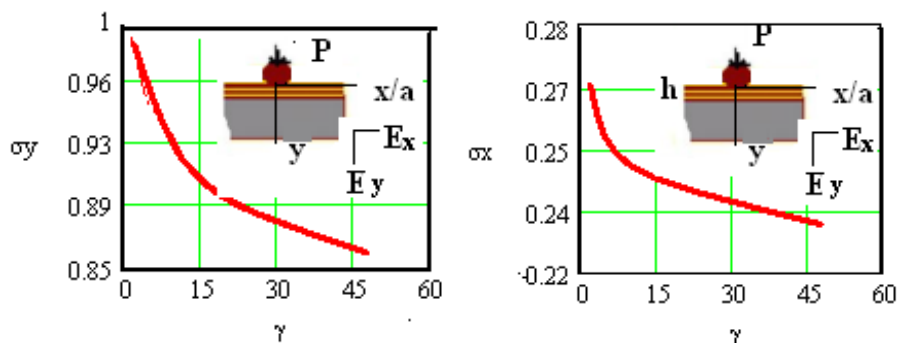


Рисунок 2 – Изменение напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  в ортотропном волокнистом покрытии  $a/h = 2$  в зависимости от отношений модулей упругости  $\gamma = E_x / E_y$

Для расчета параметров контакта при взаимодействии зубьев зубчатых колес (зона контакта, толщина износа) создана компьютерная программа, позволяющая осуществлять расчет в виде графических зависимостей и таблиц. Также разработана компьютерная программа, которую можно применять для определения напряженного состояния покрытия из композита, скрепленного с упругим основанием, в инженерных расчетах зубьев зубчатых колес.

#### Список литературы

- 1 Matkovič, S. Wear-Coefficient Analyses for Polymer-Gear Life-Time Predictions: A Critical Appraisal of Methodologies / S. Matkovič, A. Pogačnik, M. Kalin // Wear. – 2021. – P. 480–481.
- 2 Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск : Наука и техника, 1988. – 280 с.
- 3 Крагельский, И. В. Основы расчетов на трение и износ / И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Комбалов. – М. : Машиностроение, 1977. – 526 с.
- 4 Можаровский, В. В. Асимптотические зависимости расчета параметров контакта и износа зубьев зубчатых колес с покрытием из композита при контактом взаимодействии / В. В. Можаровский, Д. С. Кузьменков, С. В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 37–42.

УДК 539.4.014.13

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ОЦЕНКЕ КАЧЕСТВА ПОВЕРХНОСТИ АЛЮМИНИЕВЫХ ЗАГОТОВОК

А. К. МОЗАЛЕВСКАЯ

Иркутский государственный университет путей сообщения, Российская Федерация

Безопасность эксплуатации подвижного состава при реализации перевозочных процессов при интенсивном использовании является одним из приоритетных направлений научных изысканий [1–3]. В частности, необходимо отметить важность обеспечения качества элементов кузова грузовых вагонов, что напрямую влияет на надежность таких технических средств [4–6].

В предлагаемом докладе рассматривается применение метода конечных элементов при определении остаточных напряжений.

Особенности проведения термической обработки, заключающиеся в различной скорости остывания частей заготовки из-за градиента температуры, обуславливают возникновение остаточных напряжений, распределение которой может в приближенном виде с учетом плоской системы координат оцениваться в виде параболической зависимости, как показано на рисунке 1, где представлен частный случай линейного распределения остаточных напряжений по длине заготовки.

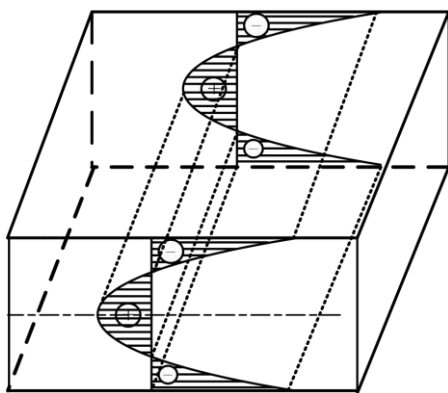


Рисунок 1 – Пространственное распределение остаточных напряжений