

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЯТИСЛОЙНОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИНЫ

Е.А. Лачугина

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

Возросший спрос на использование слоистых тонкостенных элементов конструкций в машиностроении обуславливает необходимость разработки соответствующих математических моделей и методов расчета. Этой проблеме посвящены монографии [1–6]. Динамическое нагружение неоднородных цилиндрических оболочек исследовано в работах [7, 8]. Квазистатическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле рассмотрено в статьях [9, 10]. Решения отдельные краевых задач для слоистых пластин приведены в работах [11–14].

Уравнения движения круговой пятислойной симметричной пластины получены в [15–17]. Здесь рассматривается задача о собственных колебаниях пятислойной круговой пластины несимметричной по толщине.

Постановка и решение краевой задачи. Тонкие несущие слои пластины толщиной h_1, h_2, h_4 выполнены из прочных материалов, для них справедливы гипотезы Кирхгофа. В более толстых заполнителях (h_3, h_5) справедлива гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированных нормалей, которые поворачиваются на некоторые дополнительные углы $\psi_i(r, t)$ – относительные сдвиги ($i = 1, 2$). Цилиндрическая система координат связывается со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя, ось z направлена перпендикулярно вверх, к четвертому слою. Все геометрические размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0 .

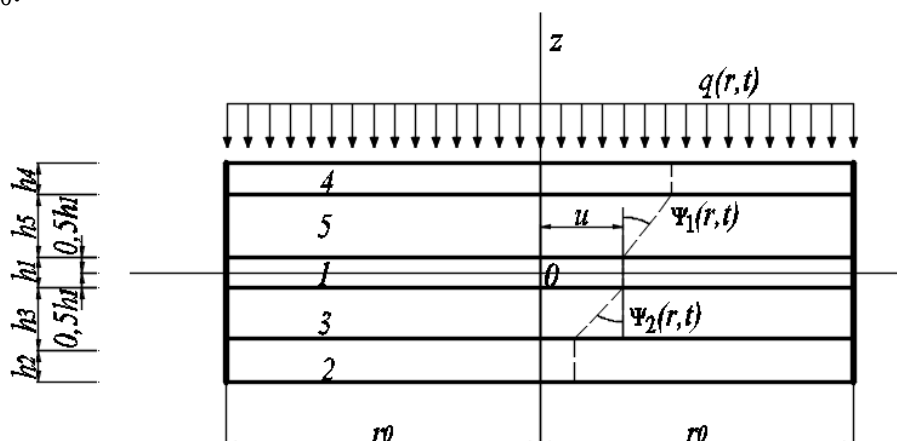


Рисунок 1. Расчётная схема пятислойной круговой пластины

Система дифференциальных уравнений движения в перемещениях,

описывающая собственные колебания, получена при помощи вариационного принципа Лагранжа с учетом сил инерции поперечных колебаний:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u - a_2 w_{,r} + a_3 \psi_1 - a_4 \psi_2) &= 0, \\ L_2(a_3 u - a_5 w_{,r} + a_6 \psi_1) &= 0, \\ L_2(-a_4 u - a_7 w_{,r} + a_8 \psi_2) &= 0, \\ L_3(a_2 u - a_9 w_{,r} + a_{10} \psi_1 + a_{11} \psi_2) - M_0 \ddot{w} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $M_0 \ddot{w}$ – инерционные силы; $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 + \rho_4 h_4 + \rho_5 h_5) r_0^2$; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; a_i – коэффициенты, выражаемые через упругие и геометрические параметры слоев [17], L_2, L_3 – линейные дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Начальные условия движения принимаем однородными:

$$u = \psi_1 = \psi_2 = w = \dot{w} = 0, \text{ при } t = 0. \quad (2)$$

Кинематические условия заделки контура пластины следующие:

$$u = \psi_1 = \psi_2 = w = w_{,r} = 0, \text{ при } r = r_0. \quad (3)$$

После элементарных преобразований, связанных с выделением уравнения для прогиба пластины w , систему (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r, \\ \psi_1 &= b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r, \\ \psi_2 &= b_3 w_{,r} + C_5 r + C_6 / r, \\ L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где коэффициенты b_i выражаются через a_i ;

$$M^4 = M_0 D, \quad D = \frac{a_6 a_8 b_4}{b_4 b_7 - b_5 b_6}.$$

Так как искомое решение ограничено в начале координат, то для сплошных пластин необходимо обнулить константы интегрирования $C_2 = C_4 = C_6 = 0$. Искомый прогиб принимается в виде

$$w(r, t) = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (5)$$

где $v(r)$ – искомая координатная функция; ω – частота собственных колебаний; A и B – константы, определяемые из начальных условий (2).

После подстановки выражения (5) в последнее уравнение системы (4)

получим уравнение для определения координатной функции $v(r)$:

$$L_3(v, r) - \beta^4 v = 0, \quad \beta^4 = M^4 \omega^2. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) известно:

$$v(\beta r) = C_7 J_0(\beta r) + C_8 I_0(\beta r) + C_9 Y_0(\beta r) + C_{10} K_0(\beta r). \quad (7)$$

где J_0, I_0, K_0, Y_0 – функции Бесселя, Макдональда и Неймана.

Исходя из ограниченности перемещений в начале координат необходимо в (7) положить $C_9 = C_{10} = 0$. Подставив затем (7) в граничные условия (3), получим однородную систему алгебраических уравнений для определения констант интегрирования C_7, C_8 . Из которой следует трансцендентное уравнение для собственных чисел β_n :

$$I_1(\beta r_0) J_0(\beta r_0) + I_0(\beta r_0) J_1(\beta r_0) = 0.$$

После вычисления β_n частоты собственных колебаний следуют из соотношения, введенного в (6):

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}.$$

2 Численные результаты. За расчетную модель принята пластина, слои которой набраны из материалов кордиерит – пенополиуретан – титан – пенополиуретан – титан. Толщины несущих слоев и заполнителей, отнесенные к радиусу пластины r_0 , следующие: $h_4 = 0,02$, $h_5 = 0,3$, $h_1 = 0,04$, $h_3 = 0,4$, $h_2 = 0,03$. Упругие характеристики этих материалов приведены в [1]. В табл. 1 приведены собственные числа и собственные частоты.

Таблица 1.

Таблица 1. Собственные числа и собственные частоты пятислойной пластины

Номер n	β_n/ω_n	Номер n	β_n/ω_n
0	3,196 / 689,720	8	28,279 / 53999,221
1	6,306 / 2685,143	9	31,378 / 66482,894
2	9,439 / 6016,049	10	34,561 / 80655,131
3	12,577 / 10681,040	11	37,702 / 95981,643
4	15,716 / 16677,980	12	40,844 / 112646,042
5	18,857 / 24010,688	13	43,985 / 130637,720
6	21,997 / 32672,797	14	47,126 / 149961,770
7	25,138 / 42669,823		

Рисунок 2 иллюстрирует зависимость первых трех частот собственных колебаний ω_n от толщины внутреннего несущего слоя h_1 : 1 –

ω_0 ; 2 – ω_1 ; 3 – ω_2 . С увеличением номера собственных частот колебаний растет нелинейность их зависимости от величины h_1 .

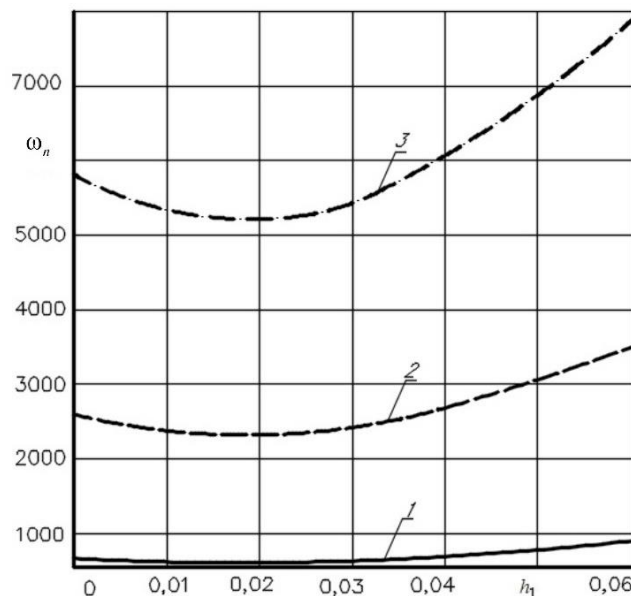


Рисунок 2. Собственные частоты колебаний

Закключение. Предложенная постановка начально-краевой задачи и ее решение позволяет исследовать собственные частоты и формы колебаний круговых пятислойных пластин, несимметричных по толщине.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-25».

Литература

1. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2005, 576 с.
2. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Математические модели механики твердого тела / Минск, БГУ, 2021, 535 с.
3. Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov. Mechanics of Solid Deformable Body / Singapore, Springer, 2023, 317 p. doi.org/10.1007/978-981-19-8410-5
4. Абдусаттаров А., Старовойтов Э.И., Рузиева Н.Б. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / Ташкент, «IDEAL PRESS», 2023, 381 с.
5. Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Гомель, БелГУТ, 2004, 376 с.
6. Старовойтов, Э. И. Механика материалов / Гомель, БелГУТ, 2011, 380 с.

7. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015, vol. 21, No. 2, pp. 162–169.
8. Suvorov YeM, Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2012, vol. 76, no. 5, pp.511–518. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015.
9. Starovoitov É.I., Pleskachevskii Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2015, vol. 88, No. 4, pp. 1023–1029.
10. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле // Механика машин, механизмов и материалов, 2013, т. 22, №., С. 31–35.
11. Старовойтов Э.И., Козел А.Г. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака // Механика композиционных материалов и конструкций, 2018, т. 2, № 3, С. 392–406.
12. Захарчук Ю.В. Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем. // Механика. Исследования и инновации, 2019, т. 12, № 12, с. 66–75.
13. Нестерович, А.В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости // Механика. Исследования и инновации, 2019, т. 12, № 12, с. 152–157.
14. Салицкий, В.С. Изгиб круговой пятислойной пластины // Теоретическая и прикладная механика. Минск, 2023, вып. 38, с. 234 – 239.
15. Лачугина, Е.А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.
16. Лачугина, Е.А. Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины // Теоретическая и прикладная механика. Минск : БНТУ, 2023. – Вып. 38. – С. 227-233.
17. Лачугина, Е.А. Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями // Механика. Исследования и инновации. – 2023. – Вып. 16. – С. 111–116.