

8 **Gorshkov, A. G.** Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell / A. G. Gorshkov, É. I. Starovoi-tov, A. V. Yarovaya // International applied mechanics. – 2001. – Vol. 37, № 9. – P. 1196–1203.

9 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговой трехслойной пластины под действием внешней нагрузки / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 1. – С. 49–63.

10 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.

11 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // Механика композитных материалов. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120. – EDN DIPPEO.

12 **Старовойтов, Э. И.** Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э. И. Старовойтов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 3. – С. 91–98.

13 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Е. П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. – С. 45–50.

14 **Лачугина, Е. А.** Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жестким наполнителем / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – № 15. – С. 116–122. – EDN FXBAGP.

15 **Лачугина, Е. А.** Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими наполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2023. – № 16. – С. 111–116. – EDN RCCKPM.

16 **Лачугина, Е. А.** Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. – Минск : Белорус. нац. техн. ун-т, 2023. – С. 227–233. – EDN NXPOEL.

17 **Лачугина, Е. А.** Собственные частоты колебаний круговой пятислойной несимметричной по толщине пластины / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – № 17. – С. 92–99. – EDN REQQPS.

18 **Лачугина, Е. А.** Собственные колебания пятислойной круговой пластины при различных закреплениях контура / Е. А. Лачугина // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 25–30. – DOI: 10.54341/20778708_2025_1_62_25. – EDN WGDTR.

УДК 539.3

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЭНДВИЧ-СТЕРЖНЯ С НЕСЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Д. В. ЛЕОНЕНКО

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Трехслойные конструкции широко используются в инженерной практике благодаря ряду преимуществ по сравнению с однослойными. В статье [1] исследовались свободные колебания круговых металлополимерных пластин на упругом основании. В работе [2] выполнен дисперсионный анализ магнитоупругих трехслойных пластин, расположенных на основании Винклера. В статье [3] рассматриваются продольно-радиальные колебания вязкоупругой цилиндрической оболочки. Частотный анализ подобной конструкции с функционально-градиентным наполнителем представлен в [4]. Изгиб трехслойного стержня при термосиловой нагрузке рассмотрен в [5]. В развитие этой тематики в [6] показано влияние термосиловых факторов на деформирование нелинейного ступенчатого стержня. Современные подходы к анализу вынужденных колебаний отражены в статье [7], где изучаются колебания трехслойной сэндвич-пластины с пентаграфеновым наполнителем и магнитно-электроупругими внешними слоями. Практико-ориентированный подход к проблеме энергорассеяния представлен в работе [8], где разработаны рекомендации по проектированию трёхслойных балок с учетом демпфирования.

Здесь рассмотрим трехслойный симметричный по толщине стержень при действии динамической нагрузки.

В качестве кинематической используем гипотезу ломаной линии: для одинаковых тонких несущих слоев справедливы гипотезы Бернулли; для легкого несжимаемого по толщине более толстого наполнителя – гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. К внешней поверхности несущего слоя приложена динамическая нагрузка $q(x, t)$. В качестве искомой величины принимаем прогиб стержня $w(x, t)$.

Уравнения движения получим, используя вариационный принцип Гамильтона – Остроградского. В результате дифференциальное уравнение для прогиба получаем в виде

$$w_{,xxxx} + f_1 \ddot{w} = \frac{f_1}{m_1} q,$$

где f_1 , m_1 – жесткостные и инерционные характеристики стержня, запятая в нижнем индексе обозначает производную по следующей за ней координате.

Начально-краевая задача замыкается добавлением граничных и начальных условий.

Прогиб $w(r, t)$ ищем в виде разложения в ряды по системам собственных ортонормированных функций $W_n(x)$, которые удовлетворяют граничным условиям:

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x) T_n(t), \quad (1)$$

где

$$W_n(x) = \frac{1}{d_n} \left(\frac{\text{sh}(\lambda_n l) - \sin(\lambda_n l)}{\cos(\lambda_n l) - \text{ch}(\lambda_n l)} (\cos(\lambda_n x) - \text{ch}(\lambda_n x)) - \text{sh}(\lambda_n x) + \sin(\lambda_n x) \right),$$

λ_n – собственные числа, соответствующие граничным условиям закрепления.

Внешняя поперечная нагрузка представляется в виде

$$q(x, t) = m_1 \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x) q_n(t), \quad q_n(t) = \frac{1}{m_1} \int_0^l q(x, t) W_n(x) dx.$$

Функция времени $T_n(t)$ определяется выражением

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) q_n(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Коэффициенты A_n , B_n определяются из начальных условий движения:

$$A_n = \int_0^l w_0(x) W_n(x) dx, \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^l \dot{w}_0(x) W_n(x) dx,$$

где $w_0(x)$, $\dot{w}_0(x)$ – вертикальные перемещения и скорости точек центральной оси стержня в начальный момент времени ($t = 0$) соответственно.

Таким образом, прогиб в трехслойном сэндвич-стержне под воздействием динамической нагрузки определяется соотношениями (1), (2).

Проведен численный анализ полученных решений.

Список литературы

- 1 Плескачевский, Ю. М. Динамика круговых металлополимерных пластин на упругом основании. Ч. 1: Свободные колебания / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2008. – № 4 (5). – С. 48–52.
- 2 Nawaz, M. Dispersion analysis of magneto-elastic three-layered plates embedded in Winkler foundations with rotational and viscous damping effects / M. Nawaz, M. Asif, A. Alahmadi // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. – 2024. – Vol. 46. – Article 259. – DOI: 10.1007/s40430-024-04835-9.
- 3 Khudoynazarov, K. Longitudinal-radial vibrations of a viscoelastic cylindrical three-layer structure / K. Khudoynazarov // Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering. – 2024. – Vol. 22, № 3. – P. 473–484.
- 4 Vibration frequency analysis of three-layered cylinder shaped shell with effect of FGM central layer thickness / M. Ghamkhar, M. N. Naeem, M. Imran [et al.] // Scientific Reports. – 2009. – № 9. – 1566.
- 5 Starovoitov, E. I. Bending of a sandwich beam by local loads in the temperature field [Изгиб трехслойной балки локальными нагрузками в температурном поле] / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – Вып. 1. – Т. 18. – С. 69–83. – DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83.
- 6 Старовойтов, Э. И. Термосиловое деформирование ступенчатого трехслойного физически нелинейного стержня / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Инженерно-физический журнал. – 2016. – Т. 89, № 6. – С. 1608–1616.
- 7 Thermal forced vibration of magneto-electro-elastic sandwich plate with penta-graphene core / DatLinh, Tran Quan, Vu Minh Anh [et al.] // Acta Mechanica. – 2024. – Vol. 235. – P. 5273–5299. – DOI:10.1007/s00707-024-03935-w.
- 8 Hodaiei, M. A. Design guidelines for vibration energy dissipation in three-layer sandwich cantilever beams / M. A. Hodaiei, H. R. Hamidzadeh // ASME Open Journal Engineering. – 2024. – Vol. 3. – Article 031032. – DOI: 10.1115/1.4067202.