К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА ВИБРИРУЮЩЕМ ОСНОВАНИИ

Л.И. Могилевич[1], Э.И. Старовойтов[2], В.С.Попов[1,3]

[1]Саратовский государственный технический университете имени Гагарина Ю.А.

[2]Белорусский государственный университет транспорта

[3]Институт проблем точной механики и управления – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального исследовательского центра «Саратовский научный центр РАН»,

Аннотация. *Предложены подходы к разработке математической модели для исследования установившихся колебаний трехслойного стержня, установленного на вибрирующем основании и взаимодействующего со слоем жидкости. Рассмотрен стержень, заполнитель которого считается сжимаемым. Динамика жидкости изучена в рамках ползущего слоя ньютоновской вязкой жидкости постоянной плотности. Сформулирована математическая модель, представляющая собой краевую задачу математической физики и предложен подход к ее исследованию.*

Ключевые слова*: трехслойный стержень, сжимаемый заполнитель, вязкая жидкость, вибрирующее основание.*

Abstract*. Approaches to the development of a mathematical model for the study of steady-state vibrations of a rod mounted on a vibrating foundation and interacting with a fluid layer were suggested. The three-layer rod was considered, the core of which is assumed to be compressible. The fluid dynamics was studied in the framework of a creeping layer for a Newtonian viscous fluid of constant density. A mathematical model representing a boundary value problem of mathematical physics was formulated.*

Keywords*: three-layer rod, compressible core, viscous fluid, vibrating foundation.*

Оценка вибрационной устойчивости элементов конструкций, взаимодействующих с жидкостью требует разработки математических моделей гидроупругости [1, 2]. С другой стороны, возникает необходимость учета, того факта, что элементы указанных конструкций могут представлять собой композитные многослойные конструкции [3-5]. Поэтому актуальной является разработка математических моделей взаимодействия трехслойного стержня с жидкостью в условиях вибрации.

Среди работ, посвященных данному вопросу можно указать [6-10], в которых исследованы вопросы взаимодействия идеальной и вязкой жидкости с многослойными конструкциями. Однако, в приведенных работах не изучены трехслойные стержни со сжимаемым заполнителем, установленные на вибрирующем основании.

Рассмотрим плоскую задачу для трехслойного стержня, образующего дно узкого канала (см. рис.). Стержень свободно оперт на торцах, противоположная стенка канала абсолютно жесткая. Основание канала совершает колебания по гармоническому закону с частотой ω. Стержень состоит из несущих слоев (верхнего 1 и нижнего 2), их толщины h_1 и h_2 соответственно. Между данными слоями сжимаемый заполнитель 3 толщиной $2c$. Принимаем кинематические гипотезы рассматриваемого трехслойного пакета по [3, 4]. Введем декартову систему координат, начало которой в центре заполнителя стержня. Размеры стержня в плане $2\ell\times b$ и полагается, что $2\ell << b$, $h_0 << \ell$, где h_0 - толщина слоя жидкости. Слой жидкости рассматривается как ньютоновская несжимаемая вязкая жидкость. На правом и левом торце канала предполагается наличие полостей с той же жидкостью, давление в которых в невозмущенном состоянии постоянно p_0, а движение жидкости в канале, в силу его узости, ползущее. Амплитуда колебаний стержня полагается значительно меньшей по сравнению с h_0. Демпфирующие свойства слоя жидкости приводят к быстрому затуханию переходных процессов. Поэтому будем исследовать установившиеся колебания трехслойного стержня, возбуждаемые вибрацией основания.

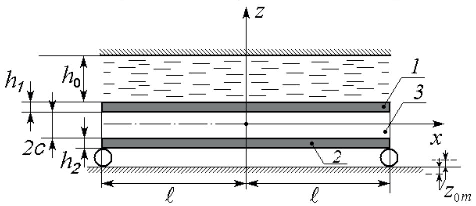

Рис. Трехслойный стержень, установленный на вибрирующее основание и взаимодействующий со слоем вязкой жидкости.

В [3, 4] рассмотрены вопросы вывода уравнений равновесия и движения трехслойных стержней вариационными методами. Следуя указанным монографиям запишем уравнения динамики стержня с учетом переносного виброускорения основания в виде:

$$
\begin{aligned}
&F_1 + a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a_5 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} + a_3 \frac{\partial w_2}{\partial x} - 2a_6 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + a_7 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} = P_{zx},\\
&F_2 - a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a_9 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - a_3 \frac{\partial w_1}{\partial x} - a_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} - a_6 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + 2a_7 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} = 0,\\
&F_3 + (m_1+m_8)\frac{d^2 z_0}{dt^2} - a_{17} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{10} \frac{\partial u_2}{\partial x} + 2a_6 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + a_6 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + a_{11} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - a_{12} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} +\\
&+ a_{15} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} - 2a_{16} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + a_8 w_1 - a_8 w_2 = P_{zz} + \frac{1}{2} h_1 \frac{\partial P_{zx}}{\partial x},\\
&F_4 + (m_2+m_8)\frac{d^2 z_0}{dt^2} - a_{18} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{19} \frac{\partial u_2}{\partial x} - a_7 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - 2a_7 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} - a_{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + a_{14} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} -\\
&- a_{16} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + a_{13} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} - a_8 w_1 + a_8 w_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь обозначения для $a_1, a_2, \ldots a_{19}, F_1, F_2, F_3, F_4$, m_1, m_2, m_8 по [3], u_i – продольное перемещение i-го несущего слоя (i =1,2), w_i – прогиб i-го несущего слоя (i =1,2), P_{zx}, P_{zz} – нормальное и касательное напряжения жидкости, действующие на несущий слой стержня, находящийся в контакте с ней, z_0 – закон движения основания канала.

Краевые условия (1) имеют вид

$$
w_k = \frac{\partial u_k}{\partial x} = \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm\ell, \ (k=1,\ 2). \tag{2}
$$

Для узкого канала со слоем ползущей вязкой жидкости, образованного твердой верхней и упругой нижней стенками, и установленного на вибрирующем основании в [11] было установлено, что имеет место соотношение $P_{zz} >> P_{zx}$, а также найдено выражения для P_{zz}

$$P_{zz} = -p_0 - \rho h_0 \frac{d^2 z_0}{dt^2} - 12(\nu\rho\ell / h_0^3)\left(\int_{\xi}^{1}\int \partial w_1/\partial t\, d\xi d\xi - (\xi - 1)/2 \int_{-1}^{1}\int \partial w_1/\partial t\, d\xi d\xi\right), \quad (3)$$

где p_0 – давление жидкости в невозмущенном состоянии, ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости, ρ – плотность жидкости.

При записи (3) учтено, что в непосредственном контакте с жидкостью, в предлагаемой постановке, находится первый несущий слой трехслойного стержня.

Тогда опуская в (1) P_{zx} и учитывая (3) получим уравнения гидроупругих колебаний рассматриваемого стержня. Дополняя данные интегро-дифференциальные уравнения краевыми условиями (2) имеем математическую модель для исследования колебаний трехслойного стержня, имеющего сжимаемый заполнитель и взаимодействующего со слоем вязкой несжимаемой жидкости в условиях вибрации основания, на котором он установлен.

Для решения уравнений модели может быть применен метод Бубнова-Галеркина при представлении формы u_1 u_2, w_1 w_2 в виде

$$u_k = \sum_{n=0}^{\infty} T_k^n(\omega t)\sin\frac{2n+1}{2}\pi\frac{x}{\ell},\ \ w_k = \sum_{n=0}^{\infty} R_k^n(\omega t)\cos\frac{2n+1}{2}\pi\frac{x}{\ell},\ \ k = 1, 2. \quad (4)$$

Здесь $T_k^n(t)$, $R_k^n(t)$ – неизвестные функции времени, n – число удерживаемых членов ряда.

Задаваясь числом удерживаемых членов ряда и проводя процедуру метода Бубнова-Галеркина получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которую, учитывая гармонических характер возбуждения, можно исследовать известными методами [12].

Таким образом, предложенный в работе подход позволил сформулировать математическую модель для исследования гидроупругого отклика трехслойного стрежня со сжимаемым заполнителем на вибрацию основания.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 122030100145-3)

Список использованной литературы

1. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М., Физматлит, 2000.
2. Païdoussis M.P. Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow. Vol.1, second ed. Amsterdam, Academic Press, 2014.
3. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М.: Физматлит, 2005.
4. Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием. М.: Физматлит, 2011. 560 с.
5. Birman V., Kardomateas G.A. Review of current trends in research and applications of sandwich structures // Composites Part B: Engineering. 2018. Vol. 142. P. 221-240
6. Могилевич Л.И., Попов В.С., Старовойтов Э.И. Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым заполнителем // Наука и техника транспорта. 2006. № 2. С. 56-63.
7. Kondratov D.V., Popov V.S., Mogilevich L.I., Popova A.A. Hydroelastic vibrations of circular sandwich plate under inertial excitation // Advanced Structured Materials. 2021. Vol. 157. P. 227-242.
8. Kramer M.R., Liu Z., Young Y.L. Free vibration of cantilevered composite plates in air and in water // Composite Structures. 2013. Vol. 95. P. 254-263.
9. Chernenko A., Mogilevich L., Popov V., Popova A., Christoforova A. Mathematical modeling of hydroelastic oscillations of circular sandwich plate resting on Winkler foundation // Studies in Systems, Decision and Control. 2021. Vol. 337. P. 91-101.
10. Hasheminejad S.M., Mohammadi M.M. Hydroelastic response suppression of a flexural circular bottom plate resting on Pasternak foundation // Acta Mechanica. 2017. Vol. 228. No. 12. P. 4269-4292.
11. Могилевич Л.И., Попов В.С., Скородумов Е.С. Динамика сдавливаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости, взаимодействующего с упругой пластиной // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. № 1. С. 53-63.
12. Мышкис А.Д. Математика для технических вузов: специальные курсы. СПб: Дрофа, 2009.