МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

# НАУЧНЫЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ В УНИВЕРСИТЕТАХ ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Гомель 2025

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

*К 120-летию академика С. А. Чунихина*

# НАУЧНЫЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ В УНИВЕРСИТЕТАХ ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Материалы
VII Международной научно-практической конференции
(Гомель, 31 октября 2025 г.)

*Под общей редакцией канд. физ.-мат. наук, доцента С. П. НОВИКОВА*

Гомель 2025

УДК 378.14:51
ББК 74.58
Н34



Рецензент –
проректор по научной работе
Белорусского государственного университета транспорта
д-р техн. наук **А. А. Ерофеев**

Н34 **Научные и методические аспекты** математической подготовки в университетах технического профиля : материалы VII Междунар. науч.-практ. конф. (Гомель, 31 октября 2025 г.) / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. ; под общ. ред. С. П. Новикова. – Гомель : БелГУТ, 2025. – 123 с.
ISBN 978-985-891-229-1

Представлены результаты работы исследователей, занимающихся вопросами математического образования студентов в современных условиях. Уделено внимание как проблемам, характерным для всех учреждений высшего образования, так и специфическим проблемам университетов технического профиля. Рассмотрены методы и подходы в решении вопросов, связанных с внедрением и функционированием инновационных технологий, пути и перспективы развития информатизации образования.

Материалы могут быть рекомендованы как преподавателям учреждений высшего образования технического профиля, так и иным исследователям, занимающимся разработкой вопросов данной тематики.

**УДК 378.14:51**
**ББК 74.58**

**ISBN 978-985-891-229-1**

## СОДЕРЖАНИЕ

УДК 512(092)

# О ЖИЗНЕННОМ ПУТИ АКАДЕМИКА СЕРГЕЯ АНТОНОВИЧА ЧУНИХИНА
(К 120-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

*Т. И. ВАСИЛЬЕВА, С. П. НОВИКОВ*
*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

Этот год отмечен знаменательным событием – 120-лететием со рождения выдающегося советского алгебраиста, академика АН БССР Сергея Антоновича Чунихина (21.09.1905 –29.10.1985). В Гомеле С. А. Чунихин написал большую часть своих научных работ по теории групп, создал гомельскую алгебраическую школу.

Сергей Антонович родился в городе Харькове 21 сентября 1905 г. Его отец был сельским врачом, который 51 год проработал в районных больницах, мать – школьная учительница.

В 1929 г. Сергей Антонович окончил Московский государственный университет. Его лекторами были такие известные математики, как О. Ю. Шмидт, Н. Н Лузин, Д. Ф. Егоров, П. С. Александров, А. Я. Хинчин, Э. Нётер и др. Участие в научном семинаре по теории чисел А. Я. Хинчина и лекции О. Ю. Шмидта приобщили Сергея Антоновича к научным занятиям. В те годы в МГУ О. Ю. Шмидт впервые прочитал курс теории групп. По воспоминаниям С. А. Чунихина [1, с. 24]: «… решение Отто Юльевича о чтении курса лекций по совершенно новой для МГУ отрасли математики, да ещё и при необязательном посещении студентами занятий, таило в себе известный риск. Но Отто Юльевич смело на него пошёл и не только с большим успехом провёл свой курс, но и нашёл среди его слушателей своих первых учеников, чем и положил начало московской алгебраической школе». Посещение этих лекций, а в дальнейшем и руководимого О. Ю. Шмидтом алгебраического семинара, оказало решающее влияние на формирование научных интересов успешного студента. По рекомендации научного руководителя О. Ю. Шмидта дипломная работа Сергея Антоновича была напечатана в журнале «Математический сборник». Несмотря на громадную занятость делами государственной важности, О. Ю. Шмидт уделял тогда много внимания воспитанию молодых алгебраистов. Сергей Антонович являлся одним из первых его аспирантов. О. Ю. Шмидт в предисловии к своему учебнику «Высшая алгебра» для заочников МГУ отметил своих наиболее выдающихся учеников А. Г. Куроша и С. А. Чунихина. Работа Сергея Антоновича «О проблемах двух классов конечной группы» по рекомендации французского профессора Жана Адамара была напечатана в годовом отчете Французской академии наук, в том же отчете, где сообщалось о крупнейшем открытии Ирен и Фредерика Жолио-Кюри искусственной радиоактивности.

В 1934 г. С. А. Чунихину было присвоено звание профессора, 2 марта 1936 г. в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР он защитил докторскую диссертацию «О подгруппах, особенно инвариантных, конечной абстрактной группы», оппонентами которой были академик О. Ю. Шмидт и член-корреспондент Б. Н. Делоне [1, с. 291]. Московский период жизни Сергея Антоновича был очень насыщенным: в 1930–1931 гг. он работал в Московском университете, в 1936–1938 гг. – в Математическом институте АН СССР, в 1933–1935 гг. – заведующим кафедрой высшей математики Тульского механического института, в 1935–1941 гг. – Московского вечернего металлургического института. За 12 лет московского периода научные исследования С. А. Чунихина касались изучения простых конечных групп методом миномиальных подстановок, а также разработки методов исследования непростых конечных групп. В частности, он обращает внимание на то, что группы Шмидта (он их называл группами типа $S$) и их обобщения могут служить инструментом для исследования подгруппового строения. В 1930 г. в работе [2] он сформулировал теорему о непростоте конечной группы с тремя классами сопряженных элементов, порядки которых взаимно просты. В 1938 г. он независимо от Ф. Холла в работе [3] доказал разрешимость конечной группы, имеющей холловы подгруппы любого возможного порядка.

В связи с началом Великой Отечественной войны и эвакуацией 1941–1953 годы жизни С. А. Чунихина связаны с Томском. Здесь Сергей Антонович заведовал кафедрой высшей математики в Томском электромеханическом институте инженеров железнодорожного транспорта (в настоящее время – Национальный исследовательский Томский политехнический университет), параллельно работал в Томском университете, где он был преемником такого известного ученого, как Ф. Э. Молин. В 1946 г. С. А. Чунихин был назначен заведующим кафедрой алгебры и теории чисел ТГУ. Под его научным руководством в 1952 г. И. Х. Беккер защитил дипломную работу

«О центроидах групп». В дальнейшем И. Х. Беккер стал основателем томской алгебраической школы по абелевым группам, получившей признание в Советском Союзе и за рубежом.

В томский период С. А. Чунихин ясно очерчивает программу изучения *p*-свойств для фиксированного простого числа *p*. В 1947 г. в работе [4] он впервые вводит понятие *p*-разрешимой и *p*-сверхразрешимой конечной группы и устанавливает, что коммутант *p*-сверхразрешимой конечной группы *p*-нильпотентен. Он ставит задачу обобщения *D*-свойств Ф. Холла о конечных разрешимых группах. В 1949 г. он публикует большую статью [5], где разрабатывает концепцию П-свойств (П – некоторое фиксированное множество простых чисел). Во втором издании Большой Советской Энциклопедии в статье «Группы» (раздел VII. Развитие теории групп в Советском Союзе) результаты о П-свойствах конечных групп С. А. Чунихина и теорема А. А. Кулакова 1931 г. о числе подгрупп *p*-группы были отмечены как наиболее существенные, относящиеся к конечным группам.

В 1953 г. в Гомеле был образован Белорусский институт инженеров железнодорожного транспорта (БИИЖТ). О. Ю. Шмидт рекомендовал своего талантливого ученика С. А. Чунихина на должность заведующего кафедрой высшей математики БИИЖТа, на которую приказом ГУУЗа МПС СССР № 763 от 4 сентября 1953 г. Сергей Антонович был назначен. В этой должности С. А. Чунихин проработал до 1960 г. На кафедре С. А. Чунихиным были заложены основы высокого уровня математической подготовки студентов, позволяющие успешно овладевать общетехническими и специальными дисциплинами. Преподавание высшей математики велось на межпредметной основе, и методика такого изложения постоянно совершенствовалась. Образность и теплота изложения, столь приближающие к слушателю самые абстрактные понятия, забота о расчленении научных рассуждений на фрагменты, доступные восприятию студента, строгая систематичность раскрытия учебного материала, глубокая убежденность во внутреннем единстве и неистощимости математических средств познания и живой философский интерес ко всему многообразию жизни – вот основные черты С. А. Чунихина как преподавателя высшей школы. Своим примером он учил и воспитывал молодых преподавателей кафедры.

Среди первого преподавательского состава кафедры было много учеников С. А. Чунихина – выпускников руководимой им аспирантуры, большинство из которых сразу же после окончания аспирантуры успешно защитили кандидатские диссертации (Е. Н. Торопов, С. А. Сафонов, В. П. Громыко, С. А. Русаков, Ж. Е. Буховец). Е. Н. Торопов, Ж. Е. Буховец, С. А. Русаков в разное время возглавляли кафедру высшей математики.

На научных семинарах, руководимых С. А. Чунихиным, много внимания уделялось обсуждению результатов по алгебре, заслушивались доклады по методике и истории математики. Научным направлением исследований

С. А. Чунихина была теория конечных групп. Ему удалось пополнить ее рядом новых понятий и результатов, вошедших в основной фонд этой теории. Во время работы зав. кафедрой им был опубликован ряд научных работ по $\pi$-свойствам конечных групп и универсальным методам их факторизации, которые оказали одно из решающих действий на формирование научных интересов молодых преподавателей. Научный семинар кафедры, руководимый С. А. Чунихиным, послужил основой гомельской алгебраической школы, ныне широко известной алгебраистам как нашей страны, так и стран дальнего и ближнего зарубежья.

В связи с открытием в Гомеле лаборатории теории конечных групп ИМ и ВТ АН БССР, по решению Президиума АН БССР в феврале 1960 г. С. А. Чунихин был откомандирован в порядке перевода на основную работу в АН БССР. С 1960 г. по 1985 г. он заведовал лабораторией конечных групп Института математики (Гомельское отделение), одновременно в 1964–1969 гг. работал заведующим кафедрой алгебры Гомельского педагогического института, в 1978–1985 гг. – заместителем директора Института математики АН БССР по Гомельскому отделению. В 1956 г. С. А. Чунихин был избран членом-корреспондентом, а в 1966 г. – академиком АН БССР.

В 1968 г. Сергей Антонович был удостоен звания «Заслуженный деятель науки БССР». Гомельский период жизни и деятельности С. А. Чунихина был самым продолжительным и плодотворным. Большинство своих научных трудов Сергей Антонович написал в Гомеле. Его вышедшая в 1964 г. монография «Подгруппы конечных групп» была переведена в 1969 г. на английский язык.

В гомельский период тематика научных исследований С. А. Чунихина концентрировалась вокруг расширения теоремы Ф. Холла о силовских системах конечных разрешимых групп на произвольные конечные группы и взаимосвязи между подгрупповым строением конечной группы и подгрупповым строением ее главных факторов. Работа над ними привела С. А. Чунихина к постороению теории индексиалов. Подход С. А. Чунихина заинтересовал Виландта, который тоже начал вести исследования в этом направлении. В двухтомную монографию М. Судзуки «Теория групп» (1986) теоремы Чунихина и Виландта вошли с полными доказательствами. Открытие в работах С. А. Чунихина новых общих закономерностей в теории конечных групп было большой неожиданностью и носило принципиальный характер, свидетельствуя в то же время о тонкой научной интуиции их автора. В [6] приведен список научных работ С. А. Чунихина, литература о нем и отзывы о его научной деятельности.

Интенсивную научную работу Сергей Антонович успешно сочетал с подготовкой специалистов высокой квалификации и воспитал целую плеяду кандидатов наук. Его ученики Л. А. Шеметков, В. А. Ведерников, Э. М. Пальчик, А. В. Романовский, С. А. Русаков стали докторами наук, а

Леонид Александрович Шеметков был избран членом-корреспондентом АН БССР (с 1993 г. – Национальная академия наук Беларуси).

Кроме кафедры высшей математики в БИИЖТе С. А. Чунихин основал кафедру алгебры и теории чисел (в настоящее время – кафедра алгебры и геометрии) в педагогическом институте (в настоящее время – Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины), создал академическое учреждение (Гомельское отделение Института математики АН БССР) и в течение ряда лет был его руководителем. В 1968 г. и в 1975 г. С. А. Чунихин возглавлял оргкомитеты IX и XIII Всесоюзных алгебраических коллоквиумов, проходивших в Гомеле.

Сергей Антонович неоднократно избирался депутатом Гомельского областного и городского Советов депутатов трудящихся, выступал в печати и перед студенческой аудиторией по вопросам развития науки и образования. Заслуги С. А. Чунихина отмечены орденами Дружбы народов (1975), «Знак Почета» (1954, 1985), медалями и почетными грамотами Верховного Совета БССР. Более подробную информацию о С. А. Чунихине можно найти в [7–15].

В Гомеле мемориальная доска с барельефом академику, профессору Чунихину Сергею Антоновичу была установлена на здании Института механики металлополимерных систем им. В. А. Белого (ул. Кирова, 32а) в рамках состоявшейся 19–22 сентября 1995 г. в БелГУТе международной конференции «Алгебра и кибернетика», специально посвящённой его памяти. В октябре 2005 г. в Гомеле была проведена Международная конференция «Классы групп и алгебр», посвященная 100-летию со дня рождения С. А. Чунихина. Большое число участников конференции из Беларуси, дальнего и ближнего зарубежья приняло участие в знак уважения памяти выдающегося математика-алгебраиста. В 1988 г. в БИИЖТе (ныне Белорусском государственном университете транспорта) была учреждена персональная стипендия имени академика С. А. Чунихина, которой решением Совета университета поощряются обучающиеся за особые успехи в изучении физико-математических дисциплин и научно-техническом творчестве.

**Список литературы**

1 Отто Юльевич Шмидт в истории XX века и развитие его научных идей / под ред. академика А. О. Глико. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 680 с.

2 **Tchounikhin, S. A.** Simplicite du groupe fini et les ordresde ses classes d'elements conjuguens / S. A. Tchounikhin // Comp. Rend. Acad. Sci. (Paris). – 1930. – Vol. 191. – P. 397–399.

3 **Чунихин, С. А.** О разрешимых группах / С. А. Чунихин // Известия НИИ математики и механики при Томском гос. ун-те им. В. В. Куйбышева. – 1938. – Т. 2. Вып. 2. – С. 220–221.

4 **Чунихин, С. А.** О *p*-свойствах групп / С. А. Чунихин // ДАН СССР. – 1947. – Т. 55. – С. 481–484.

5 **Чунихин, С. А.** О П-свойствах конечных групп / С. А. Чунихин // Матем. сб. – 1949. – Т. 25 (67), № 3 – С. 321–246.

6 **Монахов, В. С.** Сергей Антонович Чунихин / В. С. Монахов // Библиогр. указ. – Гомель : ГГУ им Ф. Скорины, 1995. – 50 с.

7 **Круликовский, Н. Н.** Из истории развития математики в Томске / Н. Н. Круликовский. – Томск : Томский государственный университет, 2006. – 174 с.

8 **Гриншпон, С. Я.** Заметки об истории кафедры алгебры Томского государственного университета / С. Я. Гриншпон, П. А. Крылов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2011. – № 3 (15). – С. 127–138.

9 Сергей Антонович Чунихин (к 60-летию со дня рождения) / А. И. Мальцев, С. А. Сафонов, С. Н. Черников, Л. А. Шеметков // Успехи мат. наук. – 1967. – Т. 22, № 2 (134). – С. 189–197.

10 Конечные группы : сб. науч. работ / под ред. Я. Г. Берковича, С. А. Русакова, С. А. Сафонова [и др.]. – Минск : Наука и техника, 1966. – 192 с.

11 Сергей Антонович Чунихин (к 70-летию со дня рождения) / Л. А. Шеметков, А. П. Кохно, М. И. Кравчук [и др.] // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1975. – № 5. – С. 129–130.

12 **Шеметков, Л. А.** Сергей Антонович Чунихин (1905-1985) / Л. А. Шеметков. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1996. – № 3. – С. 6–7.

13 **Шеметков, Л. А.** Слово о Чунихине / Л. А. Шеметков. // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2006. – № 3 (36). – С. 4–7.

14 **Крылов, П. А.** К 110-летию со дня рождения Сергея Антоновича Чунихина / П. А. Крылов, А. Р. Чехлов // Вестник Томского государственного университета. – 2016. – № 1 (39). – С. 115–124.

15 О становлении и развитии исследований по алгебре в Гомельском государственном университете: история, результаты и перспективы / А. Ф. Васильев, В. С. Монахов, В. Г. Сафонов, А. Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 7–15.

УДК 517.2+531

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСА ФИЗИКИ

*Н. А. АХРАМЕНКО, А. П. ПАВЛЕНКО, И. И. ПРОНЕВИЧ*
*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

Очевидным является тот факт, что для осуществления инженерной деятельности необходима база определенных знаний и умений. Основой общеобразовательных знаний являются математика и физика. Для успешного обучения в учреждении высшего образования студент должен иметь необходимые базовые знания. Между тем в последние годы наблюдается большой разрыв между имеющимся уровнем подготовки по математике и физике и тем, который требуется для успешного обучения студента.

Особо остро эта проблема стоит при обучении студентов не очень востребованных специальностей, где конкурс небольшой, а то и вовсе отсутствует. Баллы у большинства абитуриентов по результатам централизованного тестирования низкие, математическая подготовка и подготовка по физике совсем низкие. Особую озабоченность вызывает недостаточность знаний по элементарной математике. Уровень подготовки студентов неоднородный. Возможно следует уделить дополнительное внимание и время, чтобы подтянуть отстающих и по возможности выровнять уровень подготовки студентов первого курса. Последнее упирается в недостаток аудиторных часов, отводимых на математическую подготовку и подготовку по физике, которая за последнее время ощутимо сократилась.

Также следует отметить, что при изложении материала по физике приходится тратить дополнительное время, чтобы учить студентов элементарной математике. Эти знания должны были быть заложены в школе, однако одной из причин их недостаточности, возможно, является неоднократно проводимые реформы школьного образования.

Изучение физики тесно связано с изучением дисциплин математического профиля. Поэтому для понимания и усвоения материала из разделов физики важно, чтобы студент обладал необходимыми познаниями в области математики.

Кроме того, что на сегодняшний день у студентов наблюдается весьма низкий уровень познаний в области математики, по ряду специальностей изучение физики начинается с первого семестра. При изучении физики и математики с первого семестра возникает ситуация, когда понятия, используемые в физике, не были еще рассмотрены при изучении математики.

Далее рассмотрим некоторые моменты при изложении курса общей физики в привязке к изложению необходимого материала в математике.

Одним из первых понятий в физике является понятие мгновенной скорости. При этом студенты, в общем-то, уже должны были бы знать, что такое производная. Однако к рассмотрению производной в математике еще и не приступали. В данном случае понятие «скорость» приходится рассматривать с учетом этого обстоятельства. Так, вначале определяющую формулу записываем в виде

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

где $\Delta \vec{r}$ – изменение радиус-вектора $\vec{r}$ материальной точки за момент времени $\Delta t$.

Далее рассматривается этот предел при стремлении к нулю промежутка времени $\Delta t$ и говорится, что такой предел является производной от радиус-вектора $\vec{r}$ по времени $t$ и записывается в виде [1, 2]

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

С введением понятия скорости вводится понятие импульса, как произведение массы на скорость

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

При этом вспоминаем, что понимается под произведением вектора на число и что такое коллинеарные векторы. Выясняется, что многие об этом ранее ничего не слышали.

Понятие импульса является основным при изучении реактивного движения тела. Реактивное движение заключается в том, что тело отбрасывает часть своей массы в одном направлении с некоторой скоростью, получая импульс в противоположном направлении, который и вызывает движение самого тела (рисунок 1). Например, на рисунке 1, *а* ракета имела скорость $v$, а на рисунке 1, *б* ракета после отделения части $\Delta m$ имела скорость $v + \Delta v$.

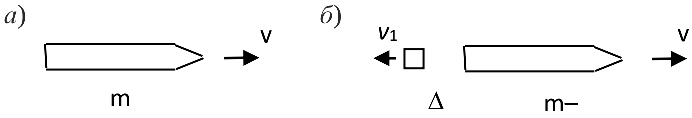


Рисунок 1

В результате рассмотрения реактивного движения в случае отсутствия внешних сил получаем соотношение

$$\Delta v = -u\frac{\Delta m}{m}.$$

При переходе к бесконечно малым величинам можно записать

$$dv = -u\frac{\Delta m}{m}.$$

Далее говорится, что получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. При этом, соответственно, по разделам математики такой материал еще не рассматривался. В этом случае приходится постулировать, что решение уравнений такого типа имеет вид

$$v = -u\ln m + C,$$

где $C$ – произвольная постоянная, которая находится из начальных условий. Понятие начальных условий при решении таких уравнений также не рассматривалось в соответствующих разделах по математике.

Соответственно поясняется, что из условия равенства нулю скорости в начальный момент времени (когда масса была равна $m_0$) можно записать

$$0 = -u\ln m_0 + C.$$

Найденную из последнего соотношения произвольную постоянную $C$ подставляем в выражение для скорости, в результате чего получим выражение

$$v = u\ln m_0 - u\ln m = u\ln\frac{m_0}{m}.$$

Операции с логарифмами (сумма, разность) также имеют затруднения у некоторых студентов.

При рассмотрении понятия «работа» сталкиваемся со скалярным произведением векторов

$$dA = \vec{F}d\vec{r},$$

при рассмотрении понятия «момент силы» сталкиваемся с векторным произведением векторов и ряд студентов не могут отличить скалярное произведение от векторного.

Изучение дисциплины физика, а также других дисциплин сталкивается и с такой проблемой, как отсутствие интереса со стороны студентов к обучению. Встречаются случаи нежелания некоторых студентов вообще что-либо делать. Поэтому возникает сложность в том, чтобы хоть как-то заинтересовать студентов в обучении. Если же снижать требования к уровню подготовки, то это приводит к тому, что заинтересованность студентов в обучении соответствующим образом снижается.

### Список литературы

1 **Детлаф, А. А.** Курс физики : учеб. пособие для втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – 4-е изд., испр. – М. : Высш. шк. , 2002. – 718 с.

2 **Трофимова, Т. И.** Курс физики : учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – 17-е изд., стер. – М. : Академия, 2008. – 560 с.

УДК 378.147-028.27

## ОТ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ОБУЧЕНИЕМ К АДАПТИВНЫМ ОБУЧАЮЩИМ СИСТЕМАМ

*Н. В. КНЯЗЮК, О. В. РЫКОВА*
*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск*

Современное информационное общество предъявляет новые требования к образовательному процессу [1]. Объем информации в мире постоянно увеличивается, а это означает, что процесс ее усвоения становится все более затруднительным. Развитие информационных технологий позволило внедрить в учебный процесс автоматизированные системы управления обучением (англ. Learning Management Systems, LMS). В БГУИР успешно функционирует система электронного обучения (СЭО) на базе системы LMS Moodle. Она используется для организации и проведения дистанционных занятий и консультаций в формате видеоконференции, разработки и распространения учебных материалов, осуществления контроля знаний, сбора статистики об успеваемости. В 2020/21 учебном году преподавателями кафедры высшей математики БГУИР совместно с Центром развития дистанционного образования БГУИР созданы мультимедийные электронные образовательные ресурсы (ЭОР) нового поколения по учебным дисциплинам «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» и «Математический анализ» для студентов всех форм обучения [2]. Электронные материалы по этим дисциплинам размещены в СЭО БГУИР. Использование ЭОР позволило структурировать процесс изучения дисциплин «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» и «Математический анализ», управлять скоростью и глубиной изучения материала, обеспечило более высокий уровень индивидуализации обучения.

Безусловно, использование СЭО имеет положительный результат в процессе обучения. Однако обратим внимание и на некоторые проблемы. Возможность тестирования знаний студентов – неотъемлемая часть LMS. Преподаватели активно создают и используют тесты для того, чтобы оценить уровень подготовки студентов на данный момент времени либо для самоподготовки студентов. Заметим, что всем обучающимся предлагаются одинаковые по уровню сложности задания, устанавливаются единые сроки выполнения и единые критерии оценки вне зависимости от уровня подготовки. Результаты тестирования не всегда могут указать, какие именно пробелы есть в знаниях студентов, следовательно, оценка знаний будет необъективной. Еще одной проблемой является отсутствие персонализации обучения. СЭО предлагает стандартные материалы, которые не адаптированы под индивидуальные потребности и уровень знаний обучающихся. Хорошо подготовленные и мотивированные студенты быстро продвигаются в изучении курса, а более слабым студентам нужна поддержка преподавателя, дополнительное время, более детальный разбор заданий, большое количество простых задач для самоподготовки.

В настоящее время автоматизированные системы управления обучением претерпевают значительную трансформацию. Для построения гибкой системы обучения, позволяющей подстроиться под потребности и индивидуальные особенности студентов, учитывающей динамику усвоения материала, возникла необходимость в интеллектуальной составляющей LMS. Одним из перспективных направлений в образовании является создание и внедрение адаптивных обучающих систем, использующих методы анализа данных, искусственного интеллекта и цифровых образовательных ресурсов. Особенно это актуально для естественно-научных и математических дисциплин, где обучение предполагает поэтапное формирование понятийного аппарата, развитое логическое мышление и системный подход к решению задач.

Образовательные механизмы, на основе которых строятся адаптивные обучающие системы, основаны на персонализированном подходе к обучению. Необходимо наличие следующих элементов: 1) индивидуальный учебный план, учитывающий цели обучающегося; 2) диагностика, нацеленная на выявление пробелов и сильных сторон обучающегося; 3) индивидуальный профиль с указанием подходящего учебного стиля; 4) избыточное количество заданий разных уровней сложности [3]. По результатам тестирования адаптивная обучающая система сама должна определять последовательность изучения тем и предлагать отработку определенного навыка. Адаптивные обучающие системы непрерывно отслеживают и анализируют прогресс обучения, оценивают активность и вовлеченность обучающихся в учебный процесс через мониторинг частоты посещений платформы, времени, затраченного на выполнение заданий, участие в форумах и дискуссиях.

Таким образом, применение адаптивных обучающих систем позволяет формировать гибкую, эффективную и мотивирующую образовательную среду, соответствующую задачам подготовки высококвалифицированных специалистов.

### Список литературы


1 О Концепции развития системы образования Республики Беларусь до 2030 года : постановление Совета Министров Респ. Беларусь от 30 нояб. 2021 г. № 683 // Нац. правовой Интернет-портал Респ. Беларусь. – URL : https://pravo.by/document/?guid=12551&p0= C22100683&p1 =1&p5=0 (дата обращения: 15.09.2025).

2 Создание и использование электронного образовательного ресурса «Высшая математика» для реализации модели смешанного обучения студентов БГУИР / О. Н. Малышева, Е. А. Баркова, Н. В. Князюк [и др.] // Математическая подготовка в университетах технического профиля : непрерывность образования, преемственность, инновации : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 5–6 нояб. 2020 г. / Белорус. гос. ун-т транспорта; редкол. : Ю. И. Кулаженко [и др.]. – Гомель : БелГУТ, 2020. – С. 102–105.

3 **Кречетов, И. А.** Принципы реализации технологии адаптивного обучения / И. А. Кречетов // Современное образование : проблемы взаимосвязи образовательных и профессиональных стандартов : материалы Междунар. науч.-метод. конф., 28–29 янв. 2016 г., Томск : Изд-во ТУСУРа. – 2016. – С. 116–118.



УДК 378.147


## О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ ХИМИКОВ-ТЕХНОЛОГОВ


*Е. В. КОВАЛЁВА[1], И. В. ГАРИСТ[2], В. Э. ГАРИСТ[2]*

*[1]Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова, Республика Беларусь*

*[2]Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, г. Могилев*


Хорошо известно, что качественное образование будущего инженера предполагает разумный баланс теории и практических навыков. В частности, иллюстрация теоретического материала примерами из профильной предметной области дополнительно мотивирует изучение и позволяет глубже понять материал.

Курс линейной алгебры (в рамках курса высшей математики) в УО БГУТ для студентов всех специальностей изучается на протяжении 1-го семестра. Кроме стандартных заданий, связанных с матричной алгеброй и решением абстрактных систем линейных уравнений различными методами, студентам были предложены задания из [1, с. 327], связанные с химическим профилем специальности и опирающиеся на изучаемый математический аппарат.

Рассмотрим множество веществ $\{V_i\}$, $i=1,\ldots,l,$ которые могут вступать в $k$ реакций друг с другом. С точки зрения математики протекающие реакции описываются линейными уравнениями вида $\sum\limits_{j=1}^{p} s_{ij}V_j = \sum\limits_{j=p+1}^{i} \overline{s_{ij}}V_j$, $i=1,\ldots,k,$ образующими систему линейных уравнений. Коэффициенты системы $s_{ij}$ характеризуют количественно пропорции вступающих в реакцию веществ, а коэффициенты $\overline{s_{ij}}$ характеризуют количественно пропорции получающихся в результате этой реакции веществ. Такие и уравнения, и коэффициенты системы называются стехиометрическими. Очевидно, что система линейных уравнений однородная: $\left\{\sum\limits_{j=1}^{i} s_{ij}V_j = 0,\ i=1,\ldots,k.\right.$ С этой системой связаны стехиометрическая матрица $S=\begin{pmatrix} s_{11} & \ldots & s_{1i} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{k1} & \ldots & s_{ki} \end{pmatrix}$ и матрица веществ $V=\begin{pmatrix} V_1 \\ \ldots \\ V_i \end{pmatrix}$. В свою очередь, матрица веществ $V=\begin{pmatrix} V_1 \\ \ldots \\ V_i \end{pmatrix}$ представляется в виде $\begin{pmatrix} V_1 \\ \ldots \\ V_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$. Матрица $\begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$ характеризует набор атомов, из которых состоят вещества $V_i$, $i=1,\ldots,l,$ а атомная матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix}$ имеет своими элементами количества таких атомов в веществе. При этом фактическое поведение смесей опирается на независимые реакции, число которых связано с решением ещё одной однородной системы: $A^T \cdot S = 0$. От ранга $r$ атомной матрицы $A$ зависит максимальное число независимых реакций в смеси из $l$ веществ (стехиометрическое правило Гиббса). Другими словами, продуктивное описание химических реакций завязано на широком использовании понятий, теории и методов линейной алгебры, в частности теории матриц.

При нахождении нетривиальных решений однородных систем линейных уравнений важно найти удобное для этих решений описание. При этом решение систем линейных уравнений с применением компьютерных технологий не только помогает студенту глубже понять взаимосвязи и технику матричного анализа, но и позволяет контролировать правильность вычислений «вручную». Проиллюстрируем (рисунок 1) эти положения на примерах конкретных химических задач в системе компьютерной математики (СКМ) SMath Studio [2]. О причинах выбора именно этой СКМ можно посмотреть в [3].

$$V := \begin{bmatrix} \text{"CH\_4"} \\ \text{"CH\_2 O"} \\ \text{"O\_2"} \\ \text{"H\_2 O"} \end{bmatrix} \quad a := \begin{bmatrix} \text{"H"} \\ \text{"C"} \\ \text{"O"} \end{bmatrix} \quad A := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{T} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{rank}(A) = 3$$

Рисунок 1 – Составление атомной матрицы и матрицы системы

Однородная система с матрицей $A^T$ имеет нетривиальные (четырёхкоординатные) решения. Найдём их, опираясь на возможности СКМ SMath Studio (рисунок 2).

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left( \left( -1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \cdot x4 \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot x4 \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Рисунок 2 – Решение СЛУ (при свободной переменной $x_4 = 1$)

Интерпретация полученного решения – следующее уравнение химической реакции: $CH_4 + CH_2O - O_2 + H_2O = 0$ или $CH_4 + O_2 = CH_2O + H_2O$. Матрица (на основе решения) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ – стехиометрическая.

Рассмотрим (рисунок 3) более громоздкую ситуацию с двумя свободными переменными.

$$V := \begin{bmatrix} \text{"CH\_3 OH"} \\ \text{"CO"} \\ \text{"H\_2"} \\ \text{"CO 2"} \\ \text{"H\_2 O"} \end{bmatrix} \quad a := \begin{bmatrix} \text{"H"} \\ \text{"C"} \\ \text{"O"} \end{bmatrix} \quad A := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{T} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \operatorname{rank}(A) = 3$$

Рисунок 3 – Составление атомной матрицы и матрицы системы

Однородная система с матрицей $A^T$ имеет нетривиальные (пятикоординатные) решения. Найдём их, обращаясь к СКМ SMath Studio. Выразим базисные переменные через свободные (рисунок 4).

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right)^{-1} \cdot (-1) \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x1 + \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right)^{-1} \cdot (-1) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x1 + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot x5$$

Рисунок 4 – Выражение базисных переменных через свободные

Выпишем далее (рисунок 5) пятикоординатные решения при конкретных значениях свободных переменных $x_1 = 0;\ x_5 = 1;$ и $x_1 = 1;\ x_5 = 0$:

$$resh(x1;\, x5) := \begin{bmatrix} x1 \\ \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x1 + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot x5\right)_1 \\ \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x1 + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot x5\right)_2 \\ \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x1 + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot x5\right)_3 \\ x5 \end{bmatrix} \quad resh(0;\, 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad resh(1;\, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Рисунок 5 – Частные решения в явном виде

Стехиометрическая матрица формируется из полученных решений: $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Интерпретация: $\left[\begin{array}{l} CO_2 + H_2 = CO + H_2O \\ CO + 2H_2 = CH_3OH \end{array}\right.$.

## Список литературы


1 **Скатецкий, В. Г.** Математические методы в химии : учеб. пособие для студентов вузов / В. Г. Скатецкий, Д. В. Свиридов, В. И. Яшкин. – Минск : ТетраСистемс, 2006. – 368 с.

2 Официальный сайт программы SMath Studio. – С.-Петербург, 2006–2025. – URL : https://smath.info/ru-RU (дата обращения : 02.09.2025).

3 **Гарист, В. Э.** Элементы аналитической геометрии в системах компьютерной математики / В. Э. Гарист // Преподавание математики в высшей школе и работа с одарёнными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара, 18 февр. 2021 г., г. Могилёв / Бел.-Рос. ун-т. – Могилёв, 2021. – С. 35–37.

УДК 378.147:51

# ОБ УЛУЧШЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

*А. И. МИТЮХИН*[1], *В. В. ШУЛЬГОВ*[2]

[1]*Институт информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, г. Минск*

[2]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск*

Постепенный переход к технологиям Индустрии 4.0, начавшийся в конце XX столетия, усиливает значение математики как инструмента для поиска инновационных решений в технологиях [1], понимание новых текущих технических проблем в различных отраслях индустрии. Развитие современных цифровых технологий также опирается на многие разделы математики, специальные быстрые вычислительные алгоритмы [2] и пр. В связи с этим возникает проблема более эффективного совершенствования математического образования инженеров. В конечном итоге нерешенные проблемы сказываются на качестве обучения в техническом университете. Определим и исследуем базисные причины и проблемы, влияющие на качество математического обучения в контексте цифровой трансформации.

*Проблемы математического образования инженеров*. Отчасти проблемы можно объяснить на основе следующих утверждений.

1 Переход на программы бакалавриата и магистратуры, когда неизбежно сокращаются часы по математике на первой ступени высшего образования.

2 Опыт показывает, что проблемой математического образования является и то, что учебный материал (лекции, практические занятия и др.) по инженерным специальностям во многих технических университетах имеет абстрактный характер и сложен для понимания. Абстрактный характер лекционных материалов, математических определений, задач, упражнений, не связанных с конкретными техническими прикладными примерами, способствует тому, что материал быстро забывается многими студентами. Даже хорошо подготовленные студенты считают учебный процесс по математике сложным.

3 При сравнении университетской и школьной систем обучения математике, очевидно, что занятия в университете проходят в более высоком темпе. Если студенты не работают дополнительно самостоятельно над базовыми разделами, часто возникают трудности с пониманием простых математических определений.

4 Школьная математика в первую очередь связана с изучением вычислительных процедур. Эти процедуры, как правило, не обосновываются и не доказываются. Однако в университетской математике именно это является важным моментом: необходимо понимать, когда и почему, какую процедуру (вычислительный алгоритм) можно использовать, а когда нет. Например, с точки зрения оценки вычислительной сложности алгоритма (количества выполняемых основных операций).

5 Сама природа математики представляет собой сложность, поскольку математика и прикладные дисциплины, использующие математику, требуют последовательного подхода к ее изучению и опираются на ранее приобретенные навыки.

6 Преподавание предметно-ориентированной математики с содержанием профиля технического университета сопряжено с дополнительной сложностью, связанной с неизбежным влиянием цифровой трансформации индустрии на систему образования. В связи с этим университетская математика становится основополагающей дисциплиной для специальных дисциплин.

Из рассмотренного выше следует, что концепция обучения математике в техническом университете должна быть интегрирована в цифровую трансформацию и может осуществляться на основе следующих подходов.

*Ориентирование математического образования на конкретные потребности Индустрии 4.0.* Уже на уровне *программ бакалавриата по математике в технических университетах должна осуществляться основательная подготовка как по фундаментальным темам математики, так и по специальным темам, которые затем углубляются на магистерских программах* [3].

Ориентация на производство в виде киберфизических систем (заводы-роботы) [4] требует внедрения новых подходов в организации математического образования по всему спектру технических специальностей. При этом внедрение нового в образование усложняется тем, что современные технологи основаны не только на фундаментальных науках, но и на сравнительно сложных прикладных математических науках [5]. В качестве примера можно привести такие прикладные науки как «Теория информации» и «Мехатроника». Фактически научные и практически достижения в области теории информации и мехатроники в настоящее время сформировали современную автоиндустрию формата 4.0 в Германии, где интеллектуальные производственные цеха автоматизированы посредством использования роботов. В условиях, когда идет быстрое внедрение новых технологических идей, математическая теория, можно сказать, стоит за практикой. На математических кафедрах (факультетах) технического университета должны быть дисциплины прикладной математики по направлению той или иной специальности. Такие дисциплины служат основой для получения базового, практического и современного математического образования по специальным инженерным дисциплинам. Уже во время учебы студенты технического университета должны иметь возможность разобраться на математическом уровне с современными технологиями по профилю университета, уметь собирать, анализировать и интерпретировать математические данные при решении конкретных инженерных задач, оптимизации технологических процессов и пр.

*Преподавание по профилям.* Математика должна преподаваться по профилям технического университета. В этом случае выпускники получают знания и основные профильные квалификационные навыки не только области, например, компьютерного проектирования электронных схем, но и знания по математике как науке о данных и машинного обучения, без которого не обходится стадия разработки практически любой технологии с цифровым наполнением. В качестве примера можно привести один из разрабатываемых профилей «Алгебра, теория преобразований и алгоритмы быстрых вычислений» на кафедре физико-математических дисциплин ИИТ БГУИР. В рамках технической специализации с помощью названного профиля углубляются и расширяются математические знания в области алгебры, дискретной математики, координатных преобразований и т. д. Отличительными особенностями рассматриваемой образовательной математической программы являются междисциплинарность и прикладная актуальность по информационным направлениям, связанным с технологиями искусственного интеллекта для радиоэлектронных систем. Профиль направлен на то, чтобы вооружить студентов необходимыми навыками и компетенциями в рамках специальности «Компьютерная инженерия» с целью внедрении инженерных инноваций в новые разработки и различные секторы производства. Кроме того, эта профильная программа направлена на изучение математического моделирования технических и научных проблем и базовую подготовку к основной прикладной технической дисциплине. В данном случае – дисциплине «Распознавание образов на основе искусственного интеллекта». В результате уже на уровне магистратуры студенты получают конкретный опыт решения промышленно-технических задач посредством математического моделирования.

*Техническая математика.* Профильные разделы математики в западных (в частности, немецких) технических университетах называют «Техническая математика». Содержание данной дисциплины должно соответствовать учебным программам для конкретной специальности. Следует отходить от практики, когда кафедра математики предлагает содержание по прикладной (технической) математике практически одинаковое для всех специальностей технического университета. Очевидно, математическое наполнение, например, специальности «Нано- и микроэлектроника» должно значительно отличаться от специальности «Радиосистемы и радиотехнологии». Подход обучения на основе такого понимания математической дисциплины в техническом университете позволяет решать конкретные технические задачи с помощью компьютерных инженерных приложений типа Matlab. Это означает, что на занятиях по дисциплине «Техническая математика» получаемые математические представления и результаты должны представляться в виде компьютерных программ, которые используются для решения разных технических задач. При этом математические знания укрепляются на задачах и примерах, ориентированных на конкретные инженерные приложения по специальности. Такой подход значительно повышает эффективность будущей инженерной работы, позволяет анализировать разрабатываемые технические структуры с помощью алгоритмов машинного обучения, находить оптимальные решения по заданным исходным параметрам.

*Вывод.* Только интегрируя базовое и техническое математическое образование со знанием прикладных инженерных задач можно рассчитывать на достаточную подготовку для решения текущих и завтрашних технологических проблем.

**Список литературы**

1 Industrie 4.0 – URL : https://www.bmbf.de/bmbf/de/forschung.

2 **Митюхин, А. И.** Повышение эффективности инженерного образования в цифровом обществе / А. И. Митюхин, В. В. Шульгов // Инженерное образования в цифровом обществе : материалы Междунар. науч.-метод. конф., Минск, 14 марта 2024. В 2 ч. Ч. 2 – Минск : БГУИР, 2024. – ISBN 978-985-543-755-1 (ч. 2). – С. 97–99.

3 **Митюхин, А. И.** Модернизация в преподавании и обучении математике в IT-университете / А. И. Митюхин // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля : материалы Междунар. науч-практ. конф. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп.; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2019. – С. 22–25.

4 **Митюхин, А. И.** Ориентированный подход математического обучения в техническом университете / А. И. Митюхин // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля : материалы V Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 27 апр. 2023 г. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп.; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2023. – С. 77–81.

5 **Митюхин, А. И.** Технический университет на этапе перехода к цифровой трансформации Индустрии 4.0 / А. И. Митюхин // Высшее техническое образование: проблемы и пути развития : материалы IX Междунар. науч.-метод. конф., Минск, 1–2 нояб. 2018 г. – Минск : БГУИР, 2018. – С. 313–315.

УДК 519.7+101.1

# ФИЛОСОФСКО-МИРОВОЗЗРЕНЧЕСКАЯ РОЛЬ ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ В ИНФОРМАЦИОННО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

*Н. В. МИХАЙЛОВА*
*Институт информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, г. Минск*

Уверенность в высокой степени объективности математического знания создает философские основания для онтологизации естественнонаучной картины мира. Современная математика – это особый интеллектуальный и духовный мир, в котором надо довольно долго пожить, включая сюда время ученичества, чтобы понять то, что вам в нем потребуется. Это совершенно необходимо потому, что логико-математическое мышление отчасти деформировало мышление как философию работающих математиков, так и методологию преподавателей математики, идя по пути, намеченному аристотелевской логикой. Взаимодействие философии, математики и информатики в построении целостной картины мира должно способствовать расширению границ мировосприятия как опыта формирования познавательных представлений о мире и выработке цельного мировоззрения как совокупности обобщенных представлений о действительности. Мировоззрение и образование – две стороны одного процесса, в ходе которого человек начинает осознавать себя подготовленным к интеллектуальному освоению мира. Мировоззрение формируется и помимо науки и философии, когда мы пытаемся теоретизировать на уровне обращения к мировоззренческим вопросам. Философский вопрос о том, что представляет собой окружающий мир, волновал выдающихся мыслителей с незапамятных времен. Однако сегодня мы наблюдаем, как смешение старых и новых приоритетов, событий, а также научного и вненаучного знания только способствует увеличению предложений в интеллектуально-образовательном мировосприятии в целом.

Вообще говоря, только в рамках «идеализированной математической модели» можно рассуждать логически, поскольку в ней известны свойства ее элементов. Математическая теория существенно отличается от эмпирического знания логикой своего развития, поэтому ее интерпретация ограничивается логическими правилами и методологией математического знания. Кроме того, в математике непосредственно взаимодействуют следующие две большие сферы: сфера творческой деятельности, открытий, содержательных приложений и сфера когнитивной рефлексии математического познания, направленная на поиски логических отношений и методологических представлений процессов абстрагирования [1]. Но, когда возникает интеллектуально-познавательная потребность в когнитивно-рефлексивном анализе математического знания, мы должны понимать, что лежит в основе научного метода познания. Даже философы науки указывают на различные варианты развертывания процесса мышления, отличающегося по тем или иным признакам от логического. Ведь философы тоже начинают с того, что «учатся правильно говорить», и только потом переходят к строгому логическому мышлению и рефлексии, формируя логическую культуру как философскую дисциплину, поскольку логика может быть разной. Для изучения математики требуется развитое рациональное и логическое мышление, которое не является врожденным и требует когнитивных усилий для своего формирования, поскольку логика математического мышления проясняет необходимые связи понятий, создавая его грамматику и синтаксис.

Современная математика остается эффективным способом открытия истин и понимания реальности, с помощью нее можно не только увидеть мир по-другому, но и активно встроиться в существующий мир, переформулировав старые проблемы в контексте нового информационно-мировоззренческого восприятия текущего века. Уместно заметить, что математические истины воспроизводимы в мышлении студента-информатика лучше, чем физические опыты в учебных практикумах, что говорит о самодостаточности математического мышления. Но познавательная сила математических понятий и символов требует определенной дисциплины мышления и соответствующего интеллектуального напряжения. Поэтому надо скорее говорить не об истинности или ложности контекстов мировосприятия, а о степени их влияния на последующую мысль. В классическом понимании истинности как бинарного отношения соответствия между описанием и его предметом есть роковой для философского определения вопрос: «Как убедиться в подобном соответствии?» Для математики такая неопределенность недопустима. Определение истины в математике, вообще говоря, не должно зависеть ни от каких информационных допущений.

В современном образовательном пространстве фундаментальные особенности междисциплинарного взаимодействия преподавания математики и информационных технологий, имеющие мировоззренческое и методологическое значение, определяются на философском уровне, точнее, в проблемном поле математического образования инженеров-компьютерщиков. Заметим, что при современном мировоззренческом подходе к образованию философские взгляды преподавателей университета должны соответствовать методическим принципам анализа и синтеза исследуемого феномена философии информационного стиля в университетском образовании как на общенаучном, так и на конкретном прикладном уровне. «Многочисленные исследования показывают, что применение цифровых инноваций в системе образования должно рассматриваться как форма, дополняющая и усиливающая обучение "лицом к лицу". Исследователи убеждены, что традиционная лекция остается уникальной и незаменимой формой обучения, а эмоциогенные характеристики дизайна электронной образовательной среды требуют детальной проработки как со стороны IT-специалистов, так и преподавателей, выполняющих текстовое наполнение электронного образовательного пространства» [2, с. 178]. В контексте перспектив инновационной деятельности преподавателей высшей математики университета информатики и радиоэлектроники предметом исследования являются программные изменения в обучении высшей математике и внедрение методических новшеств, способствующих пониманию субъектами образования математики.

По существу, современное состояние математики и информатики – это всего лишь одна из возможных форм равновесия, ценная именно сегодня, но, тем не менее, преходящая, как и все предшествующее им знание, следы которого они, безусловно, сохранили. Поэтому с точки зрения философии математического образования в информационно-образовательной среде историко-научный материал целесообразно использовать на этапе введения понятий, чтобы пробудить мотивацию студентов-компьютерщиков и вызвать у них положительный эмоциональный настрой. Современная математика является важнейшей частью мировой культуры, но только частью. О социокультурной функции математики и информатики уместнее всего говорить тем, кто «актуализирует свою науку» в настоящем и тем, кто в силу своего интеллектуального умения способен осмыслить «целостный и живой опыт» когнитивного творчества совокупного человеческого разума. Поэтому связь того, что делают математики, с частями компьютерной культуры является тем полем инновационной деятельности, где необходимо участие философов образования. Благодаря мировоззренческой широте своих концепций математика в XX веке стала важнейшей философской и общекультурной дисциплиной. Без нее не может формироваться современное мировоззрение и происходить интеграция образования в культуру. Выступая в качестве посредника, культура обобщает человеческий опыт на различных этапах развития общества. Современная математика является важнейшей частью всего культурного наследия, но так ли это на самом деле? Математика в целом – это неотъемлемая часть мировоззренческой культуры, но кто, кроме самих математиков, может наиболее аргументировано, убедительно и ярко осветить мировоззренческие вопросы своей науки, привлекая для этого данные истории науки и анализ динамики этапов ее когнитивного развития.

Одним из основных смыслов понятия «культура» является абстрактное обозначение общего процесса интеллектуального, духовного и эстетического развития. Если понимать математическую культуру как способ интеллектуального бытия человека в мире, то тогда культура предстает как система многообразных форм человеческой деятельности. Поэтому, говоря о культуре, мы имеем в виду и науку, и образование, и философию, и искусство, и даже технологию производства, т. е. все, что «человек делает как человек», есть культура. Культура во всех сферах своего проявления не представима без научной мысли, которая имеет своей целью адекватное и полное понимание предмета исследования. «Говоря о мировоззренческой роли понимания математики, важно знать не только мнение профессора математики относительно способов ее убедительной аргументации, но и учитывать мнение студентов, испытывающих трудности при изучении высшей математики, которые своим усердием вызывают эмпатию, полюбив в итоге этот сложный для них предмет всей своей "нематематической душой"» [3, с. 95]. В контексте философии математического образования отметим, что использование «кремниевой логики» в цифровой перспективе меняет когнитивную практику математического доказательства. Различные версии доказательства зависят от множества разных вещей, например, новая нетрадиционная версия строгости – использование компьютеров в доказательстве. Но для части математиков доказательства теорем, осуществленные с использованием сложных компьютерных программ, пока не могут считаться надежными и рассматриваются только в качестве направляющих теоретический поиск гипотез.

Философскому мировоззрению, которое представляет собой логико-математический синтез общих воззрений на познание, присуща абстрактно-понятийная форма постижения действительности. Именно математика учит нас правильно оперировать понятиями, изменяя тем самым, как говорят философы, нашу «понятийную деятельность». Важнейшая особенность математической абстракции в информационных технологиях состоит в том, что абстрагирование здесь чаще всего осуществляется через ряд последовательных ступеней обобщения, где преобладают «абстракции от абстракций». А одно из наиболее поразительных свойств математики состоит в том, что истинность математических утверждений может быть установлена с помощью абстрактных рассуждений. Поэтому в математике по сравнению с естествознанием процесс абстрагирования идет значительно дальше. Образно говоря, там, где естествоиспытатель останавливается, математик только начинает исследование, хотя «онтологические структуры мышления» сами по себе не задают системы исходных понятий математики.

### Список литературы

1 **Михайлова, Н. В.** Когнитивно-рефлексивная роль культуры логического мышления в математическом знании и университетском образовании / Н. В. Михайлова // Alma mater (Вестник высшей школы). – 2025. – № 1. – С. 11–16.

2 **Гобыш, А. В.** Опыт внедрения цифровых технологий в математическую подготовку инженеров / А. В. Гобыш // Вестник Тверского государственного университета. Серия «Педагогика и психология». – 2023. – № 1. – С. 176–185.

3 **Еровенко, В. А.** «Риторическая оболочка» в искусстве рациональной аргументации курса высшей математики для студентов-нематематиков / В. А. Еровенко // Alma mater (Вестник высшей школы). – 2022. – № 7. – С. 94–99.

УДК 378.015.3:51

# О ПОВЫШЕНИИ МОТИВАЦИИ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ УЧРЕЖДЕНИЙ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ

*С. П. НОВИКОВ*

*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

От качественной математической подготовки студентов технических учреждений высшего образования (УВО) во многом зависит основная цель концепции развития системы образования Республики Беларусь – «повышение качества и конкурентоспособности высшего образования в соответствии с текущими и перспективными требованиями национальной экономики и социальной сферы, мировыми тенденциями экономического и научно-технического развития» [1]. Проблема повышения качества математической подготовки издавна заботит преподавателей белорусских технических УВО. Ее решению посвящено более десятка республиканских и огромное количество международных конференций. Предлагается великое множество интереснейших методов и способов решения. Огромное количество разработок посвящено расширению использования информационно-коммуникационных технологий в обучении, что обусловлено широким проникновением таковых во все сферы жизни. Особое внимание данным разработкам было уделено и в Белорусском государственном университете транспорта и, в частности, автором статьи [2–4]. При решении столь важных для республики задач преподаватели нашего университета столкнулись с огромной проблемой, характерной, судя по многочисленным публикациям, и для сотрудников других учреждений образования. Проблема эта – низкая мотивация студентов к обучению – имеет давнюю историю и опыт решения.

Мотивация к обучению бывает внешней и внутренней. При первой знания – не цель обучения, а лишь средство достижения иных целей. Например, получение хороших отметок, похвальных грамот, других поощрений, стипендии, опасение наказаний за плохую успеваемость, в том числе отчисления и т. д.

Естественно, предпочтительнее, чтобы мотивация к обучению была обусловлена внутренними потребностями студента к познавательной деятельности, чтобы обучаемый получал эмоциональное удовлетворение от процесса познания. Задача повышения внутренней мотивации довольно сложна, зависит от огромного количества как объективных, так и субъективных факторов – уровня математических компетенций, полученных в курсе средней школы как самого студента, так и одногруппников, взаимоотношений в группе и отношения к учебе, методического обеспечения учебного процесса и его качества, личностных особенностей студентов и преподавателя и др.

Одним из необходимых условий достаточной мотивированности студентов к обучению математике является наличие некоторого минимума математических компетенций, заложенных в школьном курсе. Обучаемый должен быть в состоянии понять изучаемый материал и приучен к самостоятельному решению хотя бы простейших задач. В противном случае студенты просто опускают руки и надеются «проскочить на авось». Для повышения мотивации студентов к обучению математике, несомненно, важно повысить уровень математической подготовки абитуриентов. Необходимо продолжить опыт проведения университетских олимпиад, победители которых имеют право зачисления без экзаменов, изучить возможность повышения квот зачисления победителей. Несомненно, полезно расширять возможности целевого обучения. В экзаменационные вопросы при наборе на целевое обучение стоит включать и практические задачи. Это позволит лучше «увидеть» абитуриента, объективнее оценить его способности и уровень математической подготовки.

Для улучшения математической подготовки студентов необходимо создать на занятиях и при домашней подготовке творческую рабочую атмосферу, при которой обучаемый решает поставленные перед ним задачи не «из под палки», а в силу личной внутренней заинтересованности не только в оценивании проделанного, но и по причине интереса поиска решения. Следует всемерно поощрять активность студентов на занятиях, замечать и поощрять их за успехи в учении. Очень много при этом зависит от преподавателя, его компетентности, способности увлечь учащихся решением возникающих задач. Способов активизации познавательной деятельности учащихся придумано и описано великое множество. Это и проведение занятий в различных активных формах (игры-занятия, проблемно-поисковые ситуации, занятия-инсценировки, занятия-соревнования, занятия-эксперименты, викторины, занятия-взаимообучения, проектный метод, занятия с использованием информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) и др.). Следует активнее взаимодействовать с преподавателями выпускающих кафедр, на деле обеспечивая непрерывность образования. Пока же зачастую случается так, что выпускающие и общеобразовательные кафедры работают в различных, иногда и не параллельных плоскостях. К тому времени, как студенты начинают изучать спецпредметы, некоторые из них совершенно забывают то немногое, что они изучили на занятиях по математике. Необходимо активнее доносить до них необходимость получения математических компетенций для успешного обучения в будущем, больше разбирать задачи, связанные с их специализацией.

Большим подспорьем преподавателю могут стать развивающиеся в последнее время семимильными шагами информационно-коммуникационные технологии. Появилось огромное количество различных платформ, помогающих развитию математических компетенций. Но все средства ИКТ оказываются бесполезны при отсутствии у студента мотивации к обучению. Широкое их распространение в учебном процессе приобрело в последнее время и некоторый негативный эффект. Становится все труднее отслеживать самостоятельность выполнения письменных контрольных работ и домашних заданий. Для выставления объективной оценки на экзамене преподавателям зачастую приходится значительно превышать временные нормы на опрос студентов.

При всей несомненной эффективности внутренней мотивации роль внешней по-прежнему остается очень высокой. К сожалению, мы еще не достигли той степени общественного развития, при которой каждый член социума осознанно добросовестно выполняет свои обязанности, а студенты, в частности, участвуют в образовательном процессе, руководствуясь только внутренними мотивами. Как бы хорошо ни был выстроен учебный процесс, как бы высоко ни был квалифицирован преподаватель, все усилия могут легко разбиться о глухую стену лени и нежелания учиться. Кроме «пряника» нужен еще и «кнут». Руководство и преподаватели УВО исчерпали в этом отношении почти все возможности. Кураторы учебных групп строчат письма и звонят родителям нерадивых учеников. К последним принимаются самые разнообразные административные меры – от вызова на заседания кафедр и факультетов до объявления выговоров и отчисления. По каждому факту отчисления проводится строгий разбор причин. Постоянно совершенствуется учебно-методическое обеспечение и способы ликвидации задолженностей. А количество неуспевающих и отчисляемых никак не падает. Необходимо принятие более серьёзных мер. Стоит рассмотреть возможность «условного» зачисления студентов и перевода на следующий курс по результатам сессии. Необходимо неуклонно повышать престижность инженерных специальностей и преподавательской деятельности, чтобы слово «учитель» действительно «звучало гордо».

**Список литературы**

1 О Концепции развития системы образования Республики Беларусь до 2030 года : постановление Совета Министров Респ. Беларусь от 30 ноября 2021 г. № 683 // Национальный правовой Интернет-портал Республики Беларусь. – URL : https://pravo.by/document/?guid=12551&p0= C22100683&p1 =1&p5=0 (дата обращения: 02.12.2021).

2 **Кулаженко, Ю. И.** Об опыте использования информационно-коммуникационных технологий в математической подготовке студентов технических вузов / Ю. И. Кулаженко, С. П. Новиков // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля : материалы Междунар. науч.-практ. конф. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп.; под ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2022. – С. 25–28.

3 **Кулаженко, Ю. И.** Об использовании платформ адаптивного обучения в математической подготовке студентов технических вузов / Ю. И. Кулаженко, С. П. Новиков, И. И. Сосновский // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля : материалы V Междунар. науч.-практ. конф. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп.; под ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2023. – С. 70–73.

4 **Новиков, С. П.** Об опыте использования и разработки онлайн-систем адаптивного обучения для улучшения математической подготовки студентов/ С. П. Новиков // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля : материалы VI Междунар. науч.-практ. конф. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп.; под ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2024. – С. 32–35.

УДК 37.091.33

## ВОЗМОЖНА ЛИ НАУЧНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ ПО МАТЕМАТИКЕ НА ПЕРВОМ КУРСЕ?

*Т. А. РОМАНЧУК*
*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск*

Система высшего образования всегда находится под пристальным вниманием общественности, ведь от ее эффективного функционирования зависят практически все сферы жизнедеятельности общества. Мир сейчас очень динамичен, стремительно развивается и университеты, которые всегда были центрами не только учебной, но и научной работы, также оказываются вовлеченными в этот процесс.

Научная работа студентов в университете делится на два вида: учебно-исследовательская и научно-исследовательская. И если с первой все более-менее понятно (сначала это курсовой проект, затем дипломная работа, причем это касается, как правило, выпускающих кафедр, к которым кафедра высшей математики БГУИР не относится), то со второй не все так однозначно. И здесь возникает много вопросов, особенно с учетом того, что привлекать к такой деятельности приходится студентов-первокурсников (математика преподается только на первом курсе). А результатом этой работы должно стать, например, участие в студенческой научной конференции, ежегодно проводимой в нашем университете. При этом следует отметить, что студенты достаточно активно проявляют свое желание в ней участвовать, так как за это в том числе предусмотрены некоторые преференции как, например, при прочих равных обстоятельствах преимущественное право заселения в общежитие. И возникает вполне закономерный вопрос: а какая научная деятельность может быть у студента-первокурсника? И ответ напрашивается сам собой – никакая, по крайней мере, в классическом ее понимании.

Любая смена жизненных обстоятельств требует определенного адаптационного периода, и начало учебы в университете не является исключением, особенно если к тому же студент является иногородним и ему приходится сталкиваться еще и с бытовыми вопросами, которых раньше у него в жизни не было. Зачастую бывает, что полностью в учебный процесс студент-первокурсник «втягивается» лишь к концу семестра и ни о какой дополнительной самостоятельной работе, которую подразумевает научная деятельность, речь идти не может, он просто не в состоянии ее «потянуть». К тому же студента, склонного к научной исследовательской деятельности, не всегда бывает просто разглядеть, ведь это порой не самый активный студент, который все «схватывает», активно решает у доски, а наоборот, абсолютно неприметный, склонный к более глубокому анализу, внимательный, вдумчивый.

«Научная» деятельность на первом курсе носит весьма поверхностный характер. Ведь в первую очередь студент должен изучить литературу по соответствующей теме и, например, как результат проделанной работы подготовить реферат по ней. Безусловно, такая работа не имеет прямого отношения к исследовательской деятельности, но она позволяет студенту освоить научную терминологию, более глубоко погрузиться в изучаемую тему. Зачастую бывают ситуации, когда студент «открывает» для себя то, что уже хорошо известно. А возможно студенту нужно сначала предложить подготовить реферат о ком-нибудь из выдающихся математиков, ведь у многих из них очень интересные судьбы и это тоже послужит ему толчком к желанию заниматься научной деятельностью. Таким образом, на первом курсе можно лишь заложить основу для будущей научной исследовательской деятельности, а не получить какой-то результат, который позволит, например, принимать участие в научной студенческой конференции. А пока преподаватель со студентом проходит обязательные начальные этапы, курс математики заканчивается и поддерживать у него интерес к продолжению совместной научной деятельности становится все сложнее. Еще одна из причин, по которой студент теряет интерес к фундаментальным исследованиям (к которым и относится математика), это знакомство с прикладными дисциплинами, что происходит уже на втором курсе. Безусловно, заниматься прикладными исследованиями намного более интересно, ведь в этом случае студент видит результат своей деятельности, которая направлена на решение, например, технических или экономических проблем. Однако при всем этом нельзя не отметить, что интерес студента к научным исследованиям не настолько велик, чтобы привести его в последующем в магистратуру/аспирантуру. Причин такой ситуации несколько, но в первую очередь это неготовность современных студентов к длительной кропотливой работе, результат которой к тому же не всегда гарантирован, не всегда студент готов и к преодолению трудностей, связанных с непониманием материала (что видно даже на практических занятиях по математике). Некоторым решением для данной ситуации может быть создание научных кружков, когда студент работает не в одиночку, а в группе, но сейчас студенты не стремятся к совместной работе, а чаще каждый сам себе.

В заключение хотелось бы отметить, что, безусловно, студентов нужно привлекать к научной исследовательской работе с первых курсов, но может быть это не должно быть по всем предметам, а лишь по тем, где такая работа может в перспективе дать хороший результат.

УДК 378.016:51

## МЕТОДИЧЕСКИЙ КОНТЕКСТ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ: УПРАВЛЕНИЕ УЧЕБНО-ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬЮ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

*Е. Л. СТАРОВОЙТОВА*
*Белорусско-Российский университет, г. Могилев*

Решение стоящих перед профессиональным образованием задач, определяемое современным состоянием науки и производства, актуализирует проблемы поиска и разработки педагогических технологий, способствующих эффективному освоению обучающимися фундаментальных знаний, совершенствованию методик предметного обучения, обеспечивающих формирование профессиональных компетенций специалистов технического профиля. Каждая учебная дисциплина вносит свой вклад в реализацию современных требований к уровню профессиональной подготовки специалистов, обеспечивая их личностное развитие на основе мотивированной учебной деятельности получения профессиональных знаний, сформированности познавательных умений, навыков, способности к самообразованию и саморазвитию.

Необходимой и неотъемлемой частью профессиональной подготовки будущих инженеров является математическая подготовка, которая дает возможность строить и анализировать математические модели прикладных производственных задач, позволяет эффективно применять математические методы для принятия решений в профессиональной деятельности.

Однако большинство студентов, воспринимая математику как чисто абстрактную дисциплину, испытывают значительные познавательные затруднения при освоении ее содержания. Они обусловлены, в основном, низким уровнем мотивации к изучению математики и слабым развитием приемов познавательной деятельности, что затрудняет достижение необходимого глубокого понимания теоретических вопросов математики и ее прикладного потенциала в инженерных специальностях.

Решение проблемы математической подготовки студентов требует совершенствования методики преподавания математики в соответствии с требованиями к профессиональной компетентности будущих инженеров. В процессе обучения от преподавателя зависит характер протекания учебно-познавательной деятельности, ее организация и активность студентов, а, значит, и результат деятельности. Актуальной становится проблема управления учебно-познавательной деятельностью студентов, в том числе, и с точки зрения ее методической составляющей [1]. Она характеризуется как целенаправленный процесс создания преподавателем таких условий обучения, которые обеспечивали бы в данном процессе позитивный характер познавательной активности, предоставляли возможность самореализации каждого студента в учебной деятельности, направляли на достижение поставленных целей и задач обучения математике, контролировали и корректировали с учетом индивидуальных особенностей студентов [2]. С точки зрения методики обучения математике это означает реализацию компонента методической системы обучения – выбор форм, методов и средств управления познавательной деятельностью студентов в учебном процессе.

В техническом учреждении высшего образования в силу специфики математического содержания и степени его абстрактности особо значимой является проблема мотивации учения. Если используемая преподавателем методика создает условия для личной заинтересованности студента как в конечном результате его деятельности (мотивация по результату), так и в самом процессе его достижения (мотивация на процесс), а сама деятельность становится личностно значимой для студента, то формируется внутренняя мотивация деятельности. Основу реализации методических приемов формирования мотивации к изучению математики составляют математические задачи как цель и средство обучения, при этом приоритетными оказываются их дидактические функции (подготовка студентов к изучению нового материала, закрепление изученного материала, выработка умений его использования и иллюстрация его приложений).

Управление познавательной деятельностью студентов в такой ситуации требует создания у обучающихся установки на необходимость подготовки к изучению нового материала посредством использования подготовительных задач, позволяющих актуализировать ранее изученные теоретические сведения, необходимые для изучения нового материала, и решения задач, мотивирующих изучение нового материала [3].

Так как уровень математической подготовки некоторых студентов не позволяет им оперировать большим объемом материала учебной дисциплины, то управление познавательной деятельностью студентов возможно посредством применения активных методов обучения, позволяющих организовать изучение вопросов темы в самостоятельном режиме по предложенному преподавателем плану (методическому предписанию): общая характеристика темы; применение новых знаний в будущей профессии; решение профессионально ориентированной задачи; разработка тестового задания для определения уровня освоения материала, презентация результатов работы.

Для управления учебно-познавательной деятельностью студентов важным является выбор технологий обучения и приемов, направленных на формирование и развитие общих компетенций. Активные методы обучения целесообразно использовать при формировании математических знаний, умений их применения при решении задач посредством анализа задачной ситуации, оценки возможности ее разрешения имеющимися знаниями, конструирования решения и его интерпретации в условиях задачной ситуации.

При использовании методов управления учебно-познавательной деятельностью студентов необходимо формировать у них понимание значимости выполнения определенной деятельности (составление опорной таблицы, плана изучения некоторого вопроса, подготовка презентации, решение задачи и т. д.) и представление о тех моделях или процессах реальной действительности, о которых идет речь в данной конкретной учебной ситуации.

Возможным вариантом оказания помощи студентам в преодолении трудностей психологического характера при освоении нового математического содержания является построение обучения математике в соответствии с принципами личностно-ориентированного образования: создание ситуаций успеха, принятие неудачи и ошибки как необходимого опыта, поддержка студента в индивидуальном образовательном маршруте. Указанный аспект методики преподавания математики в высшей школе требует методического обеспечения актуализации опорных (базовых) знаний для их применения с помощью соответствующих методических приемов. Это особо значимо в адаптационный период студентов первого курса.

Управление активной познавательной деятельностью студентов на лекциях и практических занятиях по математике предполагает учет уровней активности: активность воспроизведения, активность интерпретации и творческая активность. Так, на лекциях возможна реализация элементов перспективно-опережающего обучения, когда студентам до изложения материала темы указываются приложения математики в их будущей специальности, создается проблемная ситуация мотивирующего характера, разрешение которой требует новых знаний.

Таким образом, представленные методические аспекты организации и управления преподавателем учебно-познавательной деятельностью обучающихся, адекватной их индивидуальным познавательным возможностям и особенностям, обеспечивают качественную математическую составляющую высшего инженерного образования как необходимого условия формирования профессиональной компетентности выпускника учреждения высшего образования.

**Список литературы**


1 **Старовойтова, Е. Л.** Методические особенности преподавания математики в техническом вузе в контексте активизации учебно-познавательной деятельности студентов / Е. Л. Старовойтова // Матэматыка. – 2022. – № 1 (137). – С. 27–38.

2 **Савченко, Т. В.** Развитие познавательной самостоятельности студентов вуза / Т. В. Савченко // Концепт. – 2014. – Вып. 2. – С. 26–30.

3 **Старовойтова, Е. Л.** Мотивация изучения нового материала по математике студентами технического вуза посредством подготовительных задач / Е. Л. Старовойтова // Актуальные проблемы психологии и педагогики в современном образовании : сб. науч. ст. VI Междунар. науч.-практ. конф. – Ярославль : РИО ЯГПУ, 2022. – С. 135–139.


УДК 378. 016

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ВОПРОСОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В СИСТЕМЕ «ЛЕКЦИЯ – ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ»

*Е. Л. СТАРОВОЙТОВА, Т. С. СТАРОВОЙТОВА*
*Белорусско-Российский университет, г. Могилев*

Подготовка специалиста-профессионала в высшей школе, учитывая требования социального заказа общества, должна удовлетворять запросы и потребности обучаемых, обеспечивая условия для освоения новых форм деятельности и способов решения профессиональных задач. Значимый вклад в профессиональную подготовку будущих специалистов технического профиля вносят математические дисциплины, раскрывающие будущим инженерам возможности использования математического аппарата для решения производственных задач.

Содержание курсов математических дисциплин позволяет сформировать математический аспект готовности выпускника к профессиональной деятельности при учете потребности специальных дисциплин, изучение которых способствует закреплению, конкретизации, расширению и углублению математических знаний и сформированных навыков студентов. Применение математических методов в курсе технических дисциплин позволяет будущему специалисту приобрести необходимые специальные базовые знания, расширить профессиональный кругозор, развить техническое мышление.

Продуктивное решение стоящих перед образованием задач базируется на эффективности используемых подходов к организации и качеству образовательного процесса, реализующих, в частности, требования повышения эффективности учебной деятельности студентов. Педагогическая деятельность преподавателя, направленная на совершенствование методики проведения учебных занятий посредством использования современных методов, средств и технологий обучения, имеет целью формирование у обучающихся способности организовать свою учебную деятельность и эффективно ею управлять.

Изучение математических дисциплин в учреждении высшего образования представляет значительные трудности для большинства студентов, а отдельные из них не в состоянии освоить их за отведенное на это время. Необходимо адаптировать основные положения методики обучения математике в высшей школе в соответствии с целями и задачами изучаемой математической дисциплины, требованиями рабочей (учебной) программы для конкретной специальности (профиля), целесообразно организовать деятельность студентов в системе «лекция – практическое занятие» при изучении, в частности, вопросов теории вероятностей. Целью учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» применительно к вопросам теории вероятностей является освоение ее теоретических основ, необходимых для решения прикладных задач, развитие логического и алгоритмического мышления. Освоение учебной дисциплины позволяет студентам знать основные положения, формулы и теоремы теории вероятностей для случайных событий; уметь строить математические модели для типичных случайных явлений, использовать вероятностные методы в решении важных для инженерных приложений задач; владеть навыками анализа исходных и выходных данных задач и формами их представления, навыками использования прикладных методов теории вероятностей [1].

Изучение вопросов теории вероятностей в соответствии с целью и задачами, определенными рабочей программой, требует при проведении лекционных и практических занятий учитывать применение этой теории при изучении специальных дисциплин, что означает необходимость включения в содержание занятий прикладных задач, формируя у будущих специалистов профессионально значимые виды деятельности [2].

Методические особенности изучения вопросов теории вероятностей определяются следующими обстоятельствами:

– затруднена возможность преемственности со школьным курсом математики даже для отдельных вопросов темы, так как как элементы комбинаторики (правила комбинаторного сложения и умножения; комбинации элементов без повторений; бином Ньютона; решение комбинаторных задач) и элементы теории вероятностей (достоверные, невозможные и случайные события; операции над событиями; элементарные события; частота события; классическое определение вероятности и др.) входят в содержание повышенного уровня изучения математики в X–XI классах;

– методические приемы актуализации знаний при проведении практических занятий необходимо использовать для группы студентов, имеющих первоначальные представления о комбинаторике и теории вероятностей, а через них способствовать «вхождению» в тему другой группы. Например, моделирование учебно-предметной ситуации, подводящей студентов к вопросам, изучаемым на занятии, с использованием приема «общее – разное», при котором рассматриваются несколько ситуаций (задач) с точки зрения объединяющих и разъединяющих их характеристик, имеющих непосредственное отношение к теме практического занятия;

– при изучении некоторых тем целесообразно отказаться от традиционной подачи нового материала и применить другой метод, например, метод решения несколько задач с одинаковым сюжетом с последовательно нарастающей трудностью. Решая такие задачи с помощью элементарных рассуждений и обобщая полученные решения, студенты самостоятельно (или с помощью преподавателя) подходят к выводу комбинаторных формул («открывают» теорию);

– постановку задач и поиск их решения целесообразно проводить через создание и разрешение проблемных ситуаций поискового и мотивирующего характера. Это способствует развитию мышления студентов за счет выполнения умственных действий переноса знаний на более высокий уровень;

– при изучении сложных для понимания вопросов важна как репродуктивная работа (решение задач по образцу), так и продуктивная, позволяющая «открыть» фрагмент теории или найти иной способ решения;

– ограничена ориентация через задачи на будущую профессиональную деятельность средствами изучаемого содержания, так как предлагаемые прикладные и профессионально ориентированные задачи на этом этапе их предъявления студентам выполняют лишь пропедевтическую функцию [2];

– при изучении вопросов теории вероятностей методически значимым является учет стереотипов, сформированных у студентов во время обучения в школе: механическое заучивание конкретных сведений, не сохраняющихся в долговременной памяти; отсутствие взаимосвязи между теорией и практикой, не формируется умение применения знаний при выполнении практико-ориентированных заданий [3].

Отмеченные особенности позволяют выстроить содержание лекционных и практических занятий, целенаправленно осуществлять поиск эффективных методов, форм и средств обучения студентов вопросам теории вероятностей, оценивать их эффективность в повышении качества математической подготовки будущих специалистов.

## Список литературы

1 **Старовойтова, Е. Л.** Организация деятельности студентов технического вуза при изучении вопросов теории вероятностей: методическая составляющая / Е. Л. Старовойтова // Эпистемологические основания современного образования: актуальные вопросы продвижения фундаментального знания в учебный процесс : материалы (сборник статей) IV Междунар. науч.-практ. конф. – М. : Перо, 2024. – С. 46–51.

2 **Старовойтова, Е. Л.** Педагогические аспекты обучения бакалавров технического вуза вероятностно-статистическим дисциплинам / Е. Л. Старовойтова // Актуальные проблемы психологии и педагогики в современном образовании : сб. науч. статей IV Междунар. науч.-практ. конф. – Ярославль : РИО ЯГПУ, 2020. – С. 132–134.

3 **Воронова, Н. П.** Стимулирование эффективной деятельности студентов I–II курсов как одно из условий повышения качества высшего образования / Н. П. Воронова, Т. Н. Канашевич, М. О. Шумская // Адукацыя і выхаванне. – 2015. – № 5. – С. 18–25.

УДК 378.147:51

# ОБ ОДНОМ ОПЫТЕ СТИМУЛИРОВАНИЯ АКТИВНОСТИ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

*И. И. ХОМИЧКОВ*
*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск*

Фактически каждый педагог сталкивается с необходимостью оптимизации учебного процесса с целью равномерной загрузки учебой студентов в течение всего периода обучения. Как показывает практика, студенты начинают проявлять активность только к концу семестра, что естественно, приводит к негативным результатам во время сессии. Поэтому, исходя из личного опыта преподавания университетского курса высшей математики, была разработана система дополнительных баллов, позволяющих из маленьких успехов на каждом практическом занятии (ПЗ), в итоге получить положительный результат к концу семестра. Для реализации такого подхода были выбраны три направления работы, каждое из которых оценивалось отдельно в накопительных баллах. Первое направление – домашняя работа: задается пять задач, каждая из которых при правильном решении имеет вес в два балла. В результате на одном ПЗ студент может набрать от нуля до десяти баллов. Второе направление – самостоятельное или с помощью преподавателя решение задачи у доски. В зависимости от объема помощи, студент может получить от пяти до десяти баллов. То есть при выходе к доске можно получить минимум пять баллов, что является хорошим стимулом для активизации работы студентов в аудитории. Третье направление – самостоятельное решение студентами задачи, которая в данный момент решается у доски. Первый студент, правильно решивший задачу раньше всех, включая студента у доски, получает десять баллов. За правильную подсказку или правильное замечание по решаемой задаче у доски, студент из аудитории получает два дополнительных балла. Эти два момента позволяют активизировать самостоятельную работу студентов в аудитории. Таким образом, на каждом ПЗ студенты могут получить баллы за домашнюю работу, за выход к доске и за самостоятельную работу в аудитории. Если по математическому предмету в семестре было $N$ ПЗ, то начисленные баллы сводятся в Excel таблицу из $N$ колонок, каждая из которых состоит из трех столбцов. Выглядит эта таблица приблизительно так:

| | | … | Дата ПЗ | | | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ФИО | … | домашнее задание | выход к доске | работа в аудитории | … |
| 1. | Иванов | … | 10 | 6 | | … |
| 2. | Петров | … | 2 | 7 | 2 | … |
| 3. | Сидоров | … | 4 | 10 | 10 | … |
| … | … | … | | | | … |

Далее, с помощью функций Excel, суммируются баллы по каждому из столбцов в $N$ колонках. Таким образом, к концу семестра имеем накопленные баллы по домашним заданиям, по выходам к доске и по работе в аудитории. Накопленные баллы нужно конвертировать в добавочные оценки (бонусы), которые будут учитываться при сдаче зачета или экзамена по математическому предмету в конце текущего семестра. Для получения бонусов, результаты накопленных баллов будем сравнивать с результатами «идеального студента», который в течение $N$ практический занятий решит все домашняя задания, получая при этом $10N$ баллов, выходит на всех ПЗ хотя бы один раз к доске ($10N$ баллов за семестр) и на каждом ПЗ быстрее всех решит хотя бы одну задачу ($10N$ баллов за семестр). Бонус будем вычислять по формуле для каждой из позиций: бонус = (количество накопленных баллов)/10$N$. Следует заметить, что теоретически бонусы по выходу к доске и решению задач самостоятельно в аудитории могут быть больше единицы. Далее бонусы суммируются по трем позициям и в итоге получаем оценку, отражающую активность студента на ПЗ в течении семестра. Этот бонус учитывается при зачете следующим образом. В течение семестра проходят две или три контрольные работы по предмету. К среднему значению оценки по контрольной работе добавляется бонус. Затем итоговая оценка округляется. Если эта оценка не ниже 7,5, то студент по зачету получает «автомат». При экзамене бонус учитывается иначе. По результатам контрольных работ находим среднее значение и делим на 10$M$, где $M$ – количество контрольных работ в семестре. В результате получаем бонус за контрольные работы. Суммируем бонус по контрольной с остальными бонусами, округляем, и в итоге получаем добавочную оценку к экзаменационной. Окончательная оценка за экзамен равна сумме экзаменационной оценки и добавочной. Такая система оценок активности работы студентов, с одной стороны, стимулирует эту активность, а с другой – позволяет более объективно оценить результаты работы студентов к концу семестра за счет большей статистики полученных баллов.

# ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ НА УРОВНЕ СРЕДНЕГО, СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО, ОБЩЕГО И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

УДК 378.147:51

## ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБУЧЕНИЯ В АГРАРНОМ УЧРЕЖДЕНИИ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

*Т. Б. ВОРОНКОВА*
*Белорусская государственная сельскохозяйственная академия, г. Горки*

Основными целями математического образования аграрного учреждения высшего образования (УВО) являются овладение студентами математическими методами, необходимыми как для применения в практической деятельности, так и для изучения смежных и специальных дисциплин; интеллектуальное развитие будущих специалистов; формирование логического мышления для усвоения математики и даже для полноценной жизни в обществе и, несомненно, формирование личности в процессе обучения. Высшая математика изучается студентами младших курсов очной и заочной форм обучения биологических, экономических и инженерных специальностей БГСХА. Это предъявляет серьезные требования к нам, преподавателям кафедры высшей математики и физики, поскольку формирование будущего специалиста начинается с первого дня обучения. Высшая математика играет большую роль в развитии личности студентов. Различают научно-профессиональную роль высшей математики, которая предполагает, что будущий специалист сумеет воспользоваться усвоенным математическим аппаратом для описания и решения конкретной производственной задачи, сумеет грамотно выполнить алгоритмические предписания на математическом языке. Социально-личностная и общекультурная роль высшей математики предполагает, что студент владеет логическим и абстрактным стилем мышления, умеет проводить аргументированные рассуждения и отличать доказанные утверждения от недоказанных, понимает значимость математики, как неотъемлемой части общечеловеческой культуры в воздействии на иные ее области [1].

Для ликвидации разрыва между обозначенными целями образования и его реальными результатами внедряемые методики и учебные программы должны быть направлены на преемственность обучения математике на уровне среднего и высшего образования. Рассмотрим изучение темы «Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его применение к исследованию функции» в средней и высшей школе. Понятие производной достаточно подробно школьники изучают в десятом классе. Прежде всего школьников знакомят с задачами, приводящими к этому понятию, определением и правилом вычисления производной в точке. Затем следует вывод некоторых формул вычисления производной, правила дифференцирования, геометрический смысл производной, подробные действия нахождения угла наклона касательной к оси абсцисс и составление уравнения самой касательной. Далее излагаются признаки убывания и возрастания функции, признаки точек максимума и минимума функции, алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке. В нашем аграрном УВО дифференциальное исчисление занимает важное место среди тем математического анализа как функции одной, так и нескольких переменных. При изучении этой темы преподаватели сохраняют преемственность со школьным изложением, используя те же понятия и обозначения. При этом пройденный материал позволяет значительно расширить некоторые аспекты. Введение в математический анализ функции одной переменной обязательно включает элементы теории пределов. Знакомство студентов с понятием предела позволяет вводить точное определение производной как предела отношения приращения функции к приращению аргумента. Последовательное изучение этой темы предполагает некоторое дублирование отдельных элементов. Например, геометрический смысл производной, связанный с касательной к графику функции, однако, уравнение касательной составляется на основании уравнения прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом, выведенной на занятиях предыдущей темы «Аналитическая геометрия на плоскости». Обязательно изучается связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции, на примере функции $f(x)=|x|$ доказывается, что из непрерывности функции в точке не всегда следует дифференцируемость. Мы знакомим студентов с производными всех элементарных функций, доказывая некоторые формулы. На нашей кафедре эти формулы дифференцирования сведены в таблицу производных, которая состоит из 15 строк и двух столбцов. Хотя число основных элементарных функций равно 11, но в таблицу добавляются производные степенных функций $f(x)=\sqrt{x}$ и $f(x)=\frac{1}{x}$, а также производные экспоненты и натурального логарифма. Второй столбец таблицы содержит производные соответствующих сложных функций. Затем студенты изучают понятие дифференциала функции, его свойства и применение для приближенного вычисления значения функции. Применение производной для исследования функции содержит понятия необходимых и достаточных условий монотонности, экстремума, выпуклости и вогнутости графика функции, точек перегиба. При доказательстве этого материала применяется формула конечных приращений Лагранжа. Подробное изучение асимптот графиков функций позволяет применять производную к исследованию не только степенных функций вида многочлен, но и дробно-рациональных функций, функций, содержащие экспоненту, логарифмы и других элементарных функций.

Поступательное движение нашего общества к прогрессу требует специалистов, которые владеют не только высокой профессиональной квалификацией, но и обладают всеми общечеловеческими ценностями, являются творческими личностями, интеллигентами в широком смысле этого слова. Подготовка таких специалистов возможна только инновационными методами обучения, в основе которых, несомненно, находится проблемное обучение. Применение проблемного обучения в высшей школе позволяет формировать не только познавательные, но и профессиональные мотивы и интересы, воспитывать системное мышление, создавать целостное представление о профессиональной деятельности. Проблемный метод обучения способствует гуманистической трансформации содержания высшей математики, а также обогащению и раскрепощению образовательного пространства предмета. Преподаватели нашей кафедры достаточно серьезно относятся к этому методу: изучение практически каждого нового лекционного материала начинается с создания проблемной ситуации, студентам показывается применение математических понятий в профессиональных задачах. Например, для студентов экономических специальностей в теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной и его применение» присутствуют вопросы экономического смысла производной, понятия: предельный продукт, эффективность производственного фактора, эластичность спроса и предложения на рынке сбыта продукции, экономические задачи оптимизации. Применение производной в экономических исследованиях удобно использовать для предельных характеристик производственных процессов. Если производственная функция $y = f\left(x\right)$ выражает зависимость между объектом $y$ выпускаемой продукции и величиной затрат $x$ некоторого фактора производства, то производная этой функции $f'\left(x\right)$ покажет предельный продукт или предельную эффективность этого фактора производства. Если $y = F\left(x\right)$ – денежная выручка или прибыль от реализации $x$ единиц некоторой продукции, то производная $F'\left(x\right)$ покажет предельную выручку или предельную прибыль.

Во многих экономических задачах требуется вычислять процент прироста функции, соответствующей одному проценту прироста независимой переменной. Для этого служит понятие эластичности функции. Коэффициент эластичности функции определяется следующим образом:

$$E(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\cdot\frac{x}{f(x)}=\frac{x}{f(x)}\cdot f'(x)$$

и показывает, на сколько процентов изменится значение функции, если приращение аргумента составит 1 %. Допустим, функция $y=f(x)$ описывает спрос на некоторую продукцию в зависимости от цены $x$ единицы этой продукции. Если повышение цены на 1 % снижает спрос более, чем на 1 %, то спрос эластичен (значение коэффициента эластичности по модулю больше единицы); если повышение цены на 1 % соответствует снижению спроса на 1 %, то спрос единичной эластичности; если повышение цены на 1 % понижает спрос менее, чем на 1 %, то спрос неэластичен (коэффициент эластичности по модулю меньше единицы). Если производственная функция $y=f(x,y)$ выражает зависимость объема продукции от затрат факторов производства, то частные производные $z'_x$ и $z'_y$ покажут предельную эффективность этих факторов, т. е. на сколько единиц увеличится выпуск продукции при увеличении каждого фактора на единицу. Отношения частных производных $\frac{z'_x}{z'_y}$ и $\frac{z'_y}{z'_x}$ покажут предельные нормы замещения единицы фактора $x$ фактором $y$ и наоборот.

Однако высшая математика является фундаментальной наукой, и, кроме того, задания прикладного характера требуют от студентов знаний специальных предметов. Поэтому проблемным обучением не может быть охвачена вся программа курса. Необходимо разумное сочетание прикладного и фундаментального при изучении этого курса. Многие исследователи в области проблемного обучения считают, что оно не может и не должно стать единственной и преобладающей системой обучения. Проблемное обучение строится в зависимости от того, насколько это допускает учебный материал [2]. Оптимальной структурой учебного процесса будет являться сочетание традиционного изложения с включением проблемных ситуаций.

Таким образом, преподаватели нашей кафедры обеспечивают непрерывную связь между знаниями и навыками, полученными на предыдущем этапе обучения в средней школе или колледже, и теми, что формируются на последующем этапе в академии. Новое знание, основанное на предыдущем, углубит и расширит понимание математических понятий, обеспечит плавный переход от одного уровня образования к другому, из школы в УВО.

## Список литературы

1 Инновационные методы обучения в гражданском образовании / В. В. Величко, Д. В. Карпиевич, Е. Ф. Карпиевич [и др.]. – Минск : Медисонт, 2001. – 168 с.

2 **Солодовников, А.С.** Математика в экономике : учеб. В 2 ч. Ч. 2. Математический анализ / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов. – М. : Финансы и статистика, 2013. – 560 с.

3 **Комарова, Е. А.** Преемственность в обучении математике : метод. пособие / Е. А. Комарова. – Вологда : Издательский центр ВИРО, 2007. – 108 с.

4 Высшая математика. Дифференциальное исчисление функции одной переменной : пособие для работы студентов учреждений высшего образования, обучающихся по инженерным специальностям / С. В. Курзенков, Т. Б. Воронкова, Е. Л. Демитриченко [и др.]. – Горки : БГСХА, 2017. – 71 с.

УДК 517:378.14

# ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ В НЕПРЕРЫВНОМ ТЕХНИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

*Л. И. МАЙСЕНЯ, В. В. МАХНАЧ*

*Институт информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, г. Минск*

Оптимизация профессионального образования осуществляется в Республике Беларусь вместе с созданной системой интегрированного обучения в учреждениях «колледж – университет». Большинство специальностей колледжей имеют возможность развития до уровня высшего образования. Такая система является эффективной для организации непрерывного технического образования.

В методологии и педагогике *непрерывность* представляется как многозначное понятие, т. е. как подход, принцип, способ существования и развития, основополагающий критерий, системообразующий фактор. При этом тремя главными предпосылками непрерывного образования служат возможность, мотивация, способность личности к получению образования.

В числе значимых принципов реализации непрерывного образования в профессиональной педагогике выделяются следующие:

– принцип многоуровневой и многоступенчатой системы образования;

– принцип преемственности образовательных программ (т. е. сквозная стандартизация профессиональных образовательных программ по уровням образования и специальностям);

– принцип интеграции различных типов образовательных учреждений (т. е. формирование многопрофильной и многоуровневой системы подготовки специалистов).

Гуманистический характер непрерывности образования состоит в том, что в процессе его реализации (согласно О. С. Анисимову [1]) человек должен овладеть «законом» создания, воспроизводства и развития способностей, т. е. приобрести способность к саморазвитию.

Непрерывное техническое образование приводит к выстраиванию «образовательной вертикали», где «на основе принципов преемственности, соответствия и дополнительности налаживаются интегративные связи между формирующими ее образовательными уровнями, а также между усвоенными при их прохождении обучаемым знаниями, умениями, навыками и приобретенными компетенциями. В итоге обеспечивается непрерывность и сопряженность процессов развития, становления и формирования целостной личности» [2, с. 131–132].

В качестве инновационного подхода в реализации непрерывного технического образования следует отметить опыт обучения студентов заочной формы получения высшего образования в Институте информационных технологий (ИИТ) БГУИР. Данное обособленное структурное подразделение имеет опыт работы более 20 лет. В настоящее время оно интегрировано с 44 колледжами Республики Беларусь по специальностям из направлений образования «Информатика и вычислительная техника», «Автоматизация», «Оборудование», «Радиоэлектронная техника». Набор осуществляется по специальностям 6-05-0612-01 «Программная инженерия» и 6-05-0611-05 «Компьютерная инженерия».

Для обучения в 2025/2026 учебном году в ИИТ БГУИР поступило 390 абитуриентов из 42 колледжей, наибольшее количество – из Минского государственного колледжа цифровых технологий (86 первокурсников), Минского радиотехнического колледжа (78), Колледжа бизнеса и права (43), Минского колледжа предпринимательства (26 человек). При этом заочная форма обучения позволяет в этом году осуществлять профессиональное образование на первом курсе ИИТ БГУИР выпускников колледжей из 17 белорусских городов.

По профилю деятельности ИИТ БГУИР осуществляет техническое образование. В условиях овладения профессией технического профиля образование как процесс имеет триединую функцию, оно выступает:

– как процесс овладения необходимыми общими знаниями;

– как получение совокупности знаний, необходимых для технической сферы деятельности;

– как возможность достижения определенного уровня образованности для дальнейшего самостоятельного развития, образования и применения полученных знаний и умений. Все три указанных компонента относятся к математическому образованию студентов.

Следует отметить, что основная социальная тенденция, которая проявляет себя относительно среднего профессионального образования технического профиля (как ступени перед высшим техническим образованием), – это рост популярности образования данного типа среди молодежи после получения общего базового образования (в 15–16 лет).

Целостность системы непрерывного образования гарантируется преемственностью между ее элементами и ступенями. Создание целостной системы, ее сохранение и усиление целостности – основные ориентиры в процессе трансформации образования по принципу непрерывности. Это касается не только всего педагогического процесса, но и процесса обучения отдельным дисциплинам, т. е. и обучения математике так же. При этом основой организации непрерывного интегрированного образования являются учебные планы специальностей и учебные программы дисциплин. В рамках нашей профессиональной деятельности ключевое значение имеют учебные программы математических дисциплин для колледжа.

Ориентируясь на целостность системы, учитывая принцип преемственности в качестве основного системообразующего, мы придаем существенное значение реализации в содержании учебных программ интегрированности с целью содержательного обеспечения непрерывного образования. При этом рассматривается два типа интеграций:

1) интеграция содержания, которая обеспечивает целостность и непрерывность математического образования при переходе от уровня среднего специального образования к обучению в университете;

2) интеграция содержания, которая обеспечивает необходимый объем математических знаний для изучения специальных дисциплин.

Интегрированный курс математики строится в соответствии с общими дидактическими принципами, основные из них:

– принцип иерархии целей;

– принцип значимости учебной информации;

– принцип целенаправленности;

– принцип системности.

При обучении математике имеются исходные проблемы с входящими математическими знаниями:

– *во-первых*: интеграция образования в ИИТ БГУИР происходит с различными по основному профилю учебной деятельности колледжами (это информационные технологии, экономика, сфера обслуживания, аграрный, легкая промышленность, бизнес, машиностроение, связь и т. д.), что создает определенную специфику в преподавании математики;

– *во-вторых*: в ИИТ БГУИР имеют право поступать выпускники 14 специальностей колледжей по различным направлениям образования с различными учебными программами по математическим дисциплинам;

– *в-третьих*: вступительная кампания в различные колледжи отличается по проходному баллу (в том числе и по математической подготовке абитуриентов);

– *в-четвертых*: на обучение в университете по сокращенной форме поступают абитуриенты с различным сформированном уровнем математической грамотности. Указанные исходные условия создают объективные трудности в обучении математическим дисциплинам студентов сокращенного срока обучения, что должно учитываться в организуемом математическом образовании.

Опираясь на социальные, методологические, педагогические аспекты профессионального образования, исходные условия для уровня математической грамотности студентов сокращенного срока обучения, кафедра физико-математических дисциплин (ФМД) ИИТ БГУИР математическое образование реализует с определенными особенностями.

Прежде всего кафедрой ФМД осуществляется предварительная подготовка учащихся колледжей для будущего математического образования в университете. Разработана типовая программа по математике [3] для всех специальностей на уровне среднего специального образования (ССО). Она является сейчас основой для подготовки учебных программ в колледжах по предмету «Математика в профессиональной деятельности». В нее включены необходимые разделы по алгебре и геометрии, математическому анализу, теории вероятностей и статистике. Для обеспечения математического образования на актуальных для ИИТ БГУИР специальностях ССО разработаны и изданы с грифом Министерства образования учебные пособия [4] и [5]. Первое из них содержит теоретические сведения, решенные типовые примеры, подборку заданий для решения трех уровней сложности. Эта книга может также использоваться в обучении на заочной форме сокращенного срока. Во второй книге представлен материал для практических занятий по теории вероятностей и математической статистике, где имеется система из 30 заданий по всем темам программы с решениями типовых задач.

Начиная с 2025/2026 учебного года, согласно Приложению к постановлению Министерства образования Республики Беларусь от 01.11.2022 № 412 (в редакции постановления от 08.12.2024 № 3178), обучение на специальностях ИИТ БГУИР организуется на протяжении трех лет (вместо четырех ранее).

Такое сокращение периода обучения в университете привело к анализу учебных планов и учебных программ колледжей для их интеграции с новыми учебными планами ИИТ БГУИР. В настоящее время, в частности, математический анализ студенты изучают только в первом семестре (ранее – в течение двух семестров). Сокращенный срок обучения на заочной форме вынуждает выработать схему преподавания математических дисциплин. Для полноты представления содержания избран подход, когда на лекционных занятиях дается учебный материал (теория и практика) по одним разделам, а на практических – по другим. Кроме этого, студентам предлагается изучить самостоятельно некоторые разделы.

Для эффективного управления процессом обучения используется система электронного обучения (СЭО) на платформе MOODLE. В ней размещены вопросы для экзаменов, теоретическая информация, содержание контрольных работ, методические указания. Каждый студент может использовать эти материалы самостоятельно.

В преподавании математической дисциплины приходится анализировать последовательность изложения разделов математики. Например, по математическому анализу апробируется ситуация, когда вначале для изучения предлагаются разделы «Пределы последовательности и функции» и «Ряды». Как правило, вторая тема изучается студентами в числе последних в курсе. Но первый опыт преподавания показывает, что указанная перестановка создает основу более эффективного и быстрого усвоения этих двух взаимосвязанных разделов.

Следует отметить, что организация обучения согласно принципу непрерывности является экономически обусловленной, она рассматривается как перспективная в государственном масштабе. Ее преимущества состоят в том, что преодолевается дублирование при изучении программного материала на разных стадиях, повышается уровень теоретического и практического изучения специальных дисциплин. Это касается и обучения математике. Кроме того, непрерывность образования является перспективной и с точки зрения отдельно взятой личности, так как молодым людям обеспечивается широкий выбор индивидуальных образовательных траекторий и для них сокращаются сроки получения высшего профессионального образования.

## Список литературы


1 **Анисимов, О. С.** Методологическая культура педагогической деятельности и мышления / О. С. Анисимов. – М. : Экономика, 1991. – 415 с.

2 **Чапаев, Н. К.** Педагогическая интеграция: методология, теория, технология / Н. К. Чапаев. – Екатеринбург : Изд-во Рос. гос. проф.-пед. ун-та, 2004. – 297 с.

3 Типовые учебные программы по учебной дисциплине «Математика» для учреждений образования, реализующих образовательные программы среднего специального образования (на основе общего базового образования и общего среднего образования) : утв. постановлением М-ва образования Респ. Беларусь от 28.11.2014 г. № 166 / сост. Л. И. Майсеня, Т. П. Вахненко, И. Ю. Мацкевич. – Минск : РИПО, 2015. – 132 с.

4 Математика в примерах и задачах : учеб. пособие / Л. И. Майсеня, В. Э. Жавнерчик, И. Ю. Мацкевич [и др.]; под. общ. ред. Л. И. Майсени. – Минск : Выш. шк., 2022. – 454 с.

5 **Мацкевич, И. Ю.** Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / И. Ю. Мацкевич, Н. П. Петрова, Л. И. Тарусина / Республиканский институт профессионального образования. – Минск : РИПО, 2017. – 199 с. – ISBN 978-985-503-711-9.

УДК 37.091.212:51

# АНАЛИЗ ЗНАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ АБИТУРИЕНТОВ И СТУДЕНТОВ ПЕРВОГО КУРСА

*Ю. А. ПШЕНИЧНОВ, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК*
*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

Математика – это не просто набор формул и задач, это язык, на котором говорит весь технический мир, и без него невозможно двигаться вперед.

Законы физики описываются математическими уравнениями. Чтобы понять, как работает мир вокруг нас, нужно уметь читать и интерпретировать эти уравнения.

Алгоритмы, структуры данных, оптимизация – все это требует математического мышления. Даже простая задача в коде может иметь под собой глубокие математические корни.

Расчеты прочности, проектирование конструкций, анализ сигналов – без точных математических расчетов невозможно создать надежные и эффективные технические решения.

Теория информации, криптография, машинное обучение – эти области буквально построены на математических моделях.

Математика учит мыслить последовательно, анализировать проблемы, разбивать их на более мелкие части и находить оптимальные решения.

Технический университет готовит студентов к решению реальных инженерных и научных задач. Математика предоставляет необходимый набор эффективных инструментов: создание математических моделей для описания и прогнозирования поведения сложных систем, минимизация затрат или максимизация эффективности, анализ, обработка и интерпретирование больших объемов информации, чтобы принимать обоснованные технические и управленческие решения.

Такая передовая технология, как искусственный интеллект, основана на сложных математических концепциях.

Успешность изучения студентами математики в техническом университете зависит от уровня знаний по математике, полученных абитуриентом в средней школе.

Завершение средней школы, прохождение централизованного тестирования (ЦТ) и первая экзаменационная сессия в университете – это три ключевых этапа, на которых оцениваются знания абитуриента и студента. Итогом этих этапов становятся средний балл аттестата, результаты ЦТ и средний балл первой сессии.

Сравним результаты по математике на ЦТ абитуриентов, поступивших в БелГУТ в 2022 году, с результатом первой экзаменационной сессии.

Построим диаграмму рассеивания (разброса), изображающую значения баллов при ЦТ (выборка *X*) и первой экзаменационной сессии (выборка *Y*) в виде точек на декартовой плоскости для трех лет.

Для 2022 года выборки включают 44 элемента.

С использованием математического пакета *Mathcad* был проведен регрессионный анализ. Рассчитанное уравнение линейной регрессии и значение коэффициента корреляции Пирсона ($r$ = 0,653, $p$ < 0,05) свидетельствуют о статистически значимой умеренной положительной связи между выборками *X* и *Y*.

Результаты регрессионного анализа выборок *X* и *Y* для 2022 года размером 44 элемента представлены на диаграмме рассеивания (рисунок 1).

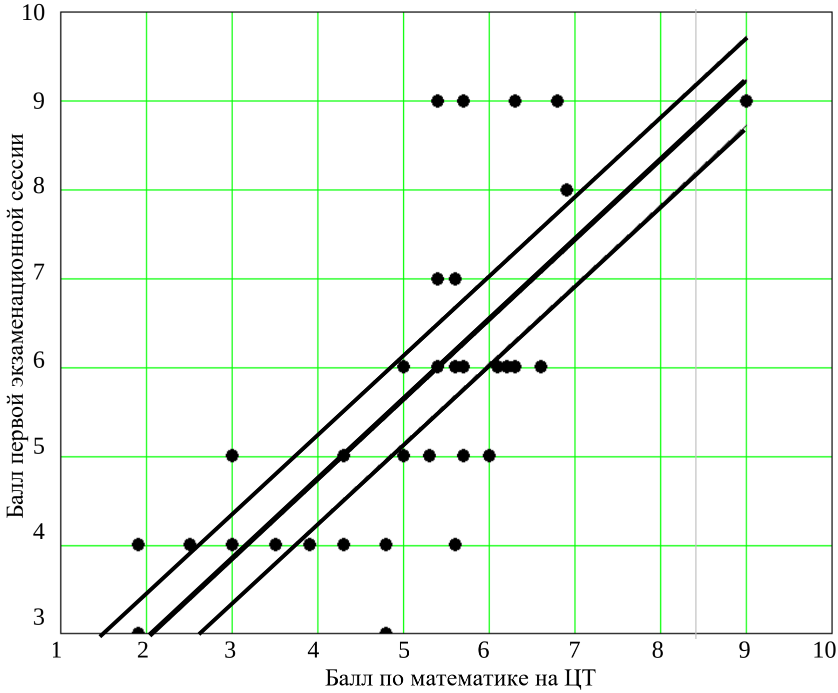


Рисунок 1 – Диаграмма рассеивания *X* и *Y* в 2022 учебном году

Точка на диаграмме имеет координаты $x_i$ и $y_i$, где $i$ – номер студента в выборках ($i$ = 1...44). Наблюдается большой разброс точек. Средняя прямая линия проведена согласно линейному уравнению регрессии.

Из диаграммы рассеивания видно, что высоким значениям балла от 7 до 9 первой экзаменационной сессии соответствуют значения балла от 5,5 до 7 на ЦТ.

Можно предположить, что студент, набравший на централизованном тестировании $x$ баллов и получивший на первой сессии средний балл $y$, рассчитанный по формуле $y = ax + b$ (линия тренда), учился в первом семестре в соответствии со своими способностями. Линия тренда разделяет всех студентов на две группы. Те, чьи результаты на сессии оказались выше, чем на тестировании, попадают в верхнюю часть. Студенты из нижней части, напротив, показали на сессии результаты ниже своих способностей, продемонстрированных на централизованном тестировании.

Принимая погрешность полученного балла первой экзаменационной сессии равным ±0,5 балла, проведем на диаграмме рассеяния две линии, параллельные линии тренда, смещенные вверх и вниз на 0,5 балла.

Анализ диаграммы рассеивания показывает, что две линии разделяют совокупность точек на три зоны. Исходя из этого, всех студентов после первого семестра можно сгруппировать следующим образом:

– студенты, продемонстрировавшие на экзаменах баллы, значительно превышающие результаты централизованного тестирования;

– студенты, чьи результаты в пределах погрешности ±0,5 балла соответствовали их академическим возможностям;

– студенты, академическая успеваемость которых в первом семестре оказалась существенно ниже их потенциальных возможностей.

На основе разработанной модели для каждой студенческой группы были автоматически сформированы списки студентов, которые, по прогнозам, в первом семестре не полностью реализовали свой потенциал. Эти списки предназначены для проведения более эффективной индивидуальной воспитательной работы.

Диаграмма рассеивания для выборок $Z$ (средний балл школьного аттестата) и $X$ для 44 школьников показана на рисунке 2.

Коэффициент корреляции Пирсона ($r = 0{,}52$, $p < 0{,}05$) свидетельствует о статистически значимой умеренной положительной связи между выборками $X$ и $Z$.

Из диаграммы рассеяния видно, что имеет место значительное расхождение между средним баллом аттестата и баллом по математике на ЦТ. Так, например, баллу 7 соответствует баллы от 1,9 до 6.

По данным выборкам среднее значение баллов по выборке $X$ составило 5,08, а по выборке $Z$ – 7,18, т. е. более чем на 2 бала выше.

Возможно, это связано как с несовершенством ЦТ, так и с низким уровнем знаний, полученным в средней школе значительной частью школьников. Кроме того, в разных школах требования к учащимся могут существенно отличаться.

Заметим, что выборка $Z$ относится к среднему значению оценок аттестата, а не к оценке по математике.

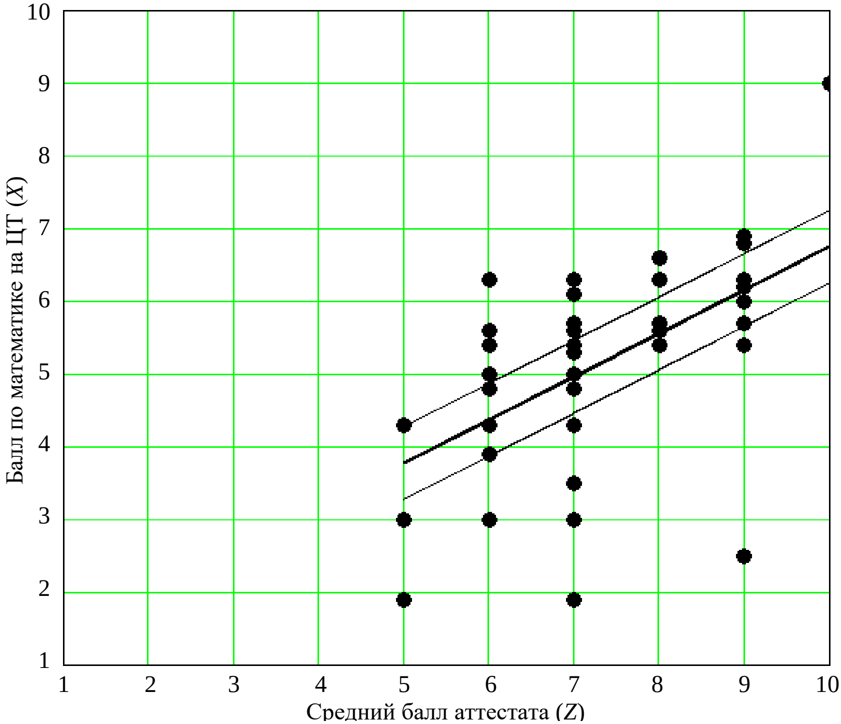


Рисунок 2 – Диаграмма рассеивания для выборок *Z* и *X*

УДК 373.57

## О ПОДГОТОВКЕ БУДУЩИХ СТУДЕНТОВ

*Д. Н. СИМОНЕНКО*
*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

Для поступления в университет достаточно хорошо сдать ЦЭ или ЦТ. Однако это совсем не готовит будущих студентов к изучению высшей математики, к пониманию цепочки логических умозаключений, приводящих к доказательству теорем. К умению применять теоретические знания на практике. К необходимости заучивать некоторый материал наизусть, как например таблицу производных, таблицу интегралов. То есть, мало поступить в университет, в нем потом еще надо и учиться. Не все студенты это понимают. Более того, многие студенты не умеют это делать. Они ждут, что знания им просто вложат в голову.

Чтобы такой проблемы не было, уже в школе будущих студентов надо «учить учиться». Показывать, как правильно работать с литературой, как оформлять свои работы. Как правильно аргументировать свое мнение и адекватно воспринимать аргументы оппонента. Именно поэтому сейчас стала довольно популярным направлением исследовательская деятельность школьников. Она представлена различными конференциями школьников, турнирами юных математиков. Так, с 1997 года проводится Республиканский турнир юных математиков. В Гомеле с 2011 года ежегодно проводится Областной турнир юных математиков. Также проводятся Международный турнир юных математиков, Санкт-Петербургский открытый турнир юных математиков и многие другие. В отличие от олимпиады, турниры юных математиков – командные соревнования учащихся. Школьники соревнуются в умении решать математические задачи исследовательского характера, грамотно и убедительно представлять полученные результаты, аргументировано отстаивать свою точку зрения в публичных дискуссиях. Это развивает в первую очередь не умение решить задачу, а способность работать над задачей достаточно долгое время. Сначала нужно изучить литературу, позволяющую решать подобные задачи. Требуется поискать в интернете ответы на некоторые вопросы, поставленные в задаче. И только изучив необходимую теорию, школьник приступает непосредственно к решению. Но опять же, найденное решение требуется грамотно оформить. Это очередной этап подготовки школьника. В будущем ему пригодится это умение. В идеале первые шаги в этом направлении учащийся проходит вместе с руководителем, в дальнейшем руководитель только просматривает оформленную работу, внося, возможно, небольшие правки. Ну и конечно же, умение в споре отстоять верность своего решения, найти правильные аргументы формирует у будущего студента уверенность в своих силах и умение правильно вести диалог. В целом трудно переоценить важность такой подготовки.

Еще более серьезными в плане развития будущего студента выступают различные конференции школьников. Упомянем лишь некоторые из них. Это и Республиканский конкурс работ исследовательского характера (конференция) учащихся по астрономии, биологии, информатике, математике, физике, химии, и Гомельская областная научно-практическая конференция «Поиск», и Балтийский научно-инженерный конкурс, и Международная конференция юных ученых (ICYS), и Республиканская научно-практическая конференция-конкурс научно-исследовательских работ учащихся средних, средних специальных учебных заведений и студентов вузов «От Альфа к Омеге…» проходящая в Гродно, и международная научно-практическая конференция «Первые шаги в науку» в Брянске, и многие другие. В отличие от турниров юных математиков, тему исследования учащийся определяет сам, со своим руководителем. Так что задачу можно выбирать для учащегося максимально актуальную. В настоящее время одной из наиболее распространенных тем исследования являются графы. Так, на прошедшем в этом году Республиканском конкурсе работ исследовательского характера учащихся по математике дипломом первой степени были награждены две работы. Это «О бесконечности числа F-иррегулярных графов в классе турниров {F}» под авторством Филюты Егора Витальевича и Лукашенко Ильи Денисовича, а также «Авиапутешественник и N городов» под авторством Халапсиной Арины Антоновны. Обе работы выполнены учащимися г. Гомеля и в них исследуются определенные виды графов. Дипломом второй степени было отмечено три работы: «Разноцветные отрезки» Голенкина Александра Михайловича, «Чисел $\pi$ много не бывает» Зинина Дениса Владимировича, «Математический калейдоскоп» Вериго Ольги Васильевны. И опять это работы школьников из Гомеля. Также в Гомель отправились два диплома третьей степени и два похвальных отзыва.

Пройдя такую школу, будущие студенты смогут достигнуть многого, они будут чувствовать себя уверенно при разборе сложных тем, и их успеваемость, наверняка, будет на высоте.

УДК 378.14

## ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В УСЛОВИЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ (КОЛЛЕДЖ – УНИВЕРСИТЕТ)

*О. В. ФИЛИПЕНКО*
*Белорусско-Российский университет, г. Могилев*

В условиях рыночных отношений с каждым годом повышаются требования к профессиональной подготовке студентов. Экономике Республики Беларусь необходимы высококвалифицированные специалисты, которые обладают фундаментальными профессиональными знаниями, востребованными в выбранной профессии. Анализ учебных программ учреждений высшего образования технического профиля показал, что содержание математического образования является обязательной частью содержания профессионального образования технических специальностей. В связи с этим актуальна проблема качественной математической подготовки будущих инженеров в условиях непрерывности профессионального образования.

Рассмотрим подготовку инженеров технического профиля в системе «колледж – университет» заочной формы получения высшего образования.

Сконцентрируем внимание на специальности 5-04-0612-02 «Разработка и сопровождение программного обеспечения информационных систем (среднее специальное образование)» и специальности 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии (высшее образование)», для которой важна качественная математическая подготовка. Г. В. Дорофеев раскрывает значимость математических знаний для развития каждого учащегося. Он отмечает важность развивающей функции образования для формирования качеств мышления каждого учащего, которые необходимы ему в процессе становления личности: «… главной задачей обучения математике становится … общеинтеллектуальное развитие – формирование у учащихся в процессе изучения математики качеств мышления, необходимых для полноценного функционирования человека в современном обществе …» [1, с. 14]. Значимость математического образования для учащихся учреждений среднего специального образования (учащихся колледжа) отмечена в работе выдающегося белорусского ученого Л. И. Майсени: «целенаправленное, систематическое обучение математике формирует у учащихся (и будущих выпускников) личностные качества, которые необходимы в дальнейшем специалисту для успешного функционирования в существующем постиндустриальном обществе. Математическое образование имеет все возможности, чтобы предстать особо значимым для формирования профессиональной компетентности специалистов-техников» [2, с. 49]. Для учащихся колледжа очень важна качественная математическая подготовка. А. Ф. Салимова, С. Н. Штанов подчеркивают: «Математика по сути является первой базовой дисциплиной в профессиональной подготовке рабочих нового поколения, которая предоставляет аппарат и математический символьный язык для дальнейшего успешного изучения дисциплин естественно-научного, общепрофессионального и специального циклов» [3, с. 822]. Учебный план специальности 5-04-0612-02 «Разработка и сопровождение программного обеспечения информационных систем» среднего специального образования предусматривает изучение учебного предмета «Математика» общеобразовательного компонента в объеме 240 часов (курс математики общего среднего образования, т. е. содержание учебных программ 10–11 классов) и учебного предмета «Математика в профессиональной деятельности» (высшая математика) государственного компонента в объеме 190 часов. Это создает фундамент для дальнейшего формирования профессиональной компетентности студентов специальности 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии». А. И. Митюхин [4, с. 23] отмечает, что при подготовке специалистов информационных и технических специальностей на уровне высшего образования математические дисциплины образуют базис для развития инновационных технологий. Л. Д. Кудрявцев в работе [5, с. 80] актуализирует значимость математического образования при подготовке специалистов высшего образования. При этом совершенствование математического образования он видит в «… необходимости усиления прикладной направленности курса математики и повышения уровня фундаментальной математической подготовки» [5, с. 82]. Значимость математики для качественной подготовки инженеров отмечена в работах [6–9].

Для студентов специальности 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии» заочной формы обучения математическая компетентность, сформированная в процессе обучения в колледже, входит в состав профессиональной компетентности, которая формируется в процессе обучения в университете. В связи с этим актуальность приобретает проблема качественной математической подготовки студентов колледжа, которые в последующем станут инженерами-программистами.

В системе профессионального образования в качестве ведущего подхода на законодательном уровне признан компетентностный подход [10]. Обращаясь к системе подготовки инженеров-программистов заочной формы обучения (колледж – университет), заключаем, что для формирования математической компетентности учащихся колледжа в рамках реализации компетентностного подхода востребован принцип профессиональной направленности обучения математике. Это дает возможность ликвидировать разрыв между математической теорией и производственной практикой посредством систематического выполнения профессионально ориентированных заданий. С этой целью для уровня среднего специального образования разработано и внедрено в практику обучения математике учебное пособие «Математика», допущенное Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для учащихся учреждений, реализующих образовательные программы профессионально-технического и среднего специального образования [11]. Оно содержит главу «Профессионально ориентированные задачи», в которой представлены задания, актуальные для будущей профессиональной деятельности выпускников. Решение таких задач на занятиях по математике способствует формированию ценностно-мотивационного компонента математической компетентности учащихся колледжа. При решении профессионально ориентированных задач учащиеся приобретают и реализуют умения: переводить условие задачи на язык математики, т. е. исходя из данных строить математическую модель; выбирать математический аппарат для решения задач; переводить результат решения математической задачи в практическую плоскость, т. е. оценивать результат (проверять его на соответствие области применения). Решение таких задач позволяет продемонстрировать учащимся значимость математики в их будущей профессиональной деятельности, что в свою очередь способствует формированию у них личностных смыслов, связанных с контекстом будущей профессии. Сформированный в процессе обучения математике ценностно-мотивационный компонент математической компетентности учащихся колледжа дает возможность студентам университета осознавать значимость качественной математической подготовки в процессе дальнейшего обучения математике на уровне высшего образования.

### Список литературы


1 **Дорофеев, Г. В.** Математика для каждого / Г. В. Дорофеев ; [предисл. Л. Д. Кудрявцева]. – М. : Аякс, 1999. – 391 с. – (Наука для каждого).

2 **Майсеня, Л. И.** Математическое образование в средних специальных учебных заведениях: методология, содержание, методика / Л. И. Майсеня. – Минск : БГУИР, 2011. – 303 с.

3 **Салимова, А. Ф.** Роль опережающего математического образования в профессиональной подготовке специалистов-техников / А. Ф. Салимова, С. Н. Штанов // Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования : тезисы докл. Междунар. науч.-образоват. конф., г. Москва, 23–27 марта 2009 г. – М., 2009. –С. 822–824.

4 **Митюхин, А. И.** Модернизация в преподавании и обучении математике в IT-университете / А. И. Митюхин // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Гомель, 25 окт. 2019 г. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп.; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2019. – С. 22–25.

5 **Кудрявцев, Л. Д.** Современная математика и ее преподавание : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев. – 2-е изд., доп. – М. : Наука, 1985. – 176 с.

6 **Авакян, Е. З.** О проблемах качества математической подготовки в техническом вузе = About problems of quality of mathematical education at technical university / Е. З. Авакян, М. В. Задорожнюк, С. М. Евтухова // Инженерное образование в цифровом обществе : материалы Междунар. науч.-метод. конф., г. Минск, 14 марта 2024 г. : в 2 ч. Ч. 2 / Белорус. гос. ун-т информатики и радиоэлектроники ; редкол.: Е. Н. Шнейдеров, В. Р. Стемпицкий, Н. И. Листопад [и др.]. – Минск, 2024. – С. 299–301.

7 **Ерошевская, Е. Л.** Математическая подготовка инженеров в контексте развития системы образования / Е. Л. Ерошевская // Дорожное строительство и его инженерное обеспечение : материалы Междунар. науч.-техн. конф. / редкол.: С. Е. Кравченко (гл. ред.), А. В. Вавилов, В. А. Гречухин [и др.] ; сост. В. А. Ходяков. – Минск : БНТУ, 2021. – С. 238–240.

8 **Романчик, В. С.** Какое математическое и компьютерное образование необходимы в ИТ / В. С. Романчик // Трансформация механико-математического и IT-образования в условиях цифровизации = Transformation of the mechanical-mathematical and IT-education in the context of digitalization : материалы Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 65-летию мех.-мат. ф-та, Респ. Беларусь, Минск, 26–27 апр. 2023 г. : в 2 ч. Ч. 2. : науч. электрон. изд. / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: Н. В. Бровка (гл. ред.), В. В. Казаченко, С. В. Абламейко [и др.]. – Минск, 2023 – С. 86–91. – URL: https: //elib.bsu.by/bitstream/123456789/300741/1/Трансформация%20мех%20мат%20образования%20ч%202%202023.pdf (дата обращения: 08.05.2025).

9 **Воронов, М. В.** Методические аспекты обеспечения информационно-математической подготовки / М. В. Воронов // Трансформация механико-

математического и IT-образования в условиях цифровизации = Transformation of the mechanical-mathematical and IT-education in the context of digitalization : материалы Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 65-летию мех.-мат. ф-та, Респ. Беларусь, Минск, 26–27 апр. 2023 г. : в 2 ч. Ч. 2. : науч. электрон. изд. / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: Н. В. Бровка (гл. ред.), В. В. Казаченко, С. В. Абламейко [и др.]. – Минск, 2023. – С. 32–36. – URL: https://elib.bsu.by/bitstream/123456789/300741/1/Трансформация%20мех%20мат%20образования%20ч%202%202023.pdf (дата обращения: 11.01.2025).

10 Концепция развития системы образования Республики Беларусь до 2030 года : постановление Совета Министров Респ. Беларусь от 30 нояб. 2021 г. № 637 // Национальный правовой Интернет-портал Республики Беларусь. – URL: https://pravo.by/document/?guid=12551&p0=C22100683 (дата обращения: 20.08.2025).

11 **Филипенко, О. В.** Математика : учеб. пособие / О. В. Филипенко. – Минск : РИПО, 2019. – 268 с.

# РАЗВИТИЕ СОДЕРЖАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТАХ. МЕТОДИКИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

УДК 378+004

## ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ В РАМКАХ МОДЕЛИ СМЕШАННОГО ОБУЧЕНИЯ

*Е. А. БАРКОВА, Л. П. КНЯЗЕВА, Н. В. КНЯЗЮК*
*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск*

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники согласно приказу Министерства образования Республики Беларусь от 13.08.2024 № 345 «Об экспериментальной и инновационной деятельности в 2024/2025 учебном году» принимает участие в экспериментальном проекте «Апробация адаптивной модели использования ИКТ в образовательной деятельности учреждения высшего образования» длительностью 5 лет (с 01.09.2024 по 30.06.2029). Целью проекта является создание и апробация адаптивной модели использования ИКТ в образовательной деятельности УВО, базирующейся на множестве критериев, условий, технологий и технических средств. Реализация такой модели позволит выстроить систему мотивации субъектов образовательного процесса с обратной связью, а также систему подходов к использованию ИКТ в основной деятельности УВО.

Данный проект является закономерным продолжением экспериментального проекта 2020–2024 гг. «Апробация смешанной модели обучения по ИТ-специальностям», выполняемого в соответствии с Концепцией цифровой трансформации процессов в системе образования Республики Беларусь на 2019–2025 годы [1], в котором сотрудники кафедры высшей математики принимали активное участие. В рамках проекта преподавателями кафедры совместно с Центром развития дистанционного образования БГУИР была реализована смешанная модель обучения для фундаментального курса высшей математики и специальных курсов «Основы машинного обучения» и «Численные методы». На модульной объектно-ориентированной учебной платформе MOODLE были созданы и размещены в системе электронного обучения (СЭО) БГУИР электронные образовательные ресурсы (ЭОР) по указанным дисциплинам, включающие теоретические материалы, лабораторные работы и индивидуальные практические работы, выполняемые с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ) в асинхронном режиме.

Анализ результатов применения модели смешанного обучения при преподавании цикла математических дисциплин для студентов как дневной, так и дистанционной форм получения образования подтвердил эффективность разработанных ЭОР и показал, что их использование повышает качество математического образования и формирует математическую компетентность специалиста в области IT-технологий [2]. Поскольку освоение студентами программ специальных курсов в практической части предполагает использование программных комплексов (СКА Mathematica и др.) и языков программирования (Python, Java, C++), то проведение таких видов занятий в больших группах признано методически неэффективным. В рамках модели смешанного обучения практические занятия по специальным курсам в течение трех лет проводились в виде лабораторных работ с применением дистанционных образовательных технологий. Часть лабораторной работы проводилась в очном формате в составе подгруппы, защита выполненной работы – в составе группы [3].

В текущем 2025/2026 учебном году в рамках выполняемого экспериментального проекта с целью повышения мотивации студентов и их вовлечённости в учебный процесс предлагается проводить лабораторные работы следующим образом: консультирование по вопросам выполнения работ, их выполнение, предоставление и рецензирование отчетов проходит в дистанционном формате, в очном – только защита выполненных работ. Такое сочетание аудиторной и дистанционной форм проведения занятий позволит адаптировать обучение к влиянию различных ограничивающих факторов и обеспечить более гибкий и доступный учебный процесс. Предлагаемый подход позволит эффективно использовать как время преподавателя, так и время студента за счет отсутствия ожидания проверки работы в аудитории, сократит время получения обратной связи от ППС, повысит ответственность всех участников процесса обучения за счет протоколирования работы ППС и студента в СЭО.

### Список литературы

1 Концепция цифровой трансформации процессов в системе образования Республики Беларусь на 2019–2025 годы : утв. М-вом образования Респ. Беларусь 15 марта 2019 г. – URL: giac.by›upload/documents/koncepcia.docx (дата обращения: 20.09.2025).

2 **Баркова, Е. А.** Анализ результатов применения модели смешанного обучения при преподавании цикла дисциплин «Математика» в БГУИР / Е. А. Баркова,

Л. П. Князева // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля : материалы VI Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 18 апр. 2024 г. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, БелГУТ; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель, 2024. – С. 54–57.

3 **Баркова, Е. А.** Реализация модели смешанного обучения при преподавании дисциплины «Численные методы / Е. А. Баркова, Л. П. Князева, Т. С. Степанова // Высшее техническое образование: проблемы и пути развития : материалы XI Междунар. науч.-метод. конф., Минск, 24 нояб. 2022 г. / Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники. – Минск, 2022. – С. 10–13.

УДК 378.147

# ОБ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ В УНИВЕРСИТЕТЕ

*В. В. БУРАКОВСКИЙ*
*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,*
*Республика Беларусь*

Отдельными аспектами в обучении студентов дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» [1, с. 4] являются грамотное планирование и организация самостоятельной работы. Они, несомненно, способствуют успешному освоению материала и получению высоких оценок на экзамене. Организация методической работы преподавателя совместно с самостоятельной работой студентов играет важную роль в учебном процессе. Важно обеспечить четкую структуру и эффективное взаимодействие всех участников образовательного процесса для достижения успеха в изучении данного курса. Студенты должны чувствовать поддержку и понимание. Для обеспечения успешной сдачи экзамена необходимо, чтобы преподаватель четко сформулировал требования заранее. Это поможет студентам понять, на что им следует обращать внимание при подготовке. Кроме того, опытному преподавателю важно не только предоставить материалы и методические указания, но и создать поддерживающую атмосферу для обучения, что со своей стороны мотивирует студентов к активному участию в учебном процессе.

Важно помнить, что успешная подготовка к экзамену – это не только заслуга студентов, но и результат работы преподавателя, который вложил усилия в формирование правильного образа мышления и подхода к изучаемому материалу. Базовые требования предполагают регулярное выполнение домашних заданий в письменной форме, сдачу теоретических коллоквиумов, выполнение нескольких контрольных работ, прохождение итоговых тестов.

Для того чтобы повысить активность студентов в течение учебного семестра, преподаватель предлагает им заранее вопросы для коллоквиумов и внедряет систему текущего контроля. Эти меры способствуют стимулированию регулярной самостоятельной работы. Кроме того, проводятся два коллоквиума по теории вероятностей, в рамках которых студентам предлагается по 7 теоретических вопросов из общего списка, предоставленного в начале семестра для подготовки к экзамену. Письменный формат коллоквиумов позволяет студентам объективно оценить результаты своей работы, что способствует развитию навыков самоконтроля и саморегуляции. В случае успешной сдачи за каждый коллоквиум начисляется по 0,5 балла, которые прибавляются к итоговой экзаменационной оценке, что значительно стимулирует заинтересованность студентов в изучении теоретического материала.

Проводятся также две контрольные работы по заданиям, которые аналогичны приведенным в [2, с. 5], позволяющие оценить умения и навыки решения текстовых задач по теории вероятностей. По каждой контрольной работе выставляется оценка, которая напрямую влияет на экзаменационную.

По математической статистике также предлагаются теоретические вопросы, а также 6 лабораторных работ из [3, с. 4; 4, с. 3]. Прием лабораторных работ осуществляется путем сплошного устного опроса. Поскольку обучающиеся получают различные варианты работ, это позволяет индивидуализировать их самостоятельную работу, а обратная связь дает возможность преподавателю анализировать качество усвоения учебной информации студентами и выявить пробелы в знаниях.

Для успешного выполнения самостоятельной работы студентам важно учитывать не только реальное количество доступного времени, но также осознанно распределять его между учебным процессом под наблюдением преподавателя и индивидуальной работой. Кроме того, наставнику важно не только качественно представить материал, но и научить студентов использовать наиболее эффективные стратегии самостоятельной работы. Это поможет выровнить их уровень подготовки и даст возможность развиться в квалифицированных специалистов. Разумное распределение времени между учебой под руководством преподавателя и индивидуальной работой является ключом к успеху в самостоятельной учебе и развитии профессиональных навыков.

**Список литературы**

1 **Бураковский, В. В.** Основы высшей математики / В. В. Бураковский, Т. В. Бородич. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2012. – 34 с.

2 **Бураковский, В. В.** Теория вероятностей и математическая статистика: лабораторный практикум : в 2 ч. Ч. 1 / В. В. Бураковский. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2002. – 52 с.

3 **Бураковский, В. В.** Теория вероятностей и математическая статистика : лабораторный практикум : в 2 ч. Ч. 2 / В. В. Бураковский, Н. М. Курносенко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 39 с.

4 **Бураковский, В. В.** Лабораторный практикум по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов математического и экономического факультетов / В. В. Бураковский. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 1993. – 42 с.

УДК 378.1:517

# ТЕОРИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ: СТРУКТУРНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И ДРУГИЕ СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

*Л. Л. ВЕЛИКОВИЧ*
*Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Республика Беларусь*

Труднее всего увидеть очевидное и поймать его за «хвост».
*Из научного фольклора*

## 1 Некоторые начальные сведения и установки

Целью теории решения задач (ТРЗ) является исследование закономерностей процесса поиска решения задач с последующей их формализацией. Как правило, сам процесс поиска решения задачи можно представить в следующем виде:

1 Чтение условия задачи.

2 Первичный анализ (что дано, требуемый конечный результат (ТКР), очевидные связи), цель которого – осознание условия задачи.

3 Попытка создания пилотного сценария [1, с. 78–79] посредством гипотетической интроспекции [2, с. 32–33] с последующим его анализом на пригодность. Здесь возможны три подхода: глобальный, локальный и комбинированный. Хорошей иллюстрацией разделения на глобальный и локальный подходы могут служить две схемы применения интегрального исчисления. Так, при глобальном подходе мы составляем интегральную сумму, скажем, для всего отрезка интегрирования, а при локальном – достаточно составить соотношение между дифференциалами рассматриваемых величин на отдельной малой части нашего отрезка.

В большинстве случаев, конечно, используется комбинированный подход, когда мы практически одновременно работаем как со всей задачей, так и с ее частями (фрагментами) (см. далее задачу 2).

В завершение этой части статьи расшифруем некоторые термины, используемые в дальнейшем.

*Объект* – основное неопределяемое понятие математики.

*Информация* – совокупность фактов.

*Факт* – высказывание о наличии связи между объектами.

*Связь* – основное неопределяемое понятие ТРЗ.

*Теоретическое положение*: информация передается только через связь.

*Ситуация* – совокупность объектов и связей между ними (молекулярный объект).

*Связная пара* – минимальная ситуация, состоящая из двух объектов и связи между ними (в терминологии теории графов – это ребро).

**2 Структурная схема решения задач (ССРЗ)**

Внутри данной конкретной задачи удобно произвести следующую классификацию объектов по их роли (функции), которую они будут исполнять в дальнейшем.

I *Базовые объекты*. Их опять удобно разделить:

1) на атомарные объекты, примерами которых являются числа, точки, прямые, плоскости, буквы;

2) молекулярные объекты. Они конструируются из атомарных объектов. Это – аксиомы, определения, теоремы, паттерны различных типов (стандартные ситуации).

II *Объекты-посредники*, играющие роль связей (в терминологии (I, T, S)-анализа – это инструменты (tools)) [2, с. 12–13]. Примерами могут служить операции, отношения (скажем, отношение принадлежности: $a \in A$), сами базовые объекты, например: $\left.\begin{matrix} a > b \\ b > c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a > c.$ Очевидно, здесь число $b$ выступает в качестве объекта-посредника.

Теперь, собственно, займемся описанием ССРЗ, которую можно рассматривать как попытку (надеюсь, удачную) формализации процесса поиска решения задачи (ну и, конечно, самого решения).

*Определение.* ССРЗ будем называть некоторую совокупность структурных единиц, объединенных общей целью достижения ТКР и соединенных последовательно или параллельно.

Теперь поговорим о строении самой структурной единицы. Она включает четыре элемента: объект, челнок, стрелу, мешок (в моей терминологии) (рисунок 1).

*Comments.*

**а)** $t_1, t_2, \ldots$ – инструменты (объекты-посредники);

**б)** 1, 2, 3, 4 – базовые объекты;

**в)** $I_1, I_2, \ldots$ – информация (удобно мыслить, что мы ее складываем в мешки).

Как работает структурная единица и вся схема? Приведем соответствующий алгоритм.

*Comments.*

**а)** $t_1$, $t_2$, … – инструменты (объекты-посредники);

**б)** 1, 2, 3, 4 – базовые объекты;

**в)** $I_1$, $I_2$, … – информация (удобно мыслить, что мы ее складываем в мешки).

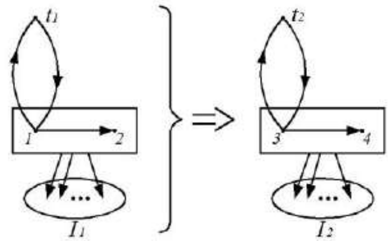


Рисунок 1

Как работает структурная единица и вся схема? Приведем соответствующий алгоритм.

***Ш1.*** Находим базовый объект, который кажется нам перспективным (на рисунке это объект № 1).

***Ш2.*** Для нахождения второго объекта в связной паре (1→2) выходим в информационную базу задачи (ИБЗ) по восходящей дуге (1, $t_1$) челнока в поисках подходящего инструмента $t_1$. Предположим, что нам удалось его найти.

***Ш3.*** Возвращаемся к нашему объекту № 1 по нисходящей дуге ($t_1$,1) челнока и производим соответствующее действие, результатом которого должна быть связная пара (1→2) (именно ее я называю *стрелой*).

***Ш4.*** Добываем из нее максимальное количество информации.

***Ш5.*** Ищем новый базовый объект (см. № 3).

*Примечание 1* – В «челноке» каждый из элементов допускает наглядную интерпретацию в рамках (I, T, S)-анализа. А именно: восходящая дуга соответствует ситуации-идее (это – идея), а нисходящая дуга, т. е. применение инструмента к объекту № 1 (операция) – это шаг в (I, T, S)-анализе.

*Примечание 2* – При создании «челнока» мы сталкиваемся с самой высокой степенью неопределенности. *Во-первых*, надо выбрать объект № 1 (это может быть сразу вся задача или ее часть) и это – главное достижение, если он удачно выбран. *Во-вторых*, надо подобрать необходимый объект-посредник (инструмент), чтобы с его помощью по объекту № 1 найти объект № 2. *В-третьих*, чтобы наполнить «мешок» информацией придется затратить определенные усилия. Приведем два примера простых задач, иллюстрирующих работу ОСРЗ.

***Задача № 1***. Найдите значение выражения $81x_0$, где $x_0$ – наибольший корень уравнения $\dfrac{x^2}{4x^2+4x+1}-\dfrac{6x}{2x+1}+5=0$.

*Решение.* Выбор объекта № 1 очевиден: $\dfrac{x}{2x+1}=z$.

Объект № 2 тоже на виду. Это $\dfrac{x^2}{4x^2+4x+1}=z^2$.

Связь (1→2) (стрела) осуществляется с помощью следующих правил-инструментов из ИБЗ:

**а)** $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

**б)** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\dfrac{a^2}{b^2}$,

а также операции идентификации – введение обозначения $\dfrac{x}{2x+1}=z$. Именно она приводит нас к стандартной ситуации из ИБЗ под названием *квадратное уравнение*, а далее все происходит по основной схеме решения задач (ОСРЗ) [2, с. 8].

***Задача № 2.*** Найдите площадь описанной равнобедренной трапеции, если точка касания вписанной в нее окружности делит боковую сторону на отрезки 4 и 9 см (рисунок 2).

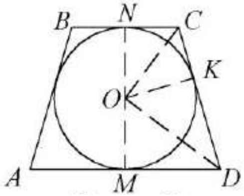

Рисунок 2

*Решение.* В качестве объекта № 1 выступает вся трапеция и вот первый поход в ИБЗ: $S_{ABCD}=\dfrac{a+b}{2}\cdot h$, где $a$ – нижнее основание, $b$ – верхнее основание трапеции, $h$ – ее высота.

Вторая связь $h = 2r$ получается как итог второго похода в ИБЗ за следующим фактом-инструментом: множеством точек, равноудаленных от сторон полосы, является ее средняя линия.

Чтобы получить следующую связь $OK^2 = CK \cdot DK = 4 \cdot 9 = 36$ см$^2$, придется прежде всего создать новый объект – $\Delta COD$, а затем, «пошарив» в ИБЗ, доказать, что он прямоугольный (используются следующие факты: свойство биссектрисы угла; местоположение центра окружности, вписанной в многоугольник; свойство внутренних односторонних углов при параллельных прямых $AD$ и $BC$ и секущей $CD$). Далее включается известная теорема: свойство перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу. Затем используем свойство четырехугольника, описанного около окружности: $AB + CD = 2CD = a + b = 2 \cdot 13 = 26$ см.

Завершение решения очевидно:

$$S_{ABCD}=\frac{2\cdot 13}{2}\cdot 12=156\ \text{см}^2.$$

*Примечание-задание 3* – Подсчитать количество походов в ИБЗ при решении этой простенькой задачи.

**3 Заключительные замечания**

1 По существу ССРЗ есть не что иное, как методика построения связных пар, а это – основная часть метода связных пар (МСП) [2, с.17–23].

2 Идеи, высказанные в настоящей работе, достаточно тесно переплетается с концепциями, развитыми в [3, см., например, с. 105–108]. Ведь на процесс поиска решения задачи можно смотреть с позиции теории управления (в частности, теории принятия решений) в условиях той или иной степени неопределенности.

**Список литературы**

1 **Великович, Л. Л.** Некоторые новые категории и результаты теории решения задач / Л. Л. Великович // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 18 апр. 2024 г. / М-во транспорта и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. гос. ун-т трансп.; под ред Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2024. – С. 76–80.

2 **Великович, Л. Л.** Теория решения задач: новый взгляд на старые истины : брошюра для математиков: студентов, репетиторов, профессионалов / Л. Л. Великович. – М. : БИЛИНГВА, 2023. – 72 с.

3 Теоретическая инноватика : учеб. и практикум для вузов / И. А. Брусакова, В. Л. Горохов, В. А. Дрещинский [и др.]; под ред. И. А. Брусаковой. – М. : Юрайт, 2025. – 333 с. – (Высшее образование).

УДК 378.147:517.9

## РЕШЕНИЕ ПРАКТИКО-ОРИЕТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ ПО ТЕМЕ «СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

*Т. А. ВЛАСЮК, И. И. СОСНОВСКИЙ*
*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

Одним из важных разделов курса высшей математики является раздел «Дифференциальные уравнения и их системы». Важность этого раздела в том, то многие процессы в физике, технике, экономике приводят в конечном итоге к дифференциальным уравнениям и их системам. Решение задач на практических занятиях по этой теме, на наш взгляд, должно предполагать тематику, которая соответствует специальности обучающегося. Это позволит мотивировать студента к изучению данной темы, а также даст необходимые умения и навыки в моделировании процессов, изучаемых в рамках конкретной специализации.

Одна из интересных моделей для использования систем дифференциальных уравнений изложена в работе Арнольда В. И. [1]. Создадим простейшую «жесткую» модель на основе следующих предположений: в прямоугольной системе координат в первой четверти координаты каждой точки соответствуют количеству перевезенных пассажиров на двух видах транспорта $x_1(t)$ и $x_2(t)$ за единицу времени [2]. Пусть также $a_1$ – пропускная способность первого вида транспорта, а $a_2$ – пропускная способность второго вида транспорта. Предположим, что на первом виде транспорте может быть перевезено за единицу времени некоторое количество пассажиров второго вида транспорта и, наоборот, на втором виде транспорта может быть перевезено некоторое количество пассажиров первого вида транспорта, т. е. имеем классическую модель Ланкастера. Модель будет представлять систему нормальных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -a_2 x_2(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -a_1 x_1(t). \end{cases} \tag{1}$$

Данная система имеет точное неявное решение

$$\frac{dx_1(t)}{dx_2(t)} = \frac{a_2 x_2(t)}{a_1 x_1(t)}, \; a_1 x_1(t) dx_1(t) - a_2 x_2(t) dx_2(t) = 0,$$

$$\frac{ax_1^2(t)}{2} - \frac{bx_2^2(t)}{2} = C_1, \; a_1 x_1^2(t) - a_2 x_2^2(t) = C, C = 2C_1.$$

Имеем множество гипербол вида

$$\frac{x_1^2(t)}{\frac{C}{a_1}} - \frac{x_2^2(t)}{\frac{C}{a_2}} = 1\,. \tag{2}$$

Асимптоты гипербол: $x_2 = \sqrt{\dfrac{a_1}{a_2}} \cdot x_1$.

При фиксированных значениях $a_1$, $a_2$ и произвольной постоянной $C$ графическая интерпретация модели представлена на рисунке 1. Если начальная точка $(x_1, x_2)$ лежит ниже асимптоты ($C > 0$), то гипербола пересекает ось $Ox_1$, следовательно, количество пассажиров, перевезенных железнодорожным транспортом, уменьшается до 0. Если же начальная точка $(x_1, x_2)$ лежит выше асимптоты ($C < 0$), то гипербола пересекает ось $Ox_2$, и количество пассажиров, перевезенных автомобильным транспортом, уменьшается до 0.

$a_1 := 0.4 \quad a_2 := 0.3 \qquad C1 := 3 \qquad C2 := -3$

$$x2_1(t) := \sqrt{\frac{a_1 \cdot t^2 - C1}{a_2}} \quad x2_2(t) := \sqrt{\frac{a_1 \cdot t^2 - C2}{a_2}} \quad x2_{асимптота}(t) := \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \cdot t$$

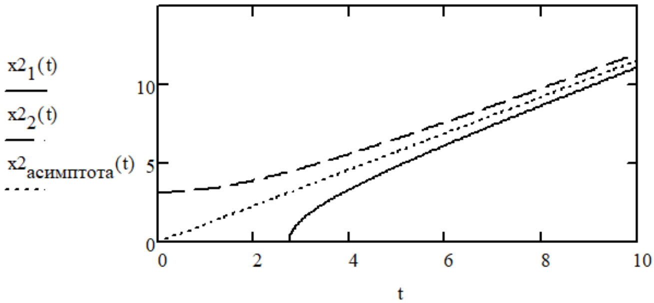


Рисунок 1

Система (1) имеет и точное решение:

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-\sqrt{a_1 a_2}\cdot t} + C_2 e^{\sqrt{a_1 a_2}\cdot t}, \\ x_2(t) = C_1 \sqrt{\dfrac{a_1}{a_2}} \cdot e^{-\sqrt{a_1 a_2}\cdot t} - C_2 \sqrt{\dfrac{a_1}{a_2}} \cdot e^{\sqrt{a_1 a_2}\cdot t}. \end{cases}$$

Найдем частное решение системы (1) с начальными условиями

$$x_1(t_0) = x_{10}, \;\; x_2(t_0) = x_{20}.$$

Тогда

$$\begin{cases} x_{10} = C_1 e^{-\sqrt{a_1 a_2} t_0} + C_2 e^{\sqrt{a_1 a_2} t_0}, \\ x_{20} = C_1 \sqrt{\dfrac{a_1}{a_2}} \cdot e^{-\sqrt{a_1 a_2} t_0} - C_2 \sqrt{\dfrac{a_1}{a_2}} \cdot e^{\sqrt{a_1 a_2} t_0}. \end{cases}$$

Следовательно

$$C_1 = \frac{1}{2} e^{\sqrt{a_1 a_2} t_0} \left( x_{10} + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \cdot x_{20} \right), \;\; C_2 = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{a_1 a_2} t_0} \left( x_{10} - \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \cdot x_{20} \right).$$

Предложенная задача может быть рассмотрена в разных вариациях на практических занятиях, в качестве примера на лекции и на лабораторным практикуме с использованием MathCad.

## Список литературы

1 **Арнольд, В. И.** «Жесткие» и «мягкие» математические модели / В. И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 2000. – 32 с.

2 **Власюк, Т. А.** Железнодорожный пассажирский транспорт в территориальной структуре городов-центров и их спутников в Республике Беларусь (ретроспекивный анализ и перспектива развития) : монография / Т. А. Власюк. – Гомель : БелГУТ, 2020. – 230 с.

УДК 51:378.147

# ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА В ГЕОМЕТРИИ

*А. М. ГАЛЬМАК, О. А. ШЕНДРИКОВА, И. В. ЮРЧЕНКО*
*Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, г. Могилев*

В пособиях и задачниках по высшей математике [1–9], а также на практических занятиях по высшей математике в учреждении высшего образования первый замечательный предел используется, как правило, только при нахождении других пределов, в которых присутствуют тригонометрические функции, т. е. рассматриваются задачи, не выходящие за рамки раздела «Пределы». Область применения первого замечательного предела можно расширить за счёт геометрии, используя его для нахождения длин, площадей и объёмов. Проиллюстрируем сказанное на примере нахождения длины окружности и площади круга.

Нам понадобится определение по Гейне предела функции $f(x)$, определённой в некоторой проколотой окрестности точки $a$. Согласно этому определению, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если для любой последовательности точек $\alpha_n$ ($\alpha_n \neq a$), сходящейся к $a$ ($\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = a$), последовательность точек $f(\alpha_n)$ сходится к $A$ ($\lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) = A$). Применив это определение к первому замечательному пределу $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n} = 1 \qquad (1)$$

для любой последовательности точек $\alpha_n$, сходящейся к 0 ( $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ ). Например, подставив в (1) последовательность точек $\alpha_n = \frac{1}{n}$, получим формулу

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin\frac{1}{n} = 1 \qquad (2)$$

первого замечательного предела для дискретной переменной.

Формулы (1) и (2), т. е. первый замечательный предел для дискретной переменной, в учебной литературе, в том числе и в перечисленной выше, практически отсутствуют, в отличие от второго замечательного предела, который в учебной литературе всегда представлен и для непрерывной и для дискретной переменных. Справедливости ради, заметим, что в редких случаях первый замечательный предел для дискретной переменной встречается в некоторых учебниках для студентов-математиков (см., например, [10]).

Заметим, что определение предела по Гейне можно было применить к эквивалентной форме $\lim\limits_{t\to\infty} t \cdot \sin\frac{1}{t} = 1$ первого замечательного предела.

В этом случае получится формула

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n \sin\frac{1}{\beta_n} = 1 \qquad (3)$$

для любой бесконечно большой последовательности точек $\beta_n$ ( $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty$ ). Ясно, что формулы (1) и (3) эквивалентны, так как величины $\alpha_n$ и $\beta_n$ являются взаимно обратными. Предел (2) может быть получен подстановкой в (3) последовательности точек $\beta_n = n$.

Если в окружность последовательно вписывать правильный треугольник, квадрат, …, правильный $n$-угольник, то в предельном случае при $n \to \infty$ получим окружность (рисунок 1).

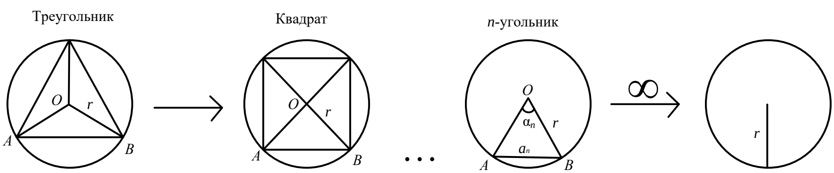


Рисунок 1

Поэтому

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n, \tag{4}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} l_n, \tag{5}$$

где $S$ и $S_n$ соответственно площадь круга и площадь правильного $n$-угольника, $l$ и $l_n$ соответственно длина окружности и периметр правильного $n$-угольника.

Правильный $n$-угольник, вписанный в окружность радиуса $r$, состоит из $n$ равновеликих равнобедренных треугольников с общей вершиной в центре $O$ окружности и боковыми сторонами, являющимися её радиусами. На рисунке 1 показан один из таких треугольников с боковыми сторонами $OA$ и $OB$, основанием длины $a_n$ и углом $\alpha_n$ при вершине.

**Площадь круга**. Так как $S_n = nS_{\Delta OAB}$, то из (4) следует

$$S = \lim_{n\to\infty} nS_{\Delta OAB}. \tag{6}$$

Для нахождения площади треугольника $OAB$ воспользуемся «школьной» формулой

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\, OA\cdot OB \sin\alpha_n.$$

А так как $\alpha_n = \dfrac{2\pi}{n}$, $OA = OB = r$, то

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{n}. \tag{7}$$

Подставив полученную формулу в (6) и применив (1) для последовательности точек $\alpha_n = \dfrac{2\pi}{n}$, сходящейся к 0, получим

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} nr^2 \sin\frac{2\pi}{n} = \pi r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi r^2\cdot 1 = \pi r^2.$$

Таким образом, доказана формула $S = \pi r^2$ площади круга.

**Длина окружности**. Так как $l_n = na_n$, то из (5) следует

$$l = \lim_{n\to\infty} na_n, \tag{8}$$

где $a_n$ определяется «школьной» формулой $a_n = 2r\sin\dfrac{\pi}{n}$. Подставив полученную формулу в (8) и применив (1) для последовательности точек $\alpha_n = \dfrac{\pi}{n}$, сходящейся к 0, получим

$$l = \lim_{n\to\infty} 2nr\sin\frac{\pi}{n} = 2\pi r \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r\cdot 1 = 2\pi r.$$

Таким образом, доказана формула $l = 2\pi r$ длины окружности.

Приведённые примеры нахождения длины окружности и площади круга с помощью первого замечательного предела и аналогичные примеры нахождения площадей боковых поверхностей цилиндра и конуса, а также объёмов цилиндра и конуса позволяют расширить круг рассматриваемых при изучении темы «Первый замечательный предел» задач, который традиционно ограничивается задачами на раскрытие разного вида неопределённостей, содержащих тригонометрические функции, и сводящихся к неопределённости вида $\frac{0}{0}$. Нахождение длин, площадей и объёмов с использованием первого замечательного предела расширяет область его применения и он может быть востребован при проведении разного рода дополнительных занятий, а также при проведении управляемой самостоятельной работы.

### Список литературы


1 **Герасимович, А. И.** Математический анализ. В 2 ч. Ч. 1 / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Минск : Вышэйшая школа, 1989. – 287 с.

2 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика. В 5 ч. Ч. 2 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1985. – 221 с.

3 Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / Е. И. Гурский, В. П. Домашов, В. К. Кравцов, А. П. Сильванович. – Минск : Вышэйшая школа, 1989. – 349 с.

4 **Гусак, А. А.** Задачи и упражнения по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / А. А. Гусак. – Минск : Вышэйшая школа, 1988. – 247 с.

5 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 4 ч. Ч. 1 / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть. – Минск : Вышэйшая школа, 2009. – 304 с.

6 **Каплан, И. А.** Практические занятия по высшей математике. В 5 ч. Ч. II / И. А. Каплан. – Харьков : Вища школа, 1973. – 368 с.

7 **Демидович, Б. П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М. : АСТ : Астрель, 2007. – 558 с.

8 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высшая школа, 1986. – 304 с.

9 Сборник типовых расчётов по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / под ред. В. В. Миносцева. – М. : МГИУ, 2007. – 548 с.

10 **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1966. – 607 с.

УДК 517.275:378.4

# ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРИЛОЖЕНИЯ GEOGEBRA ПРИ СОЗДАНИИ ИЛЛЮСТРАТИВНОГО МАТЕРИАЛА ДЛЯ КУРСА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

*М. А. ГЛЕЦЕВИЧ, Н. Н. РАЧКОВСКИЙ*
*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск*

Геометрическая интерпретация понятий и теорем, изучаемых в математическом анализе, всегда являлась важным элементом изложения этой дисциплины студентам инженерных специальностей. Актуальность этого элемента существенно возросла в последнее время в связи с тем, что современные студенты воспринимают информацию с большей вовлеченностью, если она сопровождается визуальным рядом, и преимущественно избегают объемного текста и длинных математических выкладок. По этой причине в ряде случаев целесообразно после доказательства теоремы показать геометрическую интерпретацию понятий и утверждений, используемых в ней. Это поможет заинтересовать студента и стимулировать его дальнейшее самостоятельное изучение материала по соответствующей теме.

В настоящее время существует несколько программ и систем компьютерной алгебры, позволяющих легко создавать графический материал. В данных тезисах представлен пример использования одной из них – программы GeoGebra. Среди ее преимуществ стоит отметить, что она бесплатна, имеет стационарную, мобильную и веб-версии, динамическое управление геометрическими объектами можно осуществлять как с помощью соответствующих им уравнений, так и непосредственно взаимодействуя с ними в рабочем окне при помощи мыши, программа имеет дружественный пользователю интерфейс и различные способы включения интерактивной работы с графическими материалами в образовательный процесс [1].

Продемонстрируем использование конкретных инструментов GeoGebra, которые могут быть полезны при подготовке лекционных материалов для курса «Математический анализ». Одним из разделов этого курса, в котором особенно актуально наглядное представление определений и теорем, является раздел «Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных». Рассмотрим следующую теорему, которую можно предложить при изучении темы «Неявная функция».

*Теорема*. Пусть функция $F(x, y, z)$ непрерывна вместе с частными производными $F'_x$, $F'_y$, $F'_z$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, причем $F\left(x_0, y_0, z_0\right)=0$ и $F'_z\left(x_0, y_0, z_0\right)\neq 0$. Тогда верны следующие утверждения:

1) уравнение $F(x,y,z)=0$ однозначно определяет функцию $z=f(x,y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$;

2) верно равенство $z_0=f(x_0,y_0)$;

3) $f(x,y)$ непрерывна вместе с частными производными в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ [2].

Покажем, как в веб-версии приложения GeoGebra проиллюстрировать первые два утверждения данной теоремы, а также следствие нарушения условия $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Для примера зададим функцию $F(x,y,z)$ следующим образом: $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3$. Студенты легко могут самостоятельно убедиться, что функция $F(x,y,z)$ непрерывна вместе с частными производными $F'_x$, $F'_y$, $F'_z$ в окрестности любой точки. Уравнение $F(x,y,z)=0$ задает поверхность нулевого уровня, которая является хорошо знакомой студентам поверхностью – сферой с центром в точке $(0,0,0)$ и радиусом $\sqrt{3}$. Построим ее с помощью приложения 3D *Calculator*, введя соответствующее уравнение во вкладке «Алгебра» (рисунок 1, *а*). Используя инструмент «Точка на объекте» во вкладке «Инструменты», поставим мышью на трехмерном изображении поверхности точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, принадлежащую указанной сфере в силу второго условия $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Координаты точки $M_0$ рассчитываются автоматически, и ее можно перемещать по сфере также с помощью мыши. Изначально выберем точку $M_0$ не лежащей в плоскости $Oxy$. При этом можно аналитически показать студентам, что в таком случае выполняется третье условие теоремы $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, либо предложить провести проверку этого условия самостоятельно. Для понимания его геометрической интерпретации студенты уже должны быть знакомы с понятием градиента и теоремой о перпендикулярности градиента множеству уровня функции многих переменных (ФМП). Используя эти знания и напомнив студентам материал курса аналитической геометрии, можно указать на то, что условие $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ означает, что градиент рассматриваемой функции в точке $M_0$ не параллелен плоскости $Oxy$, а следовательно, касательная плоскость к сфере, построенная в точке $M_0$, не параллельна оси $Oz$. Покажем это на трехмерном рисунке, изобразив такую касательную плоскость. Для этого с помощью инструмента «Плоскость через три точки» построим две плоскости, проходящие через точку $M_0$ (необходимые для этого дополнительные четыре точки можно выбрать произвольно и оставить скрытыми). Используя инструмент «Кривая пересечения», отобразим на трехмерном рисунке кривые пересечения этих плоскостей со сферой $F(x,y,z)=0$. Инструмент «Касательная» позволяет построить касательные к этим кривым в точке $M_0$, через которые с помощью инструмента «Плоскость» проведем касательную плоскость (рисунок 1, *б*). Весь процесс построения можно производить непосредственно на лекции, что будет способствовать закреплению в памяти студентов понятия «касательная плоскость к поверхности». Использованные вспомогательные элементы (дополнительные плоскости, линии пересечения, касательные) затем можно скрыть. При вращении рисунка с помощью мыши хорошо видно, что построенная плоскость не параллельна *Oz*.Таким образом, наглядно проиллюстрирована геометрическая интерпретация третьего условия теоремы.

*а*) *б*)

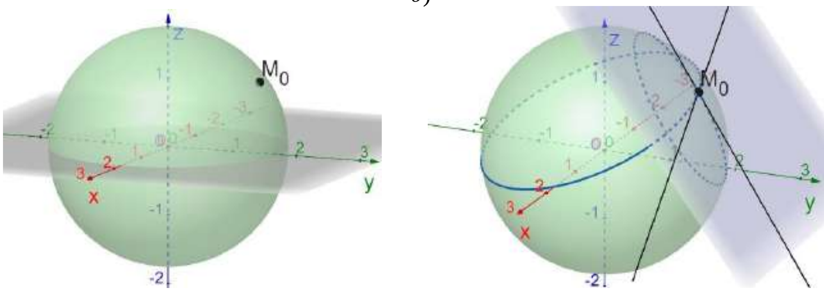


Рисунок 1 – Поверхность $F(x,y,z)=0$ с точкой $M_0$ (*а*)
и касательной плоскостью (*б*)

Перейдем к иллюстрации первого утверждения теоремы. Построим сферу небольшого радиуса с центром в точке $M_0$, применив инструмент «Сфера по центру и радиусу». Эта сфера иллюстрирует окрестность *U* точки $M_0$. Выделим часть сферы $F(x,y,z)=0$, оказавшуюся внутри *U*: $S=\{(x;y;z)\,|\,F(x,y,z)=0\}\cap U$ ; эта часть сферы *S* показана на рисунке 2, *а*. Через произвольную точку *A*, принадлежащую *S*, проведем прямую, параллельную оси *Oz* (инструмент «Параллельная прямая»). Перемещая точку *A* с помощью мыши в пределах *S*, покажем, что вертикальная прямая всякий раз пересекает *S* лишь в одной точке *A*. Для студентов можно подчеркнуть, что таким образом упорядоченному набору координат (*x;y*) из проекции *S* на плоскость *Oxy* (граница проекции также указана на рисунке 2, *а*) ставится в соответствие *единственное* значение *z*, при котором точка с координатами $(x,y,z)$ является точкой пересечения указанной вертикальной прямой и *S*. Студенты при этом должны вспомнить определение ФМП и ее области определения. Таким образом демонстрируется первое утверждение теоремы. Второе утверждение иллюстрируется тем же изображением.

Весьма полезной функцией приложения GeoGebra является возможность одновременного перемещения связанных между собой геометрических объектов. Так, при перемещении точки $M_0$ по поверхности $F(x, y, z) = 0$ одновременно перемещаются соответствующим образом и касательная плоскость, и сфера $U$. Динамически изменяя при этом радиус сферы $U$, можно показывать, что до тех пор, пока точка $M_0$ не сместилась в плоскость $Oxy$, всегда можно подобрать радиус сферы $U$ так, что $S$ будет пересечена прямой, параллельной $Oz$, только в одной точке. Ситуация принципиально изменится лишь при перемещении точки $M_0$ в плоскость $Oxy$, где нарушается условие $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ (рисунок 2, *б*). При этом целесообразно показать студентам, что при таком положении касательной плоскости, как бы ни был выбран радиус сферы $U$, обязательно найдется вертикальная прямая, которая пересечет часть поверхности нулевого уровня $S$ уже в двух точках $A$ и $A_1$; таким образом, однозначно задать ФМП уже нельзя.

*а*) *б*)

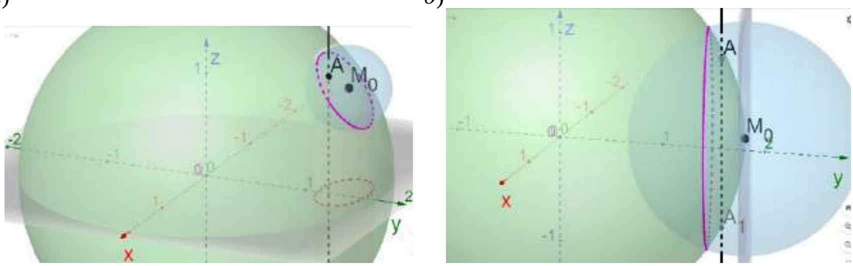


Рисунок 2 – Иллюстрация первых двух утверждений теоремы (*а*) и следствия нарушения третьего условия (*б*)

После иллюстрации указанной теоремы, сформулированной для неявной функции двух переменных, можно перейти к ее обобщению на случай произвольного числа переменных, а также дать формулировку теоремы о задании неявной функции одной переменной. Хорошим упражнением для студентов будет создание геометрической интерпретации последней теоремы на плоскости по аналогии с представленной им объемной интерпретацией.

**Список литературы**

1 What is GeoGebra? // Geogebra Official Cite.– URL: https://www.geogebra.org/about (date of access: 25.08.2025).

2 **Фихтенгольц, Г. М.** Основы математического анализа. В 2 т. Т. 2 / Г. М. Фихтенгольц. – 6 изд., стереотип. – М. : Наука, 1968. – 464 с.

УДК 517.44

# ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ. ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИЛЫ

*С. А. ДУДКО, И. М. ДЕРГАЧЁВА*
*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

Рассмотрим продольные колебания стержня под действием периодической силы $F(t)$, представленной своим рядом Фурье

$$F(t)=\frac{\alpha}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos n\omega t+\beta_n\sin n\omega t\right),$$

где $\omega$ – циклическая частота колебаний, т. е. $\omega=\frac{2\pi}{t}$, $T$ – период действующей силы, $F(t)=F(t+T)$. Скорость имеет длину $l$, левый конец стержня $x=0$ закреплен, на правый конец $x=l$ действует сила $F(t)$. Краевая задача для продольных колебаний стержня имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

граничные условия даются уравнениями

$$u(0,t)=0,\ \ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\frac{F(t)}{ES}, \tag{2}$$

где $u(x,t)$ – амплитуда продольного смещения стержня с координатой $x$ за время $t$, коэффициент $a^2=\frac{E}{\rho}$, где $\rho$ – объемная плотность материала стержня, $E$ – модуль Юнга, $S$ – площадь поперечного сечения стержня. Начальные условия краевой задачи полагаем нулевыми

$$u(x,0)=0,\ \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.$$

Вводим лаплас-образ неизвестной функции $u(x,t)\div U(x.p)$, лаплас-образ силы $F(t)$ представим в виде

$$\bar{F}(p)=\bar{F}_0(p)+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{F}_n(p)=\frac{\alpha}{2p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n p+\beta_n n\omega}{p^2+(n\omega)^2}.$$

Лаплас-образ $\bar{F}_0(p)=\dfrac{\alpha}{2p}$ определяется стационарной частью ряда Фурье, лаплас-образ $\bar{F}_n(p)=\dfrac{\alpha_n p+\beta_n n\omega}{p^2+(n\omega)^2}$ будет определять вынужденные колебания стержня.

Переходим к лаплас-образам в уравнении (1), с учетом нулевых начальных условий и получаем уравнение вида

$$\frac{d^2U(x,p)}{dx^2}-\left(\frac{p}{a}\right)^2 U(x,p)=0. \tag{3}$$

Краевые условия (2), записанные в лаплас-образах, принимают вид

$$U(0,p)=0,\ \ \frac{dU(l,p)}{dx}=\frac{\bar{F}(p)}{ES}. \tag{4}$$

Решение уравнения (3) с учетом первого из краевых условий (4) представим в виде

$$U(x,p)=U_0(x,p)+\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x,p)=c_0\text{sh}\,\frac{px}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\text{sh}\,\frac{px}{a}.$$

Второе краевое условие в (4) разобьем на два уравнения

$$\frac{dU_0(l,p)}{dx}=\frac{\bar{F}_0(p)}{ES},\ \text{или}\ c_0\frac{p}{a}\text{ch}\,\frac{pl}{a}=\frac{\alpha}{2p},$$

$$\frac{dU_n(l,p)}{dx}=\frac{\bar{F}_n(p)}{ES},\ \text{или}\ c_n\frac{p}{a}\text{ch}\,\frac{pl}{a}=\frac{1}{ES}\frac{\alpha_n p+\beta_n n\omega}{p^2+(n\omega)^2}.$$

Из полученных уравнений находим коэффициенты $c_0$ и $c_n$, и требуемые лаплас-образы принимают вид

$$U_0(x,p)=c_0\text{sh}\,\frac{px}{a}=\frac{a\alpha}{2ES}\frac{\text{sh}\,\frac{px}{a}}{B_0(p)}=\frac{ax}{2ES}\frac{\text{sh}\,\frac{px}{a}}{p^2\text{ch}\,\frac{pl}{a}}. \tag{5}$$

$$U_n(x,p)=c_n\text{sh}\,\frac{px}{a}=\frac{a}{ES}\frac{(\alpha_n p+\beta_n n\omega)\text{sh}\,\frac{px}{a}}{p\left(p^2+(n\omega)^2\right)\text{ch}\,\frac{pl}{a}}. \tag{6}$$

Далее находим функции-оригиналы, отвечающие полученным лаплас-образам. Рассмотрим лаплас-образ $U_0(x,p)$. Функция $B_0(p)=p^2\text{ch}\,\dfrac{pl}{a}$

имеет действительный корень $p=0$. Разлагая гиперболический синус в ряд Маклорена

$$\operatorname{sh}\frac{px}{a}=\frac{px}{a}+\frac{1}{3!}\left(\frac{px}{a}\right)^3+\ldots=\frac{px}{a}\left(1+\frac{1}{3!}\left(\frac{px}{a}\right)^2+\ldots\right),$$

представим лаплас-образ (5) в виде

$$U_0(x,p)=\frac{\alpha}{2ES}\frac{x\left(1+\frac{1}{3!}\left(\frac{px}{a}\right)^2+\ldots\right)}{p\operatorname{ch}\frac{pl}{a}}.$$

Как следствие, $p=0$ – простой полюс функции $U_0(x,p)$, поэтому

$$\operatorname*{Res}_{p=0}\left(U_0(x,p)e^{pt}\right)=\frac{\alpha}{2ES}\lim_{p\to 0}\left[p\frac{x\left(1+\frac{1}{3!}\left(\frac{px}{a}\right)^2+\ldots\right)e^{pt}}{p\operatorname{ch}\frac{pl}{a}}\right]=\frac{\alpha x}{2ES}.$$

Функция $B_0(p)$ имеет также бесконечно много нулей в точках, являющихся корнями уравнения $\operatorname{ch}\frac{pl}{a}=0$, $\frac{p_m l}{a}=i\frac{\pi(2m+1)}{2}$, $p_m=i\omega_m$, где $\omega_m=\frac{\pi a(2m+1)}{2l}$ – частоты собственных колебаний стержня, $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Вычисляем производную

$$B_0'(p)=\frac{1}{a}p^2\operatorname{sh}\frac{pl}{a}+2p\operatorname{ch}\frac{pl}{a},$$

тогда

$$B_0'(p_m)=i\frac{l}{a}(i\omega_m)^2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi m\right)=-i\frac{l}{a}(-1)^m\omega_m^2.$$

Вычет функции $U_0(x,p)e^{pt}$ в простом полюсе $p=p_m$ находим по формуле [2]

$$\operatorname*{Res}_{p=p_m}\left(U_0(x,p)e^{pt}\right)=\frac{a\alpha}{2ES}\frac{\operatorname{sh}\frac{p_m x}{a}}{B_0'(p_m)}e^{p_m t}=-\frac{a\alpha}{2ES}\frac{i\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2l}}{i\frac{l}{a}(-1)^m\omega_m^2}e^{\omega_m t}=$$

$$=-\frac{\alpha a^2}{2ESl}\frac{(-1)^m}{\omega_m^2}\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2l}\left(\cos\omega_m t+i\sin\omega_m t\right).$$

Выделяем в полученном выражении действительную часть

$$\mathrm{Re}\,\underset{p=p_m}{\mathrm{Res}}\left(U_0(x,p)e^{pt}\right)=-\frac{\alpha a^2}{2ESl}\frac{(-1)^m}{\omega_m^{\ 2}}\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2l}\cos\omega_m t.$$

Функцию-оригинал, отвечающую лаплас-образу $U_0(x,p)$, находим по основной теореме обращения лаплас-образа [3]

$$U_0(x,p)=\underset{p=0}{\mathrm{Res}}\left(U_0(x,p)e^{pt}\right)+\sum_{m=0}^{\infty}2\,\mathrm{Re}\,\underset{p=p_m}{\mathrm{Res}}\left(U_0(x,p)e^{pt}\right)=$$

$$=\frac{\alpha x}{2ES}-\frac{\alpha a^2}{ESl}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\omega_m^{\ 2}}\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2l}\cos\omega_m t\ . \tag{7}$$

Аналогичным образом находим оригинал лаплас-образа (6)

$$U_n(x,p)=\frac{\alpha}{ES}\frac{(\alpha_n p+\beta_n n\omega)\,\mathrm{sh}\,\frac{px}{a}}{B(p)}=\frac{a}{ES}\frac{(\alpha_n p+\beta_n n\omega)\,\mathrm{sh}\,\frac{px}{a}}{p\left(p^2+(n\omega)^2\right)\mathrm{ch}\,\frac{pl}{a}}.$$

Представим функцию $B(p)$ в виде

$$B(p)=p(p-in\omega)(p+in\omega)\,\mathrm{ch}\,\frac{pl}{a}$$

и находим вычет функции и находим вычет функции $U_n(x,p)e^{pt}$ в простом полюсе $p_n=in\omega$, получаем

$$\underset{p=p_n}{\mathrm{Res}}\left(U_n(x,p)e^{pt}\right)=\frac{\alpha}{ES}\lim_{p\to p_n}\left[(p-in\omega)\frac{(\alpha_n p+\beta_n n\omega)\,\mathrm{sh}\,\frac{px}{a}\,e^{pt}}{(p-in\omega)(p+in\omega)\,p\,\mathrm{ch}\,\frac{pl}{a}}\right]=$$

$$=\frac{\alpha}{ES}\frac{(i\alpha_n n\omega+\beta_n n\omega)\,\mathrm{sh}\,\frac{in\omega x}{a}\,e^{in\omega t}}{2(in\omega)^2\,\mathrm{ch}\,\frac{in\omega l}{a}}=-\frac{\alpha}{2ES\omega}\frac{i(i\alpha_n+\beta_n)}{n\cos\frac{n\omega l}{a}}\sin\frac{n\omega x}{a}\left(\cos n\omega t+i\sin n\omega t\right).$$

Выделяем в полученном выражении действительную часть

$$\mathrm{Re}\,\underset{p=p_n}{\mathrm{Res}}\left(U_n(x,p)e^{pt}\right)=\frac{\alpha}{2ES\omega}\frac{\sin\frac{n\omega x}{a}}{n\cos\frac{n\omega l}{a}}\left(\alpha_n\cos n\omega t+\beta_n\sin n\omega t\right).$$

Далее вычисляем вычеты функции $U_n(x,p)e^{pt}$ в полюсах $p_m=i\omega_m$ ($m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$). Так как

$$B'(p)=p\left(p^2+(n\omega)^2\right)\frac{l}{a}\operatorname{sh}\frac{pl}{a}+\left(p\left(p^2+(n\omega)^2\right)\right)'_p\operatorname{ch}\frac{pl}{a},$$

то

$$B'(p_m)=p_m\left(p_m{}^2+(n\omega)^2\right)\frac{l}{a}\operatorname{sh}i\left(\frac{\pi}{2}+\pi m\right)=$$

$$=i^2\,\frac{l}{a}\omega_m(-1)^m\left((n\omega)^2-\omega_m{}^2\right)=\frac{l}{a}(-1)^m\,\omega_m\left(\omega_m{}^2-(n\omega)^2\right).$$

Как следствие, для требуемой величины вычета в полюсе $p_m=i\omega_m$ получаем следующее соотношение:

$$\operatorname*{Res}_{p=p_m}\left(U_n(x,p)e^{pt}\right)=\frac{\alpha}{ES}\frac{(\alpha_n p_m+\beta_n n\omega)\operatorname{sh}\dfrac{p_m x}{a}}{B'(p_m)}e^{p_m t}=\frac{a}{ES}\frac{(i\alpha_n\omega_m+\beta_n n\omega)i\sin\dfrac{\pi(2m+1)x}{2l}}{\dfrac{l}{a}(-1)^m\,\omega_m\left(\omega_m{}^2-(n\omega)^2\right)}e^{i\omega_m t}=$$

$$=\frac{a}{ES}\frac{(i\alpha_n\omega_m+\beta_n n\omega)i\sin\dfrac{\pi(2m+1)x}{2l}}{\dfrac{l}{a}(-1)^m\,\omega_m\left(\omega_m{}^2-(n\omega)^2\right)}e^{i\omega_m t}=$$

$$=\frac{a^2}{ESl}\frac{(-1)^m\sin\dfrac{\pi(2m+1)x}{2l}}{\omega_m\left(\omega_m{}^2-(n\omega)^2\right)}\left(i\beta_n n\omega-\alpha_n\omega_m\right)\left(\cos\omega_m t+i\sin\omega_m t\right).$$

Действительная часть этого выражения

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_m}\left(U_n(x,p)e^{pt}\right)=\frac{a^2}{ESl}\frac{(-1)^m\sin\dfrac{\pi(2m+1)x}{2l}}{\omega_m\left((n\omega)^2-\omega_m{}^2\right)}\left(\alpha_n\omega_m\cos\omega_m t+\beta_n n\omega\sin\omega_m t\right).$$

Тогда функция-оригинал, отвечающая лаплас-образу $U_n(x,p)$, принимает вид

$$U_n(x,p)\doteq 2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left(U_n(x,p)e^{pt}\right)+\sum_{m=0}^{\infty}2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_m}\left(U_n(x,p)e^{pt}\right)=$$

$$=\frac{a}{ESl}\frac{\sin\dfrac{n\omega x}{a}}{n\cos\dfrac{n\omega l}{a}}\left(\alpha_n\cos n\omega t+\beta_n\sin n\omega t\right)+$$

$$+\frac{2a^2}{ESl}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m \sin\frac{\pi(2m+1)x}{2l}}{\omega_m\left((n\omega)^2-\omega_m{}^2\right)}\left(\alpha_n\omega_m\cos\omega_m t+\beta_n n\omega\sin\omega_m t\right). \qquad (8)$$

Суммируя результаты равенств (7) и (8), находим решение задачи о продольных колебаниях стержней под действием периодической силы. Представим это решение в виде суммы двух функций

$$u(x,t)=\bar{u}(x,t)+u_0(x,t),$$

где функция

$$\bar{u}(x,t)=\frac{\alpha x}{2ES}+\frac{\alpha}{ES\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\omega x}{a}}{n\cos\frac{n\omega l}{a}}\left(\alpha_n\cos n\omega t+\beta_n\sin n\omega t\right)$$

описывает вынужденные колебания стержня со спектром частот периодической силы $F(t)$, а также статический сдвиг сечения стержня с координатой $x$, обусловленный наличием постоянного слагаемого в ряде Фурье, которым представлена сила $F(t)$.

Второе слагаемое решения

$$u_0(x,t)=-\frac{\alpha x^2}{ESl}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\omega_m{}^2}\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2l}\cos\omega_m t+$$

$$+\frac{2a^2}{ESl}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2l}}{(n\omega)^2-\omega_m{}^2}\left(\alpha_n\cos\omega_m t+\beta_n\frac{n\omega}{\omega_m}\sin\omega_m t\right)$$

описывает собственные колебания стержня.

### Список литературы

1 **Тихонов, А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 736 с.

2 **Пчелин, Б. К.** Специальные разделы высшей математики. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление / Б. К. Пчелин. – М. : Высш. шк., 1973. – 464 с.

3 **Свешников, А. Г.** Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – М. : Наука, 1967. – 304 с.

УДК 517.95+517.44

# МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*С. А. ДУДКО, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК*
*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

Рассмотрим трехмерную задачу Коши для однородного волнового уравнения с заданными начальными условиями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), -\infty < x, y, z < \infty, t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, y, z, 0) = \tau(x, y, z), \ \frac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = \psi(x, y, z).$$

Применим преобразование Фурье по трем переменным $x, y, z$ к функции $u(x, y, z, t)$, получим фурье-образ вида

$$U(\omega_1, \omega_2, \omega_3, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int u(x, y, z, t) e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z)} dxdydz.$$

Тогда обратное преобразование Фурье (обращение фурье-образа) будет иметь вид

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int U(\omega_1, \omega_2, \omega_3, t) e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z)} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3. \quad (2)$$

Для дальнейшего изложения удобно ввести фурье-вектор $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$.

Подействуем оператором Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ на обе части равенства (2):

$$\Delta u = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \Delta \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int U(\omega_1, \omega_2, \omega_3, t) e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z)} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int U(\omega_1, \omega_2, \omega_3, t) \Delta e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z)} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 = \quad (3)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\left(-\omega^2 U(\omega_1,\omega_2,\omega_3,t)\right)e^{i\left(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z\right)}d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3.$$

Далее вводим фурье-образы функций начального условия

$$F(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\tau(x,y,z)e^{-i\left(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z\right)}dxdydz,$$

$$\Phi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\psi(x,y,z)e^{-i\left(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z\right)}dxdydz.$$

Перейдя к фурье-образам с помощью равенства (3) в обеих частях уравнения (1), приходим к следующей задаче Коши:

$\dfrac{\partial^2 U(\omega_1,\omega_2,\omega_3,t)}{\partial t^2}+a^2\omega^2 U(\omega_1,\omega_2,\omega_3,t)=0,$ с начальными условиями

$$U(\omega_1,\omega_2,\omega_3,0)=F(\omega_1,\omega_2,\omega_3),\quad \frac{\partial U(\omega_1,\omega_2,\omega_3,0)}{\partial t}=\Phi(\omega_1,\omega_2,\omega_3).$$

Решение этой задачи Коши дает требуемый фурье-образ $U(\omega_1,\omega_2,\omega_3,t)=F(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\cos a\omega t+\dfrac{\Phi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)}{a\omega}\sin a\omega t.$

Подставляя полученное выражение в равенство (2), находим решение волнового уравнения

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\left(F(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\cos a\omega t+\frac{\Phi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)}{a\omega}\sin a\omega t\right)\times$$

$$\times e^{i\left(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z\right)}d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int F(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\cos a\omega t\,d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3+$$

$$+\frac{1}{a(2\pi)^{3/2}}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\frac{\Phi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)}{\omega}\sin a\omega t\,d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3. \qquad (4)$$

Рассмотрим сначала второе слагаемое. Подставляя выражение для фурье-образа $\Phi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, получаем

$$I_2=\frac{1}{a(2\pi)^{3/2}}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\frac{\Phi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)}{\omega}\sin a\omega t\,d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3=$$

$$=\frac{1}{a(2\pi)^{3/2}}\iiint_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi,\eta,\varsigma)e^{-i(\omega_1\xi+\omega_2\eta+\omega_3\varsigma)}d\xi d\eta d\varsigma\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\omega t}{\omega}e^{i(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z)}d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3=$$

$$=\frac{1}{a(2\pi)^{3/2}}\iiint_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi,\eta,\varsigma)d\xi d\eta d\varsigma\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\omega t}{\omega}e^{-i(\vec{\omega},\vec{r})}d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3.$$

В последней формуле мы ввели вектор $\vec{r}=(\xi-x,\eta-y,\zeta-z)$.

Вычислим сначала внутренние интегралы по переменным $\omega_1,\omega_2,\omega_3$. Переходим к сферическим координатам в пространстве переменных $\xi,\eta,\varsigma$:

$$\xi-x=r\sin\theta\cos\varphi,\ \eta-y=r\sin\theta\sin\varphi,\ \zeta-z=r\cos\theta),\ \theta\in[0;\pi],\ \varphi\in[0;2\pi],\ r\in(0;+\infty);$$

и в пространстве переменных $\omega_1,\omega_2,\omega_3$:

$$\omega_1=\omega\sin s\cos\psi,\ \omega_2=\omega\sin s\sin\psi,\ \omega_3=\omega\cos s,\ s\in[0;\pi],\ \psi\in[0;2\pi],\ \omega\in(0;+\infty);$$

$s$ – угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$, т. е. $(\vec{\omega},\vec{r})=\omega r\cos s$.

Далее вычислим интегралы

$$\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\omega t}{\omega}e^{-i(\vec{\omega},\vec{r})}d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3=\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\omega t}{\omega}e^{-i\omega r\cos s}\omega^2\sin s\,d\omega\, ds\, d\psi=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\infty}\omega\sin a\omega t\,d\omega\int_0^{\pi}e^{-i\omega r\cos s}\sin s\,ds=2\pi\int_0^{\infty}\omega\sin a\omega t\,d\omega\int_0^{\pi}e^{-i\omega r\cos s}\sin s\,ds.$$

Вычисляем внутренний интеграл по переменной $s$:

$$\int_0^{\pi}e^{-i\omega r\cos s}\sin s\,ds=\frac{1}{i\omega r}\int_0^{\pi}e^{-i\omega r\cos s}d(-i\omega r\cos s)=\frac{1}{i\omega r}e^{-i\omega r\cos s}\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{i\omega r}(e^{i\omega r}-e^{-i\omega r})=2\frac{\sin\omega r}{\omega r}.$$

Тогда интеграл по переменной $\omega$ будет равен

$$2\pi\int_0^{\infty}\frac{2\sin\omega r}{\omega r}\sin a\omega t\,\omega\, d\omega=\frac{2\pi}{r}\int_0^{\infty}\left(\cos\omega(r-at)-\cos\omega(r+at)\right)d\omega=$$

$$=\frac{2\pi^2}{r}\left(\delta(r-at)-\delta(r+at)\right).$$

Здесь использовалось понятие $\delta$-функции [1].

Для вычисления интеграла $I_2$ используем полученное соотношение для интеграла по переменной $\omega$, а также выражаем переменные $\xi,\eta,\varsigma$ в сферических координатах:

$$I_2=\frac{2\pi^2}{a(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\psi\left(x+r\sin\theta\cos\varphi,y+r\sin\theta\sin\varphi,z+r\cos\theta\right)\frac{1}{r}\left(\delta(r-at)-\delta(r+at)\right)\times$$

$$\times r^2\sin\theta drd\theta d\varphi=\frac{1}{4\pi a}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta d\varphi\int_0^r\psi\left(x+r\sin\theta\cos\varphi,y+r\sin\theta\sin\varphi,z+r\cos\theta\right)\times$$

$$\times\left(\delta(r-at)-\delta(r+at)\right)r\sin\theta drd\theta d\varphi=$$

$$=\frac{t}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\psi\left(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta\right)\sin\theta d\theta d\varphi.$$

При интегрировании по переменной $r$ мы использовали основное свойство $\delta$-функции, при этом слагаемое с функцией $\delta(r+at)$ зануляется (минимум необходимых сведений по теории $\delta$-функции можно найти в [1], более строгое и фундаментальное изложение теории обобщенных функций дано в [2]).

Таким образом, второе слагаемое в выражении (4) для решения волнового уравнения принимает следующий вид:

$$I_2=\frac{t}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\psi\left(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta\right)\sin\theta d\theta d\varphi. \qquad (5)$$

Вычисление первого слагаемого в выражении (4) без труда сводится к рассмотренному способу вычисления второго слагаемого посредством следующего преобразования

$$I_1=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\int_{-\infty}^{\infty}\int F(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\cos a\omega t e^{i(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z)}d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial t}\int\int_{-\infty}^{\infty}\int F(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\frac{\sin a\omega t}{a\omega}e^{i(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z)}d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3.$$

Подставляем в это соотношение выражение для фурье-образа $F(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, окончательно получаем

$$I_1=\frac{1}{a(2\pi)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial t}\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\tau(\xi,\eta,\varsigma)d\xi d\eta d\varsigma\times$$

$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\frac{\sin a\omega t}{\omega}e^{i(\omega_1(x-\xi)+\omega_2(y-\eta)+\omega_3(z-\varsigma))}d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}t\tau\left(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta\right)\sin\theta d\theta d\varphi. \qquad (6)$$

Решение исходной задачи Коши для волнового уравнения (1) в трехмерном пространстве получим, суммируя результаты равенств (5) и (6):

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\tau\big(x+at\sin\theta\cos\varphi, y+at\sin\theta\sin\varphi, z+at\cos\theta\big)\sin\theta d\theta d\varphi+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\psi\big(x+at\sin\theta\cos\varphi, y+at\sin\theta\sin\varphi, z+at\cos\theta\big)\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Полученный результат можно представить в виде поверхностных интегралов

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}}\frac{\tau(\xi,\eta,\varsigma)}{t}d\delta+\iint_{S_{at}}\frac{\psi(\xi,\eta,\varsigma)}{t}d\delta\right], \qquad (7)$$

где $S_{at}$ – сфера радиуса $at$ с центром в точке $(x,y,z)$.

В классических руководствах по математической физике, например, в [3] формула (7) носит название формулы Пуассона.

**Список литературы**

1 **Арсенин, В. Я.** Методы математической физики и специальные функции / В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1974. – 384 с.

2 **Владимиров, В. С.** Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1981. – 512 с.

3 **Тихонов, А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 736 с.

УДК 517.44

# МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

*С. А. ДУДКО, А. И. ПРОКОПЕНКО*

*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

Различные типы интегральных преобразований давно уже стали мощнейшим методом решения прикладных задач во многих разделах прикладной математики и математической физики. В достаточно общей форме интегральное преобразование можно определить следующим образом.

Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $(a; b)$ (интервал может быть конечным, может совпадать со всей числовой осью $(-\infty; \infty)$ или полуосью $(0; \infty)$ в зависимости от типа интегрального преобразования). Интегральным преобразованием функции $f(x)$ называется функция

$$F(\omega) = \int_a^b K(x, \omega) f(x) dx,$$

где $K(x, \omega)$ – ядро преобразования. При этом переменная $\omega$, в зависимости от вида преобразования, может быть действительной или комплексной.

В этой статье мы рассмотрим применение метода интегрального преобразования Фурье для решения задачи Коши в достаточно простой ситуации одномерного волнового уравнения. Рассмотрим сначала однородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \tag{1}$$

с заданными начальными условиями $u(x, 0) = \varphi(x), \dfrac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), -\infty < x < \infty.$

К функции $u(x, t)$ применим преобразование Фурье по переменной $x$. В этом случае фурье-образ функции $u(x, t)$ будет иметь вид

$$U(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx, \tag{2}$$

где $\omega$ – действительная переменная.

Обратное преобразование Фурье (обращение формулы (2)) имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega. \tag{3}$$

Дважды дифференцируя обе части равенства (3) по переменной $x$, получаем

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega, t) \frac{\partial^2 e^{i\omega x}}{\partial x^2} d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\omega^2 U(\omega, t)\right) e^{i\omega x} d\omega.$$

Далее дважды дифференцируем обе части равенства (3) по переменной $t$, что дает

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 U(\omega, t)}{\partial t^2} e^{i\omega x} d\omega.$$

С помощью полученных соотношений переходим к фурье-образам в уравнении (1) и получаем для функции $U(\omega, t)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 U(\omega, t)}{\partial t^2} + a^2\omega^2 U(\omega, t) = 0. \quad (4)$$

Вводим фурье-образы функций из начальных условий для волнового уравнения (1):

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-i\omega x}dx,\ \Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-i\omega x}dx \quad (5)$$

и формулы обращения этих фурье-образов

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}dx,\ \psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)e^{i\omega x}d\omega. \quad (6)$$

Из равенств (5) находим начальные условия для функции $U(\omega, t)$:

$$U(\omega, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x, 0)e^{-i\omega x}dx = F(\omega),$$

$$\frac{dU(\omega, 0)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du(x, 0)}{dt}e^{-i\omega x}dx = \Phi(\omega).$$

Как следствие, задача Коши для уравнения (4) принимает вид

$$\frac{\partial^2 U(\omega, t)}{\partial t^2} + a^2\omega^2 U(\omega, t) = 0, U(\omega, 0) = F(\omega),\ \frac{dU(\omega, 0)}{dt} = \Phi(\omega).$$

Решая задачу, с учетом начальных условий получаем

$$U(\omega, t) = F(\omega)\cos a\omega t + \frac{\Phi(\omega)}{a\omega}\sin a\omega t.$$

Подставляем этот фурье-образ в равенство (3) и находим требуемое решение волнового уравнения

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(\omega)\cos a\omega t + \frac{\Phi(\omega)}{a\omega}\sin a\omega t\right)e^{i\omega x}d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cos a\omega t e^{i\omega x}d\omega + \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(\omega)}{\omega}\sin a\omega t e^{i\omega x}d\omega. \quad (7)$$

Используя первое из равенств (6), преобразуем первое слагаемое

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cos a\omega t e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)(e^{ia\omega t} + e^{-ia\omega t})e^{i\omega x}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)(e^{i\omega(x+at)} + e^{i\omega(x-at)})d\omega =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega(x+at)}d\omega+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega(x-at)}d\omega\right)=\frac{1}{2}\big(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\big).$$

Аналогичным образом, с помощью второго из равенств (6), для второго слагаемого получаем

$$\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(\omega)}{\omega}\sin a\omega t e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(\omega)}{i\omega}\left(e^{ia\omega t}-e^{-ia\omega t}\right)e^{i\omega x}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(\omega)}{i\omega}\left(e^{i\omega(x+at)}-e^{i\omega(x-at)}\right)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)d\omega\int_{x-at}^{x+at}e^{i\omega z}dz=\frac{1}{2a\sqrt{2\pi}}\int_{x-at}^{x+at}dz\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)e^{i\omega z}d\omega=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz.$$

Подставляем полученные результаты в равенство (7) и находим решение поставленной задачи Коши для одномерного волнового уравнения:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\big)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz. \qquad (8)$$

Аналогичным образом несложно получить решение неоднородного волнового уравнения (берем нулевые начальные условия):

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t),\ \ -\infty<x<\infty,\ \ t>0,$$

$$u(x,0)=0,\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\ \ -\infty<x<\infty. \qquad (9)$$

Вводим фурье-образ функции $f(x,t)$ и его обращение

$$F(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)e^{-i\omega x}dx,\quad f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega,t)e^{i\omega x}d\omega.$$

Переходим к фурье-образам в обеих частях уравнения (9), получаем задачу Коши для функции $U(\omega,t)$, которая с учетом нулевых начальных условий для функции $u(x,t)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial t^2}+a^2\omega^2 U(\omega,t)=F(\omega,t),\ \ U(\omega,0)=0,\ \ \frac{\partial U(\omega,0)}{\partial t}=0. \qquad (10)$$

Методом вариации произвольных постоянных находим решение уравнения (10), которое имеет вид

$$U(\omega,t)=\frac{1}{a\omega}\int_0^t F(\omega,\tau)\sin a\omega(t-\tau)d\tau.$$

Подставляем полученное соотношение в уравнение (3) и находим решение неоднородного волнового уравнения:

$$u(x,t)=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega x}d\omega}{\omega}\int\limits_{0}^{t}F(\omega,\tau)\sin a\omega(t-\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\omega,\tau)}{\omega}\sin a\omega(t-\tau)e^{i\omega x}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\omega,\tau)}{i\omega}\left(e^{i\omega(x+a(t-\tau))}-e^{i\omega(x-a(t-\tau))}\right)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\omega,\tau)d\omega\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}e^{i\omega z}dz=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}dz\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\omega,\tau)e^{i\omega z}d\omega=\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)dz. \qquad (11)$$

Как следствие, решение полной задачи Коши для неоднородного волнового уравнения с ненулевыми начальными условиями, т. е. задачи вида

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t),\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x),\quad -\infty<x<\infty,$$

находим суммируя результаты равенств (8) и (11). Получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)dz.$$

Полученное решение одномерного волнового уравнения носит название формулы Даламбера. Практически во всех фундаментальных учебниках по математической физике эту формулу получают методом характеристик. Однако, на взгляд авторов статьи, метод интегрального преобразования Фурье значительно более доступен для восприятия и понимания.

УДК 378.14:519.237.5

# ЭЛЕМЕНТЫ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

*В. Е. ЕВДОКИМОВИЧ*
*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

Мы живем в мире, где происходят случайные события. Чем сложнее система, тем труднее обнаружить закономерности. Именно в этих случаях и используют вероятностные методы. Таким образом, теория вероятностей актуальна в наши дни как в математике и точных науках, так и в повседневной жизни.

Выстраивая аналитические модели, способные спрогнозировать будущее на основе прошлых данных, мы неизбежно приходим к регрессионному анализу – инструменту, который превратился в ключевую технологию для принятия важных решений в финансах, науке и бизнесе. От прогнозирования продаж до анализа рисков, от научных исследований до экономических моделей – регрессионный анализ стал незаменимым методом для тех, кто стремится извлечь максимум полезной информации из имеющихся данных.

Преподавание элементов регрессионного анализа в курсе математической статистики в этом случае приобретает особую актуальность для различных экономических специальностей учреждений высшего образования.

В данной статье приводятся примеры материала, на основе которого автор строит курс дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов факультета экономики и бизнес-технологий Белорусского государственного университета транспорта.

В частности, рассматривая тему, посвящённую проверке адекватности эмпирического уравнения регрессии выборочным данным, интересным и одновременно актуальным (иллюстрирующим применение теории) являются рассматриваемые ниже примеры.

**Пример 1.** При исследовании работы предприятия получены следующие данные, характеризующие зависимость себестоимости выпускаемой продукции от объема производства:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\xi$ | 0,085 | 0,146 | 0,237 | 0,414 | 0,551 | 0,653 | 0,82 | 0,915 | 1,043 | 1,150 |
| $\eta$ | 18,4 | 14,3 | 12,1 | 11,5 | 10,3 | 9,4 | 9,6 | 9,0 | 8,8 | 8,1 |

Здесь $\xi$ – объем продукции в течение года, млн т; $\eta$ – фактическая средняя себестоимость одной тонны продукции, ден. ед.

Требуется на основании приведенных опытных данных исследовать зависимость переменной $\eta$ от $\xi$.

*Решение.* Для наглядного изображения имеющихся выборочных данных построим корреляционное поле (рисунок 1, *а*).

По виду расположения точек на корреляционном поле можно выдвинуть предположение о том, что между переменными $\xi$ и $\eta$ существует зависимость гиперболического типа. Для описания наблюдаемой зависимости будем использовать уравнение $\overline{y}(x) = \dfrac{\beta_1}{x} + \beta_0$.

Для нахождения оптимальных значений параметров $\hat{\beta}_0$ и $\hat{\beta}_1$ вычислим частные производные функции

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y}(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} \left( y_i - \frac{\beta_1}{x_i} - \beta_0 \right)^2$$

и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial S(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0} = (-2)\sum_{i=1}^{n} \left( y_i - \frac{\beta_1}{x_i} - \beta_0 \right) = (-2)\left[ \sum_{i=1}^{n} y_i - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} - \beta_0 n \right] = 0;$$

$$\frac{\partial S(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1} = (-2)\sum_{i=1}^{n} \left( y_i - \frac{\beta_1}{x_i} - \beta_0 \right) = (-2)\left[ \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i} - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} - \beta_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \right] = 0.$$

Таким образом, система нормальных уравнений для определения коэффициентов эмпирического уравнения регрессии гиперболического типа имеет вид

$$\begin{cases} \beta_0 n + \beta_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{-1} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i; \\ \beta_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{-1} + \beta_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{-2} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{-1} y_i. \end{cases}$$

Вычислим коэффициенты этой системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^{-1} = 32{,}726; \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 111{,}5; \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^{-2} = 218{,}9551;$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^{-1} y_i = 463{,}3617.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{cases} 10\beta_0 + 32,726\beta_1 = 111,5; \\ 32,726\beta_0 + 218,9551\beta_1 = 463,9551. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим $\hat{\beta}_0 \approx 8,27,\ \hat{\beta}_1 \approx 0,88,$ т. е. искомое эмпирическое уравнение регрессии имеет вид

$$\bar{y}(x) = \frac{0,88}{x} + 8,27.$$

График соответствующей линии регрессии изображен на рисунке 1, *б*.

Для сравнения на основании того же набора экспериментальных данных можно построить регрессионную модель линейного типа. Уравнение линейной регрессии будет иметь вид: $\bar{y}(x) = -7,26x + 15,52$. График соответствующей линии регрессии также приведен на рисунке 1, *б*.

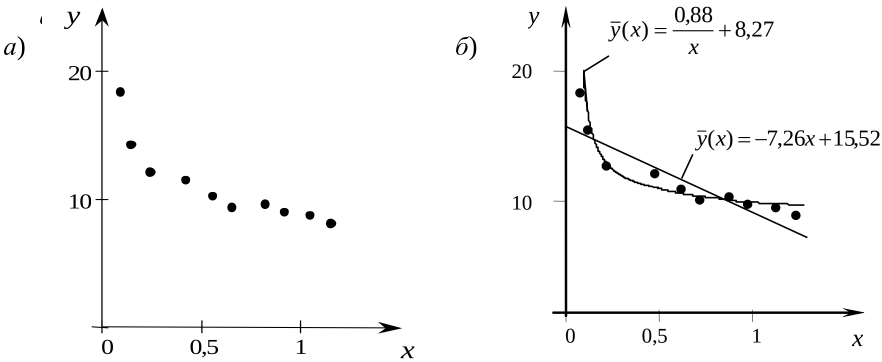


Рисунок 1 – Корреляционное поле и линии регрессии (пример 1)

Проверим адекватность опытным данным полученных эмпирических уравнений регрессии. Сначала подвергнем анализу гиперболическую модель $\bar{y}(x) = \dfrac{0,88}{x} + 8,27$:

| $x_i$ | 0,085 | 0,146 | 0,237 | 0,414 | 0,551 | 0,653 | 0,82 | 0,915 | 1,043 | 1,15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{y}(x_i)$ | 18,62 | 14,30 | 11,98 | 10,39 | 9,87 | 9,62 | 9,34 | 9,23 | 9,11 | 9,03 |

Вычислим необходимые значения сумм

$$S^2_{\text{регр}} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{y}(x_i) - \bar{y})^2 = 86,5722; \quad S^2_{\text{ост}} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}(x_i))^2 = 2,5728.$$

Отсюда получаем $F_{\text{гиперб}} = \dfrac{S^2_{\text{регр}} / \nu_1}{S^2_{\text{ост}} / \nu_2} = \dfrac{86,5722/1}{2,5728/8} = 269,192.$

Аналогичные вычисления выполним для линейной модели $\overline{y}(x) = -7,26x + 15,51$:

| $x_i$ | 0,085 | 0,146 | 0,237 | 0,414 | 0,551 | 0,653 | 0,82 | 0,915 | 1,043 | 1,15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{y}(x_i)$ | 14,89 | 14,45 | 13,79 | 12,5 | 11,51 | 10,76 | 9,55 | 8,87 | 7,94 | 7,16 |

Значения сумм

$$S^2_{\text{регр}} = \sum_{i=1}^{n} (\overline{y}(x_i) - \overline{y})^2 = 61,982; \quad S^2_{\text{ост}} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y}(x_i))^2 = 21,163.$$

Значение критерия $F_{\text{лин}} = \dfrac{S^2_{\text{регр}} / \nu_1}{S^2_{\text{ост}} / \nu_2} = \dfrac{67,982/1}{21,163/8} = 25,698.$

С помощью таблицы квантилей распределения Фишера определим критическое значение $F_{\alpha;\, \nu_1;\, \nu_2} = F_{0,05;\, 1;\, 8} = 5,32.$

Поскольку $F_{\text{гиперб}} > F_{\alpha;\, \nu_1;\, \nu_2}$ и $F_{\text{лин}} > F_{\alpha;\, \nu_1;\, \nu_2}$, обе построенные регрессионные модели являются адекватными опытным данным и могут быть использованы для описания изучаемого явления. Тот факт, что $F_{\text{гиперб}} >> F_{\text{лин}}$, свидетельствует о том, что построенная гиперболическая модель более полно описывает наблюдаемую зависимость между изучаемыми величинами.

Продолжая данную тему, можно воспользоваться эмпирическим коэффициентом детерминации для оценки тесноты зависимости между исследуемыми случайными величинами [1].

**Пример 2.** (см. пример 1). Оценим с помощью коэффициента детерминации тесноту зависимости себестоимости выпускаемой продукции от объемов производства, описываемую уравнением гиперболической регрессии $\overline{y}(x) = \dfrac{0,88}{x} + 8,27.$

*Решение*. Вычисляя значения сумм

$$S^2_{\text{регр}} = \sum_{i=1}^{n} (\overline{y}(x_i) - \overline{y})^2 = 86,5722; \quad S^2_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 = 89,145,$$

получим $\hat{R}^2_{\text{гиперб}} = \dfrac{S^2_{\text{регр}}}{S^2_{\text{общ}}} = \dfrac{86,5722}{89,145} \approx 0,97.$

То есть данная гиперболическая регрессионная модель описывает 97 % общего рассеяния значений переменной η от среднего значения $\bar{y}$ .

Для сравнения вычислим значение коэффициента детерминации для построенной на основании этого же набора опытных данных линейной модели $\bar{y}(x) = -7,26x + 15,51.$

В этом случае

$$S^2_{\text{регр}} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{y}(x_i) - \bar{y})^2 = 67,982; \qquad \hat{R}^2_{\text{лин}} = \frac{S^2_{\text{регр}}}{S^2_{\text{общ}}} = \frac{67,982}{89,145} \approx 0,76.$$

Это означает, что на основании регрессионной модели линейного типа можно объяснить 76 % наблюдаемого рассеяния значений переменной η.

Проверим значимость $R^2_{\text{гиперб}}$ и $R^2_{\text{лин}}$. В данном случае $m = 2,$ поскольку на основании выборочных данных мы оценивали значения двух параметров ( $\hat{\beta}_0$ и $\hat{\beta}_1$ ).

$$F_{\text{гиперб}} = \hat{R}^2_{\text{гиперб}} \frac{n-m}{(m-1)(1-\hat{R}^2_{\text{гиперб}})} = 0,97 \frac{10-2}{(2-1)(1-0,97)} \approx 258,67;$$

$$F_{\text{лин}} = \hat{R}^2_{\text{лин}} \frac{n-m}{(m-1)(1-\hat{R}^2_{\text{лин}})} = 0,76 \frac{10-2}{(2-1)(1-0,76)} \approx 25,33.$$

По таблицам квантилей распределения Фишера (определим для $\alpha = 0,05,\ \nu_1 = 2-1 = 1,\ \nu_2 = 10-2 = 8$ ) $F_{0,05,1,8} = 5,32.$

Поскольку $F_{\text{гиперб}} > F_{0,05,1,8}$ и $F_{\text{лин}} > F_{0,05,1,8}$, значения коэффициентов детерминации, оценивающих тесноту зависимости гиперболического и линейного видов, значимо отличаются от нуля, и построенные уравнения могут быть использованы для описания изучаемой зависимости.

Таким образом, полученные результаты позволяют лучше спрогнозировать работу рассматриваемого предприятия, и тем самым получить больший экономический эффект от его работы.

Всё вышеизложенное позволяет преподавателю не только продемонстрировать студентам методику применения статистических методов, но и показать важность использования её в экономической деятельности.

**Список литературы**

1 **Кулаженко, Ю. И.** Основы прикладной математики : учеб.-метод. пособие / Ю. И. Кулаженко, В. Е. Евдокимович / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2023. – 218 с.

УДК 378.14

# О ТЕНДЕНЦИЯХ ИЗМЕНЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ТЕХНИЧЕСКОМ УЧРЕЖДЕНИИ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

*М. В. ЗАДОРОЖНЮК, Е. З. АВАКЯН, С. М. ЕВТУХОВА*
*Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Республика Беларусь*

Современное общество столкнулось с глобальными вызовами, связанными с реформированием всех отраслей науки, обусловленным, в том числе, стремительным прогрессом в области информационных технологий. Несомненно, процессы трансформации, происходящие во всех сферах человеческой деятельности, не могли не затронуть и систему образования.

В настоящее время в высшем естественнонаучном образовании остро стоит проблема качества математической подготовки. Многолетний опыт преподавания математики на младших курсах университета позволяет авторам утверждать, что большая часть студентов испытывают значительные сложности при освоении математических дисциплин, что находит отражение в снижении успеваемости, возрастании процента перевода на гуманитарные направления или отчислении из университета. Надо отметить, что эта проблема характерна не только для нашей страны. Так, например, в российских, европейских и американских вузах процент студентов, преждевременно прекративших обучение, для инженерных направлений составляет 15–40 %. Если принять во внимание увеличение количества бюджетных мест по инженерным направлениям, то можно говорить о естественных предпосылках снижения уровня подготовки студентов. Борьба с этой, очевидно негативной, тенденцией ни в коем случае не должна сводиться к понижению требований к уровню знаний студентов. Снижение планки требований в погоне за высоким процентом успеваемости неминуемо приведет к тому, что выпускники учреждения высшего образования (УВО) перестанут быть востребованы на рынке труда, и, как следствие, к потере престижа данного учебного заведения и снижению его привлекательности для подготовленных и мотивированных абитуриентов.

Нельзя не отметить, что в течение последних двух лет наметились некоторые позитивные тенденции в направлении увеличения конкурса на инженерные специальности в нашей стране. Это обусловлено как естественными причинами (улучшением демографической ситуации в стране в целом), так и искусственным уменьшением количества конкурсных бюджетных мест за счет увеличения доли студентов, обучающихся на условиях целевой подготовки.

Одной из причин слабой успеваемости студентов младших курсов, на наш взгляд, является недостаточная подготовленность студента к восприятию и усвоению материала в том формате, как этого требует УВО. И это касается не только формы проведения занятий и итоговых аттестаций. В УВО многократно, по сравнению со школой, возрастает роль самостоятельной работы студента (в последних типовых программах на самостоятельное изучение отведены целые разделы математики). Нельзя сказать, что самостоятельной работе уделяется недостаточно внимания в школе, так как из школьной программы никуда не исчезли домашние и контрольные работы, сочинения и рефераты. Однако реальность такова, что с появлением решебников и Интернета большинство учащихся предпочитают «экономить силы» и идти по пути наименьшего сопротивления, скачивая готовые решения и тексты. Попытки учителей «обыграть» Всемирную паутину, предлагая оригинальные нестандартные темы сочинений или рефератов имели кратковременный эффект, но с появлением нейросетей, способных сгенерировать текст на любую предложенную тему, потерпели поражение. Возникла парадоксальная ситуация: казалось бы, Интернет позволяет человеку получить доступ к образовательным ресурсам практически всей планеты и расширить свои знания в любой отрасли науки без существенных финансовых затрат не выходя из дома, а вместо этого используется с совершенно противоположной целью – снизить качество минимально необходимого образования. Здесь кроется еще одна опасность: глядя, как легко нейросеть «рассуждает» на любую тему и решает (кстати, не всегда правильно) любую задачу, школьник оказывается в плену ложного убеждения в том, что обучение не требует никаких усилий, а все проблемы (и не только математические) решаются простым запросом в Интернете. Последствиями таких убеждений являются инфантилизм и отсутствие логического и критического мышления во взрослой жизни. Кроме того, из школьной программы практически исчезли доказательства теорем и строгие определения, осталось преимущественно решение примеров, поэтому даже студент, имеющий достаточно высокий балл при поступлении, зачастую хорошо считает, но теряется при необходимости обосновать свое решение, проанализировать какие-либо результаты или сделать выводы. В этом смысле ребята, принимавшие активное участие в различных интеллектуальных соревнованиях – турнирах, олимпиадах, исследовательских конкурсах, – выгодно отличаются наличием критического мышления и привычкой обосновывать свои логические выводы и умозаключения.

Следует отметить, что в процессе преподавания необходимо учитывать особенности современного поколения студентов, а именно, зависимость от гаджетов, клиповое мышление, неспособность к длительному кропотливому труду. Поэтому для сохранения качества математической подготовки в современных условиях необходимо пересмотреть как методику преподавания математики, так и подходы к организации образовательного процесса и составлению учебных планов. Студентам первого курса требуется, на наш взгляд, некоторый период адаптации к новым условиям получения знаний, и это обстоятельство обязательно должно быть учтено при организации учебного процесса в первом семестре.

Целесообразным, по нашему мнению, было бы деление групп первокурсников на подгруппы при проведении практических занятий по математике хотя бы в течение первого семестра: это дало бы возможность студентам быстрее адаптироваться к новым формам и методам обучения, а преподавателю проявить индивидуальный подход и более внимательно отнестись к каждому студенту.

Бурное развитие цифровых технологий повлекло за собой появление в учебных планах таких математических дисциплин, как «Вычислительные методы и компьютерная алгебра», «Численные методы», «Дискретная математика», «Математическая логика». Однако введение этих предметов происходит не за счёт увеличения часов на математическую подготовку, а в результате уменьшения времени, отводимого на изучение классических математических курсов. Так, за последние несколько лет, несмотря на появление новых дисциплин, общий объём часов по математическим дисциплинам на технических специальностях сократился в среднем на 15–25 %.

В настоящее время процесс реорганизации преподавания математики в УВО движется по пути дробления большого курса на несколько мелких дисциплин. Казалось бы, это позволяет глубже изучить каждый отдельный предмет. Но в то же время порождает ряд проблем. Во-первых, студенты младших курсов параллельно изучают две, а то и три математических дисциплины, что естественно для студентов математического факультета, но не учитывает специфику образования инженерного. Во-вторых, в рамках целостного курса высшей математики была возможность перераспределять учебное время между различными разделами в зависимости от подготовленности студентов и необходимости каждой конкретной темы в дальнейшем. В-третьих, в процессе такого дробления дисциплина незаметно «теряет» часы: сначала курс разбивается на более мелкие, а через несколько лет маленький курс либо вовсе исчезает из учебного плана, либо оказывается на выпускающей кафедре, где его зачастую преподают преподаватели, не являющиеся специалистами в данной области. Кроме того, дробление курсов и изменение программы происходит, как правило, без учета дальнейшего обучения и межпредметных связей, а исключительно с учетом зачетных единиц или нагрузки, т. е. на первый план выходят вопросы администрирования, а не качества образования.

Например, в плане специальности «Информационные системы и технологии» есть дисциплина «Численные методы математической физики», но сами уравнения математической физики в курсе математики не затрагиваются вообще, как, впрочем, и ряды Фурье, которые являются основным инструментом для решения такого рода задач.

Все это создает дополнительные трудности и для студента, которому и без того непросто адаптироваться к новым реалиям, и для преподавателя, задачами которого являются воспитание у студентов стойкой мотивации к овладению знаниями и формирование научного мировоззрения. Безусловно, фундаментальное математическое образование в техническом УВО имеет свою специфику по сравнению с классическим университетом. Материал несомненно должен иметь большую практическую направленность, однако без теоретических выкладок и логических обоснований и доказательств в математическом курсе не обойтись. Мы считаем важным сохранение количества часов, отводимых на изучение базовых разделов математики на уровне, необходимом для того, чтобы изложить материал последовательно и связно, не теряя логики предмета и не выхватывая из курса математики отдельные темы. В противном случае теряется смысл преподавания математики как дисциплины, изучение которой должно служить ядром всего общетехнического образования.

В заключение отметим, что математическое образование в техническом вузе является одной из важнейших составляющих подготовки высококвалифицированного специалиста. Оно не только призвано вооружить будущего специалиста соответствующим набором знаний, но и способствует развитию мыслительных навыков, формированию критического мышления и выступает краеугольным камнем, обеспечивающим логичное и последовательное изучение специальных дисциплин.

УДК 51-73; 531.3;796.01

## КИНЕМАТИКА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ СПОРТСМЕНА

*М. А. КИРКОР, А. Е. ПОКАТИЛОВ, А. М. ГАЛЬМАК*
*Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, г. Могилев*

При выполнении биомеханического анализа спортивных упражнений обнаружено, что даже движения спортсмена, которые исследуются как плоские, на самом деле являются пространственными, что сразу на порядки усложняет их изучение и моделирование [1].

На рисунке 1, *б* показана фаза подседа при выполнении рывка штанги в тяжелой атлетике. На рисунке 1, *а* представлено смещение правого локтевого сустава в процентах по отношению к длине правого плеча. Максимальное отклонение составляет 14 %.


Рисунок 1 – Рывок штанги. Перемещение локтевых суставов

Анализ техники рывка штанги показывает, что голень отклоняется до максимума в горизонтальном направлении, т. е. поворачивается во фронтальной плоскости в конечной фазе упражнения. Также хорошо виден сложный характер движения коленей на всей траектории движения во время выполнения рывка. Происходит смещение суставов влево-вправо, напоминая гармонические колебания.

При анализе рисунка 1, *а*, *в* установлено, что для левого локтевого сустава по рисунку 1, *в* отклонение такое же как и для правого сустава. Смещение достигает 14 % в обе стороны от первоначального положения в стартовой фазе. Таким образом, по абсолютной величине смещение оказывается равным примерно 30 % с учетом смещения в обе стороны от первоначального положения сустава в начальной фазе рывка.

На самом деле картина движения локтевых суставов более сложная, чем коленных. Траектории коленных суставов, по сути, зеркальны по отношению друг к другу. Это отражает технику упражнения, здесь колени перемещаются синхронно, зеркально и одинаково.

На рисунке 1, *а* и *в* движение локтевых суставов до 35 кадра (фаза подседа), как и для колен, примерно зеркально, что означает одинаковое смещение локтей друг относительно друга. А вот при дальнейшем движении спортсмена при подъеме из подседа и фиксации смещение локтевых суставов происходит преимущественно в одну сторону, влево. Это означает перемещение самой штанги вместе с локтевыми суставами в горизонтальной плоскости и в одном направлении, без изменения расстояния между локтями.

Вычислительный эксперимент рывка штанги проводился в программе Mathcad 15.0 для трех случаев: рывка штанги весом 70, 100 и 140 кг. Именно эксперимент показал, что звенья биомеханической системы (БМС) совершают пространственное, а не плоское движение. Нами специально был отдельно проведен биомеханический анализ рывка штанги не только как пространственного движения, но и как плоского. Это необходимо для сравнительного анализа того, насколько реальные движения звеньев БМС отклоняются от движения в одной плоскости [2].

На рисунке 2 приведены угловые показатели движения бедра и предплечья, как наиболее отклоняющихся от плоского движения звеньев.

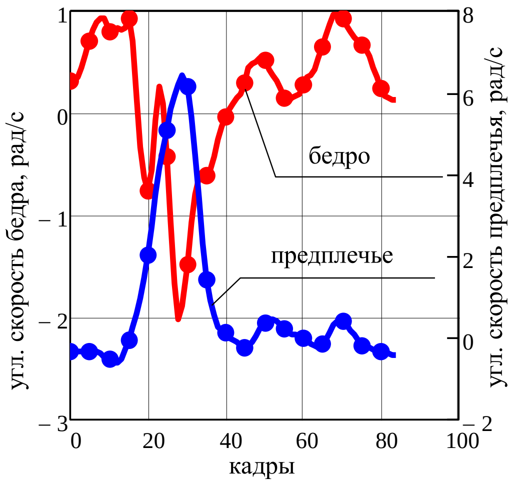


Рисунок 2 – Угловая кинематика бедра и предплечья БМС

На рисунке показано, что угловая скорость бедра в максимуме достигает величин в пределах (+1…–2) рад/с. Предплечье поворачивается с гораздо большей угловой скоростью, которая изменяется в пределах (+6…–2,5) рад/с.

На рисунке 3 показаны графики изменения угловой скорости и углового ускорения бедра при рывке штанги весом 140 кг. Здесь угловое ускорение изменяется в пределах (+13…–15) рад/с$^2$. На рисунке 4 даны графики для предплечья. В этом случае при рывке угловое ускорение рассматриваемого звена изменяется в пределах (+20…–30) рад/с$^2$.

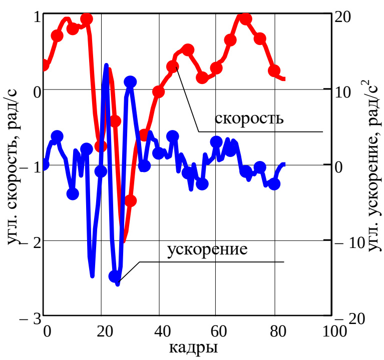


Рисунок 3 – Угловые скорость и ускорение бедра БМС

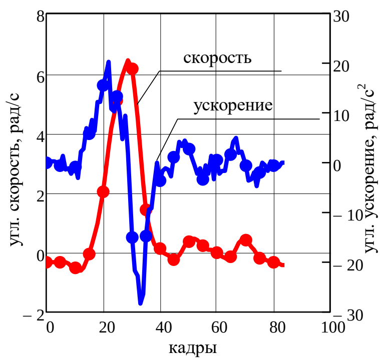


Рисунок 4 – Угловые скорость и ускорение предплечья БМС

На рисунке 5, *а–г* показаны кадры учебного фильма по правильной технике рывка штанги в исполнении мастера спорта международного класса Артема Леонидова, РФ. На рисунке 5, *а* представлен кадр видеосъемки спортивного упражнения в момент старта. Сопоставление правильной техники выполнения упражнения и графиков по рисункам 2–4 показывает изменение кинематических параметров звеньев синхронно фазам упражнения.

*а*) *б*) *в*) *г*)

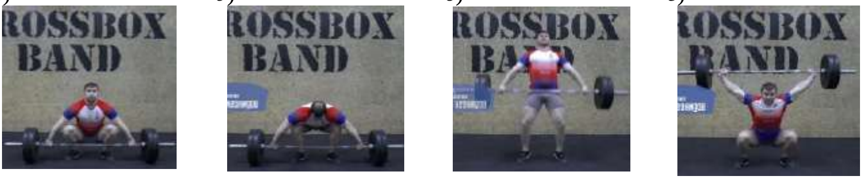


Рисунок 5 – Техника рывка. Фронтальная съемка

Таким образом, при видеосъемке упражнений в тяжелой атлетике одной видеокамерой в исследования вносятся значительные погрешности. С другой стороны, устранение этой ошибки приводит к тому, что появляется возможность при видеосъемке одной видеокамерой получить пространственную картину движения. Но при этом встает вопрос о методах разработки уравнений движения БМС и их расчетов.

Исходя из предварительного анализа и экспериментов, покажем отличие реальных параметров звеньев на примере бедра спортсмена от проекции звена в сагиттальной плоскости на рисунке 6.

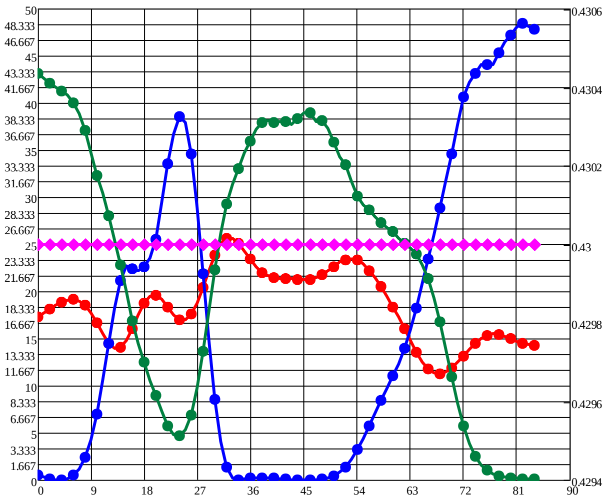


Рисунок 6 – Изменение проекций бедра (в %) в пространственной системе координат по отношению к действительному размеру звена БМС

Здесь бедро имеет длину 0,43 м, при этом его проекции в сагиттальной, горизонтальной и вертикальной плоскостях изменяются в пределах от 25 до 50 % от реальных размеров бедра. Соответственно этому и меняются все кинематические характеристики движения звена в этих плоскостях. Аналогично изменяются параметры и всех остальных звеньев биомеханической системы.


**Список литературы**

1 **Бернштейн, Н. А.** О построении движений / Н. А. Бернштейн. – М. : Медгиз, 1947. – 255 с.

2 **Жеков, И. П.** Биомеханика тяжелоатлетических упражнений / И. П. Жеков. – М. : Физкультура и спорт, 1976. – 192 с.


УДК 51-73; 531.3; 796.01

# БИОМЕХАНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СПОРТИВНЫХ УПРАЖНЕНИЙ


*М. А. КИРКОР, А. Е. ПОКАТИЛОВ, А. М. ГАЛЬМАК, А. А. ВАСИЛЕВСКИЙ*

*Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, г. Могилев*


В рамках биомеханического анализа проводился вычислительный эксперимент. Расчеты выполнены в программе Mathcad 15.0 для трех случаев: рывка штанги весом 70, 100 и 140 кг. При этом исследования шли в двух направлениях:

1 Биомеханический анализ рывка по данным видеосъемки как плоского движения.

2 Биомеханический анализ рывка с учетом его пространственного характера.

Первый случай необходим в качестве базы, чтобы оценить погрешность вычислений по предложенному методу исследования пространственного движения спортсмена, а также, чтобы оценить насколько реальные результаты биомеханического анализа отличаются от базового варианта в абсолютных величинах [1].

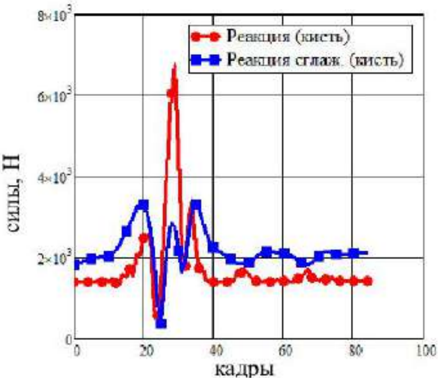


Рисунок 1 – Суставные реакции при плоском движении. Вес 140 кг

На рисунке 1 показана реакция

в кисти спортсмена при рывке штанги весом 140 кг. Здесь приведены сглаженные данные и данные, полученные в ходе вычислительного эксперимента до их обработки специальными функциями Mathcad 15.0 – функциями сглаживания.

На рисунках 2 и 3 приведены годографы реакции в кисти в вертикальной плоскости при рывке штанги 140 кг. Здесь для сравнения на рисунке 2 дана кривая до сглаживания, а на рисунке 3 – после сглаживания данных вычислительного эксперимента. Отметим важный факт – сглаживание данных является обязательной процедурой при биомеханическом анализе. Также укажем, что определение суставных реакций спортсмена в вычислительном эксперименте – на сегодняшний день это единственный метод их нахождения.

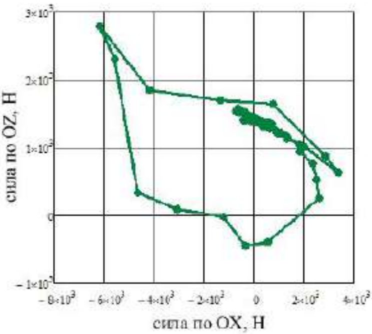


Рисунок 2 – Суставные реакции при плоском движении. Вес штанги 140 кг

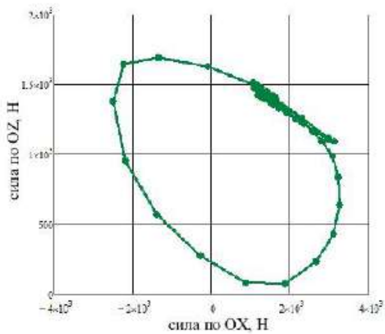


Рисунок 3 – Годограф реакции в кисти по сглаженным данным. Вес штанги 140 кг

На следующем этапе в эксперименте определялись опорные реакции спортсмена. По его результатам выявлены закономерности изменения опорной реакции спортсмена в контакте «стопа – помост» (рисунки 4 и 5).

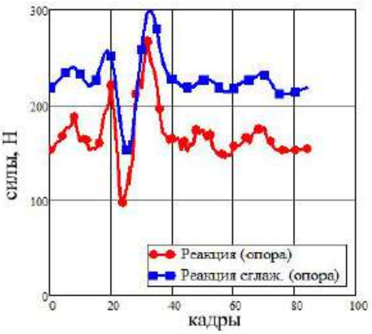


Рисунок 4 – Опорная реакция стопы. Вес штанги 140 кг

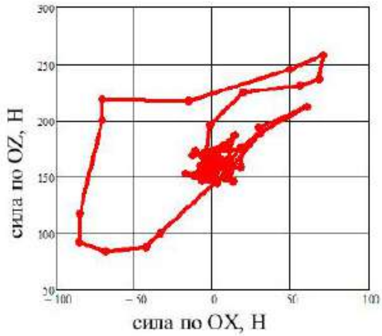


Рисунок 5 – Годограф опорной реакции (данные не сглажены)

На рисунке 4 показаны результаты расчета опорной реакции спортсмена в двух вариантах – до сглаживания данных и после. А на рисунке 5 показан годограф несглаженной опорной реакции спортсмена при весе штанги в 140 кг.

На рисунке 6 приведен годограф опорной реакции спортсмена для случая, когда принимаются данные видеосъемки одной камерой, как фиксация плоского движения [2]. Необходимо отметить сложный характер изменения реакции в начале и в завершении упражнения.

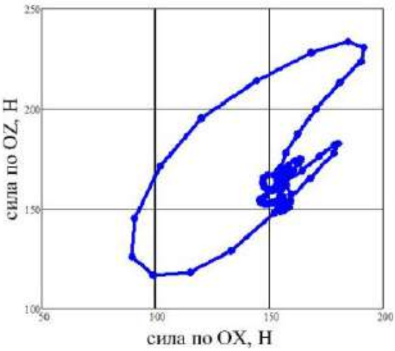

Рисунок 6 – Годограф опорной реакции

Также отметим, что величина опорной реакции достигает значений до 300 кг в вертикальном направлении, при этом значительно уменьшаясь в фазе подрыва до 150 кг. Горизонтальная составляющая меняется в диапазоне 90 – 190 кг, достигая значительных величин, при этом годограф является плавной кривой.

На рисунках 7–9 показаны кривые изменения опорных реакций при рывке штанги в 140 кг из расчета того факта, что несмотря на видеосъемку одной камерой движения спортсмена в сагиттальной плоскости, это движение является пространственным. Кривые получены в вычислительном эксперименте.

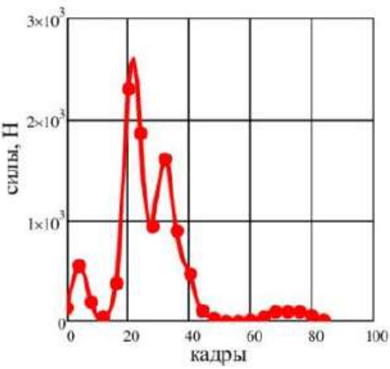

Рисунок 7 – Опорная реакция в сагиттальной плоскости

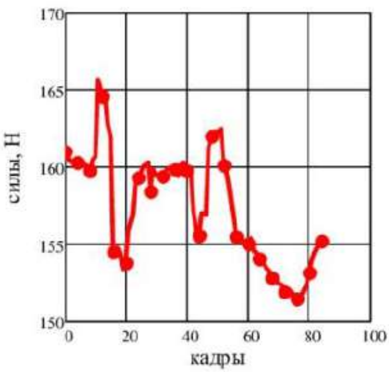

Рисунок 8 – Опорная реакция в горизонтальной плоскости

На рисунке 7 даны изменения опорной реакции в сагиттальной плоскости.

На рисунке 8 приведена кривая изменения опорной реакции в горизонтальной плоскости во всех фазах упражнения. На рисунке 9 показаны изменения опорной реакции в вертикальной (фронтальной) плоскости. Данные получены в вычислительном эксперименте по разработанным нами моделям.

Анализ изменения опорной реакции показывает, что в вертикальной и сагиттальной плоскостях составляющие опорной реакции имеют один порядок. Зато в горизонтальном направлении эта составляющая как раз на один порядок меньше, в максимуме достигая 165 Н (16,5 кгс).

На рисунке 10 приведена опорная реакция, рассчитанная в эксперименте двумя методами, как для плоского движения и как для пространственного. В обоих случаях результаты расчетов являются значимыми и позволяют показать пространственный характер рывка штанги.

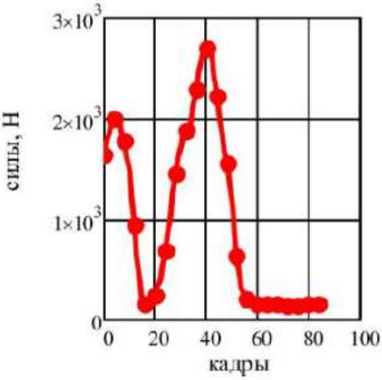


Рисунок 9 – Опорная реакция в вертикальной плоскости

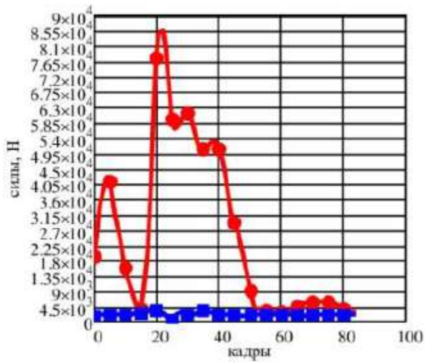


Рисунок 10 – Изменение опорной силы

Анализ показал перспективность расчета рывка штанги как пространственного движения.

## Список литературы


1 **Петров, В. А.** Механика спортивных движений / В. А. Петров, Ю. А. Гагин. – Тбилиси : Ганатлеба, 1983. – 276 с.

2 **Тарг, С. М.** Краткий курс теоретической механики : учеб. для втузов / С. М. Тарг. – 20-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2010. – 416 с.: ил.

УДК 004.75(07+81).519.3

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК ВАЖНЫЙ ИНСТРУМЕНТ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО МЫШЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

*А. П. МАТЕЛЕНОК, В. С. ВАКУЛЬЧИК*
*Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, г. Новополоцк, Республика Беларусь*

Современное производство нуждается не только в квалифицированных инженерах-технологах, но и в специалистах, которые могут привносить технологические и технические новшества. Важно, чтобы они были готовы работать в команде над проектами, которые объединяют знания из разных областей науки и практики. Разработка, проектирование и внедрение новых технологических решений, а также оптимизация уже существующих производственных процессов требуют решения сложных инженерных задач. Эти задачи связаны с использованием математических методов, созданием математических моделей процессов, выявлением закономерностей химико-технологических реакций, обработкой результатов экспериментов и поиском оптимальных условий для проведения технологических процессов. Потребность в инженерах-технологах, способных к инновациям, указывает на важность обновления инженерного образования. Ключевым элементом этого обновления должно стать усиление инновационной составляющей, которая предоставит студентам прочную базу фундаментальных и технических знаний, необходимых для решения реальных производственных задач. Идеальная модель обучения предполагает развитие у студентов аналитических способностей, умения оценивать инженерные проблемы, разрабатывать математические модели для их решения и проводить исследования, используя знания из разных областей науки. С учетом этого образовательный процесс должен быть направлен на формирование у студентов комплексных знаний, умений и навыков, которые станут фундаментом для их дальнейшего профессионального роста и развития.

Одним из методических решений названной проблемы может выступать интегрированный модуль (ИМ) [1]. «Выделим педагогические требования для проектирования ИМ:

1 Необходимо вычленить из содержания общепрофессиональных и специальных дисциплин курсов дидактические единицы, базовые понятия и соответствующие модели, которые позволят установить междисциплинарные связи с естественнонаучными дисциплинами.

2 Проанализировать, какие есть общие дидактические единицы, базовые понятия и соответствующие модели между дисциплинами (естественнонаучного, общепрофессионального, специального циклов), выявить дисциплины со значительными пересечениями содержательных взаимосвязей.

3 На основе интеграционных элементов содержания двух (не менее) и более учебных курсов спроектировать ИМ.

Рассмотрим один из способов создания и реализации ИМ дисциплин в рамках полипарадигмального подхода и междисциплинарной интеграции на примере специальности 6-05-0711-02 «Переработка нефти и газа и промышленный органический синтез» Полоцкого государственного университета имени Евфросинии Полоцкой. В [1] указана востребованность глубокой интеграции учебного материала в рамках отдельных дисциплин, между дисциплинами для выделенной специальности. Поэтому было принято решение объединить несколько взаимосвязанных дисциплин в интегрированные модули, обеспечивающие посредством междисциплинарной интеграции входящих в него дисциплин формирование определенных компетенций выпускника. Каждый ИМ рассматривается как часть образовательной программы, которая имеет определенную логическую завершенность по отношению к установленным целям и результатам обучения.

В учебно-методическом комплексе [2], разработанном для технических специальностей, спроектирован специальный элемент «Фонд профессионально ориентированных заданий» с целью стимулирования и мотивации студентов к расширению математических знаний, для формирования у них умений и навыков математического моделирования. Приведем пример отдельных задач, представленных в фонде. После изучения каждого модуля, представленного в УМК, в фонде приведены примеры заданий, содержащие химико-технологическую составляющую, при разработке заданий учитывался уровень знаний, умений и навыков студентов первокурсников в решении задач такого типа. Одна или две задачи из первого модуля «Элементы линейной алгебры» решаются преподавателем с полным объяснением основных этапов решения задачи.

Приведем пример задания.

*Задача 1.* Экспериментатор установил, что при определенной постоянной температуре суммарное давление смесей паров бензола (1), дихлорэтана (2) и хлорбензола (3) в однофазной системе равно значениям, представленным в таблице 1. Найти значения давления пара чистых компонентов.

*Таблица 1*

| Состав смеси, мол. доли | | | Давление $P$, Па |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | |
| 0,80 | 0,10 | 0,10 | 1840 |
| 0,20 | 0,70 | 0,10 | 1860 |
| 0,05 | 0,05 | 0,90 | 236 |

Далее студентам предлагается решить похожие задания, выполнить компьютерную реализацию в Excel, и получить дополнительный балл на экзамене. Это полностью согласуется с учебной программой по информатике, таким образом достигается реализация междисциплинарных связей и закрепление навыков программирования. В третьем модуле «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» студенты получают две задачи профессионально ориентированного характера во внеаудиторной контрольной работе, и их выполнение обязательно. Если возникают трудности, можно попросить консультацию у преподавателя. В этом случае реализация должна быть представлена в системах компьютерной алгебры (Mathcad или Maple) и дополнительный балл будет получен по информатике. Приведем примеры задач.

*Задача 2.* Известно, что прочность на горизонтальный изгиб балки прямоугольного горизонтального сечения пропорциональна произведению ширины балки на квадрат высоты. Найти отношение ширины к высоте поперечного сечения наиболее прочной балки, которую можно вырезать из цилиндрического бревна диаметром $d$ см.

*Задача 3.* Нефтеперерабатывающий завод производит $x$ т бензина в день. По договору он должен ежедневно поставлять автопаркам РБ не менее 20 т бензина. Производственные мощности завода таковы, что выпуск бензина не может превышать 90 т в день. Определить, при каком объеме производства удельные затраты будут наибольшими (наименьшими), если функция затрат имеет вид: $K = -x^3 + 98x^2 + 200x$.

*Задача 4.* Фильтр имеет форму прямого конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу его основания при заданном объеме, чтобы на его изготовление было потрачено наименьшее количество полотна? Обращаем внимание, что, начиная со второго семестра, в задачах усиливается физическая составляющая.

Таким образом, при постепенном вводе задач профессионально ориентированного характера формируются условия, при которых все студенты первого курса получают навыки математического моделирования и реализации математических моделей на компьютерах. С каждым модулем задачи усложняются, самые сложные задачи вводятся в модуле «Дифференциальные уравнения». В дальнейшем, используя дополнительные баллы в качестве стимула на экзамене, предлагается самим студентам выбрать задачи, которые они хотели бы решить. Если задания действительно интересные и их решения достойно представлены, они включаются в студенческую конференцию, которая ежегодно проходит в университете. На докладах присутствуют представители выпускающей кафедры, которые вносят предложения по дальнейшему развитию темы и в результате сотрудничества получаются серьезные научные проекты. Приведем один из примеров такого проекта: «Применение сорбентов при ликвидации разливов нефтепродуктов: анализ свойств сорбентов и построение математической модели». Объект исследования – основные свойства экологически чистых сорбентов. Предмет исследования – сорбенты на основе природных материалов. Цель исследования – изучение влияния состава сорбента и его свойств на процесс сорбции и построение в результате исследований математической модели. Метод исследования: эксперимент, анализ, моделирование.

Следует отметить, что реализация междисциплинарной интеграции дисциплин, входящих в ИМ, посредством решения профессионально ориентированных задач на младших курсах облегчает процесс вступления студентов в научные исследования и способствует развитию аналитического мышления (стимулирует умения анализировать реальную задачу, выделять ключевые параметры и соотношения), приобретению практических навыков (умение строить, решать и интерпретировать математические модели, соответствующие профессиональной деятельности), обучению принятия решений (использование моделей для прогнозирования, оптимизации и оценки решений в профессиональной сфере), интеграции теоретических знаний с практикой (связывание математических методов с конкретными задачами будущей профессии). Она позволяет создать такие педагогические условия, при которых каждый студент получает навыки по проектированию и исследованию математических моделей. Значит, представленная методика позволяет осуществлять обучение студентов основным этапам научного исследования и реализует формирование методологической компоненты содержания образования будущего химика-технолога.

## Список литературы

1 **Мателенок, А. П.** Междисциплинарная интеграция как основа обучения математике студентов технических специальностей / А. П. Мателенок, В. С. Вакульчик // Известия Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. – 2022. – № 206. – С. 167–183. – DOI: 10.33910/1992-6464-2022-206-167-183. – EDN RIKMBZ.

2 **Мателенок, А. П.** Высшая математика : практикум : в 4 ч. / А. П. Мателенок. – Новополоцк : Полоц. гос. ун-т, 2020. – Ч. 1 : Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. – 212 с.

3 Формы и методические приемы применения междисциплинарных связей в обучении математике студентов технических специальностей / А. П. Мателенок, В. С. Вакульчик, Ю. Ю. Гавронская, Е. В. Сафронова // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия E. Педагогические науки. – 2024. – № 2 (42). – С. 10–14.

УДК 65.012.122

# ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ ПРИ РЕШЕНИИ ИНЖЕНЕРНЫХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

*А. А. МИХАЛЬЧЕНКО*
*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

При разработке Государственной программы развития транспортной системы страны широко использованы отдельные аспекты информационных технологий. При расчётах эффективности программы по основным направлениям ее разработчики пришли к выводу, что в математической модели формирования расчётов необходимо использовать комплексные числа, которые нашли своё применение во многих областях моделирования параметров науки и техники. Практика использования комплексных чисел в инженерных расчётах имеет широкое применение во многих странах при формировании государственных инвестиционных программ и в инженерных расчётах показателей транспортных задач [1]. Особенность их применения выявляется при прогнозировании эксплуатационных показателей транспортных систем. Это связано со сложной обработкой и хранением данных. При этом комплексные числа, интегрированные в современные системы хранения данных, дают преимущества в контексте их обработки и анализа [2].

Модель прогнозирования инвестиций в развитие транспортной системы основана на использовании квадратного корня

$$C_{\text{ох}}^{\text{тп}} = \sqrt{\prod_{i=1}^{9} C_i}\,,$$

где $C_i$ – субпоказатель инвестиционной политики отраслевого хозяйства железной дороги; $i$ – количество функциональных отраслевых хозяйств железной дороги.

По результатам хозяйственной деятельности железной дороги за 2024 г. в отдельных отраслевых хозяйствах показатель инвестиционной деятельности получился отрицательным числом. При использовании модели показанной формулы в результате расчёта получилось комплексное число вида $A = a + b_i$. В данном выражении $A$ – комплексное число, $a$ – действительная часть, $b$ – мнимая часть, $i$ – мнимая единица ($i^2 = -1$).

При наличии комплексного числа в модели при прогнозировании инвестиционной политики железной дороги рассматриваются основные принципы: геометрическая интерпретация результата расчётов; системы хранения данных; кодирование и модуляция используемых данных; обучение персонала использованию информационных технологий.

Геометрическая интерпретация результатов расчётов прогнозных показателей предусматривает их геометрическое представление. При этом действительная их часть отложена по горизонтальной оси, а мнимая часть – по вертикальной оси. Каждое полученное комплексное число представляет собой точку дифференцированного результата на плоскости. Геометрическая интерпретация комплексных чисел позволяет наглядно представлять операции этапов прогнозирования инвестиций.

Допускается расширение используемой действительной числовой системы комплексными числами. Комплексное число представляется в виде суммы действительной и мнимой частей. В таком случае вещественное число умножается на мнимую единицу с отрицательным результатом, которая определена как квадратный корень из –1. Использование принципа позволяет работать с комплексными числами так же, как с действительными, выполняя операции сложения, вычитания, умножения и деления, что исключает получение отрицательного результата при его вычислениях для потребностей прогнозирования.

Использование комплексных чисел при формировании инвестиционной политики железной дороги расширяет математические инструменты, доступные для анализа и решения задач прогнозирования. Оно позволяет рассматривать сложные и абстрактные математические концепции.

Современные системы хранения данных сталкиваются с огромными объемами информации и требованиями к эффективности обработки данных. При разработке комплексного прогноза инвестиционной политики железной дороги комплексные числа в системах обработки и хранения данных нашли своё применение в приведённых далее параметрах. Сжатие данных по периодам прогнозирования с минимальной потерей их качества.

Кодирование и модуляция используемых данных при их передаче между уровнями управления и структурными подразделениями железной дороги. Такая процедура позволяет передавать больше информации через ограниченные каналы связи. При этом используется криптография данных – в алгоритмах обязательного шифрования. При прогнозировании инвестиций в транспортных системах используется закрытая информация трёх уровней: для служебного пользования, секретная и для ограниченного пользования. В данном случае комплексные числа используются для увеличения сложности шифрования и повышения безопасности используемых данных. Имеет место использование комплексных чисел в качестве ключей шифрования.

Использование комплексных чисел при моделировании систем обработки и хранения данных для моделирования и анализа хранения данных позволяет наиболее эффективно работать с ними на различных уровнях управления [3]. При этом важное значение имеет восстановлении данных, которые могут быть утрачены при работе с ними. Комплексные числа могут быть эффективно применены в алгоритмах для их восстановления. Это особенно актуально при работе с данными, представляемыми за пределами организаций железной дороги.

При прогнозировании инвестиций с использованием большого количества данных и оперативного представления результативности расчётов имеет важное значение машинное обучение пользователей. Многие алгоритмы машинного обучения используют комплексные числа для оптимизации и анализа данных. Представление результатов прогнозирования инвестиций для железной дороги рассматривается в геометрическом моделировании. Полигон железной дороги имеет пространственную геометрию. Поэтому для описания пространственных преобразований и операций при работе с инвестициями комплексные числа могут быть наиболее эффективными. Они позволяют оптимизировать хранение данных. В данном случае с помощью комплексных чисел можно моделировать различные параметры и характеристики модулей хранения данных для их оптимизации и минимизации операций с ними. С учётом того, что при прогнозировании инвестиций в железнодорожный транспорт на всех этапах выполняется статистический анализ. При его проведении комплексные числа могут использоваться для представления данных с несколькими измерениями, что характерно для железнодорожной статистики и позволяет более точно описывать многомерные данные.

### Список литературы


1 **Прояева, И. В.** Применение теории комплексных чисел к решению прикладных задач / И. В. Прояева, А. Д. Сафарова // Актуальные проблемы и перспективы в сфере инженерной подготовки : монография. – Оренбург, 2023. – С. 111–116.

2 **Гамова, Н. А.** Комплексные числа и функции комплексного переменного : учеб. пособие / Н. А. Гамова, А. Н. Гирина, И. П. Томина. – Оренбург : ОГУ, 2022. – 124 с.

3 **Воробьев, Е. Г.** Комплексные числа и оптимизация средств хранения информации в глобальных информационных системах // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2015. – № 2. – С. 22–26.



УДК 165:519.8


## РОЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В СОВРЕМЕННОЙ НАУЧНОЙ КАРТИНЕ МИРА И В ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКЕ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛИСТОВ


*О. В. НИЗОВА*

*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*


Развитие науки в XXI веке может рассматриваться как этап синтеза междисциплинарных исследований, «слияния наук», достигших «предела миниатюризации» (по удачному выражению члена-корреспондента РАН

М. В. Ковальчука). Этот синтез подразумевает глубокое познание общих для наук природных систем, направленное на создание единой картины мира из отдельных онтологий. Тесно связанный с расширением научных знаний новый технологический уклад требует подготовки таких технических специалистов, которые даже при узкой специализации будут обладать пониманием фундаментальных природных закономерностей, сформулированных современной им наукой. При этом надо учесть, что основной универсальный язык науки со времён Галилео Галилея – это математика. Математическое и компьютерное моделирование вносят весомый вклад в современную научную картину мира, частично заменяя эксперимент в том случае, когда его сложно провести по технико-экономическим причинам.

Курс философии как базовый компонент отечественной системы образования подразумевает ознакомление студентов с основами современной научной картины мира. Полагаем, что для будущих технических специалистов целесообразно введение в этот курс краткой информации о некоторых математических моделях современной науки. Как показывает накопленный педагогический опыт, такое внедрение приносит несколько результатов: уважение к труду исследователей, расширение кругозора студентов относительно практической применимости высшей математики и рост интереса к междисциплинарным исследованиям и инженерным решениям.

Например, рассказ о космологии и реляционной концепции пространства и времени можно дополнить уравнением общей теории относительности, объяснив, что левая часть уравнения характеризует геометрию пространства-времени, а правая – энергию нашей Вселенной, в том числе и темную энергию, благодаря которой Вселенная ускоренно расширяется, и обратив внимание студентов на то, что гравитация выступает как проявление кривизны:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

где $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи, $R$ – скалярная кривизна, $\Lambda$ – космологическая постоянная, $T_{\mu\nu}$ представляет собой тензор энергии-импульса материи, ($c$ – скорость света в вакууме, отражающая максимальную скорость распространения гравитации, $G$ – гравитационная постоянная Ньютона), $g_{\mu\nu}$ – симметричный тензор, а греческие индексы пробегают значения от 0 до 3. Уместно подчеркнуть эффективность этой математической модели, которая была подтверждена обнаруженными гравитационными волнами и гравитационными линзами.

Особенности строения микромира хорошо иллюстрируются основным уравнением квантовой механики, уравнением Шрёдингера, описывающим состояние атомов и субатомных частиц:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^4}\left(E - U\right)\Psi = 0,$$

где $x$ – расстояние, $h$ – постоянная Планка, $m$ – масса, $E$ – полная энергия частицы и $U$ – потенциальная энергия частицы. Следует обратить внимание студентов на то, что, по мнению широкого круга исследователей, уравнение Шрёдингера, как и уравнение общей теории относительности Эйнштейна, наделено особой выразительной красотой [1, 2]. Краткие пояснения к уравнению послужат основой для формирования у студентов первоначальных представлений о принципах работы квантового компьютера, который в научных целях используется, в том числе, для симуляции квантовой динамики (среди информационно-научных достижений 2025 г. – симуляция взаимодействия химических связей молекул аллена, бутатриена и пиразина со светом, что в ближайшей перспективе приведёт к усовершенствованию солнечных батарей [3]). Для современной научной картины мира важен и тот факт, что с помощью уравнения Шрёдингера можно рассчитать квантовые эффекты в биологических системах: например, в мае 2025 г. было экспериментально доказано, что перенос протонов в живых системах является не только химическим, но и квантовым процессом, поскольку в лизосомах протоны перемещаются в зависимости от спина электронов молекул воды и аминокислот [4].

В современной научной картине мира значительное место занимает синергетика, однако изложение её принципов в учебниках по философии не сопровождается указанием того, на какой основе они были получены. По крайней мере, в технических учреждениях высшего образования можно уделить внимание тому, что впервые нелинейная химическая реакция в первоначально однородной среде была смоделирована знаменитым кибернетиком А. Тьюрингом в его неоконченной работе «Химические основы морфогенеза» в виде следующей системы уравнений «реакция – диффузия»:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = P(x, y) + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = Q(x, y) + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}.$$

В случае нелинейного взаимодействия переменных $x$ и $y$ в системе может возникать неустойчивость гомогенного стационарного состояния и образуются сложные пространственно-временные режимы типа автоволн или диссипативных структур – стационарных во времени и неоднородных по пространству распределений концентраций. Условием появления структур в таких системах является различие коэффициентов диффузии реагентов, а именно – наличие близкодействующего «активатора» с малым коэффициентом диффузии и дальнодействующего «ингибитора» с большим коэффициентом диффузии. Такие условия в двухкомпонентной системе были более подробно изучены основателем школы синергетики И. Р. Пригожиным на классической модели «брюсселятор» (по названию брюссельской школы Пригожина и Лефевра), которая имеет следующий вид:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = A + X^2Y - \left(B+1\right)X + \frac{b^2x}{\partial r^2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = BX - X^2Y + \frac{b^2y}{\partial r^2},$$

$$A \Leftrightarrow X, \quad 2X + Y \Leftrightarrow 3X, \quad B + X \Leftrightarrow Y + C, \quad X \Leftrightarrow R$$

и описывает гипотетическую схему химических реакций, где две молекулы *x* и одна молекула *y* превращаются в три молекулы *x*.

Подобная реакция возможна в процессах с участием ферментов с двумя каталитическими центрами. Нелинейность этой реакции в сочетании с процессами диффузии вещества и обеспечивает возможность образования пространственных структур в первоначально однородной системе, т. е. морфогенез [5]. Таким образом студентам можно проиллюстрировать знаменитый «порядок из хаоса», возникновению которого уделяется внимание в биологии и социальных науках.

Интересными для понимания принципов моделирования в современной науке являются и физико-математические динамические модели ДНК, где модель второго уровня представлена динамикой эластичных стержней с круговым сечением [6], а также модели нейронов, с которыми связаны нейроморфные вычислительные модели.

Богатый исследовательский материал, предоставляемый современной наукой и технологиями, должен быть задействован в учебном процессе на понятном для студентов уровне и стимулировать их к разработке собственных инженерных решений.

**Список литературы**


1 **Moscowitz, C.** The 11 most beautiful mathematical equations / C. Moscowitz / Live science. – URL: https://www.livescience.com/57849-greatest-mathematical-equations.html (date of access: 17.09.2025).

2 It must be beautiful: great equations of modern science / Ed. G.Farmelo. – L., N.Y. : Granta, 2003. – 284 p.

3 **Tripathi, A.** World's first: Quantum simulation reveals real-time atom dance in light-driven processes / A. Tripathi // Interesting engineering. – URL: https://interestingengineering.com/science/real-time-atom-dance-revealed?utm_source=ixbtcom (date of access: 17.09.2025).

4 **Голованов, Г.** Ученые обнаружили квантовые эффекты в биологических клетках / Г. Голованов // Хайтек +. – URL: https://hightech.plus/2025/05/06/uchenie-obnaruzheni-kvantovie-effekti-v-biologicheskih-kletkah (дата обращения: 17.09.2025).

5 **Ризниченко, Г. Ю.** Биология математическая / Г. Ю. Ризниченко. – URL: https://www.library.biophys.msu.ru/MathMod/BM.HTML#ba (дата обращения: 17.09.2025).

6 Динамические модели в биологии // Информационная система. – URL: https://www.dmb.biophys.msu.ru/models (дата обращения: 17.09.2025).

УДК 378.147.88:371.21

# РАЗНОУРОВНЕВЫЙ ПОДХОД ПРИ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

*И. П. ШАБАЛИНА, Е. Е. ГРИБОВСКАЯ*
*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

Самостоятельная работа студентов – обязательная составная часть учебного процесса. Как отмечалось в [1], повышение качества подготовки в современном учреждении высшего образования невозможно рассматривать без повышения роли самостоятельной управляемой работы студента при изучении математики. Естественным здесь кажется обсудить обучение, ориентированное на индивидуальные особенности каждого студента с учетом его школьных знаний по математике.

Применение заданий разного уровня при обучении весьма актуально: у всех студентов разные способности по математике и возможности проявить себя. Данный подход проявляется не только в различии заданий по объему, но и в праве выбора студентами заданий для самостоятельного решения. Все задания, которые предлагаются студентам для решения на самостоятельных, контрольных работах, а также для выполнения домашних работ, разделены на три группы, соответствующие трем уровням сложности. Преподаватель при составлении самостоятельных работ подбирает задания по каждой теме, соответствующие всем уровням усвоения знаний.

Все студенты в начале семестра делятся на следующие группы.

1 *группа:* характеризуется слабой подготовленностью, недостаточной базой необходимых знаний и умений. При решении заданий они выбирают наиболее легкие задачи. Часто требуется помощь преподавателя.

2 *группа:* достаточно подготовленные студенты, которые владеют основным обязательным объемом знаний и умений. Этим студентам требуется определённая помощь со стороны преподавателя при обобщении изученного материала.

3 *группа*: сильные студенты, у которых выражена способность к поиску при выполнении заданий сложного уровня.

В соответствии с этой градацией студенты сами выбирают тот уровень, на который они будут работать в течение семестра:

1) решают 50 % всех примеров (ориентированы на отметку 4–5);

2) решают 70 % всех примеров (ориентированы на отметку 6–7);

3) решают 100 % всех примеров (ориентированы на отметку 8–9).

В случае проработки всех тем, изучаемых в семестре, студент может получить свою отметку на экзамене «автоматом».

Следует отметить, что некоторые студенты иногда переоценивают свои возможности и выбирают более высокий для себя уровень. Им никто не запрещает попробовать, но со временем они сами понимают, что переоценили свои возможности и переходят в более легкую группу.

Ниже приведены примеры заданий для самостоятельной работы для студентов факультета промышленного и гражданского строительства по теме «Неопределенный интеграл».

Непосредственное интегрирование:

$$1)\int\frac{dx}{(2+5x)^5};\ \ 2)\int\sin^3 2x\cdot\cos 2x dx;\ \ 3)\int\sin 4x dx;\ \ 4)\int\frac{\ln^2 x}{x}dx;\ \ 5)\int\frac{5}{x^2+2}dx;$$

$$6)\int\frac{2x+4}{x^2+4x+1}dx;\ \ 7)\int\frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}dx;\ \ 8)\int\frac{x^2+2\sqrt{2}x+2}{x+\sqrt{2}}dx;\ \ 9)\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}};$$

$$10)\int\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx.$$

Интегрирование по частям:

$$1)\int x^2\operatorname{arcctg}x dx;\ \ 2)\int x\cos\frac{x}{3}dx;\ \ 3)\int\ln^2 x dx;\ \ 4)\int x\sin x dx;\ \ 5)\int x^2e^{-3x}dx;$$

$$6)\int\operatorname{arctg}2x dx;\ 7)\int e^{2x}\cos x dx;\ 8)\int xe^{\frac{x}{2}}dx;\ \ 9)\int\operatorname{arcctg}3x dx;\ 10)\int\arcsin 7x dx.$$

Интегрирование методом подстановки:

$$1)\int\frac{dx}{x\sin^2(\ln x)};\ \ 2)\int\frac{dx}{x\sqrt{2x+9}};\ \ 3)\int\frac{e^{\frac{1}{1+x}}}{(1+x)^2}dx;\ \ 4)\int\frac{e^x dx}{3+4e^x};\ \ 5)\int\frac{2^x dx}{\sqrt{4-4^x}};$$

$$6)\ \int e^{4\sin 2x-1}\cos 2x dx;\ \ 7)\int\frac{2x+\cos x}{\sqrt{x^2+\sin x}}dx;\ \ 8)\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\arcsin^3 2x};$$

$$9)\int\frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}};\ \ 10)\int\frac{x^2dx}{\cos^2 x^3}.$$

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен:

$$1)\int\frac{dx}{x^2+3x+2};\ \ 2)\int\frac{x-3}{x^2+6x-3}dx;\ \ 3)\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+6x+7}};\ \ 4)\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x-5}}.$$

Интегрирование рациональных дробей:

$$1)\int\frac{x^2-5}{x^2+5}dx;\ \ 2)\int\frac{4x+1}{2-3x}dx;\ \ 3)\int\frac{x^2-1}{x+2}dx;\ \ 4)\int\frac{x^4-4}{x^2-3x-1}dx;$$

$$5)\int\frac{6xdx}{x^3+2x^2-x-2};\ \ 6)\int\frac{\left(3x^2+1\right)dx}{(x-1)\left(x^2-1\right)};\ \ 7)\int\frac{dx}{x^4+x^2}.$$

Каждый студент получает свой индивидуальный вариант, работает над ним в течение всего времени, пока изучается тема «Неопределенный интеграл» на практических занятиях.

Также следует отметить, что студентам сильной группы на отметку «десять» предлагаются задания, на изучение которых часы в программе не отведены. Например, при изучении темы «Интегрирование иррациональных функций» студентам было предложено найти интегралы вида $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$, для решения которых необходимо было изучить дополнительный материал.

Представленная в данной статье организация дифференцированной работы в обучении направлена на то, чтобы каждый студент был занят решением посильных для него задач, что способствует более глубокой проработке темы для каждого студента на своем уровне, а также только в этом случае можно поддержать у него интерес к обучению. Применение самостоятельных работ разного уровня обеспечивает не только объективную оценку знаний и умений студентов, но и эффективную обратную связь в учебном процессе.

Кроме того, такой подход в обучении тесно связан с рейтинговой системой, применяемой при обучении математике на факультете промышленного и гражданского строительства [2] и позволяет легко вписать в рейтинговую систему результаты работы студентов.

**Список литературы**


1 **Грибовская, Е. Е.** Принципы организации самостоятельной работы по математике у студентов первого курса технического вуза / Е. Е. Грибовская, И. П. Шабалина // Модернизация математической подготовки в университетах технического профиля : материалы Междунар. науч.-практ. конф. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп.; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2017. – С. 49–51.

2 **Грибовская, Е. Е.** Применение рейтинговой системы на факультете «Промышленное и гражданское строительство»/ Е. Е. Грибовская, И. П. Шабалина // Математическая подготовка в университетах технического профиля : непрерывность образования, преемственность, инновации : материалы Междунар. науч.-практ. конф. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп.; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2020. – С. 79–82.

Научно-практическое издание

**Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля**

Материалы VII Международной
научно-практической конференции
(Гомель, 31 октября 2025 г.)

Издается в авторской редакции

Технический редактор *В. Н. Кучерова*
Корректор *Е. Г. Привалова*

Подписано в печать 22.10.2025 г. Формат 60×84 1/16
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 7,20. Уч.-изд. л. 7,46. Тираж 50 экз.
Зак № 1888. Изд № 39.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
№ 3/1583 от 14.11.2017.
Ул. Кирова, 34, 246653, Гомель.