

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ  
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра технической физики и теоретической механики

# МЕХАНИКА. ИССЛЕДОВАНИЯ И ИННОВАЦИИ

Международный сборник научных трудов

Выпуск 17

Под редакцией  
доктора технических наук, профессора *А. О. ШИМАНОВСКОГО*

Гомель 2024

В сборнике публикуются материалы, которые представлены на Международном семинаре преподавателей вузов по теоретической механике, состоявшемся в Белорусском государственном университете транспорта.

Для преподавателей вузов, ученых, занимающихся исследованиями в области механики. Может быть полезен аспирантам, студентам технических вузов, инженерно-техническим работникам.

*Сборник включен в перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по направлениям: механика и машиностроение по технической отрасли и механика физико-математической отрасли науки.*

**Редакционная коллегия:**

*Шимановский А. О.* (главный редактор), доктор технических наук, профессор (Гомель, БелГУТ);

*Пуцято А. В.* (зам. главного редактора), доктор технических наук, профессор (Гомель, ГГТУ им. П. О. Сухого);

*Черноус Д. А.* (отв. секретарь), кандидат технических наук, доцент (Гомель, БелГУТ);

*Богданович П. Н.*, доктор технических наук, профессор (Гомель, БелГУТ);

*Боцко Й. С.*, PhD, профессор (Словакия, Кошице, Технический университет Кошице);

*Галай Э. И.*, доктор технических наук, доцент (Гомель, БелГУТ);

*Гегедеш М. Г.*, кандидат технических наук, доцент (Гомель, ГГТУ им. П. О. Сухого);

*Довгяло В. А.*, доктор технических наук, профессор (Гомель, БелГУТ);

*Леоненко Д. В.*, доктор физико-математических наук, профессор (Гомель, БелГУТ);

*Плескачевский Ю. М.*, доктор технических наук, член-корреспондент НАН Беларуси;

*Старовойтов Э. И.*, доктор физико-математических наук, профессор (Гомель, БелГУТ);

*Халецки М.*, PhD, доцент (Польша, Варшава, SGGW);

*Шабловский О. Н.*, доктор физико-математических наук, профессор (Гомель, ГГТУ им. П. О. Сухого)

## СОДЕРЖАНИЕ

### Научные публикации

<i>Акулова Е. М.</i> Анализ подходов к исследованию характеристик контактного взаимодействия в системе «колесо – рельс» .....	4
<i>Аникеева М. В., Савельев Ю. В.</i> Повышение долговечности подшипниковых узлов щебнеочистительной машины Plasser & Theurer .....	20
<i>Akhramenko N. A.</i> Determination of the ring-shaped mass distribution gravitational field strength .....	27
<i>Будникова Д. А.</i> Анализ собственных колебаний пятислойного стержня .....	33
<i>Ворожун И. А., Ворожун А. В., Гегедеш М. Г.</i> Анализ продольных сил при различных способах размещения длинномерного груза на платформах .....	40
<i>Демьянчук О. В.</i> Моделирование обтекания вагона-хоппера потоком воздуха .....	49
<i>Коднянко Е. В.</i> Решение задачи о качении жесткого цилиндра с упруго-пластичным ободом .....	57
<i>Козел А. Г.</i> Изгиб трёхслойной круговой пластины на упругом основании при наличии отверстия .....	65
<i>Костюкович Г. А., Попрукайло А. В., Овчинников Е. В., Веремейчик А. И., Хвусевич В. М., Линник Д. А.</i> Технология термообработки крестовин карданных передач токами высокой частоты .....	77
<i>Курбонов С. З.</i> Применение щебеночно-мастичного асфальтобетона в условиях дорожно-климатических зон Узбекистана .....	85
<i>Лачугина Е. А.</i> Собственные частоты колебаний круговой пятислойной несимметричной по толщине пластины .....	92
<i>Леоненко Д. В.</i> Свободные колебания сэндвич-стержня с легким заполнителем ....	100
<i>Павленко А. П., Ахраменко Н. А., Буй М. В.</i> Аллюмооксидная керамика с нанодисперсной составляющей .....	106
<i>Салицкий В. С.</i> Круглая пятислойная пластина под действием осесимметричной кольцевой нагрузки .....	114
<i>Самусева Л. В., Одинцов Н. А., Шеринёв М. Ю.</i> Особенности технологии аргонодуговой сварки .....	120
<i>Старовойтов Э. И.</i> Колебания сэндвич-пластины в температурном поле под действием резонансной нагрузки .....	127
<i>Суслов К. В.</i> Методика решения задачи о равновесии пятислойного симметричного по толщине стержня .....	134
<i>Суханова О. А., Шимановский А. О.</i> Решение в ANSYS Workbench задачи о нагреве тел при трении скольжения .....	140

### Учебно-методические публикации

<i>Комнатный Д. В.</i> Уравнения колебаний стержня с присоединенным математическим маятником .....	146
<i>Саврасова Н. Р., Слепова С. В.</i> Методика организации учебного процесса в условиях существенной дифференциации целевой аудитории .....	151
<b>Правила оформления статей</b> .....	157

## НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ (SCIENTIFIC PUBLICATIONS)

ISSN 2519-8742. Механика. Исследования и инновации. Вып. 17. Гомель, 2024

---

УДК 629.4.027

*Е. М. АКУЛОВА*

*Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого,  
Гомель, Беларусь*

### **АНАЛИЗ ПОДХОДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ ХАРАКТЕРИСТИК КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СИСТЕМЕ «КОЛЕСО – РЕЛЬС»**

Рассмотрены основные подходы к исследованию характеристик контактного взаимодействия в системе «колесо – рельс», проанализированы проблемы, возникающие при решении контактных задач. Представлена информация о современных исследованиях взаимодействия колеса и рельса с использованием аналитических и численных методов и возможных путях использования их результатов.

**Ключевые слова:** система «колесо – рельс», контактное взаимодействие, напряженно-деформированное состояние, компьютерное моделирование.

Характеристики движения железнодорожного подвижного состава непосредственно зависят от свойств контактного взаимодействия колес с рельсами. С одной стороны, здесь требуются по возможности низкие показатели трения, чтобы движение больших масс осуществлялось с малым сопротивлением, но, с другой стороны, трение должно быть достаточным для обеспечения требуемой силы тяги. Прочность материалов колес и рельсов должна обеспечивать сопротивляемость значительным вертикальным статическим нагрузкам и динамическим силам, которые вызываются ускорениями элементов подвижного состава, возникающими как при разгонах и торможениях, так и вследствие неровностей пути и некруглости колес [1].

Чтобы повысить безопасность движения и улучшить основные технико-экономические показатели работы железнодорожного транспорта, требуется управлять процессом взаимодействия колеса и рельса. Для этого предпринимаются различные меры, позволяющие снизить износ и минимизировать напряжения в колесах и рельсах. Проблемы взаимодействия колеса и рельса,

которые всегда были предметом исследования и разработок на железных дорогах, приобретают особое значение в настоящее время, когда накоплен большой опыт в обеспечении работоспособности и увеличении срока службы колес и рельсов в самых разных условиях работы железнодорожных линий.

Цель работы – анализ подходов, используемых при изучении контактного взаимодействия железнодорожного колеса и рельса, и полученных с их помощью результатов.

Контактная задача является нелинейной, поскольку распределение давлений по поверхности соприкосновения тел, а чаще всего и размеры контактного пятна, нелинейно связаны с приложенными нагрузками. При достаточно малых силах прижатия тел возможна одна точка начального контакта. С увеличением нагрузки размеры контактного пятна увеличиваются. Если соприкасающиеся тела имеют сложную геометрию, то в контакт могут войти несколько участков их поверхностей, что приводит к образованию дополнительных пятен контакта, которые, увеличиваясь в размерах, могут сливаться.

Для установления взаимосвязей между геометрическими параметрами системы «колесо – рельс», напряжениями в ее элементах и проскальзыванием следует иметь информацию о распределении по площадке контакта нормальных и касательных напряжений, относительного проскальзывания (крипа) и сил трения. Особенность рассматриваемой системы состоит в том, что ее тела имеют одинаковые характеристики упругости. В таком случае при анализе качения колеса по рельсу выделяют нормальную и тангенциальную задачи [2]. При решении первой из них определяют форму и размеры пятна контакта, а также распределение по нему нормальных напряжений. Суть второй задачи состоит в нахождении силы сцепления колеса с рельсом. Такое разделение связано с наличием существующих ограничений аналитических методов и оправдано в связи с тем, что сила трения между упругими телами оказывает незначительное влияние на форму пятна контакта и распределение давлений по нему. Данный подход позволяет упростить решение, поскольку в общем случае (если область контакта заранее неизвестна) оно до сих пор не получено.

Основы классической теории контактного взаимодействия были заложены в 1882 г. Г. Герцем, который доказал, что зона контакта между двумя телами имеет эллиптическую форму, и предложил метод расчета полуосей такого эллипса и давлений в пятне контакта [3]. Данная теория ограничена случаем взаимодействия абсолютно упругих твердых тел без трения, но она и в настоящее время используется для решения контактных задач, а ее соотношения включены в ряд компьютерных программ, предназначенных для анализа контакта колеса и рельса.

Для случая первоначального касания цилиндров по линии анализ напряженно-деформированного состояния в области кругового контакта тел выполнен А. Н. Динником [4]. Позднее Н. М. Беляев попытался получить в замкнутой форме решение для напряжений в любой точке области, прилега-

ющей к эллиптическому контакту [5], однако выведенные им соотношения содержали весьма сложные интегралы. Более простые зависимости, которые используются в инженерных расчетах, получены лишь для точек, расположенных на поверхности контакта и на оси, проходящей через центр контакта по нормали к этой поверхности [6].

Для эллиптического контакта в статье [7] было представлено решение статической тангенциальной задачи, а в работе [8] – исследование напряженного состояния в случае скольжения одного тела по поверхности другого при кулоновом трении. Решение более сложной задачи о вращении находящихся в контакте двух неметаллических цилиндров с параллельными осями представлено в работе Ф. В. Картера [9], где было получено выражение касательной силы, которая приложена к колесу в направлении движения. В ней постулировалось существование по длине контакта участков сцепления и скольжения, однако не приведено доказательство их наличия. Появление названных участков при определенных соотношениях между радиусами контактирующих цилиндров и упругими характеристиками их материалов было доказано Х. Фроммом [10].

Более полно воспроизвел реальные условия движения колеса по рельсу Д. Д. Калкер, который учел возможность произвольного направления скольжения и вращения и реализовал их в программных продуктах DUVOROL и CONTACT [11]. Эксперименты показали, что они позволяют с высокой степенью точности решать задачи о стационарном и нестационарном качении. Также им разработана упрощенная теория, предполагающая прямо пропорциональную зависимость между перемещениями точек в контакте и касательными силами [12], на основе которой была разработана программа FASTSIM [13], широко используемая при расчетах динамики железнодорожных экипажей в настоящее время. Так, в работе [14] было предложено для решения нормальной контактной задачи применять нашедший широкое применение быстрый алгоритм, а для тангенциальной задачи – алгоритм FASTSIM.

В статье Р. Д. Миндлина [15] представлено решение задачи о начальных смещениях тел при круговом и эллиптическом контактах в случае действия сдвигающих сил и момента вращения и установлено распределение касательных сил взаимодействия для случаев отсутствия микропроскальзывания и его наличия на части контакта. На основе этой работы К. Л. Джонсоном для кругового контакта качения были разработаны линейные теории крипа [16] и спина (вращения относительно оси, перпендикулярной основанию) [17]. Позднее им же совместно с П. Д. Вермеленом определены напряжения в точках эллиптического пятна контакта под действием касательных сил, которые распределены по эллипсоидальному закону. Это решение лежит в основе нелинейной теории крипа [18], базирующейся на предположении, что участок сцепления и пятно контакта обладают подобной эллиптической формой и имеют одну точку касания на набегавшем крае. Однако при такой схеме деления контакта на участки сцепления и скольжения, как сам заметил в одной из предыдущих

работ К. Л. Джонсон, в некоторых местах площадки скольжения направления касательных сил и проскальзываний совпадают, что невозможно. Для общего случая качения с крипами и спином создать нелинейную теорию не удалось [6].

Успехи, достигнутые в развитии методов решения нормальных и тангенциальных контактных задач, стали основой для разработки подходов к моделированию процессов изнашивания и накопления усталостных повреждений в телах качения [19–24] и исследований по разработке рациональных профилей колес [25, 26]. В ряде публикаций представлен анализ напряженно-деформированного состояния колес подвижного состава, обусловленного эксплуатационными и технологическими воздействиями [27–30].

В настоящее время для решения задачи контакта колеса с рельсом применяются аналитические вариационные и невариационные методы, а также численные методы конечных и граничных элементов.

Основы вариационного подхода заложены А. Сигнорини [31], а к анализу контакта «колесо – рельс» применены в работах [11, 32, 33]. Несмотря на постоянное развитие теории вариационного исчисления решение контактной задачи данным способом по-прежнему сопряжено со значительными трудностями.

В невариационном подходе за основу берется классическая постановка контактной задачи – в виде ограничений на поверхности контакта в форме равенств и неравенств. Поиск решения представляет собой последовательность решений задачи теории упругости при уточняющихся граничных условиях, определяющих характеристики контактного взаимодействия [34–37]). Недостаток этого подхода состоит в необходимости неоднократного решения задачи теории упругости.

Рассмотрим некоторые публикации, посвященные применению аналитических методов к решению задач о контакте колеса и рельса, которые опубликованы в последние годы. Коллектив авторов работы [38] получил расчетные формулы, позволяющие оценить напряженно-деформированное состояние в области контакта колеса и рельса при наличии как скольжения, так и сцепления, полагая, что зона сцепления и контактная площадка имеют подобную эллиптическую форму (рисунок 1, б). Результаты расчета касательных напряжений представлены на рисунке 1, в. Выполненный анализ показал, что напряженное состояние при наличии зон сцепления и скольжения не может быть более опасным, чем при полном скольжении по всему контакту.

В статье [39] представлено сравнение точности и длительности расчетов контакта колеса с рельсом с применением алгоритмов MUBODyn, VOCO и VI-Rail для нескольких случаев, которые имеют место при прохождении стрелок и крестовин: конформного контакта, контакта с острым краем и при ударных нагрузках. Под конформным здесь понимается контакт, в зоне которого профили колеса и рельса имеют подобные очертания [40]. Приведенные данные демонстрируют близость значений размеров контактной площадки и возникающих в контакте сил при использовании названных методов.

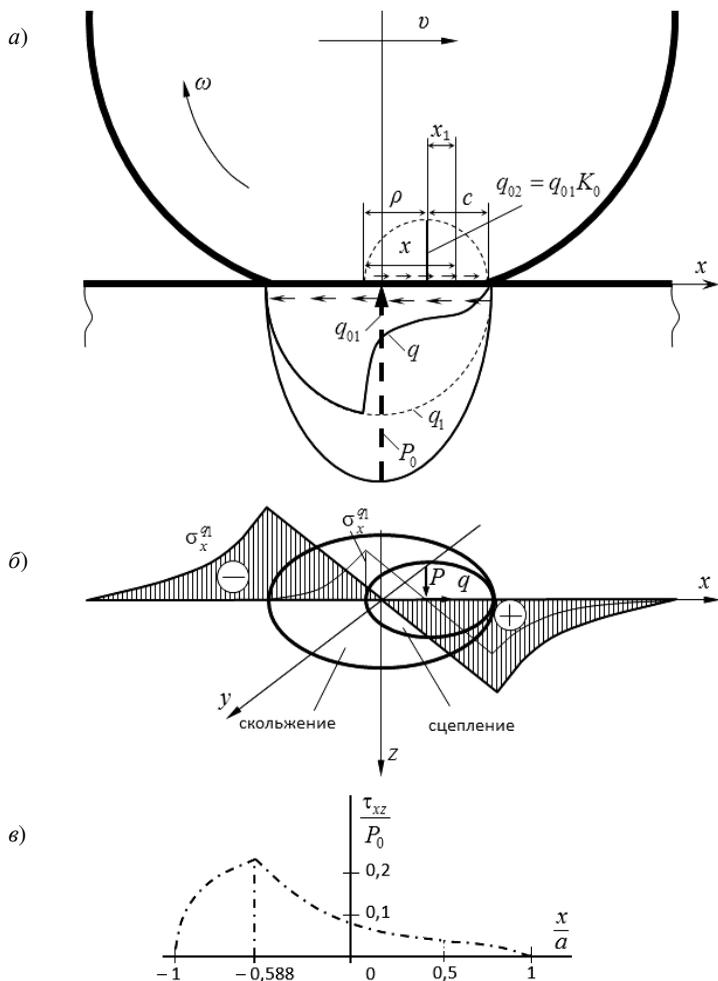


Рисунок 1 – Приложенные касательные нагрузки (а), нормальные напряжения от их действия (б) и результаты расчета касательных напряжений (в) [38]

Характерной особенностью контактных задач являются высокие контактные давления, вызывающие пластические деформации в локальной области, прилегающей к контактному пятну. Более точное решение таких задач может быть получено с применением численных методов при использовании моделей упругопластического деформирования [41].

Развитие современных компьютерных технологий и вычислительной техники в последние два десятилетия предопределило широкое использование для решения контактных задач численных методов. Алгоритмы модели-

рования контакта колеса с рельсом с использованием метода конечных элементов (МКЭ) рассмотрены в работах [42–46]. К числу достоинств МКЭ относятся высокий реализм получаемых результатов; возможности моделирования в случаях любой геометрии контактируемых поверхностей и упруго-пластического поведения материалов. Однако сетки в конечно-элементных моделях содержат десятки, а порой и сотни тысяч узлов, что ведет к высокой длительности расчетов.

Метод граничных элементов (МГЭ) особенно подходит для моделирования контакта, потому что, в отличие от МКЭ, в нем дискретизируется только поверхность контактируемых тел, а не их объем. Поскольку МГЭ – полуаналитический метод, то он дает более высокую точность, особенно для задач, в которых ожидается высокая концентрация напряжений. Однако, несмотря на значительно меньшее количество узлов расчетной сетки, чем в МКЭ, обрабатываемые матрицы оказываются несимметричными и плотными, что существенно увеличивает время расчета. Для анализа взаимодействия колеса с рельсом МГЭ применен в работах [47, 48].

Далее представлены результаты исследований параметров контактного взаимодействия системы «колесо – рельс», выполненных путем компьютерного моделирования.

Авторами работы [49] с применением программного комплекса ANSYS методом конечных элементов проанализировано влияние твердости поверхности контактирующих объектов на величину объема материала головки рельса, в котором реализуются значительные местные напряжения и деформации (рисунок 2). Для более точного учета реальных конфигураций колеса и рельса решение осуществлялось с использованием субмодели, в качестве которой рассматривалась область с указанным объемом.

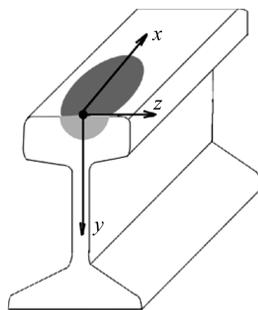


Рисунок 2 – Область со значительными контактными напряжениями и деформациями [49]

На рисунке 3 приведены результаты расчетов интенсивностей тензоров деформаций и напряжений для двух температур отпуска после закалки рельса. Большой объем области с высокими напряжениями соответствует рельсу с меньшей твердостью материала, а следовательно, его меньшими пределом текучести и модулем упругости. Отмечается, что при твердости колеса, большей, чем у рельса, возникающая в последнем упругая лунка препятствует поперечному смещению колеса по поверхности рельса, что ведет к снижению износа, но при этом увеличивается сила тяги, создаваемая локомотивом.

В статье [50] предлагается упрощенный подход к анализу взаимодействия рельсового транспортного средства с путевой структурой, в котором

для описания взаимодействия колеса и рельса используются матрицы, построенные с применением ANSYS. Особенностью разработанной модели является возможность определения точек контакта профилей не только в выпуклых, но и в вогнутых их зонах. Представленное в работе сравнение результатов расчетов и экспериментов, выполненных на испытательном стенде функционирующего в Японии Научно-исследовательского института железнодорожного транспорта (RTRI), подтвердило достаточно высокую точность, обеспечиваемую моделью при решении различных динамических задач.

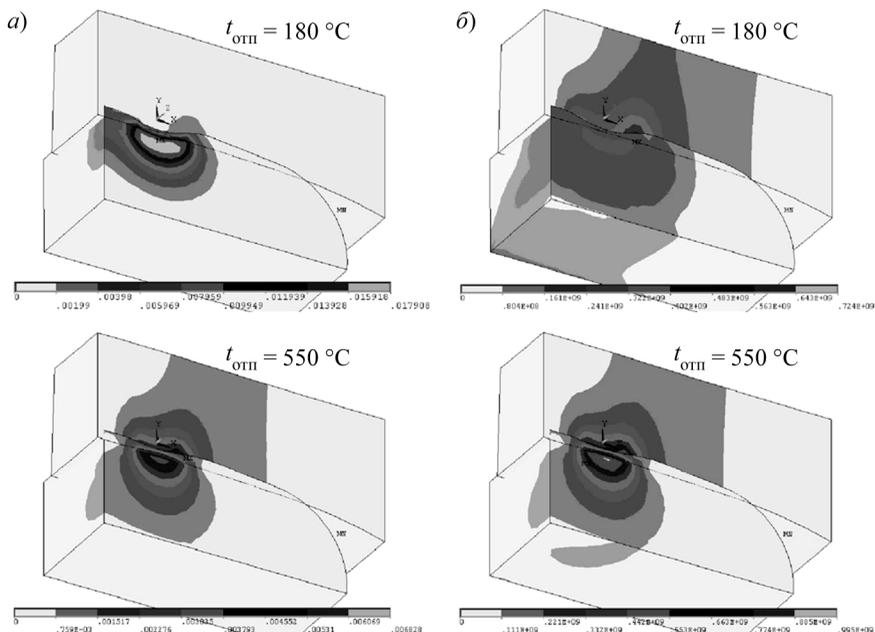


Рисунок 3 – Распределения интенсивностей тензоров деформаций (а) и напряжений (б) при разных температурах отпуска рельсовой стали [49]

В работе [2] с использованием метода конечных элементов выполнен анализ влияния нормальных и тангенциальных сил на напряжения в области конформного контакта колеса и рельса (рисунок 4) для профилей ГОСТ и ДМеТИ при разных диаметрах колес. Также представлены результаты расчета контактных напряжений при неконформном взаимодействии, которое возникает в условиях эксплуатации. Отмечается, что в случае конформного профиля рост силы прижатия ведет к увеличению размеров площадки контакта, следовательно, к снижению контактных напряжений по сравнению с неконформными профилями.

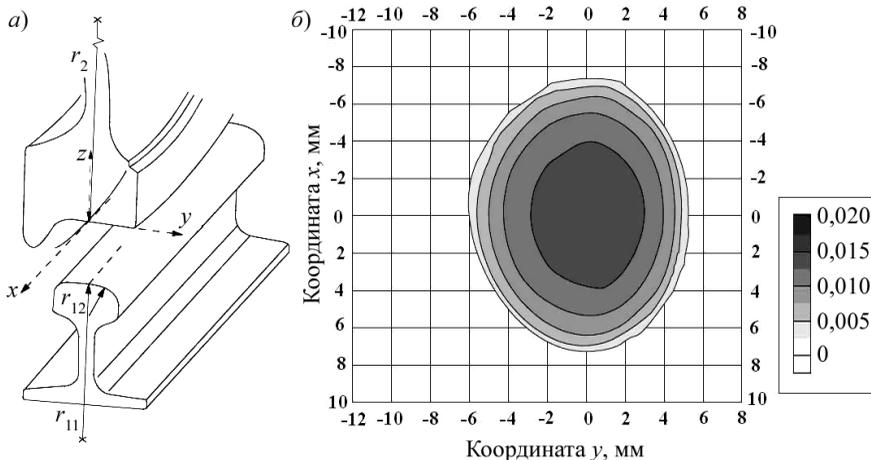


Рисунок 4 – Контакт колеса и рельса при характерных радиусах  $r_1 = r_2 = \infty$ ;  $r_{11} = 355,6$  мм;  $r_{12} = 291,6$  мм; силе прижатия  $F = 100$  кН; максимальном давлении  $P_{\max} = 1170$  МПа: а – геометрия контакта; б – распределение давлений по площадке контакта [2]

Авторами [51] рассмотрено контактное взаимодействие колеса с рельсом в случаях неподвижного колеса, при начале его движения и установившемся качении. На рисунке 5 представлены распределения интенсивности напряжений по Мизесу  $\sigma_i$  в плоскости симметрии модели при различных углах  $\gamma$  наклона рельса по отношению к вертикали и смещениях  $\Delta$  плоскости круга катания от плоскости симметрии сечения рельса внутрь колеса. Установлено, что минимальные уровни интенсивности напряжений и поперечных нагрузок соответствуют случаю, при котором круг качения колеса катится по средней линии рельса. Получены распределения контактных напряжений на различных стадиях процесса страгивания колеса (рисунок 6) и показано, что в этом случае достигаются более высокие напряжения, чем при установившемся качении (рисунок 7), что требуется учитывать при расчетах на прочность и оценке срока службы колес.

В статье [52] представлены результаты расчета в ANSYS Mechanical взаимодействия колеса и рельса, выполненного в статической постановке (рисунок 8). Показано, что при учете геометрической нелинейности, трения и упругопластических свойств материала происходит существенное снижение напряжений в области контакта при малом изменении глубины вдавливания. Изменение положения колеса относительно рельса оказывает незначительное (до 5 %) влияние на напряжения и перемещения в области контакта.

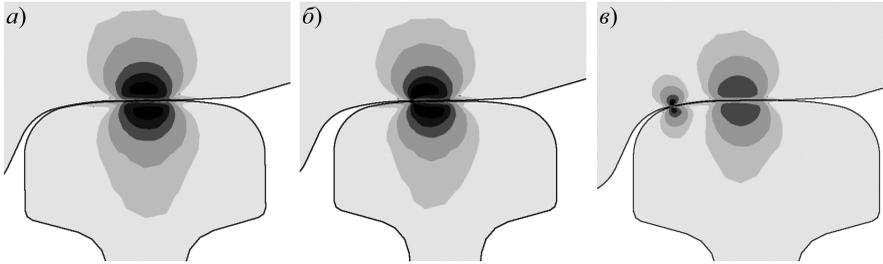


Рисунок 5 – Распределение интенсивности напряжений по Мизесу [51]:  
 $a - \sigma_{i \max} = 574 \text{ МПа}, \gamma = 0,7^\circ, \Delta = 0,5 \text{ мм};$   
 $b - \sigma_{i \max} = 602 \text{ МПа}, \gamma = 0^\circ, \Delta = 2,5 \text{ мм};$   
 $c - \sigma_{i \max} = 846 \text{ МПа}, \gamma = 0^\circ, \Delta = 1 \text{ мм}$

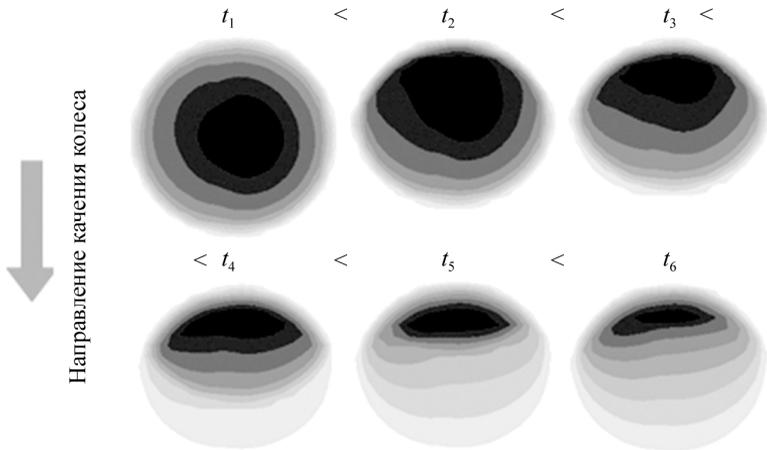


Рисунок 6 – Распределение интенсивности касательных напряжений в области контакта на различных стадиях процесса страгивания [51]

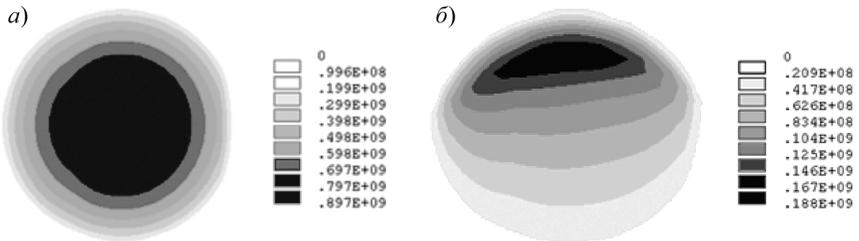


Рисунок 7 – Распределение контактных давлений (а) и касательных контактных напряжений (б) при установившемся режиме [51]

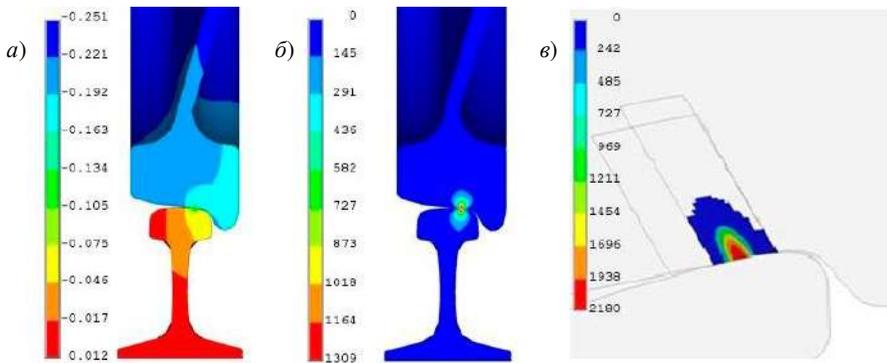


Рисунок 8 – Результаты расчета изополей [52]:

*a* – перемещения; *б* – эквивалентные по Мизесу напряжения; *в* – контактные давления

В соответствии с расчетами, представленными в работе [53], значения контактных давлений, возникающих между колесом и рельсом, а также максимальных эквивалентных напряжений по теории Мизеса, рассчитанных с применением метода конечных элементов и с использованием теории Герца, отличаются менее чем на 2 % (рисунок 9). Также расчеты показали, что максимальные эквивалентные напряжения по теориям Мизеса и Данг Вана, как и максимальные касательные напряжения наблюдаются в точке, расположенной на глубине 4,5–5,3 мм под поверхностью катания.

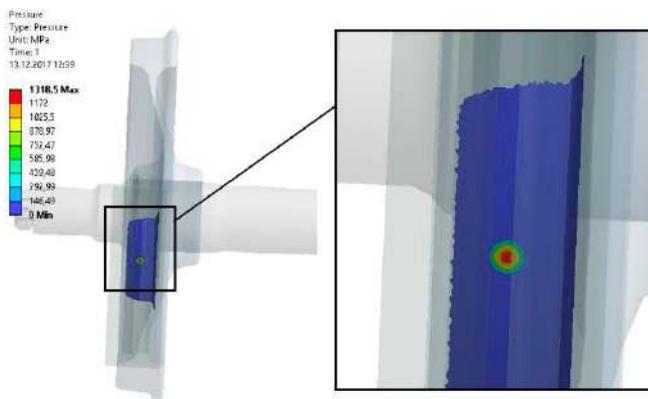


Рисунок 9 – Контактные давления, МПа, при нагрузке на ось 221,6 кН

В работе [54] представлена модель, которая детально учитывает особенности реальной конструкции железнодорожного пути, находящего под воздействием проезжающего подвижного состава (рисунок 10). Проведен анализ напряженно-деформированного состояния (рисунок 11) для различных

типов промежуточных рельсовых креплений и на основе расчетов установлено число циклов до разрушения различных элементов пути.

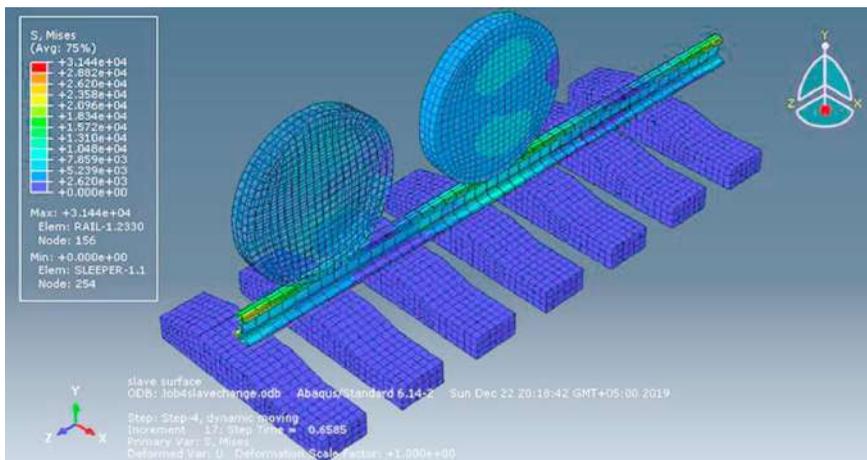


Рисунок 10 – Компьютерная модель железнодорожного пути [54]

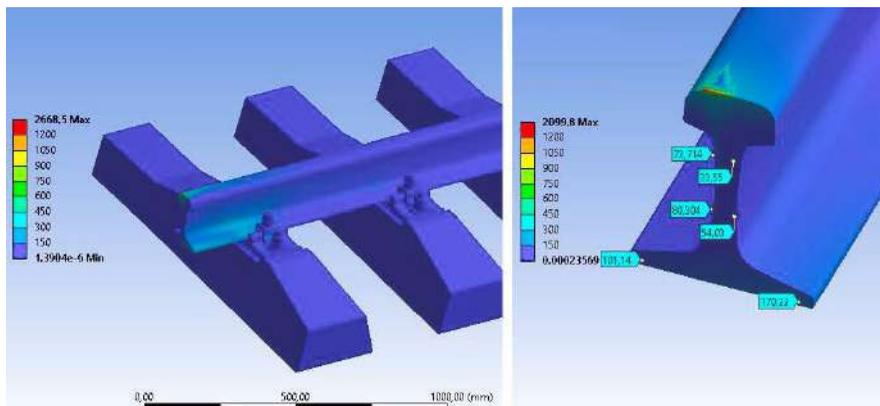


Рисунок 11 – Распределение напряжений в элементах путевой конструкции [54]

Более развернутая модель железнодорожного пути рассмотрена в [55]. В ней анализировалось действие колес вагонов с различной осевой нагрузкой при движении по кривым различного радиуса. Полагалось, что участок пути расположен на балласте с толщиной под шпалой 45 см, промежуточными рельсовыми креплениями ЖБР-65ПШР, шпалами Ш-3Д с прутковым армированием, рельсами типа Р65 (рисунок 12). Получены значения напряжений в рельсах в зависимости от боковой силы, передаваемой на колеса

(рисунок 13). Результаты работы могут быть использованы для принятия решения о необходимости реконструкции участков пути при увеличении допустимой нагрузки вагонов на ось.

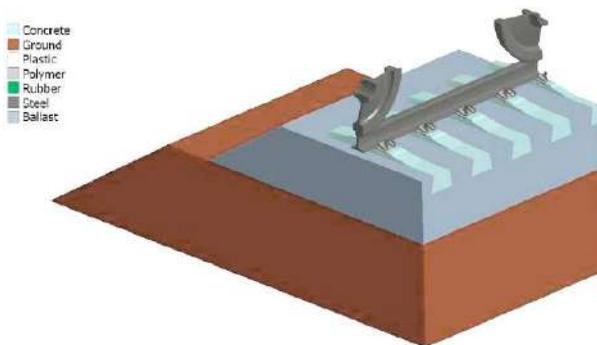


Рисунок 12 – Трехмерная модель участка пути [55]

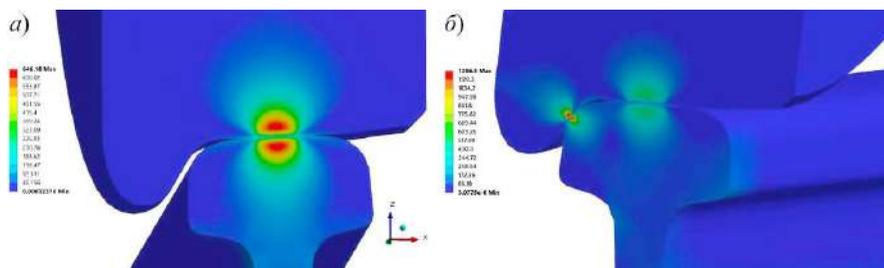


Рисунок 13 – Напряжения, МПа, в области контакта колеса и рельса [55]:  
*а* – при нагрузке на колесо 15 т и положении колеса по оси катания;  
*б* – при нагрузке на колесо 15 т и боковой силе 8 т

В статье [56] представлены результаты имитационного моделирования ведения грузового поезда в программном комплексе «Универсальный механизм». Расчеты показали, что в режиме холостого хода площадь пятна контакта колеса и нового рельса всегда меньше по сравнению с изношенным. В режиме тяги пятно контакта при новом состоянии профилей больше на внутреннем рельсе, причем разница площадей по сравнению с изношенной парой может превышать 10 %. Однако в случае, если рельс установлен с возвышением, разница в площадях отсутствует. При движении по спуску больше (до 20 %) пятно контакта на внутренней рельсовой нити.

Авторы статьи [57] на основе анализа влияния числа циклов нагружения на усталостную долговечность рельсов предложена методика оценки тоннажа брутто, пропущенного по участку железнодорожного пути, при котором будет исчерпан ресурс контактно-усталостной прочности рельсов.

Таким образом решение проблемы уменьшения интенсивности износа колеса и рельса до приемлемых значений требует дальнейшего развития исследований контактного взаимодействия колеса и рельса, которые станут теоретической базой для модернизации колесных пар и верхнего строения пути, а также разработки мероприятий по обеспечению их эффективной эксплуатации и ремонта.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Обобщение передового опыта тяжеловесного движения: вопросы взаимодействия колеса и рельса / У. Дж. Харрис [и др.]. – М. : Интекст, 2002. – 408 с.

2 **Воробьев, А. А.** Контактное взаимодействие колеса и рельса / А. А. Воробьев // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2009. – № 3 (39). – С. 42–47.

3 **Hertz, H.** Ueber die Berührung fester elastischer Körper / H. Hertz // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1891. – Bd. 92, H. 2. – P. 156–171.

4 **Динник, А. Н.** Избранные труды : в 3 т. / А. Н. Динник. – Киев : АН УССР, 1952. – Т. 1: Удар и сжатие упругих тел. – 152 с.

5 **Беляев, Н. М.** Труды по теории упругости и пластичности / Н. М. Беляев. – М. : Гостехиздат, 1957. – 632 с.

6 **Сакало, В. И.** Контактные задачи железнодорожного транспорта / В. И. Сакало, В. С. Коссов. – М. : Машиностроение, 2004. – 495 с.

7 **Cottaneo, C.** Sul contatto di due copri elastici: distribuzione locale degli sforzi / C. Cottaneo // Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei. – 1938. – Vol. 27, is. 6. – P. 342–348.

8 **Ковальский, Б. С.** Расчет деталей на местное сжатие / Б. С. Ковальский. – Харьков : ХВКИУ, 1967. – 223 с.

9 **Carter, F.W.** On the action of locomotive driving wheel / F.W. Carter // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. – 1926. – Vol. 112, is. 760. – P. 151–157.

10 **Fromm, H.** Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbaren Scheiben / H. Fromm // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1927. – Bd. 7, H. 1. – P. 27–58.

11 **Kalker, J. J.** Three-dimensional elastic bodies in rolling contact / J. J. Kalker. – Dordrecht : Kluwer academic publishers, 1990. – 314 p.

12 **Kalker, J. J.** Simplified theory of rolling contact / J. J. Kalker // Delft Progress Report Series C1. – 1973. – Vol. 1. – P. 1–10.

13 **Kalker, J. J.** A Fast Algorithm for the Simplified Theory of Rolling Contact / J. J. Kalker // Vehicle System Dynamics. – 1982. – Vol. 11, is. 1. – P. 1–13.

14 **Kik, W.** A fast, approximate method to calculate normal load at contact between wheel and rail and creep forces during rolling / W. Kik, J. Piotrowski // Proceedings of the 2<sup>nd</sup> mini conference on contact mechanics and wear of rail/wheel systems. – Budapest : Technical University of Budapest, 1996. – P. 52–61.

15 **Mindlin, R. D.** Compliance of elastic bodies in contact / R. D. Mindlin // Journal of Applied Mechanics. – 1949. – Vol. 16, is. 3 – P. 259–268.

16 **Johnson, K. L.** The effect of a tangential contact force upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane / K. L. Johnson // Journal of Applied Mechanics. – 1958. – Vol. 25, is. 3. – P. 339–346.

17 **Johnson, K. L.** The effect of spin upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane / K. L. Johnson // *Journal of Applied Mechanics*. – 1958. – Vol. 25, is. 3. – P. 332–338.

18 **Johnson, K. L.** Contact of nonspherical elastic bodies transmitting tangential forces / K. L. Johnson, P. J. Vermeulen // *Journal of Applied Mechanics*. – 1964. – Vol. 31, is. 2. – P. 338–340.

19 **Панькин, Н. А.** Причины интенсивного износа гребней колеса и рельса и пути его устранения / Н. А. Панькин // *Железнодорожный транспорт*. – 1991. – № 11. – С. 57–59.

20 **Горячева, И Г.** Моделирование контактно-усталостных дефектов колёс грузовых вагонов / И. Г. Горячева, С. М. Захаров, Е. В. Торская // *Механика и трибология транспортных систем – 2003* : сб. докл. междунар. конгр. В 2 т. Т. 1. – Ростов н/Д : РГУПС, 2003. – С. 271–275.

21 Контактно-усталостные повреждения колёс грузовых вагонов / Б. М. Асташкевич [и др.]. – М. : Интекст, 2004. – 160 с.

22 **Жаров, И. А.** Зависимость типа изнашивания колес и рельсов от параметров их контакта и ширины колеи / И. А. Жаров, С. М. Захаров // *Вестник Научно-исследовательского института железнодорожного транспорта*. – 2010. – № 2. – С. 46–49.

23 **Ekberg, A.** Rolling contact fatigue of railway wheels : PhD Thesis / A. Ekberg. – Gothenburg : Chalmers University of Technology, 2000. – 27 p.

24 **Nast, J. D.** On rolling contact fatigue analysis practice in railway industry: models and applications / J. D. Nast, C. L. Saux, B. Soua // *Railway Bogies and Running Gears : Proceedings of 7<sup>th</sup> International Conference*. – Budapest, 2007. – P. 217–226.

25 **Krettek, O.** About the influence of the wheel-profile of self-steering wheel-set on the amount of wear / O. Krettek // *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> mini conference on contact mechanics and wear of rail/wheel systems*. – Budapest : Technical University of Budapest, 1996. – P. 224–234.

26 **Casini, C.** The geometrical construction of the FS DR wheel profile / C. Casini, G. Tacci // *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> mini conference on contact mechanics and wear of rail/wheel systems*. – Budapest : Technical University of Budapest, 1996. – P. 235–242.

27 Оценка взаимодействия колеса с рельсом с учётом остаточных напряжений / С. Н. Киселёв [и др.] // *Тяжёлое машиностроение*. – 2002. – № 12. – С. 20–21.

28 Сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния цельнокатанных колес вагонов от термических и механических эксплуатационных нагрузок / С. Н. Киселёв [и др.] // *Тяжёлое машиностроение*. – 2005. – №2. – С. 36–41.

29 **Саврухин, А. В.** Совершенствование конструкций массивных несущих деталей подвижного состава на основе анализа напряженно-деформированного состояния при эксплуатационных и технологических воздействиях: дис... д-ра. техн. наук. : 05.22.07 / А. В. Саврухин. – М. : МГУПС (МИИТ), 2005. – 349 с.

30 **Хохлов, А. А.** Анализ проблемы взаимодействия колеса с рельсом / А. А. Хохлов, С. И. Тимков, Д. В. Зотов // *Железнодорожный транспорт*. – 2005. – № 3. – С. 65–67.

31 **Signorini, A.** Trasformazioni termoelastiche finite / A. Signorini // *Annali di Matematica*. – 1955. – Vol. 39. – P. 147–201.

32 **Голубенко, А. Л.** Сцепление колеса с рельсом / А. Л. Голубенко. – Киев : ВПОЛ, 1993. – 448 с.

33 **Boucly, V.** Modeling of the Rolling and Sliding Contact Between Two Asperities / V. Boucly, D. Nélias, I. Green // *Journal of Tribology*. – 2007. – Vol. 129, is. 2. – P. 235–245.

34 **Johnson K. L.** Contact Mechanics / Johnson K. L. – Cambridge University Press, 1985. – 462 p.

35 **Костюкевич, А. И.** Численная и экспериментальная идентификация процесса сцепления колес локомотива с рельсами : дис. ... канд. техн. наук : 05.22.07 / А. И. Костюкевич. – Луганск : ВМИ, 1991. – 230 с.

36 **Языков, В. Н.** Применение модели негерцевского контакта колеса с рельсом для оценки динамических качеств грузового тепловоза: автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.22.07 / В. Н. Языков. – Брянск : БГТУ, 2004. – 19 с.

37 **Бокий, И. Б.** Численный подход к решению контактной задачи взаимодействия двух упругих тел с учетом трения и истории приложения внешнего нагружения / И. Б. Бокий // Вестник Якутского государственного университета. – 2006. – Т. 3, № 3. – С. 42–46.

38 **Кротов, С. В.** Напряженное состояние в контакте колеса и рельса при наличии скольжения и сцепления / С. В. Кротов, Д. П. Кононов, Е. В. Пакулина // Известия Петербургского университета путей сообщения. – 2021. – Т. 18, № 2. – С. 177–187.

39 Wheel-rail contact models in the presence of switches and crossings / H. Magalhaes [et al.] // Vehicle System Dynamics. – 2023. – Vol. 61, is. 3. – P. 838–870.

40 **Ушкалов, В. Ф.** Математическая модель взаимодействия железнодорожного экипажа и пути с учетом распределения контактных сил по пятнам контакта / В. Ф. Ушкалов, Т. Ф. Мокрый, И. Ю. Малышева // Техническая механика. – 2015. – № 2. – С. 79–89.

41 **Сакало, В. И.** Механика контактного взаимодействия колеса и рельса / В. И. Сакало, А. В. Сакало, В. С. Коссов. – М. : Директ-Медиа, 2021. – 376 с.

42 **Telliskivi, T.** Contact mechanics analysis of measured wheel-rail profiles using the finite element method / T. Telliskivi, U. Olofsson // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit. – 2001. – Vol. 215, is. 2. – P. 65–72.

43 **Damme, S.** Zur Finite-Element-Modellierung des stationären Rollkontakts von Rad und Schiene : PhD thesis / S. Damme. – Dresden : Berichte des Instituts für Mechanik und Flächentragwerke Heft, 2001. – 224 p.

44 **Власенко, Ю. Е.** Контактная задача для упругопластического многослойного пакета с учетом отстаивания слоев / Ю. Е. Власенко, В. И. Кузьменко, Г. А. Фень // Механика твердого тела. – 1978. – № 5. – С. 68–73.

45 **Francavilla, A.** A note on numerical computation of elastic contact problems / A. Francavilla, O. C. Zienkiewicz // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1975. – Vol. 9, is. 3. – P. 913–924.

46 **Cheng, W. Q.** Computational finite element analysis and optimal design for multi-body contact system / W. Q. Cheng, F. Zhu, J. W. Luo // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1988. – Vol. 71, is. 1. – P. 31–39.

47 **Rodríguez-Tembleque, L.** A boundary element formulation for wear modeling on 3D contact and rolling-contact problems / L. Rodríguez-Tembleque, R. Abascal, M. H. Aliabadi // International Journal of Solids and Structures. – 2010. – Vol. 47, is. 18–19. – P. 2600–2612.

48 **Rudas, M.** Simulation of wheel-rail damage / M. Rudas, J. Baynham, R. A. Adey // WIT Transactions on The Built Environment: Computers in Railways VII. – 2000. – Vol. 50. – P. 747–755.

49 **Авджиева, Т. Б.** Контактное взаимодействие в паре «колесо – рельс» / Т. Б. Авджиева, М. Н. Георгиев, Н. М. Николов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2010. –Т. 76, № 8.– С. 54–57.

50 **Montenegro, P. A.** Wheel – rail contact model for railway vehicle – structure interaction applications: development and validation / P. A. Montenegro, R. Calcada // Railway Engineering Science. – 2023. – Vol. 31, no. 3. – P. 181–206.

51 **Арсеньев, И. Д.** Конечно-элементное моделирование и исследование эволюции контактных напряжений при страгивании железнодорожного колеса / И. Д. Арсеньев, Д. В. Шевченко, А. И. Боровков // Вестник Пермского государственного технического университета. Механика. – 2011. – № 2. – С. 5–13.

52 **Прокопьев, В. И.** Моделирование напряженно-деформированного состояния железнодорожного колеса и рельса при контакте / В. И. Прокопьев, Т. В. Жданова, Б. С. Кушхов // Вестник Чувашияского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2017. – № 4 (34). – С. 19–29.

53 Исследование напряженно-деформированного состояния колесной пары грузового вагона в процессе торможения / А. А. Воробьев [и др.] // Социально-экономические и технические системы: исследование, проектирование, оптимизация. – 2021. – № 2 (88). – С. 86–97.

54 **Джаббаров, С. Т.** Исследование напряженно-деформированного состояния рельсов при увеличении осевой нагрузки / С. Т. Джаббаров, Н. Б. Кодиров // Universum: технические науки. – 2022. – Вып. 12 (105). – С. 35–39.

55 Оценка напряженно-деформированного состояния рельсов при различных условиях эксплуатации на основе моделирования методом конечных элементов / А. Ю. Абдурашитов [и др.] // Известия Транссиба. – 2023. – № 1 (53). – С. 62–73.

56 **Парахненко, И. Л.** Моделирование пятна контакта, возникающего при взаимодействии колеса и рельса, для разных вариантов режима ведения грузового состава / И. Л. Парахненко, Д. А. Гребнева // Вестник Сибирского государственного университета путей сообщения. – 2022. – № 4 (63). – С. 36–43.

57 **Коган, А. Я.** Прогнозирование отказов рельсов по дефектам контактно-усталостного происхождения / А. Я. Коган, А. Ю. Абдурашитов // Вестник Научно-исследовательского института железнодорожного транспорта. – 2014. – № 4. – С. 3–7.

*E. M. AKULOVA*

*Gomel State Technical University named after P. O. Sukhoi, Gomel, Belarus*

## **ANALYSIS OF APPROACHES TO INVESTIGATION OF THE WHEEL-RAIL SYSTEM CONTACT INTERACTION CHARACTERISTICS**

The main approaches to the wheel-rail system contact interaction characteristics investigation are considered, and problems of the contact problems solving are analyzed. There is presented the information on modern studies of wheel-rail interaction using analytical and numerical methods and possible ways of using their results.

**Keywords:** wheel-rail system, contact interaction, stress-strain state, computer modeling.

Получено 31.10.2024

УДК 621.82

М. В. АНИКЕЕВА<sup>1</sup>, Ю. В. САВЕЛЬЕВ<sup>2</sup><sup>1</sup>Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь<sup>2</sup>Унитарное предприятие «Гомельвторчермет», Гомель, Беларусь

## ПОВЫШЕНИЕ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПОДШИПНИКОВЫХ УЗЛОВ ЩЕБНЕОЧИСТИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ PLASSER & THEURER

Рассматривается самоходная щебнеочистительная машина серии RM-80. В результате анализа отказов ее узлов трения установлено, что наличие большого числа абразивных частиц в засоренном балласте ведет к заклиниванию подшипников качения направляющих роликов и последующему интенсивному износу дорогостоящей скребковой цепи. Предложена конструкция ролика, в которой вместо двух подшипников качения применяется один подшипник скольжения самосмазывающийся с вкладышем торцово-прессового деформирования древесной карточки, и приведено обоснование его высокой износостойкости и экономичности.

**Ключевые слова:** щебнеочистительная машина, направляющий ролик, баровая цепь, подшипник скольжения самосмазывающийся, износ, тепловизионная съемка.

Важной задачей путевого хозяйства является очистка щебеночного балласта железных дорог от загрязнений, поскольку при его засорении теряется способность упруго воспринимать нагрузки, что приводит к росту динамических сил взаимодействия подвижного состава и пути. Соответственно увеличиваются нагрузки во всех элементах верхнего строения пути, сокращается их ресурс работы, повышается расход энергоресурсов.

При среднем и капитальном ремонте железнодорожного пути для восстановления упругости щебеночного слоя и его дренирующих свойств, а также для улучшения несущей способности балластной призмы находят применение самоходная щебнеочистительная машина серии RM-80 (рисунок 1) австрийской фирмы Plasser & Theurer [1], которая позволяет осуществлять очистку балласта при высочайшем качестве работы даже в самых сложных условиях [2].

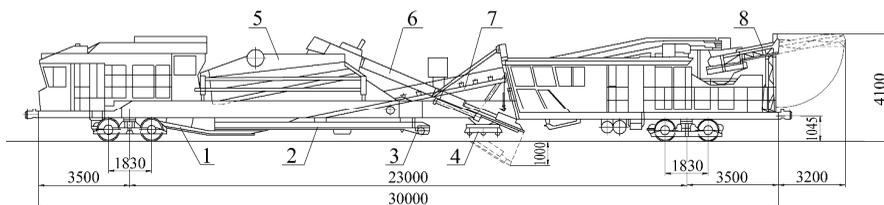


Рисунок 1 – Щебнеочистительная машина RM-80:

- 1 – устройство для очистки пути; 2 – конвейер для распределения чистого балласта; 3 – планировщик балласта; 4 – подъемно-рихтовочное устройство; 5 – виброгрохот; 6 – выгребное устройство; 7 – конвейер для засорителей; 8 – поворотный конвейер

Ее основной рабочий орган, вырезающий и удаляющий балласт из-под рельсошпальной решетки, – выгребное устройство, которое оснащено баровой (выгребной) цепью, от состояния и надежности работы которой зависит работоспособность машины, ее производительность и эффективность. Выполненный рядом исследователей анализ [3, 4] показал, что в процессе работы машины абразивный материал из засоренного щебеночного балласта попадает в соединения звеньев выгребной цепи и на ее направляющие ролики (рисунок 2). Это приводит к постепенному ослаблению натяжения цепи и дальнейшему ее разрыву.

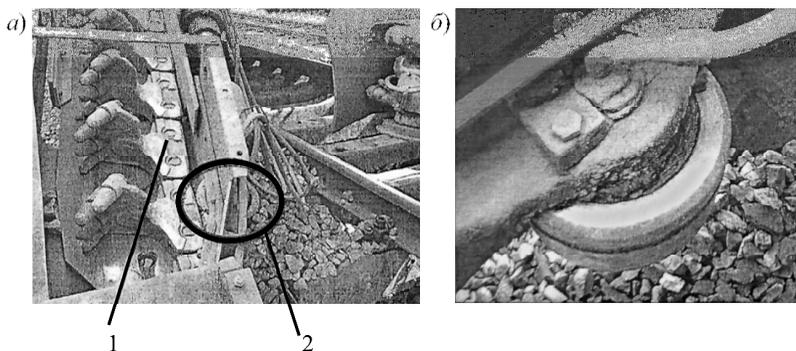


Рисунок 2 – Общий вид баровой цепи (а) и направляющего ролика (б):  
1 – баровая цепь; 2 – направляющий ролик

В работе [4] предложены технические решения, позволяющие обеспечить снижение нагрузок на баровую цепь, но они связаны с использованием дополнительного оборудования и существенно усложняют технологический процесс. Проведенный нами анализ отказов узлов трения рассматриваемой щебнеочистительной машины показал, что значительное число проблем в ее эксплуатации связано с требующими частой замены и затратными в обслуживании направляющими роликами баровой цепи выгребного устройства.

Такой ролик представляет собой полый цилиндр, в который запрессованы два шарикоподшипника 313 (рисунок 3). В конструкции выгребного устройства установлено пять роликов, которые в процессе работы смазываются пластичной смазкой Shell Retinax LX-2, принудительно подающейся внутрь подшипников.

При выгребании щебня на роликах и около них скапливается огромное количество абразивных частиц, которые попадают внутрь подшипника и смешиваются со смазкой. Это приводит к тому, что смазка с абразивом начинает работать на изнашивание контактирующих поверхностей деталей подшипника, попадая в зону контакта шариков с внутренним и наружными кольцами, и приводит к заклиниванию подшипника [5–7], а следовательно, и ролика в целом. Это ведет к резкому износу дорогостоящей скребковой цепи, неравномерному срезанию балласта, снижению производительности машины.

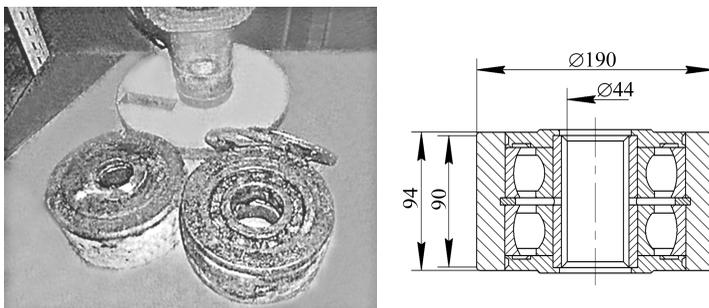


Рисунок 3 – Направляющий ролик баровой цепи

При работе подшипников качения в абразивной среде абразив проникает в пространство между шариками в шарикоподшипниках, сепаратором, внутренней поверхностью наружного кольца и наружной поверхности внутреннего кольца, и в процессе его накопления происходит заклинивание подшипника. Поэтому в узлах трения с подшипниками качения с целью предотвращения попадания абразива применяются различные уплотнения. Максимальный ресурс подшипника 313 – 1 месяц. Однако следует отметить, что зачастую они выходят из строя через 2–3 недели.

Опыт эксплуатации машин различного назначения в условиях высокого количества абразивных частиц показал достаточно высокую эффективность использования подшипников скольжения с вкладышем из древесины [8–10]. В связи с этим для решения рассматриваемой проблемы была предложена конструкция ролика, в которой вместо двух подшипников качения используется один подшипник скольжения самосмазывающийся (ПСС) с вкладышем

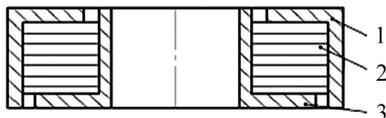


Рисунок 4 – Подшипник скольжения самосмазывающийся [11]:

1 – наружное стальное кольцо; 2 – запрессованная втулка торцово-прессового деформирования древесной карточки; 3 – внутреннее стальное

торцово-прессового деформирования (ТПД) древесной карточки (рисунок 4), пропитанной смазкой, модифицированной специальными добавками. ПСС способны длительное время работать в абразивной и агрессивной средах, при воздействии вибраций и ударных нагрузок.

Расчет показал, что предельная нагрузка на самый нагруженный ролик не превышает допустимого значения ( $3982,3 \leq 4810$  Н), что свидетельствует о возможности применения ПСС ТПД в рассматриваемом случае. Ограничениями по их использованию является высокая температура (до 100 °С).

Для определения фактических температур, возникающих при работе существующих направляющих роликов выгребного устройства, была проведена их тепловизионная съемка прибором IR SnapShot. На рисунке 5 представ-

лены ее результаты, из которых следует, что наибольшая температура реализуется в нижнем направляющем ролике левой нагруженной ветви баровой цепи и незначительно превышает 100 °С.

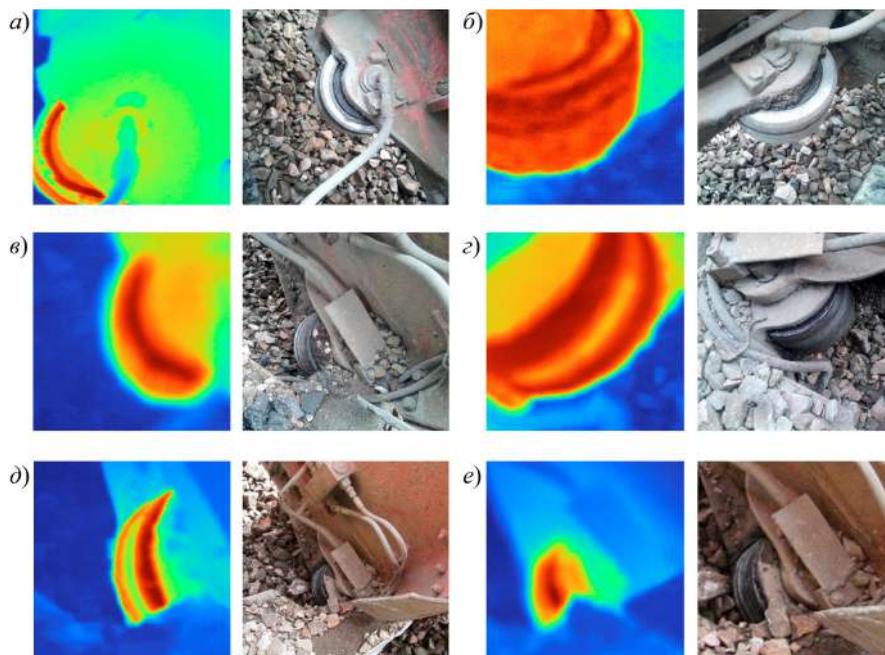


Рисунок 5 – Результаты тепловизионной съемки направляющих роликов баровой цепи: *a* – промежуточный, левая ненагруженная ветвь ( $T_{\max} = 60,5$  °С); *б* – промежуточный, правая ненагруженная ветвь ( $T_{\max} = 40,4$  °С); *в* – нижний, левая ненагруженная ветвь ( $T_{\max} = 55$  °С); *г* – нижний, правая ненагруженная ветвь ( $T_{\max} = 63,9$  °С); *д* – нижний, левая нагруженная ветвь после остановки ( $T_{\max} = 104$  °С); *е* – нижний, левая нагруженная ветвь через 3 мин после остановки ( $T_{\max} = 77$  °С);

Высокая износостойкость ПСС объясняется субмикроскопической моделью наполненной смазкой древесины ТПД (рисунок 6). Трение осуществляется торцом перпендикулярно оси подшипника высокоориентированными макромолекулами целлюлозы, длина которых достигает 5 мкм. Для их разрушения нужно разорвать внутримолекулярные связи, а это требует приложения больших нагрузок и высокой скорости скольжения с целью генерирования тепла, вызывающего деструкцию компонентов древесины. Если межмолекулярная энергия в сухом древесинном волокне составляет 42 кДж/моль, во влажном – 8,4 кДж/моль, то энергия разрыва внутримолекулярной связи  $CO \rightarrow C + O$  в макромолекуле целлюлозы составляет 1076,4 кДж/моль, что превышает в 6–9 раз износостойкость древесины при трении поперек волокон.

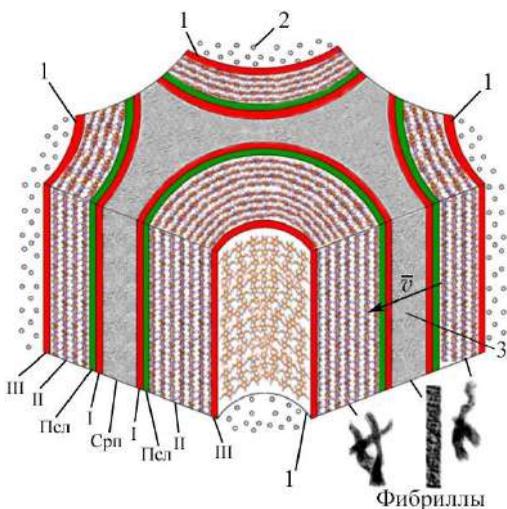


Рисунок 6 – Схема соединения оболочек (стенок) четырех соседних капилляров:

1 – стенки капилляров; 2 – смазка; 3 – поверхность трения  
( $\bar{v}$  – направление скорости скольжения);

I – первичная оболочка; Псл – переходный слой;

II – вторичная оболочка; III – третичная оболочка;

Срп – срединная пластинка (лигнинный скелет)

щетки, удаляют (выметают) попадающий в контактную зону абразив, а некоторые его частицы внедряются в неполностью сжатые (сплюснутые) полости капилляров. Соприкасаясь с торцевой поверхностью, абразив налипает на ней, образуя наросты, которые по мере накопления осыпаются.

Кроме того, все микронеровности контртела (вала) сглаживаются поступающей из полостей капилляр пропитывающей древесину загущенной смазкой, которая вводится один раз при сборке подшипника. Не полностью сжатые полости капилляров, контактирующих с контртелом, остаются открытыми для поступления смазки в контактную зону, в которой макромолекулы присадок вступают во взаимодействие с компонентами древесинного вещества и формируют прочный граничный смазочный слой.

Толщина клеточной стенки при прессовании (деформировании) не изменяется, а остается постоянной. Стенки капилляров ориентированы по радиусу вкладышей, обуславливая его высокие демпфирующие свойства, которые связаны с наличием внутримолекулярной водородной связи в макромолекулах целлюлозы. Это обуславливает их высокие демпфирующие свойства, которые гасят возникающие в узле трения колебания [12–14].

Проведенный анализ показал, что в зависимости от условий работы периодичность замены подшипников качения одного ролика колеблется от не-

Толщина стенки двух соседних капилляров составляет 5–15 мкм, вторичной оболочки 1–5 мкм, третичной оболочки – около 100 нм.

Агрегаты микрофибрилл, имеющих диаметр 7 нм, образуют фибриллы длиной 1–5 мкм, шириной 25–35 нм. По размерам они соизмеримы с шероховатостью  $R_z$  контактной поверхности контртела, так как обработка по внутренней контактной поверхности внутреннего кольца подшипника производится с шероховатостью  $R_a = 0,63 \dots 0,2$  мкм,  $R_z = 3,2 \dots 1,6$  мкм (класс чистоты 8). Неровности, соизмеримые с длиной фибрилл, расщепляют вторичную и третичную оболочки на фибриллы, которые, как

дели до месяца. Стоимость одного подшипника составляет 15 у. е. На смазку пяти роликов в месяц уходит примерно 15 л смазки, общая стоимость которой составляет 254 у. е. Затраты по замене всех подшипников при выходе их из строя через месяц составляют 150 у. е. Суммарные затраты на подшипники качения и смазку составляют 404 у. е. в месяц. Однако следует отметить, что зачастую подшипники выходят из строя через 2–3 недели.

Учитывая, что стоимость предлагаемого подшипника скольжения составляет менее 10 у. е., он не нуждается в подводе дополнительной смазки и сохраняет работоспособность в течение двух месяцев, эффект от его внедрения может оказаться весьма значительным. Также стоит отметить ремонтно-пригодность ПСС, где замене подлежит только втулка, и сокращение затрат энергоресурсов при эксплуатации щетноочистительной машины за счет снижения трения в узлах.

Таким образом, ПСС ТПД обладают высокой износостойкостью вследствие высокой ориентации по радиусу фибрилл, перпендикулярных контактной зоне, что позволяет удалять продукты износа из зоны трения в полости капилляр, а также предотвращать попадание абразива в зону трения из внешней среды. Также используемая в них древесина имеет высокую энергию разрыва внутримолекулярных связей макромолекул целлюлозы в контактной зоне, позволяет осуществлять перенос высокомолекулярных полимерных присадок смазки из полостей капилляров на контртело, которые сглаживают его микронеровности, что вследствие образования в процессе трения граничных смазочных слоев на контактных поверхностях вкладыша ТПД и контртела обеспечивает работу узла трения на самосмазке в абразивно-агрессивных средах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Путьевые машины / М. В. Соломонов [и др.]. – М. : Желдориздат, 2000. – 756 с.
- 2 RM80 : High performance ballast cleaning for plain track and switches [Electronic resource]. – Chesapeake : Plasser American / Mode of access : <https://www.plasseramerican.com/en/machines-systems/ballast-bed-cleaning/rm80>. – Date of access : 16.10.2024.
- 3 **Zhang, M.** Improve the efficiency of RM80 ballast cleaning machine / M. Zhang, M. H. Liu, L. Jiang // *Advanced Materials Research*. – 2014. – Vol. 915–916. – P. 1536–1539.
- 4 **Ахметов, М. Ф.** Исследование вопросов повышения эффективности машины RM-80 / М. Ф. Ахметов, А. Ж. Машингереев // *Вестник Казахской академии транспорта и коммуникаций имени М. Тынышпаева*. – 2012. – № 5 (78). – С. 16–21.
- 5 **Lazović, T. M.** Contact between abrasive particles and worn surfaces within rolling bearing / T. M. Lazović, R. M. Mitrović, Z. Z. Mišković // *Contact Mechanics: Theory and Applications : Mini-symposium*. – Belgrade : Mathematical Institute of SASA, 2017. – 2 p.
- 6 **Nilsson, R.** Abrasive wear of rolling bearings by lubricant borne particles / R. Nilsson, R. S. Dwyer-Joyce, U. Olofsson // *Journal of Engineering Tribology*. – 2006. – Vol. 220, no. 5. – P. 429–439.

7 **Morales Espejel, G. E.** Particle entrapment and indentation process in rolling bearings / G. E. Morales Espejel, A. Gabelli // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology. – 2016. – Vol. 230, no. 12. – P. 1572–1587.

8 **Ахметзянов, Р. Р.** Анализ композиционных материалов для подшипников скольжения сельскохозяйственных машин / Р. Р. Ахметзянов, Р. Р. Ахметзянова // Воспроизводство плодородия почв и продовольственная безопасность в современных условиях : сб. трудов Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 100-летию кафедры агрохимии и почвоведения Казанского ГАУ. – Казань : Изд-во Казанского ГАУ. – 2021. – С. 204–209.

9 **Федосеева, Е. С.** К вопросу об изготовлении подшипников скольжения из древесины / Е. С. Федосеева, С. Н. Исаков, И. В. Яцун // Научное творчество молодежи – лесному комплексу России : материалы XX Всероссийской (национальной) научно-технической конференции. – Екатеринбург : УГЛТУ, 2024. – С. 515–518.

10 **Абдугаффаров, Х. Ж.** О подшипниках скольжения на древесной основе для хлопкоочистительных машин / Х. Ж. Абдугаффаров, О. Ж. Муродов // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. – 2023. – № 1 (403). – С. 114–120.

11 **Врублевская, В.** Подшипники скольжения для работы в абразивно-агрессивных средах. Исследования, создание, внедрение / В. Врублевская, В. Кузнецова, М. Аникеева // Beau Bassin : Lambert Academic Publishing, 2018. – 344 с.

12 **Кузнецова, В. В.** Износостойкие самосмазывающиеся подшипники скольжения из природного композита / В. В. Кузнецова, М. В. Аникеева, В. И. Врублевская // Вестник БрГТУ. – 2016. – № 4. – С. 45–50.

13 **Аникеева, М. В.** Особенности строения природного композита в износостойких подшипниках скольжения / М. В. Аникеева, В. В. Кузнецова // Современные технологии в образовании : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 24–25 ноября, 2016 г. Ч. 2. – Минск : БНТУ, 2016. – С. 3–6.

14 **Кузнецова, В. В.** Антифрикционный природный износостойкий композит и его строение / В. В. Кузнецова, В. И. Врублевская, М. В. Аникеева // Труды БГТУ. – 2017. – № 1. – С. 115–124.

*M. V. ANIKEYEVA<sup>1</sup>, Y. V. SAVELIEV<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup>Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

*<sup>2</sup>Unitary enterprise "Gomelvtorchermet", Gomel, Belarus*

## **IMPROVING THE DURABILITY OF BEARING UNITS OF THE PLASSER & THEURER GRAVEL CLEANING MACHINE**

The self-propelled ballast cleaning machine of the RM-80 series is considered. As a result of the analysis of its friction units failures, it was found that the presence of a large number of abrasive particles in the clogged ballast leads to the guide roller rolling bearings jamming and to the subsequent intensive wear of the scraper chain parts. There is proposed a roller design with one self-lubricating friction bearing with a wood board end-press deformation insert instead of two rolling bearings, that justifies its high durability and cost-effectiveness.

**Keywords:** gravel cleaning machine, guide roller, bar chain, self-lubricating sliding bearing, wear, thermal imaging.

Получено 24.10.2024

UDC 531.5

N. A. AKHRAMENKO

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus***DETERMINATION OF THE RING-SHAPED MASS DISTRIBUTION GRAVITATIONAL FIELD STRENGTH**

The case of a ring-shaped mass distribution is considered. A method for estimating the gravitational field strength magnitude at points localized on the ring is investigated, taking into account the finiteness of the volumetric mass density. There is obtained the expression that allows us to estimate the gravitational field strength magnitude at the points localized on the ring.

**Keywords:** gravitational field strength, ring radius, ring mass.

**Introduction.** There are planets in the solar system surrounded by rings. They consist of cosmic dust and ice. Saturn was the first planet to have rings discovered. The total mass of debris in the ring system is estimated to be  $(1,54 \pm 0,49) \times 10^{19}$  kg.

From photographs taken by the automatic interplanetary station «Voyager 1», it was established that the rings of Saturn consist of hundreds of narrow rings. Subsequently, the images obtained by the probes show that in fact the rings are formed from thousands of rings alternating with slits.

It is interesting to note that interest in the rings of Saturn is manifested even in such an area as economics. Thus, The Economist magazine presented its annual rebus cover with a forecast for 2025, in the upper part of which Saturn with rings is depicted (Figure 1).

It can also be noted that in May 2025, the rings of Saturn are expected to "disappear". In fact, the rings will rotate in such a way (the observed ellipse will turn into a segment) that they will be practically invisible from the Earth. This happens regularly, twice per Saturnian year (approximately 29,5 Earth years), the previous time in 2009.

The rings of Saturn were studied by P. S. Laplace, S. V. Kovalevskaya, D. Maxwell, M. S. Bobrov and others [1–4].

In [5, 6], expressions were obtained for the intensity of the gravitational field of the ring for points of the plane in which the ring is located

$$g = -\frac{Gm}{\pi R^2} I(k), \quad (1)$$



Figure 1 – A cover fragment of The Economist magazine with a forecast for 2025 with an image of Saturn

where  $G$  – is the gravitational constant;  $m$  – is the mass of the ring;  $R$  – is the radius of the ring. The integral  $I(k)$  in expression (1) has the form

$$I(k) = \int_0^\pi \frac{(k - \cos \alpha) d\alpha}{(1 + k^2 - 2k \cos \alpha)^{1.5}}. \quad (2)$$

For points located inside the ring, the parameter  $k < 1$ ; for points located outside the ring the parameter  $k > 1$ .

As the point in question approaches the ring, the intensity of the gravitational field increases.

If the point is localized on the ring itself, then the parameter  $k = 1$  and expression (2) are transformed to the form

$$I(k) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^\pi \frac{d\alpha}{(1 - \cos \alpha)^{0.5}}. \quad (3)$$

The integral  $I(k)$  in expression (3) is divergent. This leads to the fact that the magnitude of the gravitational field strength at points belonging to the ring tends to infinity [7]. This situation arises due to the idealization of the physical model, in which the mass is distributed along a circle, while the volumetric density of the mass tends to infinity.

This paper discusses methods for estimating the magnitude of the gravitational field strength at points localized on the ring itself, taking into account the finiteness of the volumetric mass density (Figure 2, *a*, point  $O$  in the cross section of the ring).

**Estimation of the gravitational field strength of a ring-shaped mass distribution (for points belonging to the ring).** First, consider a homogeneous solid infinite cylinder. The mass of this cylinder is the source of the gravitational field. The intensity lines of this field will be directed towards the axis of the cylinder. Figure 2, *b* shows a cross-section of the cylinder with stress lines.

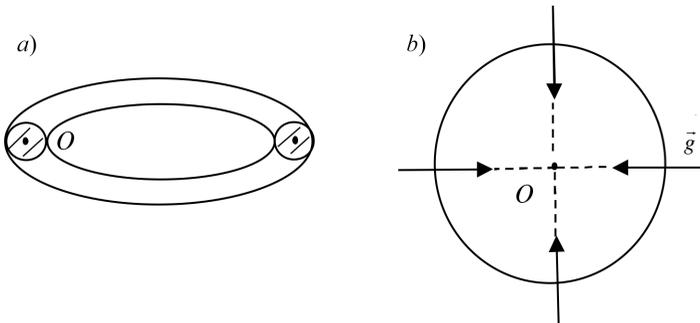


Figure 2 – Schemes: *a* – ring-shaped mass distribution with some bulk density; *b* – gravitational field intensity lines for a homogeneous cylinder

The dependence of the gravitational field strength on the distance to the cylinder axis is presented in Figure 3 (projection of the vector  $\vec{g}$  for points along the  $OX$  axis).

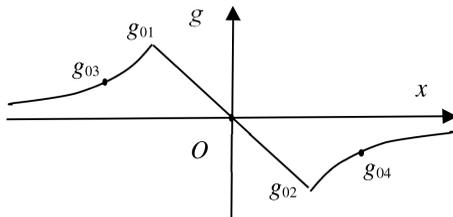


Figure 3 – Dependence of the gravitational field strength on the distance to the cylinder axis

The average value of the field strength is zero due to the fact that the strength has different signs to the left and right of point  $O$ . We can also say that at the center of the cylinder (on its axis) the field strength is zero due to symmetry.

If the cross section of the ring has a different shape, for example, as in Figure 4 then we can also assume that the field strength at the center is zero in the absence of other fields. And this same value can be considered the average value of the field strength over the cross section of the ring.



Figure 4 – Cross-section of the ring in the form of  $a$  – an ellipse or oval;  $b$  – a rectangle

In the presence of an external gravitational field, the graph in Figure 3 (for a cylinder) will change and take the form in Figure 5.

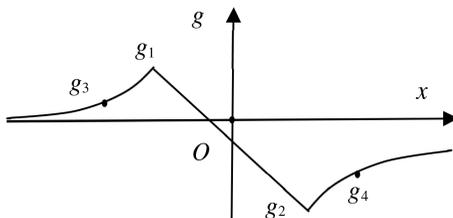


Figure 5 – Dependence of the gravitational field strength on the distance to the cylinder axis in the presence of an external gravitational field

In this case we can assume that

$$g_1 = g_{01} + g_{ex} \quad \text{and} \quad g_2 = g_{02} + g_{ex}, \quad (4)$$

where  $g_{ex}$  – is the intensity of the external gravitational field (we consider it constant).

Then from relations (4) we obtain

$$g_{ex} = \frac{g_1 + g_2 + g_{01} + g_{02}}{2} = \frac{g_1 + g_2}{2}. \quad (5)$$

Expression (5) takes into account that  $g_{01} + g_{02} = 0$ .

For other points (symmetric), we similarly obtain

$$g_{ex} = \frac{g_3 + g_4}{2}. \quad (6)$$

Now let's imagine the ring in question (see Figure 2, *a*) as a combination of two parts. The first part is a cylinder with a center at point  $O$ ; its length is much greater than the cross section of the cylinder, but much less than the length  $2\pi R$  of the ring. For point  $O$ , this part corresponds to the field of the cylinder. The second part is the rest of the ring. For point  $O$ , this part corresponds to the external field.

Then from (5) and (6) we can assume that the intensity of the gravitational field will be equal

$$g = \frac{g_1 + g_2}{2} \quad \text{or} \quad g = \frac{g_3 + g_4}{2}. \quad (7)$$

For points outside the ring, we take  $k = 1 + \delta$ , for points inside the ring we take  $k = 1 - \delta$ .

Then, taking into account expressions (1), (2), we can write

$$g_1 = -\frac{Gm}{\pi R^2} \int_0^\pi \frac{(1 - \delta - \cos \alpha) d\alpha}{\left(1 + (1 - \delta)^2 - 2(1 - \delta) \cos \alpha\right)^{1.5}}, \quad (8)$$

$$g_2 = -\frac{Gm}{\pi R^2} \int_0^\pi \frac{(1 + \delta - \cos \alpha) d\alpha}{\left(1 + (1 + \delta)^2 - 2(1 + \delta) \cos \alpha\right)^{1.5}}. \quad (9)$$

Accordingly, the gravitational field intensity created by the entire ring taking into account expressions (7)–(9):

$$g = -\frac{Gm}{2\pi R^2} \left[ \int_0^\pi \frac{(1 - \delta - \cos \alpha) d\alpha}{\left(1 + (1 - \delta)^2 - 2(1 - \delta) \cos \alpha\right)^{1.5}} + \int_0^\pi \frac{(1 + \delta - \cos \alpha) d\alpha}{\left(1 + (1 + \delta)^2 - 2(1 + \delta) \cos \alpha\right)^{1.5}} \right]. \quad (10)$$

Let us introduce the notation

$$I(\delta) = \int_0^\pi \frac{(1 - \delta - \cos \alpha) d\alpha}{\left(1 + (1 - \delta)^2 - 2(1 - \delta) \cos \alpha\right)^{1.5}} + \int_0^\pi \frac{(1 + \delta - \cos \alpha) d\alpha}{\left(1 + (1 + \delta)^2 - 2(1 + \delta) \cos \alpha\right)^{1.5}},$$

then expression (10) will take the form

$$g = -\frac{Gm}{2\pi R^2} I(\delta) .$$

The values of the  $I(\delta)$  for some values of  $\delta$  are presented in Table 1.

Table 1 – Values of the parameter  $I(\delta)$  for some values of  $\delta$

$\delta$	$I(\delta)$	$\delta$	$I(\delta)$
$10^{-5}$	5,9	$10^{-3}$	6,988
$3 \cdot 10^{-5}$	5,25	$3 \cdot 10^{-3}$	5,888
$10^{-4}$	9,25	$10^{-2}$	4,6855
$3 \cdot 10^{-4}$	8,19	$3 \cdot 10^{-2}$	3,5903

For estimation, we take the parameter  $I(\delta) = 5$ . Then the average value of the gravitational field strength at points belonging to the ring:

$$g = -\frac{5Gm}{2\pi R^2} . \quad (11)$$

**Discussion and Conclusion.** The average value of the gravitational field strength at points belonging to the ring (11) is proportional to the mass of the ring. It is also inversely proportional to the square of the radius of the ring. The structure of this expression is similar to the field strength of a ball or point mass [8–10].

The found average value of the gravitational field strength sets the magnitude of the force acting on the ring elementary mass  $dm$ . This force is directed towards the center of the ring and is equal to

$$dF \approx -\frac{5Gm}{2\pi R^2} dm .$$

The elemental mass  $dm$  can be expressed in terms of the ring length element  $dl$ :

$$dm = \frac{m}{2\pi R} dl .$$

From here we get

$$dF \approx -\frac{5Gm^2}{4\pi^2 R^3} dl .$$

In this expression the force is proportional to the square of the ring mass (without taking into account other gravitational fields). If there is a planet in the center of the ring, for example Saturn, then the force acting on the elementary section of the ring  $dl$  will be proportional to the product  $Mm$  ( $M$  is the mass of the

planet). Since the mass  $M$  is much greater than the mass  $m$ , then the force influence of the planet will be dominant.

## REFERENCES

- 1 **Laplace, P. S.** Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne / P. S. Laplace // Mémoires de l'Académie Royale des Sciences. – 1787. – P. 201–234.
- 2 **Maxwell, J. C.** On the stability of the motion of Saturn's Rings / J. C. Maxwell // The Scientific Papers of James Clerk Maxwell. – Cambridge : Cambridge University Press, 2011. – Vol. 1. – P. 288–376.
- 3 **Ковалевская, С. В.** Дополнения и замечания к исследованию Лапласа о форме кольца Сатурна / С. В. Ковалевская // Научные работы. – М. : АН СССР, 1948. – С. 139–152.
- 4 **Бобров, М. С.** Кольца Сатурна / М. С. Бобров. – М. : Наука, 1970. – 123 с.
- 5 **Akhramenko, N. A.** Force interaction of a massive ring and a material point located inside the ring. / N. A. Akhramenko // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 5–10.
- 6 **Akhramenko, N. A.** Movement of a point material object in a massive ring plane / N. A. Akhramenko // Механика. Исследования и инновации. – 2023. – Вып. 16. – С. 17–21.
- 7 **Arribas, M.** Bifurcations and equilibria in the extended  $N$ -body ring problem / M. Arribas, A. Elipe // Mechanics Research Communications. – 2004. – Vol. 31, is. 1. – P. 1–8.
- 8 **Сивухин, Д. В.** Общий курс физики. В 5 т. Т. 1. Механика / Д. В. Сивухин. – М. : Физматлит, 2005. – 560 с.
- 9 **Яворский, Б. М.** Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – М. : Наука, 1990. – 624 с.
- 10 **Serway, R. A.** Physics for Scientists and Engineers (with PhysicsNOW and info Trac) / R. A. Serway, J. W. Jewett. – 6<sup>th</sup> ed. – Belmont : Thomson-Brooks/Cole, 2004. – 1296 p.

*H. A. АХРАМЕНКО*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ КОЛЬЦЕОБРАЗНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАССЫ

Рассматривается случай кольцеобразного распределения массы. Исследуется способ оценки величины напряженности гравитационного поля в точках, локализованных на самом кольце, с учетом конечности объемной плотности массы. Получено выражение, позволяющее провести оценку величины напряженности гравитационного поля в точках, локализованных на самом кольце.

**Ключевые слова:** напряженность гравитационного поля, радиус кольца, масса кольца.

Получено 29.10.2024

УДК 691-419:534.1

Д. А. БУДНИКОВА

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЯТИСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ**

Рассматривается задача о собственных колебаниях симметричного по толщине пятислойного стержня. Несущие слои предполагаются тонкими, высокопрочными. В соответствии с гипотезой Бернулли после приложения нагрузки их поперечные сечения остаются плоскими и перпендикулярными деформированной осевой линии. Для относительно толстых легких заполнителей выполняется гипотеза Тимошенко. Дифференциальные уравнения колебаний получены с использованием вариационного принципа Даламбера – Лагранжа. Выполнен численный анализ полученного решения системы дифференциальных уравнений движения.

**Ключевые слова:** стержень осесимметричный пятислойный, два слоя заполнителя, собственные колебания.

**Введение.** Слоистые конструкции широко используются на практике благодаря тому, что они позволяют выдерживать достаточно высокие нагрузки при незначительной массе. В настоящее время разрабатываются такие слоистые элементы, которые помимо обеспечения необходимой жесткости позволяют обеспечить выполнение иных функций, например, защиту от шума и вибраций. Поэтому имеется значительное число публикаций, посвященных исследованиям статики и динамики таких элементов.

Подходы к разработке методик постановки и решения краевых задач для тонкостенных элементов конструкций, учитывающие воздействие внешней среды, предложены в монографиях [1–4]. Кинематические гипотезы, как правило, учитывают относительный сдвиг и работу касательных напряжений в заполнителе, высокую жесткость при незначительной толщине несущих слоев.

В статье [5] исследуется деформирование трехслойной круговой пластины со сжимаемым заполнителем, причем сжимаемость описывает функция, линейная по толщине слоя. В работе [6] рассмотрен изгиб сэндвич-пластины, связанной с основанием Пастернака, модель которого учитывает сдвиговые свойства материала основания. В публикации [7] исследуется влияние температуры на напряженно-деформированное состояние трехслойного стержня с жестким заполнителем. Деформации изгиба симметричных по толщине круговых пятислойных пластин с двумя заполнителями, находящихся под действием статических нагрузок, анализируются в статьях [8, 9].

Работы [10–13] посвящены исследованию динамического поведения трехслойных и пятислойных пластин. Геометрические гипотезы соответствуют ломаной линии, заполнители приняты легкими, т. е. для них не учитывается

работа касательных напряжений. Аналитические решения, описывающие собственные и вынужденные колебания, представлены в виде разложения искомых перемещений в ряд по системам собственных функций. Динамическое нагружение пятислойных стержней ранее не рассматривалось.

Целью представленной работы стало определение условий, при которых существуют частоты собственных колебаний симметричного по толщине пятислойного стержня.

**Постановка задачи.** Рассматривается стержень, включающий три несущих слоя и два слоя заполнителя (рисунок 1). Для тонких несущих слоев 1, 2, 4 справедливы гипотезы Бернулли, в соответствии с которыми поперечные сечения при действии нагрузки остаются плоскими и перпендикулярными деформированной осевой линии. Заполнители 3, 5 приняты сравнительно толстыми. Для них выполняется гипотеза Тимошенко, в соответствии с которой после приложения нагрузки поперечные сечения остаются плоскими, несжимаемыми по толщине, но поворачиваются на дополнительный угол  $\psi(x, t)$ . Декартова система координат связана со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя. При выводе дифференциальных уравнений рассмотрим общий случай колебаний, при котором поверхностная нагрузка  $q(x, t)$  распределена по верхней плоскости стержня. Искомыми функциями являются прогиб стержня  $w(x, t)$  и относительный сдвиг  $\psi(x, t)$ .

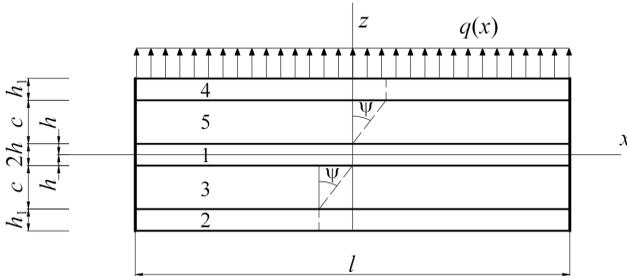


Рисунок 1 – Нумерация слоев и геометрия пятислойного стержня

Исходя из принятых гипотез продольные перемещения  $u_x^{(k)}$  ( $k = 1, \dots, 5$  – номер слоя) связаны с искомыми функциями  $w(x, t)$ ,  $\psi(x, t)$  соотношениями

$$\begin{aligned}
 u_x^{(4)} &= -zw_{,x} + c\psi, & (c + h \leq z \leq c + h + h_1); \\
 u_x^{(5)} &= -zw_{,x} + (z - h)\psi, & (h \leq z \leq c + h); \\
 u_x^{(1)} &= -zw_{,x}, & (-h \leq z \leq h); \\
 u_x^{(3)} &= -zw_{,x} + (z + h)\psi, & (-h - c \leq z \leq -h); \\
 u_x^{(2)} &= -zw_{,x} - c\psi, & (-h - h_1 - c \leq z \leq -h - c),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $z$  – координата рассматриваемой точки поперечного сечения;  $c\psi$  – смещения внешних несущих слоев вследствие сдвига в заполнителях; запятая в нижнем индексе соответствует производной по координате  $x$ .

Формулы для продольных деформаций получаются из соотношений Коши [1] с учетом геометрии слоев стержня (1):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(4)} &= -zw_{,xx} + c\psi_{,x}; & \varepsilon_{xz}^{(4)} &= 0; & \varepsilon_x^{(5)} &= -zw_{,xx} + (z-h)\psi_{,x}; & \varepsilon_{xz}^{(5)} &= \frac{\psi}{2}; \\ \varepsilon_x^{(1)} &= -zw_{,xx}; & \varepsilon_{xz}^{(1)} &= 0; & \varepsilon_x^{(3)} &= -zw_{,xx} + (z+h)\psi_{,x}; & \varepsilon_{xz}^{(3)} &= \frac{\psi}{2}; \\ \varepsilon_x^{(2)} &= -zw_{,xx} - c\psi_{,x}; & \varepsilon_{xz}^{(2)} &= 0.\end{aligned}\quad (2)$$

В свою очередь, напряжения в слоях определяются с помощью закона Гука:

$$s_{xx}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{xx}^{(k)}; \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}; \quad s_{xz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}; \quad s_{xz}^{(5)} = 2G_5 \varepsilon_{xz}^{(5)}, \quad (3)$$

где  $s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \sigma^{(k)} \delta_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(k)} = \varepsilon_{ij}^{(k)} - \varepsilon^{(k)} \delta_{ij}$  – девиаторы тензоров напряжений и деформаций;  $\sigma^{(k)} = \frac{1}{3} \sigma_{xx}^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3} \varepsilon_{xx}^{(k)}$  – шаровые части соответствующих тензоров;  $\delta_{ij}$  – символы Кронекера;  $G_k$ ,  $K_k$  – модули упругости материалов слоев (сдвига и объемного деформирования).

Для получения системы дифференциальных уравнений, описывающей поперечные колебания рассматриваемого стержня, используем вариационный принцип Даламбера – Лагранжа:

$$\delta A = \delta W, \quad (4)$$

где  $\delta A$  – виртуальная работа внешней нагрузки, включая силы инерции;  $\delta W$  – вариация работы внутренних усилий:

$$\delta A = \iint_S (q \delta w - M_0 \ddot{w}) dS = \int_0^l (b_0 q \delta w - M_0 \ddot{w}) dx; \quad \delta W = \iint_S \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} dz dS. \quad (5)$$

$M_0 \ddot{w}$  – силы инерции в поперечном направлении, точки вверху обозначают производную по времени,  $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 + \rho_4 h_4 + \rho_5 h_5) b_0 l$ ,  $\rho_k$  – плотность материала,  $b_0$  – ширина поперечного сечения;  $\delta$  – оператор вариации.

Заметим, что работа касательных напряжений в легком заполнителе в (5) не учитывается, в связи с их малостью.

Подставим работы (5) в уравнение (4) с учетом виртуальных деформаций, следующих из (2). Выполнение уравнения (4) возможно только при равенстве нулю коэффициентов при вариациях искомых функций. Из этого условия получаем уравнения движения:

$$\begin{aligned}H_{,x} &= 0; \\ M_{,xx} - M_0 \ddot{w} &= -b_0 q.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь  $H_x, M_{,xx}$  – обобщенные внутренние силы и моменты:

$$M_x = \sum_{k=1}^5 M_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz; \quad N_x = \sum_{k=1}^5 N_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz;$$

$$H = (M_x^{(3)} + M_x^{(5)}) + c(N_x^{(4)} - N_x^{(2)}) + h(N_x^{(3)} - N_x^{(5)}).$$

Чтобы получить уравнения колебаний в искомым функциях, выразим обобщенные внутренние усилия через  $w(x, t)$ ,  $\psi(x, t)$ , используя закон Гука (3):

$$M_x = - \left[ \frac{2}{3} K_2^+ c (c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \frac{2}{3} K_3^+ h_1 (h_1^2 + 3(h_1 + h + c)(h + c)) \right] w_{,xx} -$$

$$- \left[ K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c) + \frac{1}{3} K_2^+ c^2 (3h + 2c) \right] \psi_{,x};$$

$$H = \left[ -\frac{1}{3} K_2^+ c^2 (2c + 3h) + K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c) \right] w_{,xx} + \left[ c^2 \left( \frac{2}{3} K_2^+ c + 2K_3^+ h_1 \right) \right] \psi_{,x}. \quad (7)$$

Подставив выражения (7) в уравнения (6), получим искомые уравнения движения в перемещениях:

$$a_1 \psi_{,xx} - a_2 w_{,xxx} = 0,$$

$$a_2 \psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} - M_0 \ddot{w} = -q, \quad (8)$$

где  $a_1 = \left[ c^2 \left( \frac{2}{3} K_2^+ c + 2K_3^+ h_1 \right) \right]$ ,  $a_2 = \left[ \frac{1}{3} K_2^+ c^2 (2c + 3h) + K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c) \right]$ ,

$$a_4 = \left[ \frac{2}{3} K_2^+ c (c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \frac{2}{3} K_3^+ h_1 (h_1^2 + 3h^2 + 3c^2 + 3h_1 h + 3h_1 c + 6ch) \right],$$

$$K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+.$$

В начальный момент времени прогиб стержня и его производная по времени считаются заданными. В качестве граничных условий принимаем, что торцы стержня жестко заделаны, то есть

$$\text{при } x = \pm \frac{l}{2} \quad \psi(x, t) = w(x, t) = w_{,x}(x, t) = 0. \quad (9)$$

**Собственные колебания стержня.** Для рассмотрения свободных колебаний положим в (8)  $q = 0$ . Отсюда получим

$$\psi = \frac{a_2}{a_1} w_{,x} + C_1 x + C_2;$$

$$w_{,xxxx} - \frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \ddot{w} = 0. \quad (10)$$

Прогиб стержня принимаем в виде произведения неизвестной координатной функции и гармонической функции времени:

$$w = v(x)[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)], \quad (11)$$

где  $A, B$  – постоянные интегрирования;  $\omega$  – частота собственных колебаний.

Соответственно ускорение

$$\ddot{w} = -v(x)\omega^2[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)], \quad (12)$$

Дифференциальное уравнение для определения координатной функции  $v(x)$  получим, подставив (11), (12) во второе уравнение системы (10) и приравняв коэффициенты перед функциями времени:

$$v_{,xxxx} - \beta^4 v = 0, \quad (13)$$

где

$$\beta^4 = \frac{a_1 M_0 \omega^2}{a_4 a_1 - a_2^2}. \quad (14)$$

Вид решения уравнения (13) определяется знаком параметра  $\beta^4$ , поэтому далее исследуем его при различных материалах и толщинах слоев.

**Численные результаты.** В числителе формулы (14) положительное значение, поэтому знак  $\beta^4$  определяется знаком функции  $f = a_4 a_1 - a_2^2$ . Исследуем ее зависимость от материалов и толщин слоев рассматриваемого пяти-слойного стержня. При расчетах приняты следующие упругие характеристики материалов слоев: Д16Т –  $K = 92,14$  ГПа,  $G = 26,71$  ГПа, титановый сплав –  $K = 104$  ГПа,  $G = 41$  ГПа, фторопласт –  $K = 4700$  МПа,  $G = 90$  МПа. Приведенные далее результаты вычислений соответствуют значениям толщин слоев  $c = 0,2l$  (рисунки 2 и 3) и  $h = h_1 = 0,02l$  (рисунки 3 и 4).

На рисунках 2 и 3 приведены кривые, описывающие функцию  $f$  в зависимости от толщин  $h_1$  внешних и  $h$  – срединного несущих слоев для стержней с заполнителями из фторопласта-4. Линия 1 соответствует несущим слоям из дюралюминия Д16Т, линия 2 – из титана. Расчеты показали, что значения исследуемой функции оказались положительными на всём интервале изменения аргументов. При замене материала несущих слоев с дюралюминия на титановый сплав кривые на рисунках 2, 3 смещаются вверх.

Рисунки 4, 5 отражают зависимость исследуемой функции от материалов заполнителя  $c$ : 1 – фторопласт; 2 – пенопласт; 3 – пенополиуретан и несущих слоев из дюралюминия – и титанового сплава. Кривые 2, 3 практически совпадают, при этом кривая 2 расположена несколько выше. Для всех материалов  $f(c) > 0$ , причем в вырожденном случае при отсутствии заполнителей  $f(0) = 0$ , однако этот случай уже не относится к исследуемой пятислойной конструкции, так как соответствует однородному стержню.

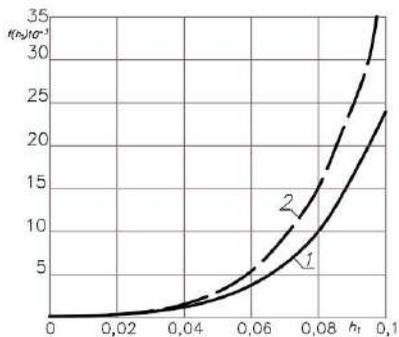


Рисунок 2 – Зависимость  $f(h_1)$  при различных материалах внешних несущих слоев ( $h = 0,02l$ )

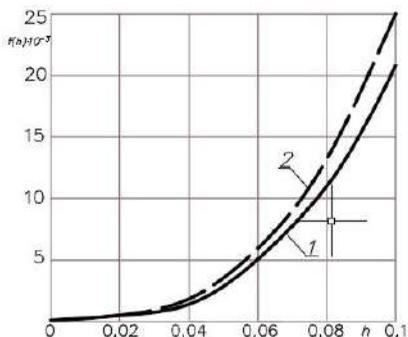


Рисунок 3 – Зависимость  $f(h)$  при различных материалах внешних несущих слоев ( $h_1 = 0,02l$ )

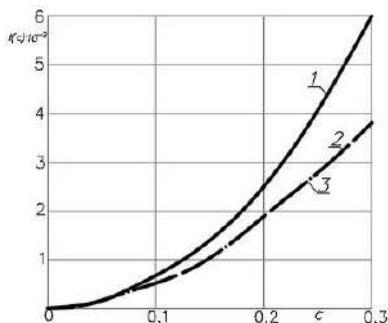


Рисунок 4 – Зависимость  $f$  от  $c$  при различных материалах заполнителя (несущие слои из дюралюминия)

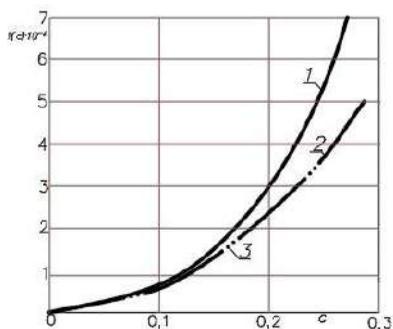


Рисунок 5 – Зависимость  $f$  от  $c$  при различных материалах заполнителя (несущие слои из титана)

**Выводы.** В работе получены уравнения движения пятислойного симметричного по толщине стержня и определены условия, при которых происходят его свободные колебания. Выполнен численный анализ для конкретного набора исходных данных, который продемонстрировал, что колебания возможны при всех рассмотренных значениях геометрических размеров и характеристик материалов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.
- 2 Zhuravkov, M. A. Mechanics of solid deformable body / M. A. Zhuravkov, Y. Lyu, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.

3 **Абдусаттаров, А.** Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : Ideal Press, 2023. – 381 с.

4 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов [и др.]. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.

5 **Захарчук, Ю. В.** Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации.* – 2019. – Вып. 12. – С. 66–75.

6 **Козел, А. Г.** Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич пластины / А. Г. Козел // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии.* – 2018. – Т. 332, № 6. – С. 25–34.

7 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // *Механика машин, механизмов и материалов.* – 2013. – Т. 22, № 1. – С. 31–35.

8 **Салицкий, В. С.** Изгиб круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // *Теоретическая и прикладная механика.* – 2023. – Вып. 38. – С. 234–239.

9 **Салицкий, В. С.** Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

10 **Tarлакoвskii, D. V.** Two-Dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells / D. V. Tarлакoвskii, G. V. Fedotenkov // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability.* – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.

11 **Leonenko, D. V.** Vibrations of cylindrical sandwich shells with elastic core under local loads / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // *International Applied Mechanics.* – 2016. – Vol. 52, no. 4. – P. 359–367.

12 **Лачугина, Е. А.** Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями / Е. А. Лачугина // *Механика. Исследования и инновации.* – 2023. – Вып. 16. – С. 111–116.

13 **Лачугина, Е. А.** Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е. А. Лачугина // *Механика. Исследования и инновации.* – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.

*D. A. BUDNIKOVA*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **ANALYSIS OF A FIVE-LAYER ROD NATURAL OSCILLATIONS**

The problem of natural oscillations of a symmetrical in thickness five-layer rod is considered. The load-bearing layers are assumed to be thin and highly durable. According to the Bernoulli hypothesis, after applying the load, their cross-sections remain flat and perpendicular to the deformed axial line. For the relatively thick lightweight fillers, the Timoshenko hypothesis is satisfied. Differential equations of oscillations are obtained using the d'Alembert-Lagrange variational principle. A numerical analysis of the obtained solution of the motion differential equations system is performed.

**Keywords:** axisymmetric five-layer rod, two fillers, natural oscillations.

Получено 07.11.2024

УДК 629.4.015:656.073.22

И. А. ВОРОЖУН<sup>1</sup>, А. В. ВОРОЖУН<sup>1</sup>, М. Г. ГЕГЕДЕШ<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Гомель, Беларусь

## АНАЛИЗ ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБАХ РАЗМЕЩЕНИЯ ДЛИННОМЕРНОГО ГРУЗА НА ПЛАТФОРМАХ

Представлены математические модели механических систем, включающие в себя груз, закрепленный на сцепе двух платформ и на одной платформе с вагонами прикрывтия при торможении поезда. Получены зависимости продольных сил в межвагонных связях от способа крепления длинномерного груза.

**Ключевые слова:** длинномерный груз, железнодорожная платформа, торможение поезда, математическое моделирование, компьютерное моделирование.

Постоянное расширение ассортимента перевозимых грузов требует совершенствования как вагонного парка, так и способов размещения и крепления грузов на подвижном составе. Значительную часть транспортируемых грузов составляют длинномерные, например, металлопрокат и железобетонные изделия (рисунок 1).



Рисунок 1 – Размещение длинномерных грузов на сцепе вагонов

На каждом виде транспорта существует свое понятие длинномерного или крупногабаритного груза. Так, при перевозках железнодорожным транспортом под ним понимается груз, длина которого превышает длину вагона более чем на 0,4 м с каждой торцевой стороны [1]. Груз при транспортировке размещают на одном вагоне, сцепе вагонов или в сочлененных вагонах. Наибольшие динамические нагрузки возникают при перевозке длинномерных грузов на сцепе вагонов вследствие провисания между опорными устройствами и возможности смещения осей вагонов относительно друг друга при движении по криволинейному в плане или профиле пути.

Для удержания таких грузов от их относительного перемещения в процессе перевозки используют специализированные устройства: фитинговые

упоры [2, 3]; упругие, гравитационные и комбинированные турникетно-крепежные устройства (ТКУ) [4, 5], а также иные конструкции, которые необходимо разрабатывать и испытывать на прочность для каждого отдельного вида грузов. Их применение на современных вагонах позволяет увеличить массу перевозимого груза и его длину, а также предотвратить повреждаемость грузов и вагонов в процессе перевозки.

Для установления сил, действующих на груз, требуется исследование динамики механических систем, включающих сцепы вагонов с грузом при их взаимодействии с иными единицами подвижного состава (локомотивами, вагонами). В работе [6] в среде программы MSC ADAMS создана 3D-модель транспортировки рельсов на сцепе из двух платформ. Проанализирована кинематика проезда стрелочного перевода и движения в кривой. Авторы отмечают, что отсутствие в рельсах отверстий для болтовых соединений обуславливает сложность их увязки в ярусы. Предложено на пол каждой платформы и между ярусами рельсов укладывать две металлические и две деревянные поперечные прокладки, нижний ярус отдельно крепить к платформе тросами, а остальные ярусы соединять тросами как между собой, так и с нижним ярусом.

Методы математического и компьютерного моделирования динамической нагруженности штабеля груза длиной 22 м, расположенного на сцепе из двух вагонов-платформ модели 13-4012, рассмотрены в статье [7]. Для анализа продольно-изгибных колебаний груза использована модель балки на двух упругих опорах. Получены зависимости основных динамических характеристик от скорости движения.

Транспортировка сверхдлинного груза на платформе модели NX70A изучается в публикации [8]. Построена динамическая модель платформы с грузом, а также выполнено моделирование с помощью SIMULIA Simpack с целью поиска наиболее неблагоприятных режимов движения. В результате расчетов определен допустимый вес загрузки на основе сравнения давления от грузов с различными длинами с допускаемым давлением.

В статьях [9, 10] анализируются динамические процессы, связанные с транспортировкой стратегических грузов (военной техники, сельскохозяйственных машин и др.) в специально разработанном съемном модуле на вагон-платформе модели 13-7024. Применение такого модуля позволяет расширить номенклатуру перевозимых на платформах грузов без их усовершенствования.

Авторами [11] для снижения материалоемкости конструкции рамы сочлененной платформы предложено использовать круглые трубы. Для определения их оптимальных размеров был проведен прочностной расчет несущей конструкции опытного образца вагона-платформы модели 13-401.

Целью представленной работы стало определение продольных сил в межвагонных связях поезда при транспортировке длинномерных грузов, размещенных на сцепе вагонов.

Рассматриваются случаи торможения подвижного состава при способе погрузки длинномерных грузов на одну платформу с прикрытием или на сцеп из двух платформ. От продольного смещения груз удерживается силами трения и силами упругости устройства крепления.

Состав поезда представляет механическую систему со многими степенями свободы. В качестве расчетной схемы при решении рассматриваемой задачи целесообразно использование упрощенной одномерной модели, отражающей основные свойства системы. Она включает движущиеся по прямому горизонтальному участку пути локомотив и вагоны, в качестве которых выступают платформы, загруженные длинномерным грузом.

При разработке математических моделей, позволяющих оценить силы, действующие в межвагонных связях, введены следующие допущения:

- платформы с тележками и длинномерный груз считаются абсолютно твердыми телами;
- движение рассматривается на прямом горизонтальном участке пути;
- зазоры в межвагонных связях отсутствуют;
- упругие элементы устройства крепления груза на платформе имеют линейные характеристики;
- массы платформ и длинномерного груза сосредоточены в их центрах масс;
- центры масс всех тел перемещаются по параллельным прямым;
- вертикальными, а также угловыми перемещениями платформ и длинномерного груза пренебрегаем;
- начало отсчёта каждой из координат, определяющих положение локомотива, платформ и груза, соответствует моменту начала торможения поезда.

На рисунке 2 приведена расчетная схема поезда при размещении длинномерного груза на платформах с прикрытием. На ней обозначены:  $m_{\Gamma}$ ,  $m_{pi}$ ,  $m_{rj}$  – массы соответственно локомотива,  $i$ -й платформы и  $j$ -го длинномерного груза ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, k$ );  $x_{\Gamma}$ ,  $x_{pi}$ ,  $x_{rj}$  – координаты соответственно локомотива,  $i$ -й платформы и  $j$ -го длинномерного груза.

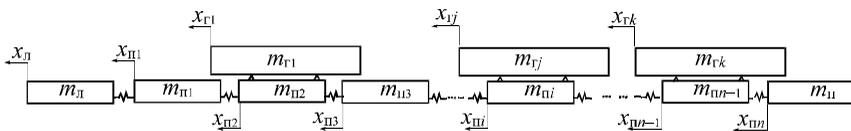


Рисунок 2 – Расчетная схема поезда при размещении длинномерного груза на одной платформе с прикрытием

С применением принципа Даламбера составлена система дифференциальных уравнений, отражающих движение локомотива,  $n$  вагонов-платформ и  $k$  грузов для случая погрузки длинномерных грузов на одну платформу с прикрытием (см. рисунок 2):

$$\left\{ \begin{array}{l}
m_{\text{л}} \ddot{x}_{\text{л}} = R_{\Pi_1} - F_{\text{тл}} - F_{\text{сл}} ; \\
m_{\Pi_1} \ddot{x}_{\Pi_1} = -R_{\Pi_1} - F_{\text{с}_1} + R_{\Pi_2} - F_{\text{т}_1} ; \\
m_{\Pi_2} \ddot{x}_{\Pi_2} = -R_{\Pi_2} - F_{\text{с}_2} + R_{\Pi_3} - F_{\text{т}_2} + F_{\text{тр}_1} + F_{\text{пр}_1} ; \\
m_{\Gamma_1} \ddot{x}_{\Gamma_1} = -F_{\text{тр}_1} - F_{\text{пр}_1} ; \\
\dots \\
m_{\Pi_i} \ddot{x}_{\Pi_i} = -R_{\Pi_i} - F_{\text{с}_i} + R_{\Pi_{i+1}} - F_{\text{т}_i} + F_{\text{тр}_j} + F_{\text{пр}_j} ; \\
\dots \\
m_{\Pi_{n-2}} \ddot{x}_{\Pi_{n-2}} = -R_{\Pi_{n-2}} - F_{\text{с}_{n-2}} + R_{\Pi_{n-2}} - F_{\text{т}_{n-2}} ; \\
m_{\Pi_{n-1}} \ddot{x}_{\Pi_{n-1}} = -R_{\Pi_{n-1}} - F_{\text{с}_{n-1}} + R_{\Pi_n} - F_{\text{т}_{n-1}} + F_{\text{тр}_k} + F_{\text{пр}_k} ; \\
m_{\Gamma_k} \ddot{x}_{\Gamma_k} = -F_{\text{тр}_k} - F_{\text{пр}_k} ; \\
m_{\Pi_n} \ddot{x}_{\Pi_n} = -R_{\Pi_n} - F_{\text{с}_n} - F_{\text{т}_n} ;
\end{array} \right. \quad (1)$$

где  $\ddot{x}_{\text{л}}$ ,  $\ddot{x}_{\Pi_i}$ ,  $\ddot{x}_{\Gamma_j}$  – продольные ускорения локомотива,  $i$ -й платформы и  $j$ -го длинномерного груза;  $F_{\text{тл}}$ ,  $F_{\text{т}_i}$  – силы торможения соответственно локомотива и  $i$ -й платформы;  $F_{\text{сл}}$ ,  $F_{\text{с}_i}$  – силы сопротивления движению соответственно локомотива и  $i$ -й платформы;  $R_{\Pi_i}$  – силы в межвагонных связях;  $F_{\text{пр}_j}$  – сила упругости в элементах продольного крепления  $j$ -го груза к платформе;  $F_{\text{тр}_j}$  – сила трения между поверхностями  $j$ -го груза и платформы.

Силы упругости в элементах продольного крепления  $j$ -го груза определяются выражением

$$F_{\text{пр}_j} = c_1 \Delta l_{\Gamma_j},$$

где  $c_1$  – коэффициент жесткости упругих элементов крепления груза;  $\Delta l_{\Gamma_j}$  – деформация упругих элементов крепления  $j$ -го груза.

Принято, что сила трения между поверхностями груза и платформы приложена в продольной вертикальной плоскости и определяется выражением

$$F_{\text{тр}_j} = f N,$$

где  $f$  – коэффициент трения между поверхностями груза и платформы;  $N$  – сила нормального давления груза.

Силы в межвагонных связях с пружинно-фрикционными поглощающими аппаратами для случаев перемещений вагонов, не превышающих величину хода поглощающих аппаратов, определяются выражениями вида [6]

$$R_{\Pi_i} = c(x_{\Pi_i} - x_{\Pi_{i-1}})(1 + \mu \cdot \text{sgn}((x_{\Pi_i} - x_{\Pi_{i-1}})(\dot{x}_{\Pi_i} - \dot{x}_{\Pi_{i-1}}))),$$

где  $c$  – коэффициент жесткости упругих элементов межвагонных связей;  $\mu$  – коэффициент относительного трения в межвагонных связях.

Выполнена оценка влияния загруженности вагонов на величину продольных сил в межвагонных связях. Численное интегрирование дифференциальных уравнений в среде MathCAD [13] в рассмотренных в статье случаях проводилось для начальной скорости торможения поезда 100 км/ч при следующих исходных данных:  $m_n = 129000$  кг;  $c = 11$  МН/м;  $\mu = 0,55$ ;  $f = 0,6$ . Результаты расчетов для двух составов: из 11 вагонов массой по 76 т и с чередованием порожних массой 22 т и груженых массой 76 т платформ представлены на рисунке 3. Значения сил на графиках здесь и далее соответствуют автосцепкам, расположенным в передней части соответствующего вагона-платформы.

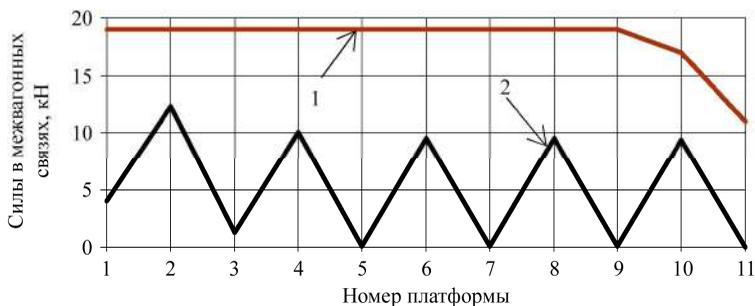


Рисунок 3 – Продольные силы в межвагонных соединениях для случаев:  
1 – всех груженых вагонов; 2 – чередования порожних и груженых вагонов

Анализ полученных результатов показывает, что при одинаковой загруженности вагонов значения наибольших сжимающих сил в межвагонных связях практически не меняются по длине состава. Уменьшение этих сил наблюдается лишь для двух конечных вагонов. В случае чередования порожних (1, 3, 5, 7, 9, 11) и груженых (2, 4, 6, 8, 10) вагонов по длине состава наблюдается незначительное уменьшение сжимающих сил в межвагонных связях, идущих от порожних вагонов к следующим за ними груженым, начиная уже с третьего вагона. При этом сжимающие силы в автосцепках, ведущих от груженых вагонов к порожним, практически отсутствуют.

Для оценки влияния на значения продольных сил в межвагонных связях при торможении поезда сил трения между поверхностями груза и платформы, а также сил упругости в устройствах крепления груза осуществлялось путем варьирования соответственно коэффициентов трения  $f_1$  и жесткости  $c_1$ . Результаты расчетов для состава из 11 платформ массой по 22 т и груза массой 54 т представлены на рисунке 4. Из него следует, что при размещении длиномерного груза на одном вагоне с прикрытием уменьшение жесткости устройства крепления груза к платформе приводит к увеличению продольных сжимающих сил в межвагонных связях. При этом наблюдается интенсивное нарастание сжимающих сил в автосцепках, ведущих от груженых вагонов к порожним.

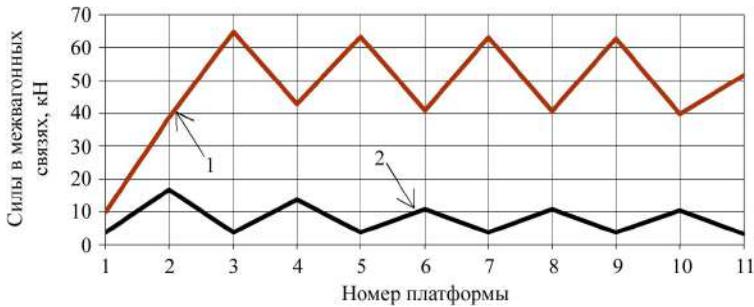


Рисунок 4 – Продольные силы в межвагонных соединениях для случая упругого крепления груза на платформе с прикрытием при  $c_1 = 100$  МН/м (1);  $c_1 = 1000$  МН/м (2)

Для анализа транспортировки длинномерного груза на сцепе из двух платформ использована расчетная схема, приведенная на рисунке 5. В ней груз удерживается от продольного смещения силами трения между поверхностями груза и платформ, а также силами упругости каждого устройства крепления.

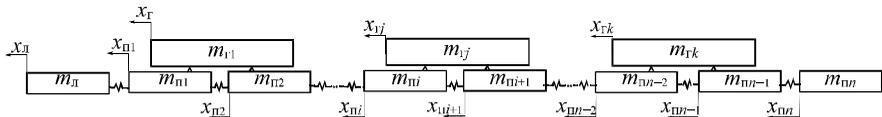


Рисунок 5 – Схема транспортировки длинномерного груза на сцепе из двух платформ

Движение единиц железнодорожного подвижного состава и груза в этом случае описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}
 m_{\text{л}} \ddot{x}_{\text{л}} = R_{\text{п}_1} - F_{\text{тл}} - F_{\text{сл}}; \\
 m_{\text{п}_1} \ddot{x}_{\text{п}_1} = -R_{\text{п}_1} - F_{\text{c}_1} + R_{\text{п}_2} - F_{\text{т}_1} + F_{\text{тп}_1} + F_{\text{пп}_1}; \\
 m_{\text{п}_2} \ddot{x}_{\text{п}_2} = -R_{\text{п}_2} - F_{\text{c}_2} + R_{\text{п}_3} - F_{\text{т}_2} + F_{\text{тп}_2} + F_{\text{пп}_2}; \\
 m_{\text{т}_1} \ddot{x}_{\text{т}_1} = -F_{\text{тп}_1} - F_{\text{пп}_1} - F_{\text{тп}_2} - F_{\text{пп}_2}; \\
 \dots \\
 m_{\text{п}_i} \ddot{x}_{\text{п}_i} = -R_{\text{п}_i} - F_{\text{c}_i} + R_{\text{п}_{i+1}} - F_{\text{т}_i} + F_{\text{тп}_i} + F_{\text{пп}_i}; \\
 \dots \\
 m_{\text{п}_{n-2}} \ddot{x}_{\text{п}_{n-2}} = -R_{\text{п}_{n-2}} - F_{\text{c}_{n-2}} + R_{\text{п}_{n-1}} - F_{\text{т}_{n-2}} + F_{\text{тп}_{k-1}} + F_{\text{пп}_{k-1}}; \\
 m_{\text{п}_{n-1}} \ddot{x}_{\text{п}_{n-1}} = -R_{\text{п}_{n-1}} - F_{\text{c}_{n-1}} + R_{\text{п}_n} - F_{\text{т}_{n-1}} + F_{\text{тп}_k} + F_{\text{пп}_k}; \\
 m_{\text{т}_k} \ddot{x}_{\text{т}_k} = -F_{\text{тп}_{k-1}} - F_{\text{пп}_{k-1}} - F_{\text{тп}_k} - F_{\text{пп}_k}; \\
 m_{\text{п}_n} \ddot{x}_{\text{п}_n} = -R_{\text{п}_n} - F_{\text{c}_n} - F_{\text{т}_n}.
 \end{cases} \quad (2)$$

Выполнена оценка влияния жесткости устройства крепления груза и наличия дополнительной платформы прикрытия на продольные силы в междвагонных связях. В случае, представленном на рисунке 6, *а*, рассмотрен состав из 11 вагонов, в котором на первых сцепках первых десяти платформ размещены пять грузов массой 54 т каждый, а последняя 11-я платформа порожняя. Масса каждой из платформ принята равной 22 т. Расчеты показали, что при коэффициенте жесткости  $c_1 = 1000$  МН/м значения продольных сжимающих сил в междвагонных связях не превышают 5 кН. Уменьшение значения коэффициента жесткости до  $c_1 = 100$  МН/м сопровождается увеличением до 17 кН сил в связях локомотива с первой платформой и 11-й порожней платформы.

Поскольку при креплении длинномерного груза на сцепе из двух платформ отпадает необходимость в платформе прикрытия, аналогичные расчеты также выполнены для состава из 10 платформ (рисунок 6, *б*), которые показали, что отсутствие 11-й порожней платформы сопровождается увеличением сжимающих сил в междвагонных связях головных платформ каждого сцепа.

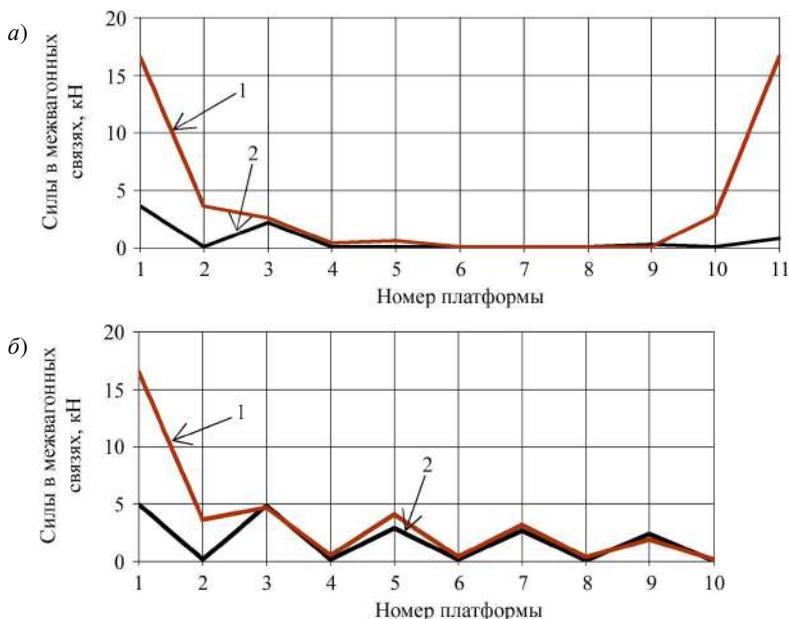


Рисунок 6 – Распределение сил в междвагонных соединениях составов с 11-й платформой прикрытия (*а*) и без нее (*б*) для случаев  $c_1 = 100$  МН/м (1) и  $c_1 = 1000$  МН/м (2)

Также рассмотрен вариант упругого крепления длинномерного груза на первой платформе при свободном опирании на вторую платформу сцепа.

Из графиков, представленных на рисунке 7, следует, что уменьшение коэффициента жесткости  $c_1$  сопровождается значительным увеличением сил в межвагонных связях. При упругом креплении длиномерного груза только на одной из платформ сцепа силы в межвагонных связях оказываются в 3–10 раз большими, чем в случае упругого крепления на обеих платформах сцепа.

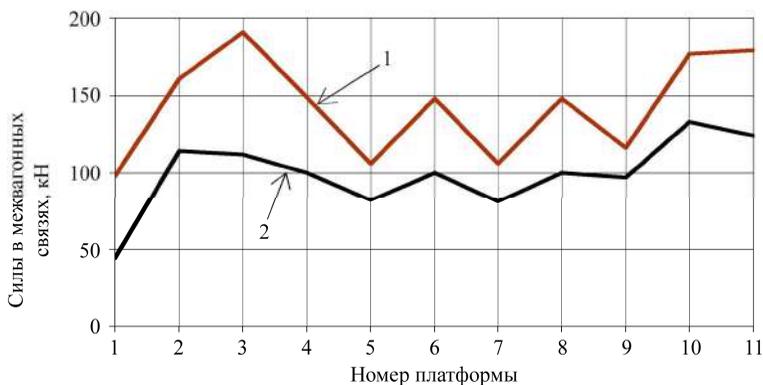


Рисунок 7 – Распределение продольных сил в межвагонных соединениях состава из 11 вагонов в случае упругого крепления груза только на передней платформе сцепа для случаев  $c_1 = 100$  МН/м (1) и  $c_1 = 1000$  МН/м (2)

**Заключение.** Полученные в ходе исследований результаты свидетельствуют о том, что уменьшение жесткости устройства крепления груза на сцепе платформ приводит к увеличению продольных сжимающих сил в межвагонных связях при торможении поезда. Из рассмотренных схем предпочтителен способ устройства крепления длиномерного груза на сцепе из двух платформ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Технические условия размещения и крепления грузов в вагонах и контейнерах № ЦМ-943 : утв. 27.05.2003 МПС России. – М. : Юртранс, 2003. – 544 с.

2 Васильев, С. М. Совершенствование подвижных турникетно-крепежных устройств с целью установки на современные типы грузовых вагонов / С. М. Васильев, А. А. Железняков, Л. П. Целковикова // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 29–34.

3 Петрачков, С. А. Компьютерное моделирование длиномерных грузов на сцепе из двух платформ / С. А. Петрачков, М. Г. Гегедеш // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2022. – № 2 (45). – С. 117–120.

4 Васильев, С. М. Математическое моделирование динамических воздействий на длиномерные грузы и опорные вагоны / С. М. Васильев // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2006. – № 1–2 (12–13). – С. 30–36.

5 Research of the operation of the turnstile support-fastening device during the transportation of a long-dimensional heavy load / J. Musayev [et al.] // *Vibroengineering Procedia*. – 2023. – Vol. 49. – P. 80–85.

6 **Shimanovsky, A.** Computer modeling of long loads transporting on the two coupled flatcars / A. Shimanovsky, M. Kuzniatsova, S. Petrachkou // *12<sup>th</sup> National Congress on Theoretical and Applied Mechanics : Book of Abstracts*. – Sofia : Institute of Mechanics, 2013. – P. 435–440.

7 **Шатунов, О. В.** Динаміка зчепу вагонів-платформ під час перевезення довгомірного вантажу / О. В. Шатунов, А. О. Швець // *Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту*. – 2020. – № 4 (88). – С.114–131.

8 **Ren, Y.** Study on the overlong cargo's allowable loading weight of NX70A flat wagon / Y. Ren, M. Han, N. Yang // *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference on Machinery, Materials and Information Technology Applications*. – Dordrecht : Atlantis Press, 2015. – P. 1359–1363.

9 Dynamic load modelling within combined transport trains during transportation on a railway ferry / A. Lovska [et al.] // *Applied Sciences*. – 2020. – Vol. 10, is. 16. – Article 5710. – 15 p.

10 Situational adaptation of the model 13-7024 flat car for transporting strategic cargo / A. Lovska [et al.] // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2024. – Vol. 2, no. 7 (128). – P. 38–46.

11 Analysis of the loading on an articulated flat wagon of circular pipes loaded with tank containers / O. Fomin [et al.] // *Applied Sciences*. – 2021. – Vol. 11, is. 12. – Article 5510. – 12 p.

12 **Вершинский, С. В.** Динамика вагонов / С. В. Вершинский, В. Н. Данилов, В. Д. Хусидов. – М. : Транспорт, 1991. – 360 с.

13 **Поршнев, С. В.** Компьютерное моделирование физических систем с использованием пакета MathCAD / С. В. Поршнев. – М. : Горячая Линия – Телеком, 2015. – 320 с.

*I. A. VARAZHUN<sup>1</sup>, A. U. VARAZHUN<sup>1</sup>, M. G. GEGEDESH<sup>1,2</sup>*

*<sup>1</sup>Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

*<sup>2</sup>Gomel State Technical University named after P. O. Sukhoi, Gomel, Belarus*

## **ANALYSIS OF LONGITUDINAL FORCES FOR THE VARIOUS WAYS OF LONG LOADS PLACING ON FLATCARS**

The paper presents mathematical models of mechanical systems that include cargo fastened to the coupling of the two flatcars and to the one flatcar with the covering cars at train braking. The dependences of longitudinal forces in inter-car couplings on the method of long cargo fastening are obtained.

**Keywords:** long cargo, railway flatcar, train braking, mathematical modeling, computer modeling.

Получено 15.10.2024

УДК 533.6.011:004.94

*О. В. ДЕМЬЯНЧУК*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ВАГОНА-ХОППЕРА ПОТОКОМ ВОЗДУХА**

Выполнено компьютерное моделирование обтекания воздушным потоком вагона-хоппера в программном комплексе ANSYS CFX. Получены картины распределения давлений на лобовой и боковой поверхностях вагона. Определены значения коэффициентов аэродинамического сопротивления. Установлено, что изменение угла наклона торцевых стенок не оказывает существенного влияния на аэродинамические характеристики вагона-хоппера.

**Ключевые слова:** конечно-элементное моделирование, аэродинамика, аэродинамический коэффициент.

В существующих условиях эксплуатации железнодорожного подвижного состава требуется определять действующие на него силы, в том числе и аэродинамические, с учетом особенностей конструкции различных типов вагонов. Исследование аэродинамики поездов и вагонов выполняется с использованием различных методов: проведение натурных экспериментов, испытаний в аэродинамической трубе, моделирование на основе технологии вычислительной гидродинамики. Численное моделирование является наиболее перспективным методом, так как позволяет избежать сложностей, возникающих при использовании других методов (высокая стоимость, сложность проведения, необходимость дополнительной обработки результатов исследования).

Существует большое количество исследований, посвященных аэродинамике пассажирских поездов. В работе [1] проанализирована форма носовой части высокоскоростного поезда с целью минимизации коэффициента лобового сопротивления и получено, что оптимальная конструкция при удлинении носовой части и уменьшении угла наклона крыши снижает коэффициент лобового сопротивления на 32,5 % по сравнению с исходной геометрией. В работе [2] установлено, что коэффициент подъемной силы, найденный по результатам моделирования обтекания воздушным потоком пассажирского поезда, соответствует результатам испытаний в аэродинамической трубе, однако коэффициент боковой силы принимает большие значения по сравнению с полученным при испытаниях, что может быть обусловлено использованием упрощенной модели.

В последнее время возникает потребность в исследовании аэродинамики грузовых поездов в связи с повышением их скорости движения и необходимостью повышения энергоэффективности грузовых перевозок (при скорости грузового поезда 120 км/ч его аэродинамическое сопротивление составляет

более 40 % от общей силы лобового сопротивления [3] и соответственно приводит к значительному потреблению энергии).

Авторами [4] исследуется воздействие бокового ветра на грузовой поезд, состоящий из платформ, загруженных контейнерами. По результатам испытаний в аэродинамической трубе установлено, что аэродинамические коэффициенты сильно влияют на устойчивость поезда и надежность крепления самого контейнера.

Оценка аэродинамических характеристик контейнеров, погруженных на платформы представлена в [5, 6]. Распределения давления на передней и задней поверхностях контейнеров при проведении натурных испытаний в условиях слабого ветра получены в работе [5]. Установлено, что результаты хорошо согласуются с картинами распределения, полученными при проведении испытаний в аэродинамической трубе, а также при моделировании. В работе [6] определены коэффициенты аэродинамического сопротивления при различных конфигурациях загрузки открытого подвижного состава, положениях контейнеров и ветровых условиях.

В статье [7] представлена оценка возможностей применения различных подходов к моделированию турбулентности (ELES, SAS, URANS и RANS) для прогнозирования аэродинамики воздушного потока вокруг загруженной контейнером одиночной платформы, а также при ее следовании в составе поезда. Сравнение полученных результатов с данными испытаний в аэродинамической трубе показало, что моделирование позволяет получить необходимые аэродинамические характеристики исследуемых объектов с достаточной степенью точности.

Исследование возможностей снижения аэродинамического сопротивления вагонов-цистерн выполнено в работе [8]. Результаты испытаний, которые проведены в аэродинамической трубе для поезда, состоящего из вагонов-цистерн, показали, что изменение геометрии вагонов (модификация радиуса торцевой поверхности и др.), а также использование дополнительных устройств позволяет уменьшить аэродинамическое сопротивление до 30 %.

Большинство исследований аэродинамики грузовых поездов выполнялось для составов из однотипных вагонов. Тем не менее в большинстве случаев грузовые поезда имеют в составе вагоны разных типов. В работе [9] выполнено моделирование аэродинамики поезда, включающего крытый вагон, цистерну и платформу, загруженную контейнерами в два яруса, и определены аэродинамические коэффициенты сопротивления и подъемной силы. Установлено, что наибольшее сопротивление характерно для следующего случая расположения вагонов: платформа с контейнерами, крытый вагон, цистерна, наименьшее – крытый вагон, платформа с контейнерами, цистерна. Данные, полученные при испытаниях в аэродинамической трубе, хорошо согласуются с результатами численного моделирования.

Исследование влияния свойств транспортного средства, в том числе геометрических, механических и аэродинамических, на риск схода с рельсов при

воздействии бокового ветра, выполнен в работе [10]. Установлено, что увеличение массы кузова приводит к росту стабилизирующих сил вертикального контакта колеса с рельсом и, следовательно, к лучшей устойчивости транспортного средства. Аэродинамические характеристики последнего (аэродинамические коэффициенты боковой и подъемной сил) оказывают сильное влияние на устойчивость поезда при боковом ветре. Результаты показали, что снижение аэродинамических коэффициентов на 40 % может привести к 30%-му улучшению характеристик транспортного средства с точки зрения риска опрокидывания.

Авторами [11, 12] проанализирована возможность опрокидывания высокоскоростного грузового поезда при воздействии бокового ветра. Установлено, что максимальная скорость рассматриваемого поезда должна быть ограничена в зависимости от загрузки вагонов, а для полностью загруженного поезда максимальная скорость может составлять 305 км/ч при скорости бокового ветра 20 м/с. Понижение центра тяжести загруженных вагонов позволит снизить риск опрокидывания при воздействии сильного бокового ветра. Авторами [12] установлено, что наименее подвержены риску опрокидывания вагоны, расположенные в хвосте поезда. На основе результатов моделирования выполнено прогнозирование коэффициента опрокидывания и создана модель оптимизации размещения груза в вагоне.

Целью представленной работы стало исследование в программном комплексе ANSYS CFX обтекания потоком воздуха вагона-хоппера для перевозки цемента.

Разработана геометрическая модель, включающая расчетную область и вагон-хоппер упрощенной конструкции, которая приведена на рисунке 1. Моделирование выполнялось при условиях, представленных в работе [13] (скорость воздушного потока на входе составляла 10 м/с, давление на выходе принято равным нулю). Стенки расчетной области полагались проницаемыми.

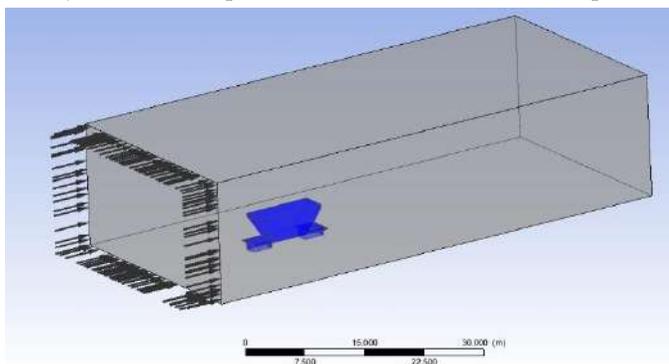


Рисунок 1 – Геометрическая модель с расчетной областью и вагоном-хоппером

При использовании метода конечных объемов на основе тетраэдральных элементов сгенерирована сетка, которая включала 7 млн ячеек. Численное решение выполнялось на основе решения уравнения неразрывности и осреднённых по Рейнольдсу уравнений изменения количества движения Навье – Стокса, для замыкания которых использовалась модель турбулентности  $k-\varepsilon$ .

По результатам моделирования получены распределения давлений на поверхностях вагона-хоппера (рисунок 2). Максимальные значения наблюдаются на боковой поверхности в верхней части кузова вагона.

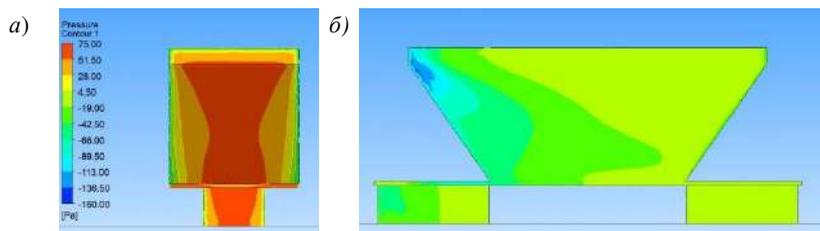


Рисунок 2 – Распределение давления на лобовой (а) и боковой (б) поверхности вагона

Распределения скоростей воздушного потока в различных сечениях расчетной области приведены на рисунках 3 и 4. Из рисунков видно, что на высотах, соответствующих расположению тележек и нижней части кузова, наблюдается образование вихрей за хвостовой частью вагона. Также для данных сечений значительно шире область возмущения воздушного потока.

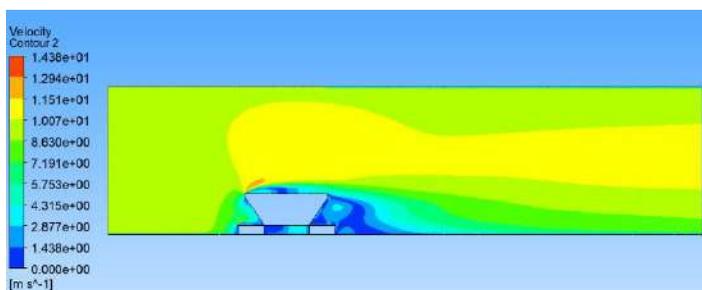


Рисунок 3 – Распределение скоростей потока в сечении расчетной области, параллельном оси железнодорожного пути, при направлении воздушного потока вдоль пути

В отличие от выполненного ранее исследования крытого вагона [13], для вагона-хоппера наблюдаются существенные изменения распределения давлений на лобовой и боковой поверхностях вагона в зависимости от высоты рассматриваемого сечения.

Из рисунка 5, а видно, что для первой по направлению воздушного потока тележки значение давления резко возрастает до 60 Н, в то время как для

второй тележки оно меняется незначительно. Давление в сечении на высоте 1 м, что соответствует положению рамы вагона, резко возрастает от 0 до 75 Н, в центральной части уменьшается до 45 Н. Распределение давлений на лобовой поверхности кузова (рисунок 5, б), симметричное относительно продольной оси вагона, практически идентично для всех рассматриваемых сечений.

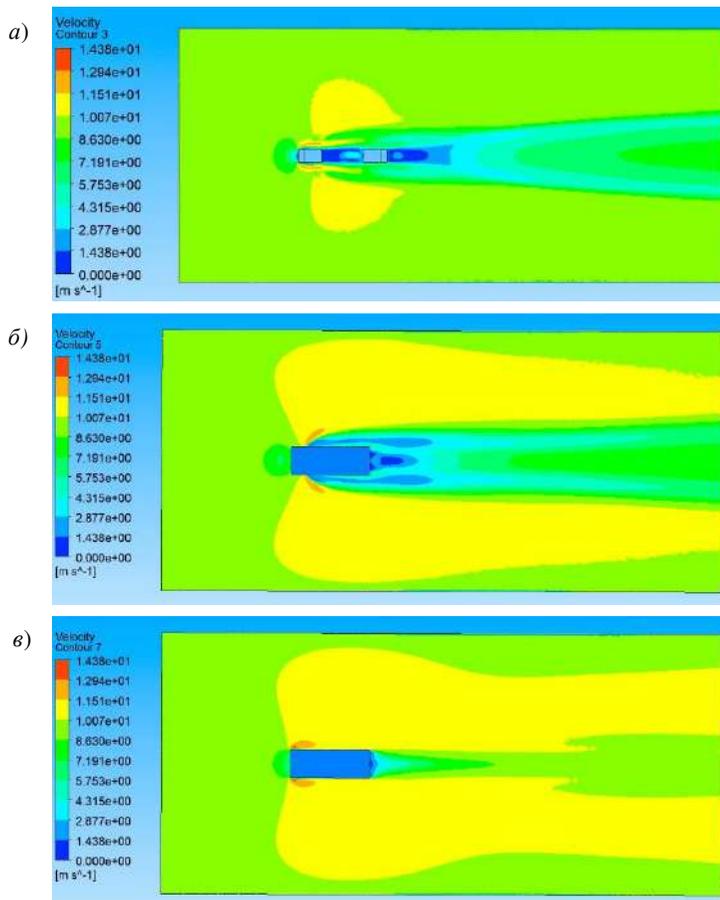


Рисунок 4 – Распределение скоростей потока в сечении расчетной области на высоте 0,5 м (а), 1,5 м (б) и 4,2 м (в) от основания вагона

Распределение давлений на боковой поверхности показало, что в области первой по направлению воздушного потока тележки давление изменяется в диапазоне от 60 до 15 Па (рисунок 6, а), в то время как на второй тележке значение давления невелико и изменяется менее чем на 3,5 Па (рисунок 6, б). На боковых поверхностях кузова (рисунок 6, в, г) максимальные значения

давления наблюдаются в верхней части наклонной стенки (на высоте около 4,2 м от основания вагона). На высотах 3, 1,5 и 1 м от основания вагона изменение давлений происходит более плавно, причем максимумы давлений отличаются незначительно.

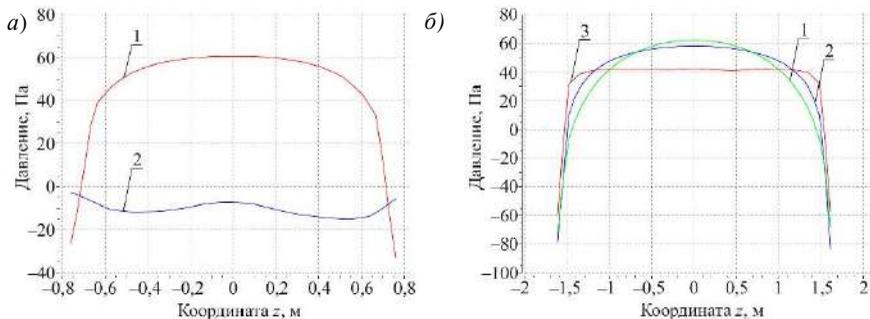


Рисунок 5 – Распределение давлений на лобовой поверхности на высотах:  
*а* – 0,5 м для тележек: 1 – передней, 2 – задней; *б* – линия 1 – 1,5 м, 2 – 3 м, 3 – 4,2 м

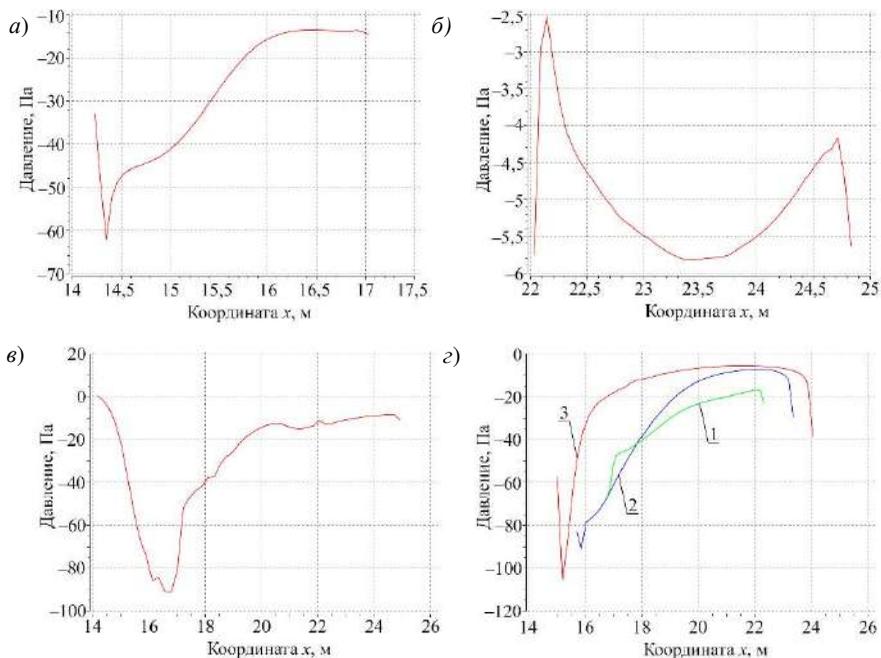


Рисунок 6 – Распределение давлений на боковой поверхности на высотах:  
*а* – 0,5 м для передней тележки; *б* – 0,5 м для задней тележки; *в* – 1 м;  
*г* – линия 1 – 1,5 м, 2 – 3 м, 3 – 4,2 м

Также выполнен анализ влияния угла наклона торцевых стенок вагона-хоппера на его аэродинамические характеристики, для чего выполнено моделирование обтекания воздушным потоком таких вагонов при углах наклона торцевых стенок от 50 до 60°.

Значения коэффициента аэродинамического сопротивления рассчитывались по формуле [14]

$$C_x = \frac{2F}{\rho v^2 A},$$

где  $F$  – значение силы, действующей на тело при обтекании его воздухом, Н;  $\rho$  – плотность воздуха, кг/м<sup>3</sup>;  $v$  – скорость потока воздуха, м/с;  $A$  – наибольшая площадь поперечного сечения вагона-хоппера, м<sup>2</sup>.

В таблице 1 приведены полученные в результате компьютерного моделирования значения сил лобового сопротивления, действующих на вагоны при разных углах наклона торцевых стенок, и соответствующие им коэффициенты аэродинамического сопротивления. Полученные значения сил хорошо согласуются с данными, полученными при проведении натурных испытаний [15].

**Таблица 1 – Коэффициенты аэродинамического сопротивления при разных параметрах модели**

Угол наклона торцевых стенок, град	Сила сопротивления, Н	Аэродинамический коэффициент $C_x$
50	679,240	0,879
55	679,660	0,880
60	681,549	0,882

Результаты расчетов показывают, что изменение угла наклона торцевых стенок не оказывает существенного влияния на значение коэффициента аэродинамического сопротивления.

Таким образом, разработанная в ходе исследований методика позволяет оценивать значения аэродинамических сил, действующих на вагоны вдоль железнодорожного пути, а также поперечных сил, которые могут приводить к опрокидыванию вагона при сильном боковом ветре.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Munoz-Paniagua, J. Aerodynamic drag optimization of a high-speed train / J. Munoz-Paniagua, J. García // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2020. – Vol. 204. – Article 104215. – 15 p.

2 An experimental analysis of the aerodynamic characteristics of a high-speed train on a bridge under crosswinds / M. Wang [et al.] // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2018. – Vol. 177. – P. 92–100.

3 Investigation of bogie positions on the aerodynamic drag and near wake structure of a high-speed train / G. Gao [et al.] // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2019. – Vol. 185. – P. 41–53.

4 **Giappino, S.** High-speed freight trains for intermodal transportation: Wind tunnel study on the aerodynamic coefficients of container wagons / S. Giappino, S. Melzi, G. Tomasini // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2018. – Vol. 175. – P. 111–119.

5 A field study on the aerodynamics of freight trains / A. Quazi [et al.] // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2021. – Vol. 209. – Article 104463. – 16 p.

6 A field study on the aerodynamics of freight trains with different stacking configurations / A. Quazi [et al.] // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2023. – Vol. 232. – Article 105245. – 19 p.

7 **Maleki, S.** Assessment of various turbulence models (ELES, SAS, URANS and RANS) for predicting the aerodynamics of freight train container wagons / S. Maleki, D. Burton, M. C. Thompson // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2017. – Vol. 170. – P. 68–80.

8 Aerodynamic drag reduction of railroad tank wagons / C. N. Nayeri [et al.] // Fluids. – 2022. – Vol. 7, is. 8. – Article 283. – 11 p.

9 Effect of the formation type with different freight vehicles on the train aerodynamic performance / X. Huo [et al.] // Vehicle System Dynamics. – 2022. – Vol. 60, is. 11. – P. 3868–3896.

10 Influence of the railway vehicle properties in the running safety against crosswinds / R. Heleno [et al.] // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2021. – Vol. 217. – Article 104732. – 15 p.

11 Correlation between cargo properties and train overturning safety for a high-speed freight train under strong winds / D. Zhang [et al.] // Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics. – 2023. – Vol. 17. – Article 2221308. – 16 p.

12 Optimization of cargo distribution for high-speed freight trains to overcome strong wind conditions / D. Zhang [et al.] // Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics. – 2024. – Vol. 18. – Article 2434008. – 16 p.

13 **Шимановский, А. О.** Аэродинамика модели железнодорожного грузового вагона при разных углах атаки воздушного потока / А. О. Шимановский, О. В. Демьянчук // Механика машин, механизмов и материалов. – 2024. – № 2 (67). – С. 23–29.

14 **Sun, Z.** Research on aerodynamic optimization of high-speed train's slipstream / Z. Sun, S. Yao, G. Yang // Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics. – 2020. – Vol. 14, is. 1. – P. 1106–1127.

15 Правила и нормы проектирования сортировочных устройств на железных дорогах Союза ССР. – М. : Транспорт, 1992. – 104 с.

*V. U. DZEMYANCHUK*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **SIMULATION OF AN AIR FLOW MOVEMENT AROUND A HOPPER CAR**

Computer simulation of an air flow around a hopper car was performed using the ANSYS CFX software package. Patterns of pressure distribution on the car front and side surfaces were obtained. The values of the aerodynamic drag coefficients were determined. It was found that changing the inclination angle of the end walls does not have a significant effect on the hopper car aerodynamic characteristics.

**Keywords:** finite element modeling, aerodynamics, aerodynamic coefficient.

Получено 12.10.2024

УДК 620.178

*Е. В. КОДНЯНКО*

*ЗАО «Солигорский институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством», Солигорск, Беларусь*

## **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КАЧЕНИИ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРА С УПРУГО-ПЛАСТИЧНЫМ ОБОДОМ**

Разработана методика решения контактной задачи о качении жесткого цилиндра, имеющего упруго-пластичный обод, по недеформируемой поверхности. Предлагаемая методика основана на теории малых упругопластических деформаций и модели винклера основания для тонкого слоя. Получены расчетные диаграммы «сила – смещение» и эпюры контактного давления. Определен момент сопротивления, обусловленный пластическим деформированием материала обода при качении.

**Ключевые слова:** контактная задача, модель винклера основания, малые упругопластические деформации, интенсивность тензора деформаций, контактное давление.

**Введение.** В конструкциях различных машин и механизмов широко используются опоры качения, в которых для снижения износа деталей на поверхности металлических роликов размещают полимерные покрытия. Например, в роликовых опорах шахтного скипа скипо-клетевого ствола [1] используются стальные ролики с полиуретановой обкладкой. Расчетный прогноз силовой нагруженности такого ролика требует решения контактной задачи об установившемся качении по поверхности жесткого тела качения, имеющего относительно тонкий деформируемый обод.

Решению контактных задач для тел с покрытиями посвящено множество научных публикаций [2–4]. Точное решение данной задачи предполагает использование интегрального преобразования Фурье с последующим решением системы интегральных уравнений [2]. Трудоемкость получения и непосредственного применения точного решения обуславливает широкое использование асимптотических приближений [5, 6] и упрощенных моделей упругого основания [7–9] при анализе контактного взаимодействия тел, имеющих покрытия или поверхностные слои из полимерных материалов. Так, в работе [6] описана методика решения задачи о качении жесткого цилиндра с вязкоупругим ободом, основанная на асимптотическом приближении второго порядка по малому параметру, равному отношению толщины обода к полуширине области контакта. Там же показано, что в диапазонах значений исходных параметров, характерных для конструкции роликовой опоры скипа [1], отклонение результатов использования асимптотического приближения от соответствующих расчетных оценок, полученных в рамках модели винклера основания, не превышает 5 %.

Асимптотический подход к решению контактных задач для тел с покрытиями реализуется в рамках линейной теории упругости. Данное обстоятель-

ство препятствует использованию этого подхода для учета физической нелинейности деформирования материала покрытия. Вместе с тем предельная упрощенность модели винклера основания позволяет решать контактные задачи для слоистых тел при произвольной нелинейной зависимости компонент тензора напряжений от компонент тензора деформаций для материалов слоев [9–11]. Однако в известных научных работах рассматривается только внедрение различных инденторов в нелинейно упругие или упруго-пластичные слои и не описывается процесс качения.

В связи с вышесказанным, целью настоящего исследования является обеспечение возможности учета физической нелинейности деформирования материала обода в рамках основанной на модели винклера основания методики решения задачи о качении жесткого цилиндра с тонким деформируемым ободом.

**Решение контактной задачи.** Как и ранее [7], в качестве упрощенной структурной модели стального ролика с полимерной обкладкой будем рассматривать составной цилиндр радиусом  $R$  с длиной образующей  $l$  (рисунок 1), который состоит из центрального абсолютно жесткого цилиндра и адгезионно связанного с его боковой поверхностью деформируемого слоя толщиной  $h$ .

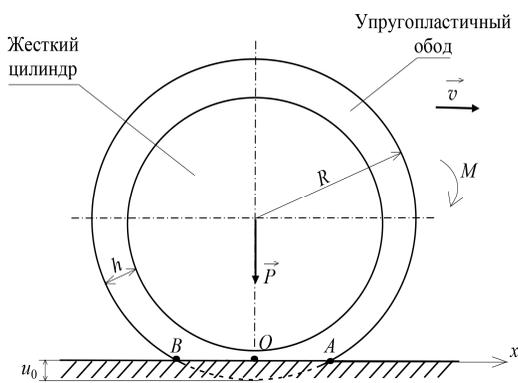


Рисунок 1 – Структурная модель стального ролика с упруго-пластичной обкладкой

Рассматривается состояние свободного качения исследуемого объекта по горизонтальной недеформируемой опорной поверхности. При этом на цилиндр действуют вертикальная сила  $P$  и момент  $M$ . Значение вертикальной силы считается заданным. Подлежит определению величина момента  $M$ , который обеспечивает стационарное качение цилиндра и связан с потерями на циклическое пластическое деформирование материала слоя.

Для решения контактной задачи вводится ось координат  $x$ , направленная по опорной поверхности вдоль направления качения (см. рисунок 1). Начало отсчета совпадает с центром области контакта и лежит на линии действия вертикальной силы  $P$ . Под ее действием точки внешней поверхности деформируемого слоя, находящиеся в области контакта, смещаются по вертикали относительно соответствующих (с той же координатой  $x$ ) точек внутренней его поверхности на величину  $u$ . При малости ширины области контакта по сравнению с радиусом  $R$  смещение  $u$  связано с координатой  $x$  выражением

$$u = u_0 - \frac{x^2}{2R}, \quad (1)$$

где  $u_0$  – подлежащее определению максимальное относительное смещение точек внешней поверхности слоя, совпадающее с вертикальным смещением центра составного цилиндра.

Деформируемый слой образован изотропным упруго-пластичным материалом. Упругие свойства этого материала характеризуются объемным модулем  $K$  и модулем сдвига  $G$ . Физическая нелинейность деформирования материала описывается в рамках теории малых упругопластических деформаций [12]. При этом пренебрегаем физической нелинейностью материала при объемном деформировании по сравнению с нелинейностью при сдвиге, то есть примем, что зависимость компоненты  $\sigma$  шарового тензора напряжения от компоненты  $\epsilon$  шарового тензора деформаций остается линейной во всем диапазоне изменения данных компонент:

$$\sigma = 3K\epsilon. \quad (2)$$

Зависимость интенсивности тензора напряжений  $\sigma_u$  от интенсивности тензора деформаций  $\epsilon_u$  на стадии нагружения будем описывать билинейной функцией без учета упрочнения при пластическом деформировании:

$$\sigma_u = \begin{cases} 3G\epsilon_u, & \epsilon_u < \epsilon_u^{cr}; \\ 3G\epsilon_u^{cr}, & \epsilon_u \geq \epsilon_u^{cr}. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $\epsilon_u^{cr}$  – значение интенсивности тензора деформаций, при котором начинается пластическое деформирование материала.

Разгрузка материала происходит линейно упруго. При использовании для деформируемого слоя модели винклера основания контактное давление  $p$  в окрестности некоторой точки области контакта определяется относительным смещением  $u$  только соответствующе точки внешней поверхности слоя. Деформируемый слой адгезионно связан с недеформируемым внутренним цилиндром. Поэтому каждый элементарный «стержень» в рассматриваемом основании находится в состоянии одноосной деформации. Ненулевая компонента тензора деформаций соответствует оси, перпендикулярной к оси  $x$ , и равна отношению  $u/h$ . Компонента шарового тензора  $\epsilon$  и интенсивность  $\epsilon_u$  связаны с координатой  $x$  и максимальным смещением  $u_0$

$$\epsilon = \frac{1}{3h} \left( u_0 - \frac{x^2}{2R} \right); \quad \epsilon_u = \frac{2}{3h} \left( u_0 - \frac{x^2}{2R} \right). \quad (4)$$

На стадии линейно упругого деформирования материала слоя контактное давление определяется следующим образом:

$$p = K \frac{1}{h} \left( u_0 - \frac{x^2}{2R} \right) + G \frac{4}{3h} \left( u_0 - \frac{x^2}{2R} \right). \quad (5)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (5) в соответствии с допущением (2) остается неизменным и на стадии пластичного деформирования материала. Второе слагаемое можно сопоставить с зависимостью  $\sigma_u(\epsilon_u)$ . Тогда с учетом физической нелинейности материала выражение (5) перепишем в виде

$$p = K \frac{1}{h} \left( u_0 - \frac{x^2}{2R} \right) + \frac{2}{3} f_u(u_0, x). \quad (6)$$

На стадии нагружения функция  $f_u(u_0, x)$  совпадает с функцией (3) при использовании для интенсивности  $\epsilon_u$  соотношения из (4). Данная стадия для некоторой точки внешней поверхности деформируемого слоя начинается при значении координаты  $x = x_A$  и завершается при  $x = x_O$ . Эти координаты и соответствующие им значения интенсивности тензора деформаций определяются формулами

$$\epsilon_{uA} = 0 \Rightarrow x_A = \sqrt{2Ru_0}; \quad (7)$$

$$x_O = 0 \Rightarrow \epsilon_{uO} = \epsilon_u^{\max} = \frac{2u_0}{3h}. \quad (8)$$

При  $x < 0$  реализуется процесс разгрузки материала слоя. Если на стадии нагружения не было достигнуто состояние пластичности, то диаграммы  $\sigma_u(\epsilon_u)$ , описывающие процессы нагружения и разгрузки, совпадают. Если  $\epsilon_u^{\max} > \epsilon_u^{cr}$ , то диаграмма разгрузки представляет собой наклонную линию, параллельную начальному линейному участку диаграммы нагружения ( $\sigma_u = 3G\epsilon_u$ ) и смещенную относительно этого участка вправо по оси  $\epsilon_u$  на величину  $\Delta\epsilon_u = \epsilon_u^{\max} - \epsilon_u^{cr}$ . Таким образом, функция  $f_u(u_0, x)$  в формуле (6) описывается соотношениями

$$f_u(u_0, x) = \begin{cases} f_u^+(u_0, x), & x > 0; \\ f_u^-(u_0, x), & x \leq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь для краткости записи введены обозначения

$$f_u^+(u_0, x) = \begin{cases} 3G\epsilon_u(u_0, x), & \epsilon_u(u_0, x) < \epsilon_u^{cr}; \\ 3G\epsilon_u^{cr}, & \epsilon_u(u_0, x) \geq \epsilon_u^{cr}; \end{cases}$$

$$f_u^-(u_0, x) = \begin{cases} 3G\epsilon_u(u_0, x), & \epsilon_u^{\max} < \epsilon_u^{cr}; \\ 3G(\epsilon_u(u_0, x) - \epsilon_u^{\max} + \epsilon_u^{cr}), & \epsilon_u^{\max} \geq \epsilon_u^{cr}. \end{cases}$$

Если рассматривается только осадка составного цилиндра под действием силы  $P$ , то для всей области контакта  $f_u(u_0, x) = f_u^+(u_0, x)$ .

Зная  $f_u(u_0, x)$ , по формуле (6) определим функцию  $p(u_0, x)$ . Для того чтобы в явном виде получить эпюру контактного давления, требуется определить максимальное относительное смещение  $u_0$ .

Уравнение равновесия рассматриваемого составного цилиндра имеет вид

$$P = L \int_{x_B}^{x_A} p(u_0, x) dx. \quad (10)$$

Координата точки  $A$  связана со смещением  $u_0$  равенством (7). В точке  $B$  (левая граница области контакта) контактное давление должно быть равно нулю:

$$p(u_0, x_B) = 0. \quad (11)$$

Соотношения (7), (10), (11) составляют систему трех нелинейных уравнений для определения смещения  $u_0$  и координат  $x_A$ ,  $x_B$ . Если наличие пластических деформаций не учитывается, то данные величины определяются соотношениями

$$u_0^{\text{упр}} = \left( \frac{9Ph}{4(3K + 4G)L\sqrt{2R}} \right)^{2/3}; \quad x_A^{\text{упр}} = -x_B^{\text{упр}} = \left( \frac{9PRh}{2(3K + 4G)L} \right)^{1/3}. \quad (12)$$

Условием начала пластического деформирования материала обода является равенство  $\epsilon_u^{\text{cr}} = \epsilon_u^{\text{max}}$ . Используя равенства (8) и (12), можно определить значение силы  $P^{\text{cr}}$ , при котором будет выполняться это условие:

$$P^{\text{cr}} = \frac{2}{3}(3K + 4G)L\sqrt{3Rh} \left( \epsilon_u^{\text{cr}} \right)^{3/2}.$$

**Пример использования методики.** Рассмотрим качение составного цилиндра радиуса  $R = 125$  мм с длиной образующей  $L = 80$  мм, состоящего из стального цилиндрического ролика и полиуретановой обкладки толщиной  $h = 5$  мм. Данные значения исходных геометрических параметров соответствуют конструкции роликовой опоры шахтного скипа [1]. Модуль Юнга материала полимерной обкладки (эластичный полиуретан)  $E = 1$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,4$  [13]. При этом

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = 1,67 \text{ МПа}; \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 0,36 \text{ МПа}.$$

В соответствии с экспериментальными данными о механических свойствах полимерных материалов, приведенных, в частности, в монографии [14], для значения интенсивности тензора деформаций, при котором в обкладке возникают пластические деформации, примем  $\epsilon_u^{\text{cr}} = 0,1$ .

На рисунке 2 представлены расчетные эпюры контактного давления, полученные при значении вертикальной силы  $P = 1$  кН. Оно выбрано таким образом, чтобы продемонстрировать влияние пластичности материала обкладки. Можно отметить, что учет пластичности приводит к снижению расчетной оценки максимального контактного давления и, следовательно, к увеличению расчетной ширины области контакта.

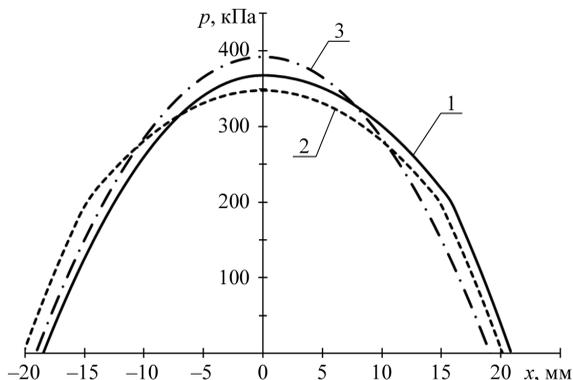


Рисунок 2 – Расчетные эпюры контактного давления: при учете пластичности материала обкладки для катящегося цилиндра – 1 и покоящегося на опорной поверхности – 2; без учета пластичности – 3

При качении цилиндра нарушается симметрия распределения контактного давления. Кроме того, при том же значении силы  $P$ , превышающем  $P^{cr}$ , максимальное значение контактного давления и вертикальное смещение центра катящегося цилиндра будут выше, чем у покоящегося (рисунок 3).

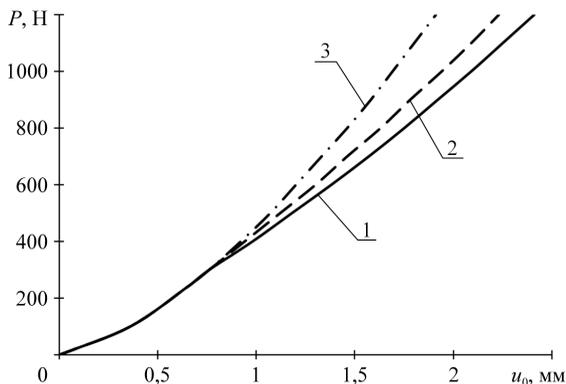


Рисунок 3 – Расчетные диаграммы «сила – смещение»: при учете пластичности материала обкладки для катящегося цилиндра – 1 и покоящегося на опорной поверхности – 2; без учета пластичности – 3

Нарушение симметрии распределения контактного давления при качении составного цилиндра при  $P > P^{cr}$  обуславливает наличие момента сопротивления, который определяется соотношением

$$M = L \int_{x_B}^{x_A} p(u_0, x) x dx . \quad (13)$$

На рисунке 4 представлены расчетные зависимости этого момента от значения вертикальной (прижимной) нагрузки  $P$ . Можно отметить, что существенное влияние на момент сопротивления оказывает значение коэффициента Пуассона материала обкладки. С увеличением значения  $\nu$  значение критической силы возрастает, а значение момента сопротивления уменьшается.

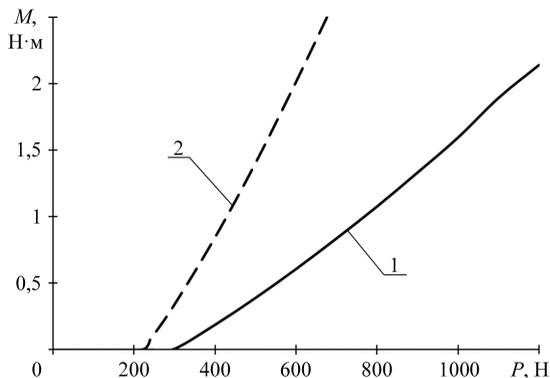


Рисунок 4 – Зависимость момента сопротивления качению от вертикальной нагрузки: 1 – для полиуретана ( $\nu = 0,4$ ); 2 – для материала с  $\nu = 0$  (значения остальных характеристик те же, что и у полиуретана).

**Заключение.** В результате использования разработанной методики для описания свободного качения жесткого цилиндра с тонким упруго-пластичным ободом было установлено следующее.

Расчетные оценки максимального контактного давления и вертикального смещения оси цилиндра при качении превышают соответствующие значения, определенные для покоящегося цилиндра, приблизительно на 10 %.

Для реализации стационарного качения к цилиндру следует приложить момент, работа которого компенсирует потери механической энергии при циклическом пластическом деформировании материала обода. При прочих равных условиях значение данного момента для материала обода с меньшим коэффициентом Пуассона будет выше.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Скип шахтный : пат. 11460 Респ. Беларусь : МПК (2006.01) В 66В 17/32 / В. Я. Прушак, В. Я. Щерба, Д. А. Морев. – и 20170053; заявл. 22.02.2017; опубл. 30.08.2017. – 6 с.

2 Александров, В. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 285 с.

3 Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов: Плоские контактные задачи / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск : Наука и техника, 1988. – 245 с.

4 **Fabrikant, V. I.** Solution of contact problems for a transversely isotropic elastic layer bounded to an elastic half-space / V. I. Fabrikant // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. – 2009. – Vol. 223, no. 11. – P. 2487–2499.

5 **Jaffar, M. J.** Asymptotic behaviour of thin elastic layer bonded and unbonded to a rigid foundation / M. J. Jaffar // International Journal of Mechanical Sciences. – 1989. – Vol. 31, is. 3. – P. 229–235.

6 **Коднянко, Е. В.** Асимптотическое решение контактной задачи о стационарном качении жесткого цилиндра с вязкоупругим ободом / Е. В. Коднянко, С. В. Шилько, Д. А. Черноус // Трение и износ. – 2024. – Т. 45, № 5. – С. 375–383.

7 **Коднянко, Е. В.** Использование модели Винклера для анализа качения колеса с деформируемым ободом / Е. В. Коднянко, Д. А. Черноус // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 92–99.

8 **Кравчук, А. С.** Прикладные контактные задачи для обобщенной стержневой модели покрытия / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук. – СПб. : Научное издание, 2019. – 324 с.

9 **Горячева, И. Г.** Контактное взаимодействие упругих тел с тонкими вязкоупругими покрытиями в условиях трения качения и скольжения / И. Г. Горячева, А. П. Горячев, Ф. Садеги // Прикладная математика и механика. – 1995. – Т. 59, № 4. – С. 634–641.

10 Computational modelling based wear resistance analysis of thick composite coatings / K. Holmberg [et al.] // Tribology International. – 2014. – Vol. 72. – P. 13–30.

11 **Солдатенков, И. А.** Нелинейная износостойкая задача для основания Винклера (постоянная область контакта) / И. А. Солдатенков // Трение и износ. – 2006. – Т. 27, № 3. – С. 245–256.

12 **Старовойтов, Э. И.** Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2001. – 344 с.

13 **Райт, П.** Полиуретановые эластомеры / П. Райт, А. Камминг. – М. : Химия, 1973. – 304 с.

14 **Мэнсон, Дж.** Полимерные смеси и композиты / Дж. Мэнсон, Л. Сперлинг. – М. : Химия, 1979. – 340 с.

*E. V. KADNIANKA*

*JSC "Soligorsk Institute of Resources Saving Problems with Pilot Production", Soligorsk, Belarus*

## **THE PROBLEM SOLUTION FOR ROLLING OF A RIGID CYLINDER WITH AN ELASTIC-PLASTIC RIM**

A contact problem solving method for the rolling of a rigid cylinder with an elastic-plastic rim on a non-deformable surface is developed. The proposed method is based on the theory of small elastic-plastic deformations and the Winkler foundation model for a thin layer. The calculated force-displacement diagrams and contact pressure diagrams are obtained. The resistance moment at rolling caused by plastic deformation of the rim material is determined.

**Keywords:** contact problem, Winkler foundation model, small elastic-plastic deformations, strain tensor intensity, contact pressure.

Получено 18.10.2024

УДК 691-419:539.371

А. Г. КОЗЕЛ

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель***ИЗГИБ ТРЁХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ  
НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ НАЛИЧИИ ОТВЕРСТИЯ**

Решена задача об осесимметричном изгибе круговой трёхслойной пластины с центральным отверстием. Реакция основания определяется двумя коэффициентами постели. Аналитическое решение получено в функциях Бесселя и Ханкеля. Рассмотрен случай равномерного распределения нагрузки. Определены константы интегрирования, соответствующие жесткому закреплению контуров пластины. Численно исследовано влияние на перемещения пластины радиуса отверстия и характеристик основания.

**Ключевые слова:** круговая трехслойная пластина, упругость, пластина с отверстием, осесимметричный изгиб, модель Пастернака.

**Введение.** В последние годы широкое распространение во многих отраслях промышленности получили композиты. В зависимости от требований, которые ставятся перед разработчиком, структура композита может представлять ряд слоев. Объективно считается, что такой композит обладает высокой изгибной прочностью, но это не единственное его преимущество. В слоистых композитах отдельные материалы объединяются в единую целую конструкцию, наделяя её уникальным сочетанием механических, химических, теплофизических и других свойств. В силу принципиального различия используемых материалов слоев и многообразия выполненных из них форм изделий разработка единой теории расчета довольно затруднительна. Поэтому, несмотря на многочисленные научные исследования в этой области, остается актуальной разработка эффективных методов расчета соответствующих систем.

Основы механики слоистых элементов конструкций представлены в [1, 2]. Ряд механико-математических моделей слоистых пластин, стержней и оболочек, в том числе связанных с упругим однопараметрическим основанием, разработан в монографиях [3, 4]. При расчете конструкций сплошное упругое основание заменяется гипотетическим основанием (моделью основания). Различные задачи статики трёхслойных сплошных и кольцевых пластин решены в статьях [5–7]. В работе [8] приведены различия в постановках и решениях задач об изгибе круговой трёхслойной пластины, связанной с упругим основанием, в случаях применения моделей с одним параметром (коэффициентом постели) (далее – модель Винклера) и двумя коэффициентами постели [9] (далее – модель Пастернака). Согласно последней первый коэффициент постели  $k_1$  (коэффициент сжатия) формально совпадает с аналогичным коэффициентом модели Винклера, а второй –  $k_2$  (коэффициент сдвига) дает возможность учета касательных напряжений в основании, что позволяет принимать во внимание

осадку и за пределами конструкции. Таким образом, предпочтительнее использовать модель Пастернака, а модель Винклера является её частным случаем, если положить второй коэффициент постели равным нулю.

Осесимметричные колебания и потеря устойчивости сэндвич-пластин, связанных с основанием модели Пастернака, исследованы в статьях [10, 11]. Параметры, влияющие на существование «обратной» изгибной волны в пластине на упругом основании, определены в работе [12]. В статье [13] представлен нелинейный электромеханический анализ произвольной круглой пластины на двухпараметрическом основании, внешние слои которой выполнены из функционально-градиентного материала.

В ранее выполненных автором исследованиях [14–16] рассмотрено статическое деформирование сплошных круговых трёхслойных пластин на двухпараметрическом упругом основании, в том числе под действием термосило-вых нагрузок. Однако при проектировании конструкций, эксплуатируемых в реальных условиях, часто необходимо учитывать наличие технологических и функциональных отверстий. Поэтому разработка методики определения напряжённо-деформированного состояния упругой круговой трёхслойной пластины с центральным отверстием, связанной с двухпараметрическим основанием, является актуальной.

**Постановка краевой задачи в перемещениях.** Рассмотрим задачу об изгибе связанной с упругим основанием круговой трёхслойной пластины радиусом  $R_1$  с центральным осесимметричным отверстием радиусом  $R_0$ , (рисунок 1). Решение строится в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , в которой за координатную принята срединная плоскость третьего слоя пластины ( $r, \varphi$ ), ось  $z$  направлена перпендикулярно ей вверх.

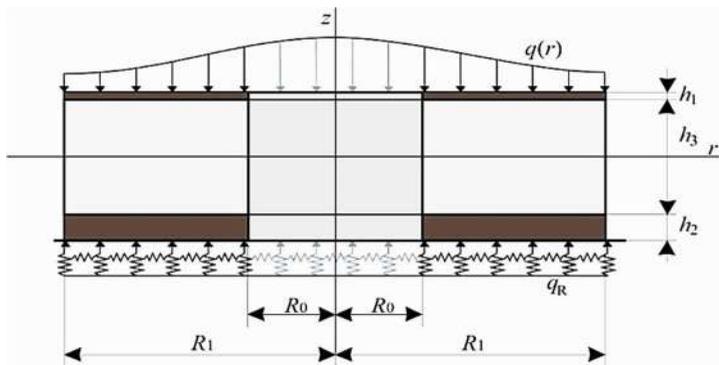


Рисунок 1 – Трёхслойная круговая пластина с отверстием

Рассматриваемая пластина включает два тонких несущих слоя ( $h_1, h_2$  – толщины верхнего и нижнего соответственно) и расположенного между ними лёгкого относительно толстого заполнителя ( $h_3 = 2c$ , где  $c$  – расстояние от сре-

динного слоя заполнителя до плоскости склейки слоев). Характеристики упругости материалов:  $G_k$  – модуль сдвига;  $K_k$  – объёмный модуль упругости,  $k = 1, 2, 3$  – номер слоя.

В рамках принятой модели описание напряженно-деформированного состояния пластины осуществляется с использованием следующих допущений: для несущих слоёв справедлива гипотеза Кирхгофа, для заполнителя – сдвиговая теория Тимошенко, считается пренебрежимо малой работа касательных напряжений  $\sigma_{rz}^{(3)}$ . Кроме того, задача рассматривается при условии непрерывности перемещений, то есть на границе слоёв не допускается проскальзывание и не происходит расслоение. Полагается, что для обеспечения отсутствия относительного сдвига слоёв ( $\psi = 0$ ) на внутреннем и внешнем контурах пластины располагаются жёсткие диафрагмы. Принимается, что слои пластины не надавливают друг на друга, поэтому напряжения  $\sigma_z = 0$ , а перемещения точек пластины в направлении оси  $z$  равны прогибу срединной плоскости заполнителя  $w$ . Деформации считаются малыми.

Поперечная нагрузка на пластину принята осесимметричной, поэтому в слоях отсутствуют тангенциальные перемещения ( $u_\varphi^{(k)} = 0$ ), а прогиб срединной плоскости  $w = w(r)$ , относительный сдвиг в заполнителе  $\psi = \psi(r)$  и радиальное перемещение координатной плоскости  $u = u(r)$  не зависят от координаты  $\varphi$ .

Реакция основания, действующая на подошву пластины,

$$q_R(r) = k_1 w(r) - k_2 \left( w_{,rr}(r) + \frac{1}{r} w_{,r}(r) \right). \quad (1)$$

Здесь и далее запятая в нижнем индексе соответствует операции дифференцирования по следующей за ней координате.

Согласно гипотезе о прямолинейности нормали сдвиговые деформации в заполнителе определяются соотношением

$$\varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2} \psi = \frac{1}{2} (u_r^{(3)} + w_{,r}). \quad (2)$$

Выражения для определения радиальных перемещений  $u_r^{(k)}$  точек в слоях получаются интегрированием по толщине всего пакета соотношения (2):

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}, \quad (c \leq z \leq c + h_1); \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}, \quad (-c \leq z \leq c); \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u \pm c\psi$  – значения смещения несущих слоёв 1 и 2 вследствие деформации срединного слоя 3;  $z$  – расстояние от координатной плоскости до рассматриваемой точки.

Тогда, учитывая соотношения Коши и формулы (3), компоненты тензора деформаций для каждого из слоёв принимают вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\Psi_{,r} - zw_{,rr}; & \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{r}(u + c\Psi - zw_{,r}); & \varepsilon_{rz}^{(1)} &= 0; \\
\varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\Psi_{,r} - zw_{,rr}; & \varepsilon_\varphi^{(3)} &= \frac{1}{r}(u + z\Psi - zw_{,r}); & \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2}\Psi; \\
\varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\Psi_{,r} - zw_{,rr}; & \varepsilon_\varphi^{(2)} &= \frac{1}{r}(u - c\Psi - zw_{,r}); & \varepsilon_{rz}^{(2)} &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Обобщенные внутренние силы и моменты выразим через компоненты тензора напряжений  $\sigma_\alpha^{(k)}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ):

$$\begin{aligned}
T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz; & M_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz; \\
H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}),
\end{aligned} \tag{5}$$

где  $T_r$  и  $T_\varphi$  – радиальная и окружная силы;  $M_r$  и  $M_\varphi$  – изгибающие моменты;  $H_r$  и  $H_\varphi$  – дополнительные моменты, возникающие вследствие сдвига в заполнителе (моменты сдвига).

Согласно принципу Лагранжа, если система находится в равновесии, то работа внутренних сил при любом возможном перемещении (вариации) должна быть равна работе внешних сил, приложенных к системе,

$$\delta W = \delta A_1 + \delta A_2, \tag{6}$$

где  $\delta W$  – вариация работы внутренних сил упругости

$$\delta W = \iint_{r \varphi} [r(T_r \delta u_{,r} + H_r \delta \Psi_{,r} - M_r \delta w_{,rr}) + T_\varphi \delta u + H_\varphi \delta \Psi - M_\varphi \delta w_{,r}] d\varphi dr,$$

двойной интеграл берётся по всей срединной поверхности заполнителя  $S$  ( $dS = r dr d\varphi$ );  $\delta A_1$  – вариация работы внешних нагрузок, с учётом (1),

$$\delta A_1 = \iint_S \left[ q - k_1 w + k_2 \left( w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) \right] \delta w dr d\varphi;$$

$\delta A_2$  – вариация работы контурных усилий

$$\delta A_2 = \int_0^{2\pi} \left( T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \Psi + M_r^0 \delta w_{,r} + Q^0 \delta w \right) d\varphi.$$

Здесь учитывается, что к контуру пластины приложены внешние погонные силы  $T_r^0, Q^0$  и моменты  $H_r^0, M_r^0$ .

Вариации перемещений  $\delta u_{,r}^{(k)}$  и вариации деформаций в слоях  $\delta \varepsilon_r^{(k)}, \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}, \delta \varepsilon_{rz}^{(k)}$  следуют из (3) и (4) соответственно.

Выражение (6) возможно при любых значениях варьируемых величин только в случае равенства нулю коэффициентов при независимых вариациях

искомых функций. Таким образом, в результате преобразований имеем систему уравнений равновесия в усилиях:

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\phi) = 0 ;$$

$$H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\phi) = 0 ;$$

$$M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\phi,r}) - k_1 w + k_2 \left( w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) = -q . \quad (7)$$

Силовые граничные условия на контурах пластины ( $r = R_1$  и  $r = R_0$ ):

$$T_r = T_r^0 ; H_r = H_r^0 ; M_r = M_r^0 ; M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\phi) = Q^0 . \quad (8)$$

Связь между напряжениями и деформациями в слоях пластины согласно линейной теории упругости:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)} ; \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)} ; s_{rz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)} , \quad (9)$$

где  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – шаровые составляющие тензоров напряжений и деформаций;  $s_\alpha^{(k)}$ ,  $\varepsilon_\alpha^{(k)}$  – девиаторные составляющие тензоров напряжений и деформаций;  $s_{rz}^{(3)}$ ,  $\varepsilon_{rz}^{(3)}$  – касательное напряжение и угловая деформация в заполнителе.

Используя соотношения (9), подставим в систему уравнений (7) формулы для внутренних сил и моментов (5), выразив их через искомые функции, получим систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned} a_1 \left( u_{,rr} + \frac{1}{r} u_{,r} - \frac{1}{r^2} u \right) + a_2 \left( \Psi_{,rr} + \frac{1}{r} \Psi_{,r} - \frac{1}{r^2} \Psi \right) - a_3 \left( w_{,rrr} + \frac{1}{r} w_{,rr} - \frac{1}{r^2} w_{,r} \right) &= 0 ; \\ a_2 \left( u_{,rr} + \frac{1}{r} u_{,r} - \frac{1}{r^2} u \right) + a_4 \left( \Psi_{,rr} + \frac{1}{r} \Psi_{,r} - \frac{1}{r^2} \Psi \right) - a_5 \left( w_{,rrr} + \frac{1}{r} w_{,rr} - \frac{1}{r^2} w_{,r} \right) &= 0 ; \\ a_3 \left( u_{,rrr} + \frac{2}{r} u_{,rr} - \frac{1}{r^2} u_{,r} + \frac{1}{r^3} u \right) + a_5 \left( \Psi_{,rrr} + \frac{2}{r} \Psi_{,rr} - \frac{1}{r^2} \Psi_{,r} + \frac{1}{r^3} \Psi \right) - \\ - a_6 \left( w_{,rrrr} + \frac{2}{r} w_{,rrr} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{1}{r^3} w_{,r} \right) - k_1 w + k_2 \left( w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) &= -q , \quad (10) \end{aligned}$$

$$\text{где } a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k \left( K_k + \frac{4}{3} G_k \right), \quad a_2 = c \left[ h_1 \left( K_1 + \frac{4}{3} G_1 \right) - h_2 \left( K_2 + \frac{4}{3} G_2 \right) \right];$$

$$a_3 = h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) \left( K_1 + \frac{4}{3} G_1 \right) - h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) \left( K_2 + \frac{4}{3} G_2 \right);$$

$$a_4 = c^2 \left( h_1 \left( K_1 + \frac{4}{3} G_1 \right) + h_2 \left( K_2 + \frac{4}{3} G_2 \right) + \frac{2}{3} c \left( K_3 + \frac{4}{3} G_3 \right) \right);$$

$$a_5 = c \left[ h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) \left( K_1 + \frac{4}{3} G_1 \right) + h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) \left( K_2 + \frac{4}{3} G_2 \right) + \frac{2}{3} c^2 \left( K_3 + \frac{4}{3} G_3 \right) \right];$$

$$a_6 = h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) \left( K_1 + \frac{4}{3} G_1 \right) +$$

$$+ h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) \left( K_2 + \frac{4}{3} G_2 \right) + \frac{2}{3} c^3 \left( K_3 + \frac{4}{3} G_3 \right).$$

Предполагается, что внутренний и внешний контуры пластины зафиксированы таким образом, что они не могут двигаться или деформироваться под действием нагрузок, т. е. жестко закреплены. При таких условиях отсутствуют любые перемещения или повороты в этих точках, поэтому система уравнений (10) дополняется следующими граничными условиями:

$$u(R_0) = u(R_1) = 0; \quad \psi(R_0) = \psi(R_1) = 0;$$

$$w(R_0) = w(R_1) = 0; \quad w_{,r}(R_0) = w_{,r}(R_1) = 0. \quad (11)$$

В зависимости от конкретных условий задачи и типа нагрузки на контурах пластины могут встречаться другие граничные условия и их комбинации. Система дифференциальных уравнений равновесия (10) и граничные условия (11) являются постановкой в перемещениях краевой задачи об изгибе трехслойной пластины с отверстием, связанной с основанием Пастернака. Полученная постановка краевой задачи позволяет учитывать наличие технологических и функциональных отверстий при исследовании напряженно-деформированного состояния круговых трёхслойных пластин на упругом основании.

**Общее решение краевой задачи.** Методика решения системы, аналогичной системе дифференциальных уравнений (10), подробно расписана в [14]. Пользуясь ей, в результате преобразований приходим к системе уравнений

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r};$$

$$\psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r};$$

$$\Delta \Delta w - k_2 D \Delta w + k_1 D w = q D. \quad (12)$$

$$\text{Здесь коэффициенты } b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2};$$

$$D = \frac{a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2};$$

$C_1 - C_4$  – константы интегрирования;  $\Delta$  – оператор Лапласа в полярной системе координат.

Третье уравнение системы (12) согласно [14] имеет вид

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa r) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa r) + w_p(r), \quad (13)$$

где  $C_5$ – $C_8$  – постоянные интегрирования;  $J_0(\sqrt{a} \kappa r)$ ,  $J_0(\sqrt{a} \kappa r)$  – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка;  $H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa r)$ ,  $H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa r)$  – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка;  $\kappa = \sqrt[4]{k_1 D}$ ,  $a$  и  $\bar{a}$  – коэффициенты, выраженные через параметры основания [14];  $w_p(r)$  – частное решение.

Соответственно общее решение задачи об изгибе связанной с упругим основанием круговой упругой трёхслойной пластины с отверстием с учётом формул (12), (13) принимает вид

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r};$$

$$\Psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r};$$

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa r) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa r) + w_p(r). \quad (14)$$

В случае сплошной пластины [14] достаточно было четырёх уравнений для определения констант интегрирования, так как  $C_2$ ,  $C_4$ ,  $C_6$ ,  $C_8$  обнулялись из-за ограничения решения в центре пластины. Здесь для нахождения постоянных интегрирования  $C_1$ – $C_8$  надо использовать восемь граничных условий (11).

**Случай равномерно распределённой нагрузки.** При  $q = q_0 = \text{const}$  с учётом частного решения  $w_p = q_0/k_1$  общее решение системы уравнений (10) может быть записано в виде

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r};$$

$$\Psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r};$$

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa r) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa r) + \frac{q_0}{k_1}. \quad (15)$$

При этом необходимые нам в дальнейшем производные от прогиба

$$w_{,r}(R_1) = -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_1) C_5 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_1) C_6 - \\ - \kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_1) C_7 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_1) C_8;$$

$$w_{,r}(R_0) = -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_0) C_5 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_0) C_6 - \\ - \kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_0) C_7 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_0) C_8. \quad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в граничные условия (11), получаем систему восьми алгебраических уравнений для определения констант интегрирования:

$$b_1 w_{,r}(R_1) + C_1 R_1 + \frac{C_2}{R_1} = 0; \quad b_1 w_{,r}(R_0) + C_1 R_0 + \frac{C_2}{R_0} = 0;$$

$$b_2 w_{,r}(R_1) + C_3 R_1 + \frac{C_4}{R_1} = 0; \quad b_2 w_{,r}(R_0) + C_3 R_0 + \frac{C_4}{R_0} = 0;$$

$$C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa R_0) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_0) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa R_0) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_0) + \frac{q_0}{k_1} = 0;$$

$$C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa R_1) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_1) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa R_1) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_1) + \frac{q_0}{k_1} = 0;$$

$$\begin{aligned} & -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_0) C_5 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_0) C_6 - \\ & -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_0) C_7 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_0) C_8 = 0; \\ & -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_1) C_5 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_1) C_6 - \\ & -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_1) C_7 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_1) C_8 = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что на контурах пластины  $w_{,r}(R_0) = w_{,r}(R_1) = 0$ , имеем

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0. \quad (17)$$

Следовательно, для определения констант интегрирования  $C_5$ – $C_8$  надо решить систему четырёх уравнений:

$$C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa R_0) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_0) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa R_0) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_0) = -\frac{q_0}{k_1};$$

$$C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa R_1) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_1) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa R_1) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_1) = -\frac{q_0}{k_1};$$

$$\begin{aligned} & -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_0) C_5 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_0) C_6 - \\ & -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_0) C_7 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_0) C_8 = 0; \\ & -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_1) C_5 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_1) C_6 - \\ & -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_1) C_7 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_1) C_8 = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение системы уравнений (18) выполним методом Крамера:

$$C_5 = \frac{W_1}{W_0}, \quad C_6 = \frac{W_2}{W_0}, \quad C_7 = \frac{W_3}{W_0}, \quad C_8 = \frac{W_4}{W_0}, \quad (19)$$

где  $W_0$  – определитель системы (18);  $W_1$ – $W_4$  – определители:

$$W_1 = \begin{vmatrix} -\frac{q_0}{k_1} & H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_0) & J_0(\sqrt{a}\kappa R_0) & H_0^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_0) \\ -\frac{q_0}{k_1} & H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_1) & J_0(\sqrt{a}\kappa R_1) & H_0^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_1) \\ 0 & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_0) & -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_0) & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_0) \\ 0 & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_1) & -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_1) & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_1) \end{vmatrix},$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} J_0(\sqrt{a}\kappa R_0) & -\frac{q_0}{k_1} & J_0(\sqrt{a}\kappa R_0) & H_0^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_0) \\ J_0(\sqrt{a}\kappa R_1) & -\frac{q_0}{k_1} & J_0(\sqrt{a}\kappa R_1) & H_0^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_1) \\ -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_0) & 0 & -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_0) & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_0) \\ -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_1) & 0 & -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_1) & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_1) \end{vmatrix},$$

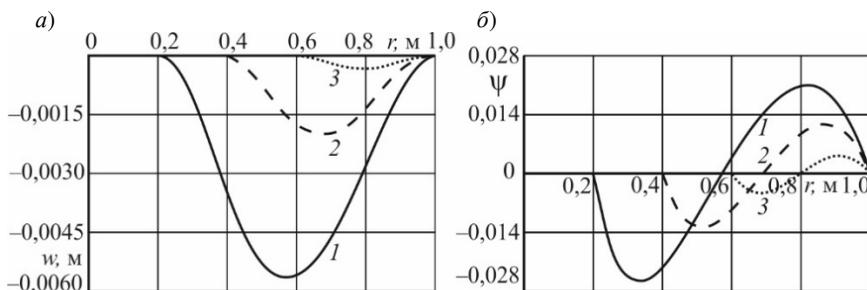
$$W_3 = \begin{vmatrix} J_0(\sqrt{a}\kappa R_0) & H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_0) & -\frac{q_0}{k_1} & H_0^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_0) \\ J_0(\sqrt{a}\kappa R_1) & H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_1) & -\frac{q_0}{k_1} & H_0^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_1) \\ -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_0) & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_0) & 0 & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_0) \\ -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_1) & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_1) & 0 & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_1) \end{vmatrix},$$

$$W_4 = \begin{vmatrix} J_0(\sqrt{a}\kappa R_0) & H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_0) & J_0(\sqrt{a}\kappa R_0) & -\frac{q_0}{k_1} \\ J_0(\sqrt{a}\kappa R_1) & H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_1) & J_0(\sqrt{a}\kappa R_1) & -\frac{q_0}{k_1} \\ -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_0) & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_0) & -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_0) & 0 \\ -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_1) & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_1) & -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_1) & 0 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, решение (15) с константами интегрирования (17), (19) описывает перемещения при изгибе круговой трёхслойной пластины с центральным осесимметричным отверстием, которая связана с упругим основанием Пастернака, в случае жёсткого закрепления внутреннего и внешнего ее контуров.

**Численные исследования.** Для апробации полученного аналитического решения разработан комплекс программ в среде программного пакета Maple, с помощью которого проведён численный параметрический анализ. Расчеты проведены для металлополимерной пластины (Д16Т–фторопласт-4–Д16Т), необходимые физико-механические характеристики материалов можно найти в [4]. Внешний радиус  $R_1 = 1$  м, толщины слоёв:  $h_1 = 0,04$  м,  $h_2 = 0,04$  м,  $h_3 = 0,4$  м. Первый коэффициент постели  $k_1 = 100$  МПа/м. Интенсивность равномерно распределённой нагрузки  $q_0 = -1$  МПа.

Графики на рисунке 2 показывают зависимость прогиба  $w$  (а) и сдвига в заполнителе  $\psi$  (б) от радиуса отверстия  $R_0$ , м: 1 –  $R_0 = 0,2$ ; 2 –  $R_0 = 0,4$ ; 3 –  $R_0 = 0,6$ . Второй коэффициент постели  $k_2 = 10$  МПа·м. При увеличении центрального отверстия перемещения убывают в связи с изменением жёсткости пластины и уменьшением эквивалентной площади, воспринимающей нагрузку.

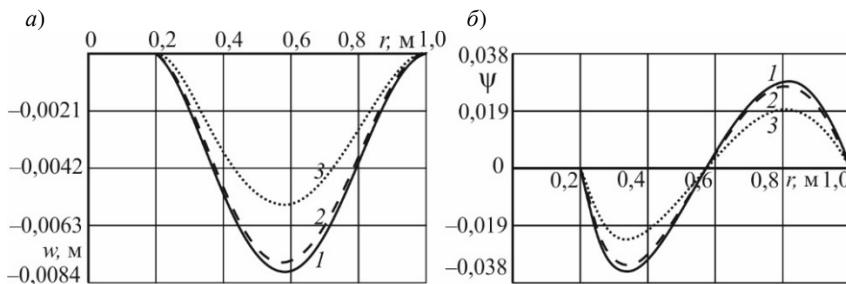


1 –  $R_0 = 0,2$  м; 2 –  $R_0 = 0,4$  м; 3 –  $R_0 = 0,6$  м

Рисунок 2 – Изменение прогиба  $w$  (а) и сдвига в заполнителе  $\psi$  (б) при различных значениях радиуса отверстия

На рисунке 3 показано изменение вдоль радиуса пластины прогиба  $w$  (а) и относительного сдвига в заполнителе  $\psi$  (б) в зависимости от второго коэффициента постели  $k_2$ , МПа·м: 1 –  $k_2 = 0$ , 2 –  $k_2 = 1$ , 3 –  $k_2 = 10$ . Размер отверстия не изменяется,  $R_0 = 0,2$  м.

При малых значениях коэффициента сдвига  $k_2 < 1$  МПа·м изменения искомых величин незначительны. При  $k_2 = 1$  МПа·м (кривая 2) максимумы перемещений уменьшаются на 5,1 %, при  $k_2 = 10$  МПа·м (кривая 3) – на 31,5 %. Учитывая второй коэффициент постели, существенно уменьшаются перемещения в исследуемом случае.



1 –  $k_2 = 0$  МПа·м, 2 –  $k_2 = 1$  МПа·м, 3 –  $k_2 = 10$  МПа·м

Рисунок 3 – Изменение прогиба  $w$  (а) и сдвига в заполнителе  $\psi$  (б) при различных значениях второго коэффициента постели

**Выводы.** Исследован симметричный изгиб трёхслойной круговой пластины на упругом основании. Учтено наличие технологического или функционального отверстия. Численно исследован изгиб жёстко закреплённой металлополимерной пластины под действием равномерно распределённой нагрузки.

Анализ полученных численных результатов показал, что, несмотря на неочевидные преимущества от увеличения отверстия в пластине, это приводит к уменьшению перемещений за счёт перераспределения нагрузки и изменения геометрических характеристик пластины; использование модели основания с двумя коэффициентами постели позволяет учесть распределительную способность грунта, за счёт этого с ростом коэффициента сдвига перемещения уменьшаются.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т24М-004).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Болотин, В. В.** Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М. : Машиностроение, 1980. – 375 с.
- 2 **Reddy, J. N.** Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis / J. N. Reddy. – 2<sup>nd</sup> ed. – Boca Raton : CRC Press, 2003. – 858 p.
- 3 **Горшков, А. Г.** Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.
- 4 **Плескачевский, Ю. М.** Механика трёхслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко. – М. : Физматлит, 2011. – 560 с.
- 5 **Yarovaya, A. V.** Thermoelastic bending of a sandwich plate on a deformable foundation / A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42, no. 2. – P. 206–213.
- 6 **Старовойтов, Э. И.** Термоупругий изгиб кольцевой трёхслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Прикладная механика. – 2008. – Т. 44, № 9. – С. 94–103.

7 **Яровая, А. В.** Изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании погонными нагрузками / А.В. Яровая // *Механика. Исследования и инновации.* – 2019. – Вып. 12. – С. 212–217.

8 **Козел, А. Г.** Сравнение решений задач изгиба трехслойных пластин на основаниях Винклера и Пастернака / А. Г. Козел // *Механика машин, механизмов и материалов.* – 2021. – № 1 (54). – С. 30–37.

9 **Пастернак, П. Л.** Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак. – М. : Госстройиздат, 1954. – 56 с.

10 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.* – 2014. – № 1. – С. 59–63.

11 Size-dependent instability of organic solar cell resting on Winkler–Pasternak elastic foundation based on the modified strain gradient theory / Q. Li [et al.] // *International Journal of Mechanical Sciences.* – 2020, 105306. – Vol. 177.

12 **Ерофеев, В. И.** Дисперсионные и энергетические характеристики изгибных волн в пластине, лежащей на двухпараметрическом упругом основании / В. И. Ерофеев, Е. Е. Лисенкова // *Акустический журнал.* – 2023. – Т. 69, № 3. – С. 277–283.

13 **Arefi, M.** Nonlinear responses of an arbitrary FGP circular plate resting on the Winkler–Pasternak foundation / M. Arefi, M. N. M. Allam // *Smart Structures and Systems.* – 2015. – Vol. 16, no.1. – P. 81–100.

14 **Старовойтов, Э. И.** Влияние жесткости основания Пастернака на деформирование круговой трёхслойной пластины / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // *Проблемы машиностроения и автоматизации.* – 2019. – № 2. – С. 107–114.

15 **Козел, А. Г.** Деформирование физически нелинейной трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации.* – 2019. – Вып. 12. – С. 105–112.

16 **Козел, А. Г.** Термосиловой изгиб упругой трехслойной пластины, свободно лежащей на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации.* – 2023. – Вып. 16. – С. 86–99.

*A. G. KOZEL*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **BENDING OF A THREE-LAYER CIRCULAR PLATE WITH A HOLE ON AN ELASTIC BASE**

The problem of axisymmetric bending of a circular three-layer plate with a central hole is solved. The reaction of the base is determined by two bed factors. The analytical solution is obtained in Bessel and Hankel functions. The case of uniform load distribution is considered. The integration constants corresponding to rigid fixation of the plate contours are determined. The influence of the hole radius and the base characteristics on the plate displacements is numerically investigated.

**Keywords:** circular three-layer plate, elasticity, plate with a hole, axisymmetric bending, Pasternak model.

Получено 30.10.2024

УДК 621.785

Г. А. КОСТЮКОВИЧ<sup>1</sup>, А. В. ПОПРУКАЙЛО<sup>1</sup>, Е. В. ОВЧИННИКОВ<sup>2</sup>,  
А. И. ВЕРЕМЕЙЧИК<sup>3</sup>, В. М. ХВИСЕВИЧ<sup>3</sup>, Д. А. ЛИННИК<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Открытое акционерное общество «Белкард», Гродно, Беларусь

<sup>2</sup>Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

<sup>3</sup>Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь

## ТЕХНОЛОГИЯ ТЕРМООБРАБОТКИ КРЕСТОВИН КАРДАНЫХ ПЕРЕДАЧ ТОКАМИ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ

Представлена технология изготовления крестовин шарниров карданных передач из стали пониженной прокаливаемости 60ПП с использованием поверхностной индукционной закалки при глубинном нагреве. В результате исследований выполнено обоснование технологии термической обработки, позволяющей повысить статические и динамические нагрузки.

**Ключевые слова:** карданная передача, крестовина, износ, разрушение, нагрузка, контактные напряжения, цементация, индукционная закалка, твердость, испытания.

**Введение.** Трансмиссия, передающая энергию от источника к исполнительным механизмам – неотъемлемая часть транспортных средств, обеспечивающая работу других машин в силовых установках. Карданные передачи, являющиеся составной частью трансмиссии, должны обеспечивать ее необходимую компоновку для передачи энергии, компенсируя при этом возможные линейные, угловые погрешности, возникающие при монтаже и сборке транспортных средств и других машин, а также при движении транспортных средств в эксплуатационных условиях [1–3]. Карданные передачи соединяют отдельные агрегаты трансмиссий, например, двигатель с коробкой передач, раздаточной коробкой или редуктором ведущего моста в автомобилях.

Конструкцию карданной передачи определяют элементы, позволяющие при надежной передаче энергии от источника обеспечивать им в трансмиссиях необходимые линейные и угловые перемещения, а также простоту и легкость монтажа и демонтажа передач с соединяемыми агрегатами и исполнительными механизмами. Основу этих элементов составляют шарниры, обеспечивающие угловые перемещения. В конструкциях, используемых в трансмиссионных карданных передачах, наиболее широко распространены шарниры, имеющие крестовину, соединенную с вилками ведущего и ведомого валов.

Увеличение грузоподъемности и скоростей современных автомобилей потребовало усложнения трансмиссий, в том числе карданных передач, что привело к возникновению колебаний и вибраций. Повышение динамических нагрузок стало причиной преждевременных отказов шарниров и, в первую очередь, крестовин, как наиболее нагруженных элементов карданной передачи. Поэтому существует необходимость повышения прочности и надежности в эксплуатации

крестовин шарниров на базе конструкторских решений, связанных с рациональным выбором применяемых материалов и технологий изготовления [4–7].

Передняя крестовина является высоконагруженной деталью и испытывает статические, динамические, в том числе циклические, нагрузки. Через нее передается весь крутящий момент двигателя, изменяющийся как по величине в процессе движения автомобиля, так и по скорости приложения при броске сцепления. Кроме того, шипы крестовины, являясь в большинстве конструкций внутренней опорой игольчатого подшипника, испытывают высокие контактные напряжения, приводящие к дефектам, называемым бриллением (вдавливание иголок в тело шипов) [8–10].

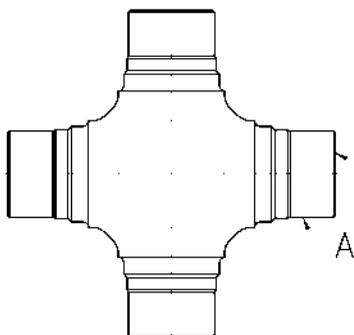
Практика показывает, что с целью достижения высокого сопротивления контактным напряжениям, твердость в зонах воздействия иголок должна превышать 61 HRC, а глубина слоя с высокой твердостью должна быть не менее 1,5 мм. У основания шипа для предотвращения хрупкого разрушения, свойственного стали с высокой твердостью, последнее может быть снижено до уровня 51–63 HRC. Такой уровень обеспечивает повышение сопротивления статическим и динамическим нагрузкам и достаточен для предотвращения износа от уплотнений, работающих у основания шипов. Глубина высокопрочного слоя у основания крестовины должна составлять 1,5–3,5 мм. При этом, если в вершине шипа глубина высокопрочного слоя может равняться радиусу шипа (т. е. быть сквозной), то у основания шипа глубина слоя выше 3,5 мм не допустима, так как при этом уменьшается характерный для поверхностной закалки высокий уровень остаточных напряжений сжатия, обеспечивающий достаточное сопротивление циклическим нагрузкам. При сквозном высокопрочном состоянии металла у основания шипа усталостная прочность крестовины снижается [11, 12].

**Основная часть.** В настоящее время крестовины (рисунок 1) изготавливаются из легированных цементируемых сталей типа 20ХГНТР, 20ХГТ, 15ХГН2ТА, которые подвергаются цементации на глубину 1,5–2 мм, закалке и отпуску.

Другой, более прогрессивный, способ заключается в том, что крестовины (рисунок 2) изготавливают из стали пониженной прокаливаемости 60ПП, подвергают поверхностной индукционной закалке при глубинном нагреве, а затем производят прерывистый самоотпуск [9, 10].

Преимущества данного способа заключаются в следующем.

- 1 Прочность крестовин увеличивается на 15–20 %.
- 2 Сталь 60ПП дешевле легированных цементируемых марок стали.
- 3 Установка для индукционной закалки в несколько раз дешевле печей для цементации той же производительности.
- 4 Расходы, связанные с проведением термообработки, на газ, электроэнергию, жароупоры, амортизацию, также меньше.
- 5 Время термической обработки сокращается с 20 часов до 3 минут.



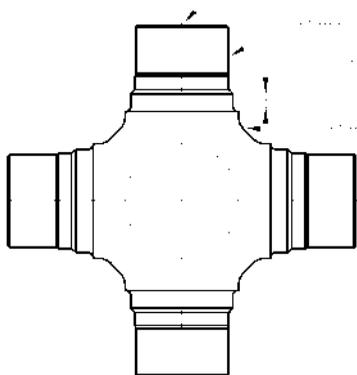
Б

*Цементировать: глубина слоя  
1,6–1,9 мм;*

*На шипах А 60 HRC<sub>min</sub>*

*На торцах Б 58 HRC<sub>min</sub>*

Рисунок 1 – Крестовина, изготовленная из стали 20ХГНТР



*Поверхностная индукционная за-  
калка всей крестовины при глубин-  
ном нагреве с прерывистым само-  
отпуском*

*Твердость сердцевины 30–42 HRC.*

Рисунок 2 – Крестовина, изготовленная из стали 60ПП

Предлагаемая поверхностная термообработка позволяет обеспечить повышение надежности крестовин по сравнению с уровнем, достигаемым при цементации. Индивидуальная обработка, характерная для индукционной закалки, дает возможность получить распределение характеристик по длине шипов в соответствии с действующими там нагрузками. Если при цементации твердость и глубина высокопрочного слоя постоянны по всей длине, то при индукционной закалке и прерывистом самоотпуске удастся получить особо высокую твердость (до 67 HRC) и большую глубину высокопрочного слоя у вершины шипов, где действуют высокие контактные напряжения, и пониженную твердость 50–56 HRC при небольшой глубине этого слоя у основания шипа. Это обеспечивает высокое сопротивление максимальным на этом участке статическим, динамическим и циклическим нагрузкам при сохранении достаточного уровня сопротивления износу [9–10].

Однако индивидуальная обработка при индукционной закалке требует разработки технологии упрочнения для каждого типоразмера крестовин с созданием индивидуального оборудования и оснастки.

В качестве индуктора применяется устройство с расположением витков, приведенном на рисунке 3. Плюсом и минусом указано направление тока в витках 1. Крестовина 2 расположена на опоре 3. Нагрев в таком устройстве происходит с одновременным вращением крестовины на опоре. При этом магнитные силовые линии  $H$  пересекаются крестовиной в разных направлениях, что позволяет обеспечить равномерный нагрев рассматриваемого изделия, имеющего сложную форму.

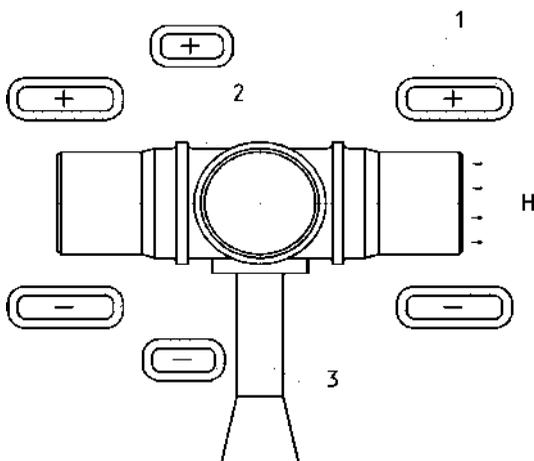


Рисунок 3 – Схема расположения крестовины в индукторе:  
1 – витки индуктора; 2 – крестовина; 3 – опора

Охлаждающее устройство (рисунок 4) включает в себя сосуд 1, охватывающий крестовину 2 с зазором, камеру выравнивания давления 3, диафрагму 4 с центральным отверстием 5. В дне 6 имеется паз 7 для размещения опоры 15 крестовины. Боковые стенки 8, 9 сосуда 1 могут приподниматься, что делает доступным перемещение крестовины после нагрева внутри сосуда. Для подвода воды служит питающий патрубок 11, который отделяется от камеры выравнивания давления краном 12. В камере выравнивания давления имеется сливной патрубок 13 с краном 14. Перед закалкой поднимаются стенки 8, 9, смонтированные на корпусе охладителя 10, и в сосуд 1 вводится крестовина на опоре 15. Опора проходит через паз 7. Стенки опускаются и защелкиваются в нижнем положении. Затем открывается кран 12, одновременно закрывается кран 14 на сливном патрубке 13, и охлаждающая жидкость направляется под давлением в камеру выравнивания давления 3. Здесь

она образует направленный поток за счет изменения направления движения. Диафрагма 4 защищает крестовину от преждевременного попадания брызг воды, приводящих к образованию на поверхности трооститных пятен, что недопустимо.

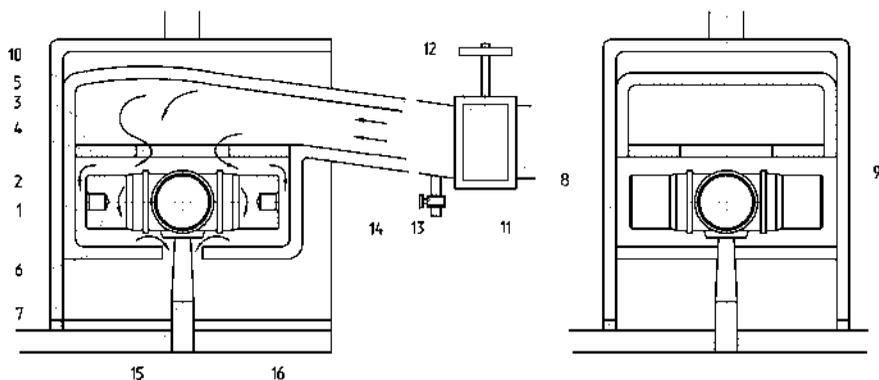


Рисунок 4 – Охлаждающее устройство:

- 1 – сосуд; 2 – крестовина; 3 – камера выравнивания давления; 4 – диафрагма;  
 5 – центральное отверстие диафрагмы; 6 – дно; 7 – паз дна; 8, 9 – боковые стенки;  
 10 – корпус охладителя; 11 – питающий патрубок; 12 – кран; 13 – сливной патрубок;  
 14 – кран; 15 – опора; 16 – стол

Через центральное отверстие 5 диафрагмы 4 в сосуд 1 попадает сформировавшийся поток воды под высоким давлением, который обтекает крестовину со всех сторон и вытекает через щелевой паз 7. При этом в сосуде высокое давление воды поддерживается вследствие ограниченного размера паза 7. После окончания охлаждения кран 12 закрывается. Боковые стенки поднимаются, и крестовина на опоре 15 выдвигается из охладителя. Открывается кран 14, обеспечивающий слив оставшейся воды.

Нагрев крестовины в индукторе происходит равномерно. Охлаждение крестовин ведется по ряду режимов с целью определения качества нагрева и выбора оптимальных условий самоотпуска. Применяется прерывистое охлаждение, оно состоит из двух охлаждений различной длительности и паузы между ними. Нагретая выше критических температур крестовина охлаждается первый раз в течение времени, обеспечивающего образование вдоль всей поверхности изделия мартенсита на глубину слоя не менее 1,6 мм, после чего охлаждение прекращается.

Во время образовавшейся паузы тепло от более массивного (и обладающего большим запасом тепла) тела крестовины направляется к основанию шипов и далее к торцам. В какой-то момент температура у основания существенно выше (300 °С), чем у торцов (150 °С), соответственно отпуск мар-

тенсита выше, твердость меньше. При этом достигается неравномерная твердость вдоль шипов, обеспечивающая распределение характеристик, которое соответствует особенностям приложения нагрузок. Второе охлаждение в данном случае приводит к фиксации возникшего благоприятного распределения характеристик. Длительность второго охлаждения должна обеспечить сохранение некоторого остаточного тепла, которое существенно не влияет на распределение твердости, но дает возможность провести длительный самоотпуск торцов шипов при 100–150 °С, что снижает их склонность к сколам. Если не провести второе охлаждение, твердость шипов упадет ниже допустимого уровня.

Возможны два типа прерывистого самоотпуска.

1 С малым первым охлаждением, большим остающимся уровнем тепла в теле крестовины и, следовательно, с коротким временем паузы, за которое происходит нагрев основания шипа крестовины.

2 С относительно большим временем первого охлаждения и относительно большим временем паузы.

Первый тип позволяет получить существенное снижение твердости у основания шипа крестовины, но чувствителен к геометрическим отклонениям размеров поковки. Второй тип приводит к меньшему снижению твердости у основания шипа крестовины, но более стабилен.

С целью получения оптимального сочетания твердости на шипах и у основания шипа было экспериментально установлено, что время первого охлаждения должно составлять от 3 до 5 секунд, а соответствующее время паузы – до 7 с. Для обеспечения низкого самоотпуска (100–150 °С) второе охлаждение должно иметь длительность 3 с.

С учетом результатов экспериментов были изготовлены опытные образцы крестовин по двум технологиям: из стали 20ХГНТР с последующей цементацией, закалкой и отпуском и из стали 60ПП с последующей индукционной закалкой при глубинном нагреве с прерывистым самоотпуском.

Данные крестовины были подвергнуты испытаниям при действии статических нагрузок и усталостным при постоянной средней нагрузке цикла, соответствующей пределу прочности детали. При этом статические и усталостные испытания крестовин проводились при нагружении, обеспечивающем максимальный изгибающий момент в зоне галтели шипа, который реализуется при максимальном крутящем моменте двигателя, который возникает на первой передаче.

Результаты статических испытаний в условиях кручения изготовленных из сталей 60ПП и 20ХГНТР нескольких образцов крестовин приведены в таблице 1. Полученные в результате динамических испытаний на усталость зависимости амплитуды нагрузки от числа циклов нагружения приведены на рисунке 5.

Таблица 1 – Результаты статических испытаний крестовин при кручении

В ньютонах на метр

Материал крестовин	Крутящий момент без остаточной деформации и разрушения			
	Образец 1	Образец 2	Образец 3	Образец 4
60ПП	29000	30000	29500	31500
20ХГНТР	25000	27500	22200	24000

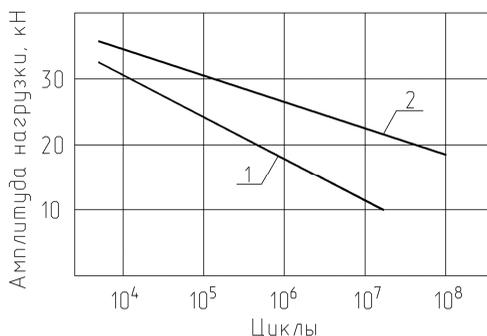


Рисунок 5 – Результаты усталостных испытаний крестовин:

1 – из стали 20ХГНТР; 2 – из стали 60ПП

Проведенные испытания деталей, изготовленных в соответствии с разными технологиями, показали:

- крестовины из стали 60ПП при кручении превосходят серийные из цементируемых марок стали по пределу прочности почти на 20 %;
- циклическая долговечность на всех уровнях нагружения у крестовин из стали 60ПП в 5–10 раз выше, чем у серийных из цементируемых марок стали.

#### Выводы.

1 Технология изготовления крестовин из стали 60ПП с нагревом токами высокой частоты обеспечивает повышение механических характеристик: увеличение твердости в местах работы иглол подшипника (большее сопротивление бринеллированию), статической и циклической прочности (по сравнению с изготовлением из легированных сталей и цементации).

2 Повышение статической прочности деталей обусловлено снижением хрупкости стали у основания крестовины вследствие снижения твердости на этом участке, а высокий уровень усталостной прочности связан с наличием значительных сжимающих остаточных напряжений, характерных для поверхностной закалки с применением нагрева токами высокой частоты.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Кравченко, В. И. Карданные передачи: конструкции, материалы, применение / В. И. Кравченко, Г. А. Костюкович, В. А. Струк. – Минск : Тэхналогія, 2006. – 409 с.
- 2 Малаховский, Я. Э. Карданные передачи / Я. Э. Малаховский, А. А. Лапин, Н. К. Веденев. – М. : Машгиз, 1962. – 156 с.

3 Проектирование универсальных шарниров и ведущих валов / А. Х. Беркер [и др.]. – Л. : Машиностроение, 1984. – 463 с.

4 Карданные передачи ОАО «Белкард» и перспектива развития их конструкций / Г. А. Костюкович [и др.] // Труды НАМИ. – 2019. – № 3. – С. 43–52.

5 Карданные передачи грузовых автомобилей. Проблемы и решения / С. Н. Иванов [и др.] // Автомобильная промышленность. – 1992. – № 11. – С. 12–15.

6 **Заславский, О. Я.** Системный подход как метод исследования долговечности карданной передачи / О. Я. Заславский // Автомобильная промышленность. – 1981. – № 11. – С. 21–24.

7 Методы создания конструкций карданных передач повышенного ресурса для наземных транспортных средств и сельскохозяйственной техники / Г. А. Костюкович [и др.] // Наука и техника. – 2023. – Т. 22, № 2. – С. 119–126.

8 **Иванов, С. Н.** Карданные передачи ведущих валов трансмиссий машин и систем (конструкция, теория, расчет, испытания, эксплуатация, ремонт) / С. Н. Иванов. – М. : НАМИ, 2014. – 232 с.

9 Fatigue resistance performance of universal cardan joint for automotive application / A. S. M. Cardoso [et al.] // Engineering Failure Analysis. – 2022. – Vol. 135. – Article 106128.

10 Material study and weight optimization of universal joints through finite element analysis / A. Agarwal [et al.] // AIP Conference Proceedings. – 2024. – Vol. 3217. – Article 040008.

11 **Шепеляковский, К. З.** Самоотпуск стали при высокочастотной закалке / К. З. Шепеляковский. – М. : Машгиз, 1955. – 108 с.

12 **Костюкович, Г. А.** Технология изготовления крестовин карданных валов из стали пониженной прокаливаемости 60ПП / Г. А. Костюкович // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Тэхніка. Інфарматыка. Біялогія. Хімія. Экалогія. Эканоміка. – 2003. – № 1. – С. 68–75.

*G. A. KOSTUKOVICH<sup>1</sup>, A. V. POPRYKAILO<sup>1</sup>, Y. V. AUCHYNNIKAU<sup>2</sup>,  
A. I. VERAMEICHYK<sup>3</sup>, V. M. KHVISEVICH<sup>3</sup>, D. A. LINNIK<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup> Open Joint Stock Company «Belcard», Grodno, Belarus*

*<sup>2</sup> Grodno State University named after Ya. Kupala, Grodno, Belarus)*

*<sup>3</sup> Brest State Technical University, Brest, Belarus)*

## **TECHNOLOGY OF HEAT TREATMENT OF CARDAN TRANSMISSION CROSSES BY HIGH-FREQUENCY CURRENTS**

The technology of manufacturing cardan transmission crosses from low-hardenability steel 60PP using surface induction hardening with deep heating is presented. As a result of the research, the technology of heat treatment is substantiated, it allows to increase its static and dynamic loads.

**Keywords:** cardan transmission, cross, wear, destruction, load, contact stresses, carburization, induction hardening, hardness, testing.

Получено 28.10.2024

УДК 625.852

С. З. КУРБОНОВ

*Автомобильно-дорожный научно-исследовательский институт, Ташкент, Узбекистан*

## **ПРИМЕНЕНИЕ ЩЕБЕНОЧНО-МАСТИЧНОГО АСФАЛЬБЕТОНА В УСЛОВИЯХ ДОРОЖНО-КЛИМАТИЧЕСКИХ ЗОН УЗБЕКИСТАНА**

Выполнено сравнение физико-механических характеристик щебеночно-мастичных асфальтобетонов и используемых в настоящее время в Узбекистане горячих мелкозернистых плотных асфальтобетонных смесей. Представлены параметры щебеночно-мастичных асфальтобетонов, которые следует использовать в качестве исходных данных при расчетах дорожных покрытий.

**Ключевые слова:** щебеночно-мастичный асфальтобетон, дорожное покрытие, колея, расчетные параметры.

В настоящее время в Узбекистане при эксплуатации автодорог возникают проблемы, связанные с состоянием верхнего слоя дорожного покрытия. В частности, в условиях жаркого и сухого климата в уложенной асфальтобетонной смеси под воздействием тяжелых автомобилей на поверхности дороги образуются следы колес (колея). С целью анализа причин их появления выполнен ряд экспериментов. Результаты определения физико-механических характеристик горячих мелкозернистых плотных асфальтобетонных смесей типа Б марки I, эксплуатируемых в различных регионах страны, представлены в таблице 1.

Полученные в результате экспериментов данные демонстрируют, что свойства асфальтобетона, применяемого во всех дорожно-климатических зонах Узбекистана, в большинстве случаев соответствуют требованиям ГОСТ 9128-2013 [1]. Однако глубина колеи при температуре 60 °С, которая является технико-эксплуатационным показателем асфальтобетонного покрытия, в 3,5–6,0 раз превышает требования существующих стандартов (по ГОСТ Р 58401.2-2019 [2] максимально должно быть 3,5 мм). Это означает, что асфальтобетонные смеси, произведенные на основе стандарта [1], не соответствуют сегодняшнему сухому жаркому климату нашей страны и не могут применяться абсолютно на всех объектах. В качестве пути решения описанной проблемы может рассматриваться замена горячего мелкозернистого плотного асфальтобетона марки Б на щебеночно-мастичный асфальтобетон, полимерасфальтобетон, сероасфальтобетон и асфальтобетон на основе каучука. Поэтому имеется необходимость исследования свойств смесей, которые могут быть использованы для формирования верхнего слоя асфальтобетонного покрытия.

В настоящее время Автомобильно-дорожный научно-исследовательский институт проводит исследования щебеночно-мастичных асфальтобетонов, технические требования к которым приведены в ГОСТ 31015-2002 [3]. В данной статье обобщаются результаты этих работ.

Таблица 1 – Физико-механические характеристики горячей мелкозернистой плотной асфальтобетонной смеси типа Б марка I

Показатель	Дорожно-климатическая зона						
	Китаб	Андижан	Ахангаран	Ташкент	Фергана	Ургенч	Хавос
Водонасыщение по объему, %	1,5	2,2	4,0	2,5	2,9	3,0	2,4
Пористость минеральной части, %	15,3	16,0	18,8	16,9	15,9	16,5	15,1
Остаточная пористость, %	2,5	2,9	4,3	3,7	3,1	2,8	2,5
Предел прочности при сжатии, при температуре 50 °С, МПа	2,1	1,6	1,3	1,4	1,6	1,5	1,7
Предел прочности при сжатии, при температуре 20 °С, МПа	5,5	3,9	2,9	3,4	4,1	4,5	4,7
Предел прочности при сжатии, при температуре 0 °С, МПа	8,3	10,5	12,7	11,3	10,8	9,3	9,5
Водостойкость	0,94	0,91	0,85	0,89	0,91	0,90	0,95
Сдвигоустойчивость по коэффициенту внутреннего трения	0,98	0,93	0,88	0,91	0,93	0,97	0,99
Сдвигоустойчивость по сцеплению при сдвиге при температуре 50 °С, МПа	0,43	0,39	0,36	0,39	0,38	0,41	0,42
Трещиностойкость по пределу прочности на растяжение при расколе при температуре 0 °С, МПа	4,6	5,5	6,6	5,3	5,1	4,3	4,5
Глубина колеи при температуре 60 °С, мм	12,3	14,1	20,5	15,9	14,6	13,8	12,9
Средняя плотность, кг/м <sup>3</sup>	2450	2360	2300	2340	2360	2440	2450

Щебеночно-мастичный асфальтобетон представляет собой уплотненную щебеночно-мастичную асфальтобетонную смесь, в качестве которой выступает рационально подобранная смесь минеральных материалов (щебня, песка и минерального порошка), дорожного битума (с полимерными или другими добавками или без них) и стабилизирующей добавки, взятых в определенных пропорциях и перемешанных в нагретом состоянии.

Щебеночно-мастичные асфальтобетонные смеси и щебеночно-мастичный асфальтобетон (далее – асфальтобетон) в зависимости от крупности применяемого щебня подразделяют на три вида: ЩМА-20, ЩМА-15, ЩМА-10 (число соответствует наибольшему размеру щебня в мм). В щебеночно-мастичные асфальтобетонные смеси добавляют щебень, который должен соответствовать ГОСТ 8267-93 [4], песок (ГОСТ 8736-2014 [5]) и ГОСТ 31424-2010 [6]), порошок минеральный (ГОСТ 16557-2005 [7]) и вязкие нефтяные битумы (их характеристики приведены в ГОСТ 22245-90 [8] и ГОСТ 33133-2014 [9]). Расход щебеночно-мастичной асфальтобетонной смеси составляет 25,0 кг/м<sup>2</sup>.

Учеными разных стран мира проводятся исследования свойств щебеночно-мастичных асфальтобетонных смесей с целью определения оптимального состава и размеров частиц добавок для получения более высокой прочности дорожного покрытия и снижения износа его поверхности. Так, в работах [10, 11] рассматривается применение резиновой крошки, в [12–15] – волокон целлюлозы, в [16, 17] – отходов теплоэлектростанций и цементного производства. В статье [18] анализируется влияние на колееобразование полимерных модификаторов. Механические характеристики щебеночно-мастичного асфальтобетона анализируются в [19].

Выполнено определение физико-механических свойств щебеночно-мастичных асфальтобетонов на основе добавок РКМ-2 и TOPCEL с применением методик испытаний, представленных в ГОСТ 12801-98 [20] и приложениях В и Г ГОСТ 31015-2002 [3]. Результаты исследования, демонстрирующие соответствие измеренных значений нормативным требованиям, представлены в таблице 2.

**Таблица 2 – Физико-механические характеристики щебеночно-мастичного асфальтобетона**

Показатель	Требование ГОСТ 31015-2002	Состав	
		на основе до- бавки РКМ-2	на основе до- бавки TOPCEL
Водонасыщение по объему, %	1,5–4,0	2,5	4,0
Пористость минеральной части, %	15–19	16,7	16,7
Остаточная пористость, %	2,0–4,5	2,1	3,4
Предел прочности при сжатии при температуре 50 °С, МПа	Не менее 0,7	1,5	0,9
Предел прочности при сжатии при температуре 20 °С, МПа	Не менее 2,5	5,0	3,0
Коэффициент внутреннего трения	Не менее 0,94	0,95	0,94
Сдвигоустойчивость по сцеплению при сдвиге при температуре 50 °С, МПа	Не менее 0,20	0,29	0,23
Водостойкость при длительном водонасыщении	Не менее 0,75	0,86	0,77
Трещиностойкость по пределу прочности на растяжение при расколе при температуре 0 °С, МПа	3,0–6,5	5,1	4,2
Глубина колеи при температуре 60 °С, мм	–	3,50	8,85
Средняя плотность, кг/м <sup>3</sup>	–	2370	2340

При расчетах дорожных покрытий с учетом выполненных исследований рекомендовано использовать значения физико-механических характеристик щебеночно-мастичной асфальтобетонной смеси в соответствии с ПНСТ 265-2018 [21], которые приведены в таблицах 3–5. Средняя плотность асфальтобетона составляет 2400 кг/м<sup>3</sup>, коэффициент теплопроводности – 1,4 Вт/м·К.

**Таблица 3 – Характеристики асфальтобетонов при расчете на растяжение при изгибе под кратковременными нагрузками**

Асфальтобетон на битуме марки	Расчетный модуль упругости $E_r$ , ГПа	$m$	$\alpha$	Нормативное сопротивление растяжению при изгибе $R_{st}$ , МПа
БНД 40/60	7,40	6,0	5,6	10,0
БНД 60/90	5,60	5,5	5,9	9,8
БНД 90/130	4,55	5,0	6,3	9,5

*Примечание* –  $m$  – показатель степени, зависящий от свойств материала рассчитываемого монолитного слоя;  $\alpha$  – коэффициент, учитывающий различие в реальном и лабораторном режимах растяжения повторной нагрузкой, а также вероятность совпадения во времени расчетной (низкой) температуры покрытия и расчетного состояния грунта рабочего слоя по влажности.

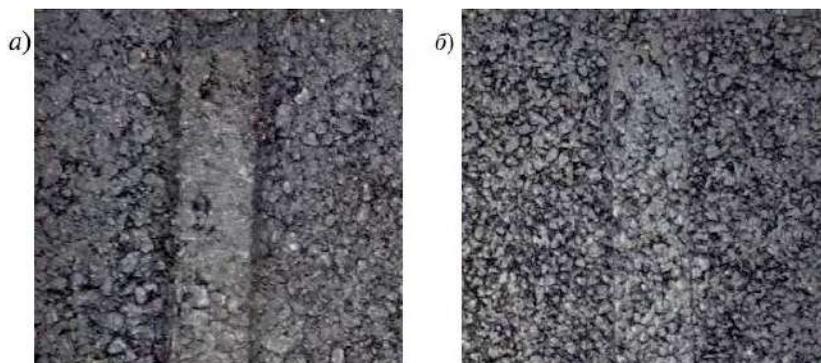
**Таблица 4 – Значение кратковременного модуля упругости  $E_y$  для расчета по допускаемому упругому прогибу и по условию сдвигоустойчивости**  
В гигапаскалях

Марка битума	При температурах покрытия, °С			
	+10	+30	+40	+50
БНД 40/60	5,4	2,10	1,20	0,70
БНД 60/90	4,7	1,70	0,86	0,60
БНД 90/130	4,0	1,16	0,73	0,53

**Таблица 5 – Расчетные значения модуля упругости  $E$  асфальтобетонов при расчете на длительную нагрузку**

Температура, °С	+20	+30	+40	+50
Модуль упругости, МПа	380	320	280	240

В результате исследований установлено, что на дорогах из щебеночно-мастичного асфальтобетона, спроектированных в соответствии с приведенными в таблицах 3–5 данными, глубина колеи снижается до допускаемых значений, как это видно на рисунке 1.



**Рисунок 1 – Наблюдаемая глубина колеи: горячий мелкозернистый плотный асфальтобетон типа Б (а) и щебеночно-мастичный асфальтобетон (б)**

Разработанная в Узбекистане в результате обширных исследований щебеночно-мастичная асфальтобетонная смесь была опробована на верхних слоях двух участков дорожного строительства: трехуровневого путепровода, соединяющего Юкори-Чирчикский и Кибрайский районы Ташкентской области, и на путепроводе на автодороге Кичик – Халка в Юнусабадском районе Ташкента. Уложенный щебеночно-мастичный асфальтобетон за время сезонных наблюдений изменений не выявил, также на покрытии не наблюдались следы от колеи. Это позволило включить результаты полученных научно-исследовательских работ в ведомственный строительный норматив ИКН 46-2021 [22]. В нем установлены технические требования по минимальным температурам хрупкости и размягчения вязких нефтяных битумов, при которых обеспечивается допустимый размер колеи. Некоторые их значения представлены в таблице 6.

**Таблица 6 – Региональные технические требования к битуму асфальтобетона для дорожно-климатических зон Узбекистана**

Республика, область, район	Глубина колеи, мм, не более	Технические требования к битуму	
		Температура хрупкости, °С, не ниже	Температура размягчения, °С, не ниже
Республика Каракалпакстан:			
Нукус	5,0	-19	51
Каракалпакия	5,0	-23	50
Муйнак	5,0	-18	50
Чимбай	5,0	-19	51
Кашкадарьинская область:			
Карши	3,0	-14	55
Гузар	4,0	-16	53
Муборек	3,5	-15	54
Шахрисабз	5,0	-18	52
Сурхандарьинская область:			
Термез	3,0	-14	55
Денау	4,0	-16	53
Шерабад	4,5	-18	52
Ферганская область:			
Фергана	4,5	-18	52
Коканд	4,5	-18	52
Наманганская область:			
Наманган	4,5	-19	51
Поп	5,5	-21	50
Чуст	5,5	-20	50
Ташкентская область:			
Алмалык	4,5	-17	51
Бекабад	4,5	-17	51
Ангрен	5,0	-21	50
Ташкент	4,0	-18	53

Также внесены изменения в градостроительные нормы и правила ШНК 2.05.02-07 [23] разработки проектной документации по применению щебеночно-мастичной асфальтобетонной смеси в Узбекистане и ШНК 3.06.03-08 [24] реализации технологии строительства.

Таким образом в ходе выполненных исследований получены следующие основные результаты:

- использование щебеночно-мастичного асфальтобетона позволило существенно увеличить срок службы нежесткой конструкции дорожной одежды;
- его применение позволяет существенно улучшить содержание дорог;
- достигается высокая технико-экономическая эффективность.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 ГОСТ 9128-2013. Смеси асфальтобетонные, полимерасфальтобетонные, асфальтобетон, полимерасфальтобетон для автомобильных дорог и аэродромов. Технические условия. – Введ. РФ 01.11.14. – М. : Стандартинформ, 2014. – 51 с.

2 ГОСТ Р 58401.2-2019. Дороги автомобильные общего пользования. Смеси асфальтобетонные дорожные и асфальтобетон щебеночно-мастичные. Система объемно-функционального проектирования. Технические требования. – Введ. РФ 31.05.19. – М. : Стандартинформ, 2019. – 15 с.

3 ГОСТ 31015-2002. Смеси асфальтобетонные и асфальтобетон щебеночно-мастичные. Технические условия. – Введ. РФ 01.05.03. – М. : Межгосударственная научно-техническая комиссия по стандартизации, техническому нормированию и сертификации в строительстве, 2003. – 23 с.

4 ГОСТ 8267-93. Щебень и гравий из плотных горных пород для строительных работ. Технические условия – Введ. РФ 01.01.95. – М. : Стандартинформ, 2018. – 12 с.

5 ГОСТ 8736-2014. Песок для строительных работ. Технические условия. – Введ. РФ 18.11.14. – М. : Стандартинформ, 2019. – 21 с.

6 ГОСТ 31424-2010. Материалы строительные нерудные из отсевов дробления плотных горных пород при производстве щебня. Технические условия. – Введ. РФ 16.02.11. – М. : Стандартинформ, 2011. – 14 с.

7 ГОСТ 16557-2005. Порошок минеральный для асфальтобетонных смесей и орвано-минеральных смесей. Технические условия. – Введ. РБ 08.12.06. – Минск : Межгосударственная научно-техническая комиссия по стандартизации и техническому нормированию в строительстве, 2005. – 24 с.

8 ГОСТ 22245-90. Битумы нефтяные дорожные вязкие. Технические условия. – Введ. 01.01.91. – М. : Изд-во стандартов , 1996. – 9 с.

9 ГОСТ 33133-2014. Дороги автомобильные общего пользования. Битумы нефтяные дорожные вязкие. Технические условия. – Введ. РФ 29.05.15. – М. : Стандартинформ, 2015. – 12 с.

10 **Nguyen, H. T. T.** Effects of crumb rubber content and curing time on the properties of asphalt concrete and stone mastic asphalt using dry process / H. T. T. Nguyen, T. N. Tran // *International Journal of Pavement Research and Technology*. – 2018. – Vol. 11, is. 3. – P. 236–244.

11 **Жданюк, В. К.** Дослідження впливу гумової крихти як стабілізуючої домішки на властивості щебенево-мастичного асфальтобетону / В. К. Жданюк, Д. Ю. Костін, В. І. Петров // *Вісник Харківського національного автомобільно-дорожнього університету*. – 2019. – Т. 2, № 86. – С. 19–23.

12 Rutting and fatigue properties of cellulose fiber-added stone mastic asphalt concrete mixtures / M. Irfan [et al.] // *Advances in Materials Science and Engineering*. – 2019. – Vol. 2019, is. 1. – Article 5604197.

13 Соловьёва, А. А. Стабилизирующие добавки различного производства для щебеночно-мастичного асфальтобетона / А. А. Соловьёва, А. Н. Новик // *Строительство уникальных зданий и сооружений*. – 2018. – № 6 (69). – С. 25–34.

14 The influence of stabilizing additives on physical and mechanical properties of stone mastic asphalt concrete / V. Yadykina [et al.] // *Procedia Engineering*. – 2015. – Vol. 117. – P. 376–381.

15 Effect of gradation variation on mixture properties in stone mastic asphalt mixtures with carbon fiber and hybrid aggregate / C. Güler [et al.] // *Materials Science*. – 2024. – Vol. 30, is. 1. – P. 71–78.

16 Study of crushed stone-mastic asphalt concrete using fiber from fly ash of thermal power plants / A. Bieliatynskiy [et al.] // *Case Studies in Construction Materials*. – 2022. – Vol. 16. – Article e00877.

17 Гончарова, М. А. Применение отходов цементной промышленности в составах щебеночно-мастичных асфальтобетонов / М. А. Гончарова, И. А. Ткачева // *Известия высших учебных заведений. Строительство*. – 2021. – № 12 (756). – С. 34–40.

18 Ядыкина, В. В. Повышение устойчивости щебеночно-мастичного асфальтобетона к колееобразованию за счет использования полимерных модификаторов / В. В. Ядыкина, С. Н. Наволокина, А. М. Гридчин // *Строительные материалы и изделия*. – 2020. – Т. 3, № 6. – С. 27–34.

19 Исследование модулей упругости щебеночно-мастичного асфальтобетона для расчета конструкций дорожных одежд / Г. Ф. Кадыров [и др.] // *Дороги и мосты*. – 2023. – № 1 (49). – С. 273–297.

20 ГОСТ 12801-98. Материалы на основе органических вяжущих для дорожного и аэродромного строительства. Методы испытаний. – Введ. РФ 01.01.99. – М. : Межгосударственная научно-техническая комиссия по стандартизации, техническому нормированию и сертификации в строительстве, 1999. – 63 с.

21 ПНСТ 265-2018. Дороги автомобильные общего пользования. Проектирование нежестких дорожных одежд. – Введ. РФ 11.04.18. – М. : Стандартинформ, 2018. – 77 с.

22 ИКН 46-2021. Инструкция по проектированию нежестких дорожных одежд.

23 ШНҚ 2.05.02-07. Автомобильные дороги. – Введ. 01.06.08. – Ташкент : Госархитектстрой, 2008. – 90 с.

24 ШНҚ 3.06.03-08. Автомобиль йўллари. – Введ. 01.07.09. – Ўзбекистон Республикаси : Давархитекткурилишқўм, 2008. – 130 с.

*S. Z. KURBONOV*

*Automotive Road Research Institute, Tashkent, Uzbekistan*

## **APPLICATION OF STONE-MASTIC ASPHALT CONCRETE IN CONDITIONS OF UZBEKISTAN ROAD-CLIMATIC ZONES**

A comparison of physical and mechanical characteristics of stone-mastic asphalt concrete and hot fine-grained dense asphalt concrete mixtures currently used in Uzbekistan is made. The parameters of the stone-mastic asphalt concrete are presented, they should be used as initial data in road surfaces calculations.

**Keywords:** stone-mastic asphalt concrete, road surface, rut, design parameters.

Получено 25.10.2024

УДК 691-419:539.374

*Е. А. ЛАЧУГИНА*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ КРУГОВОЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИНЫ**

Разработана математическая модель для нахождения частот собственных колебаний пятислойной несимметричной по толщине круговой пластины при различных вариантах закрепления контура. Предполагается, что для тонких несущих слоев справедлива гипотеза Кирхгофа, а для менее прочных легких заполнителей – гипотеза Тимошенко. Получены трансцендентные уравнения для исследования собственных чисел в зависимости от граничных условий, приведена формула для нахождения частот колебаний. Выполнен численный анализ влияния толщины внутреннего несущего слоя и упругих характеристик материалов слоев на собственные числа и частоты.

**Ключевые слова:** круглая пятислойная пластина, несимметричная по толщине пластина, собственные числа, собственные частоты.

**Введение.** Композитные конструкции, в частности пластины, находят широкое применение в различных областях современной техники: космической, авиационной, кораблестроительной; промышленном, гражданском и транспортном строительстве; химическом и энергетическом машиностроении. Поэтому актуально создание расчетных механико-математических моделей динамического деформирования тонкостенных элементов конструкции.

Методы расчета и постановки краевых задач статики и динамики трехслойных элементов конструкций приведены в монографиях [1–4]. Модели строятся на кинематических гипотезах ломаной линии, деформирование материалов подчиняется закону Гука или теории малых упругопластических деформаций. В моделях статики заполнители принимаются жесткими, воспринимающими нагрузку в тангенциальном направлении. Для динамических задач заполнители считаются легкими, пренебрегается работой касательных напряжений. В статье [5] рассмотрена задача о деформировании различными нагрузками трехслойного стержня в стационарном температурном поле. Показано, что относительный сдвиг в заполнителе от температуры не зависит. Работа [6] посвящена исследованию влияния сжимаемости заполнителя на квазистатическое деформирование трехслойной пластины. Функция сжимаемости заполнителя принята линейной по его толщине. Деформирование круглой пластины при нагружении в своей плоскости исследовано в [7]. Особенности деформирования круглых трехслойных пластин на упругих основаниях Винклера и Пастернака рассмотрены в публикациях [8, 9], где исследовано влияние сдвиговых свойств основания на НДС пластины. Изгиб пятислойной круговой симметричной по толщине пластины рассмотрен в [10, 11].

Собственные колебания и контактные задачи для неоднородных цилиндрических оболочек исследованы в статьях [12, 13]. Вынужденные колебания трехслойных круговых пластин под действием различного рода локальных нагрузок изучены в [14]. Собственные колебания симметричной по толщине пятислойной пластины исследовались в работах [15–17].

В данной работе решается начально-краевая задача о собственных колебаниях несимметричной по толщине пятислойной пластины с двумя легкими заполнителями при различных вариантах закрепления ее контура и материалах несущих слоев.

**1 Уравнения свободных колебаний несимметричной пластины.** Рассматривается упругая пятислойная круговая пластина, состоящая из трех несущих слоев и двух заполнителей. Постановка задачи осуществляется в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  (рисунок 1), которая базируется на срединной плоскости внутреннего несущего слоя. Пластина несимметрична по толщине, искомыми функциями в начально-краевой задаче являются радиальное перемещение координатной поверхности  $u(r, t)$ , относительные сдвиги в заполнителях  $\psi_1(r, t)$ ,  $\psi_2(r, t)$  и прогиб  $w(r, t)$ . Предполагается, что на контуре пластины расположена жесткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу слоев.

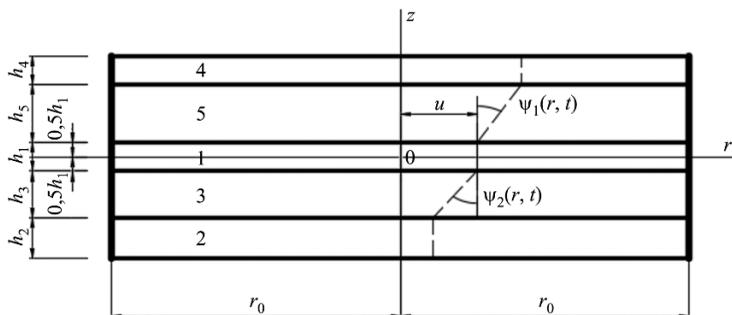


Рисунок 1 – Пятислойная пластина

Модель деформирования пластины основана на дискретно-структурном подходе, предполагающем применение различных гипотез для каждого слоя в отдельности. Так, тонкие внешние слои 1, 2, 4 обладают большой жесткостью на сдвиг и их деформирование подчиняется классическим гипотезам Кирхгофа. Относительно толстые заполнители 3, 5 подвержены сдвиговым деформациям и для описания их поведения при изгибе используется гипотеза Тимошенко. Слои пластины несжимаемы в поперечном направлении. Относительное проскальзывание между слоями отсутствует. В целом принятую систему гипотез называют «гипотезой ломаной линии» (англ. *zig-zag theory*).

Полагается, что напряжения и деформации в слоях связаны соотношениями линейной теории упругости:

$$s_{\alpha\alpha}^{(k)} = 2G_k \vartheta_{\alpha\alpha}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = K_k \theta^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi);$$

$$s_{rz}^{(k)} = 2G_k \vartheta_{rz}^{(k)} \quad (k = 3, 5), \quad (1)$$

где  $G_k, K_k$  – модули сдвига и объемной деформации материалов слоев;  $s_{\alpha\beta}^{(k)}, \vartheta_{\alpha\beta}^{(k)}$  – девиаторные,  $\sigma^{(k)}, \theta^{(k)}$  – шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $k = 1, \dots, 5$  – номер слоя.

С помощью вариационного принципа Лагранжа получена система дифференциальных уравнений в частных производных, которая описывает свободные колебания рассматриваемой пластины. Она имеет вид

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u - a_2 w_{,r} + a_3 \Psi_1 - a_4 \Psi_2) &= 0; \\ L_2(a_3 u - a_5 w_{,r} + a_6 \Psi_1) &= 0; \\ L_2(-a_4 u - a_7 w_{,r} + a_8 \Psi_2) &= 0; \\ L_3(a_2 u - a_9 w_{,r} + a_5 \Psi_1 + a_7 \Psi_2) - M_0 \ddot{w} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где запятая в нижнем индексе соответствует дифференцированию по следующей за ней координате;  $M_0 \ddot{w}$  – инерционные поперечные силы;  $\rho_k$  – плотность материала слоя; коэффициенты

$$\begin{aligned} M_0 &= r_0^2 \sum_{k=1}^5 \rho_k h_k; \quad a_1 = \sum_{k=1}^5 h_k K_k^+; \\ a_2 &= [K_4^+ h_4 (0,5 h_4 + 0,5 h_1 + h_5) + K_5^+ 0,5 h_5 (h_1 + h_5) - \\ &- K_3^+ 0,5 h_3 (h_1 + h_3) - K_2^+ h_2 (0,5 h_2 + 0,5 h_1 + h_3)]; \quad a_3 = [K_4^+ h_4 h_5 + K_5^+ 0,5 h_5^2]; \\ a_4 &= [K_2^+ h_2 h_3 + K_3^+ 0,5 h_3^2]; \quad a_5 = \left[ K_4^+ h_4 h_5 (0,5 h_1 + 0,5 h_4 + h_5) + K_5^+ h_5 \left( \frac{h_1 h_5}{4} + \frac{h_5^2}{3} \right) \right]; \\ a_6 &= \left[ K_4^+ h_5^2 h_4 + K_5^+ \frac{h_5^3}{3} \right]; \quad a_7 = \left[ K_2^+ h_2 h_3 (0,5 h_1 + 0,5 h_2 + h_3) + K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right]; \\ a_8 &= \left[ K_2^+ h_3^2 h_2 + K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right]; \quad a_9 = \left[ K_4^+ h_4 \left( \frac{h_4^2}{3} + \frac{h_1^2}{4} + h_5^2 + \frac{h_1 h_4}{2} + h_4 h_5 + h_1 h_5 \right) + \right. \\ &+ K_5^+ h_5 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_5}{2} + \frac{h_5^2}{3} \right) + K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) + \\ &+ K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + K_2^+ h_2 \left( \frac{h_2^2}{3} + \frac{h_1^2}{4} + h_3^2 + \frac{h_1 h_2}{2} + h_2 h_3 + h_1 h_3 \right) \left. \right]; \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k. \end{aligned}$$

Краевая задача замыкается добавлением к уравнениям (2) условий ограниченности решения в центре пластины и граничных условий на контуре  $r = r_0$ :

$$\text{при его заделке} \quad u = \psi_1 = \psi_2 = w = w_{,r} = 0; \quad (3)$$

$$\text{при шарнирном опирании} \quad u = \psi_1 = \psi_2 = w = M_r = 0. \quad (4)$$

После ряда преобразований, связанных с получением отдельного уравнения для прогиба  $w$  пластины, система (2) приобретает вид

$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r; \quad \psi_1 = b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r; \\ \psi_2 &= b_3 w_{,r} + C_5 r + C_6 / r; \quad L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $C_1, \dots, C_6$  – константы интегрирования; коэффициенты

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_8(a_2 a_6 - a_3 a_5) + a_4 a_6 a_7}{a_8(a_1 a_6 - a_3^2) - a_4^2 a_6}; \quad b_2 = \frac{a_3(a_2 a_8 + a_4 a_7) + a_5(a_1 a_8 - a_4^2)}{a_3^2 a_8 - a_6(a_1 a_8 - a_4^2)}; \\ b_3 &= \frac{a_4(a_2 a_6 - a_3 a_5) + a_7(a_1 a_6 - a_3^2)}{a_8(a_1 a_6 - a_3^2) - a_4^2 a_6}; \quad M^4 = M_0 D; \quad D = \frac{a_6 a_8 b_4}{b_4 b_6 - b_5^2}; \\ b_4 &= a_8(a_2 a_6 - a_3^2) - a_4^2 a_6; \quad b_5 = a_8(a_2 a_6 - a_3 a_5) + a_4 a_6 a_7; \\ b_6 &= a_8(a_6 a_9 - a_5^2) - a_6 a_7^2. \end{aligned}$$

Поскольку искомое решение ограничено в начале координат, то для сплошных пластин должно выполняться условие  $C_2 = C_4 = C_6 = 0$ .

Определяемый прогиб принимаем в виде произведения координатной функции  $v(r)$  и функции времени:

$$w(r, t) = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (6)$$

где  $\omega$  – частота собственных колебаний пластины;  $A$  и  $B$  – константы, определяемые из начальных условий движения.

Подстановка выражения (6) в последнее уравнение системы (5) приводит к бибесселеву уравнению для определения координатной функции  $v(r)$ :

$$L_3(v_{,r}) - \beta^4 v = 0, \quad (7)$$

где  $\beta^4 = M^4 \omega^2$  – собственные числа оператора  $L_3$ .

Решение уравнения (7) известно [17]:

$$v(\beta r) = C_3 J_0(\beta r) + C_4 I_0(\beta r) + C_5 Y_0(\beta r) + C_6 K_0(\beta r). \quad (8)$$

Трансцендентное уравнение для собственных чисел  $\beta_n$  оператора  $L_3$  в случае заделки контура, которое следует из (3) и (8), имеет такой же вид, как и для симметричной пластины [17]:

$$I_1(\beta r_0) J_0(\beta r_0) + I_0(\beta r_0) J_1(\beta r_0) = 0. \quad (9)$$

При шарнирно опертом контуре выполнение условий (4) приводит к следующему трансцендентному уравнению для определения собственных чисел:

$$J_0(\beta r_0) \left[ a_{10} \left( \beta I_0(\beta r_0) - \frac{I_1(\beta r_0)}{r_0} \right) + \frac{a_{11}}{r_0} I_1(\beta r_0) \right] + I_0(\beta r_0) \left[ a_{10} \left( \beta J_0(\beta r_0) - \frac{J_1(\beta r_0)}{r_0} \right) + \frac{a_{11}}{r_0} J_1(\beta r_0) \right] = 0, \quad (10)$$

где  $a_{10} = a_9 - a_2 b_1 - a_5 b_2 - a_7 b_3$ ,  $a_{11} = a_{90} + a_2 b_1 + a_5 b_2 + a_7 b_3$ ;

$$a_{90} = \left[ K_4^- h_4 \left( \frac{h_4^2}{3} + \frac{h_1^2}{4} + h_5^2 + \frac{h_1 h_4}{2} + h_4 h_5 + h_1 h_5 \right) + K_5^- h_5 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_5}{2} + \frac{h_5^2}{3} \right) + K_3^- h_3 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) + K_1^- \frac{h_1^3}{12} + K_2^- h_2 \left( \frac{h_2^2}{3} + \frac{h_1^2}{4} + h_3^2 + \frac{h_1 h_2}{2} + h_2 h_3 + h_1 h_3 \right) \right];$$

$$K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3} G_k.$$

После нахождения собственных чисел  $\beta_n$  частоты собственных колебаний определяются из соотношения, введенного в (7):

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}. \quad (11)$$

**3 Численные результаты** получены для защемленной и шарнирно опертой по контуру несимметричных по толщине пластин. Геометрические размеры слоев отнесены к радиусу  $r_0 = 1$  м. Сравнение проведено с симметричной по толщине базовой моделью пластины Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т. Изменялись толщины слоев и материалы. Вычисления проведены с использованием математического пакета Maple.

В таблице 1 приведены первые 13 собственных чисел  $\beta_n$  и собственных частот колебаний  $\omega_n$  для случая шарнирно опертого контура пластины.

*Таблица 1 – Собственные числа и частоты пятислойной пластины при шарнирно опертом ее контуре*

Номер $n$	$\beta_n / \omega_n$	Номер $n$	$\beta_n / \omega_n$
0	3,165 / 218,821	7	24,940 / 13587,361
1	6,248 / 852,755	8	28,063 / 17203,246
2	9,354 / 1911,336	9	31,186 / 21245,235
3	12,466 / 3394,661	10	34,311 / 25716,3284
4	15,582 / 5303,818	11	37,436 / 30614,070
5	18,700 / 7638,805	12	40,562 / 35940,236
6	21,819 / 10399,486	13	43,690 / 41697,142

На рисунках 2, 3 представлены графики зависимости частоты основного тона  $\omega_0$  от толщины внутреннего несущего слоя  $h_1$  для защемленной и шарнирно опертой пластины соответственно.

Рисунок 2, *а* показывает изменение частоты  $\omega_0$  при перераспределении материалов между слоями у пластины Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т: 1 –  $h_2 = h_4 = 0,02$ ,  $h_3 = h_5 = 0,1$ ; 2 –  $h_2 = 0,01$ ,  $h_4 = 0,03$ ,  $h_3 = h_5 = 0,1$ ; 3 –  $h_2 = h_4 = 0,02$ ,  $h_3 = 0,05$ ,  $h_5 = 0,15$ . Перенос материала из нижнего несущего слоя в верхний приводит к росту собственной частоты  $\omega_0$  (2) примерно на 25 % по сравнению с симметричной пластиной (1). Перераспределение материала между заполнителями 3 приводит к уменьшению частоты на 20 %.

На рисунке 2, *б* показаны графики зависимостей частот основного тона от толщины внутреннего несущего слоя  $h_1$  для различных пакетов несимметричной по толщине пластины: 1 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т; 2 – титан – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – титан; 3 – кордиерит – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – титан ( $h_2 = 0,03$ ,  $h_4 = 0,02$ ,  $h_3 = h_5 = 0,05$ ). По мере увеличения упругих характеристик материалов слоев частота основного тона возрастает.

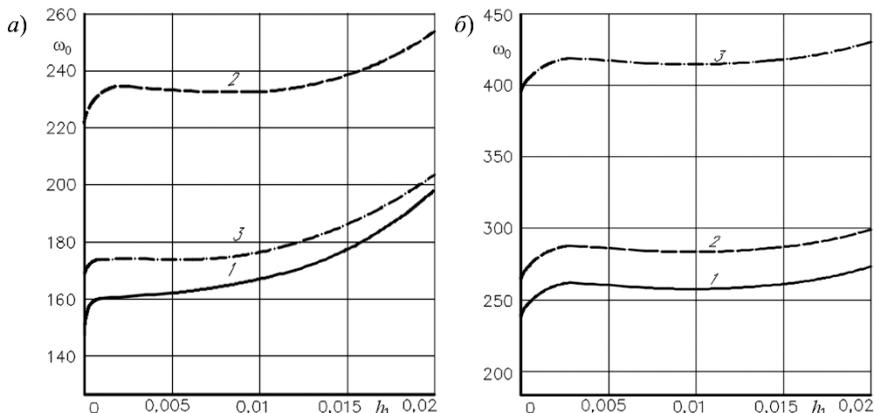


Рисунок 2 – Зависимость собственной частоты  $\omega_0$  от толщины внутреннего несущего слоя (зашемленная пластина)

Рисунок 3, *а* показывает изменение частоты при перераспределении материалов Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т между слоями: 1 –  $h_2 = h_4 = 0,02$ ,  $h_3 = h_5 = 0,1$ ; 2 –  $h_2 = 0,01$ ,  $h_4 = 0,03$ ,  $h_3 = h_5 = 0,1$ ; 3 –  $h_2 = h_4 = 0,02$ ,  $h_3 = 0,05$ ,  $h_5 = 0,15$ . Здесь асимметрия пластины приводит к уменьшению исследуемой частоты.

На рисунке 3, *б* приведены графики изменения частоты основного тона  $\omega_0$  при различных пакетах пятислойной пластины: 1 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т; 2 – титан – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – титан; 3 – кордиерит – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – титан ( $h_2 = 0,03$ ,  $h_4 = 0,01$ ,  $h_3 = h_5 = 0,1$ ). В случае использования кордиерита в качестве материала внешнего несущего слоя частота колебаний резко уменьшается. Это обусловлено большей плотностью материала по сравнению с дюралюминием и титановым сплавом.

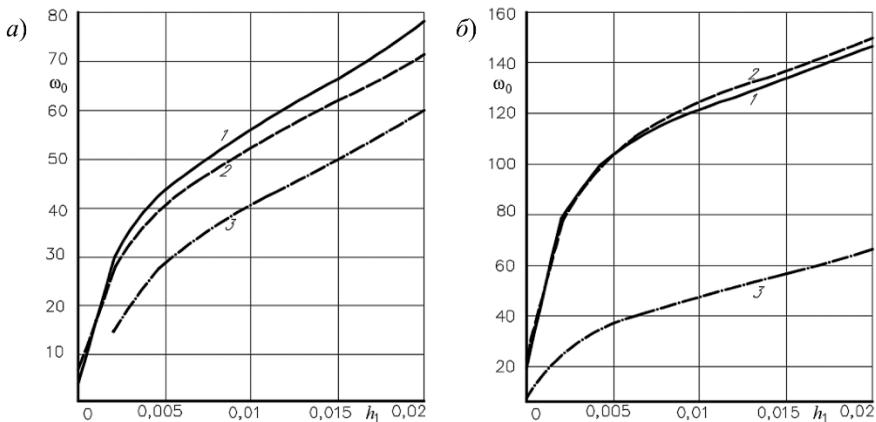


Рисунок 3 – Зависимость собственной частоты  $\omega_0$  от толщины внутреннего несущего слоя (шарнирно опертая пластина)

Отличие в поведении частоты основного тона шарнирно опертой пластины от защемленной вытекает из зависимости собственных чисел  $\beta_n$  от упругих и геометрических параметров слоев, согласно уравнению (10). В то же время собственные числа при защемленном контуре от них не зависят (9).

**Выводы.** Полученное решение начально-краевой задачи, разработанные алгоритмы и компьютерные программы позволяют численно моделировать динамическое поведение круговых пятислойных несимметричных по толщине пластин при свободных колебаниях.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T24M-004).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.

2 Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузжениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : Ideal Press, 2023. – 381 с.

3 Zhuravkov, M. A. Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Y. Lyu, E. I. Starovoirov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.

4 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов [и др.]. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.

5 Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 1 (22). – С. 31–35.

6 Захарчук, Ю. В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.

7 **Нестерович, А. В.** Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации.* – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

8 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // *Механика композитных материалов.* – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120.

9 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации.* – 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

10 **Салицкий, В. С.** Изгиб защемлённой по контуру круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // *Механика. Исследования и инновации.* – 2022. – Вып. 15. – С. 209–213.

11 **Салицкий, В. С.** Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

12 **Леоненко, Д. В.** Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических оболочек / Д. В. Леоненко // *Механика машин, механизмов и материалов.* – 2010. – № 3 (12). – С. 53–56.

13 **Tarlovakovskii, D. V.** Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells / D. V. Tarlovakovskii, G. V. Fedotenkov // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability.* – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.

14 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *Strength of materials.* – 2002. – Vol. 34, no. 5. – P. 474–481.

15 **Лачугина, Е. А.** Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е. А. Лачугина // *Механика. Исследования и инновации.* – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.

16 **Лачугина, Е. А.** Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // *Теоретическая и прикладная механика.* – 2023. – Вып. 38. – С. 227–233.

17 **Лачугина, Е. А.** Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями / Е. А. Лачугина // *Механика. Исследования и инновации.* – 2023. – Вып. 16. – С. 111–116.

*E. A. LACHUGINA*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **NATURAL OSCILLATION FREQUENCIES OF A CIRCULAR FIVE-LAYER PLATE ASYMMETRICAL IN THICKNESS**

A mathematical model is developed for finding the natural oscillations frequencies of a five-layer circular plate asymmetric in thickness for different variants of contour fastening. It is assumed that the Kirchhoff hypotheses are valid for the thin bearing layers, and the Timoshenko hypothesis is valid for the less durable lightweight fillers. Transcendental equations are obtained for studying the eigenvalues depending on the boundary conditions, and a formula for finding the oscillation frequencies is given. A numerical analysis of the effect of the inner bearing layer thickness and the layer materials elastic characteristics on the eigenvalues and frequencies is performed.

**Keywords:** circular five-layer plate, plate asymmetric in thickness, eigenvalues, eigenfrequencies.

Получено 23.10.2024

УДК 691-419:534.1

*Д. В. ЛЕОНЕНКО**Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЭНДВИЧ-СТЕРЖНЯ  
С ЛЕГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ**

Рассмотрены свободные колебания сэндвич-стержня с жестко защемленными торцами. Деформирование внешних слоев описывается моделью Бернулли, внутреннего слоя – моделью Тимошенко. Материалы слоев несжимаемы. С помощью вариационного принципа Гамильтона – Остроградского получена система дифференциальных уравнений движения, решение которой найдено методом разделения переменных. Проведен численный анализ собственных частот.

**Ключевые слова:** сэндвич-стержень, свободные колебания, легкий наполнитель.

**Введение.** Исследование спектра частот является важной задачей при проектировании инженерных конструкций. Данной проблеме в последние десятилетия посвящено значительное число публикаций. В монографии [1] рассматриваются трехслойные пластины и оболочки под действием статических и динамических нагрузок. Статья [2] посвящена собственным колебаниям скрепленного с упругим основанием Винклера стержня со сжимаемым внутренним слоем. Вынужденные колебания аналогичного стержня на двух-параметрическом основании рассмотрены в [3]. В статье [4] методом Бубнова – Галеркина решена задача о колебаниях трехслойного стержня при действии мгновенно нарастающей нагрузки. Проблема вычисления частот собственных колебаний предварительно скрученной многослойной балки с помощью алгоритма Виттрика – Вильямса рассмотрена в работе [5]. В публикациях [6–7] изучается динамическое деформирование слоистых стержней при различной структуре внутреннего слоя. Локальное нагружение трехслойной круговой пластины на упругом основании исследовано в [8]. Работы [9–10] посвящены исследованию колебаний слоистых цилиндрических оболочечных конструкций. В данной работе анализируются свободные колебания симметричного трехслойного стержня.

**1 Постановка начально-краевой задачи.** Рассматриваются свободные колебания сэндвич-стержня. Перемещения во внешних слоях описываются моделью Бернулли, во внутреннем (заполнителе) – моделью Тимошенко. Напряжениями надавливания слоев друг на друга пренебрегаем.

Вертикальную ось  $z$  направим вверх и свяжем с левым торцом стержня. Горизонтальная ось  $x$  проходит по его центральной оси (рисунок 1). Задачу будем решать в перемещениях, поэтому в качестве искомого принимаем прогиб стержня  $w(x, t)$  и относительный угол сдвига нормали во внутреннем слое  $\psi(x, t)$  при деформированном состоянии.

На границах слоев перемещения  $u^{(k)}$  вдоль оси  $x$  непрерывны и определяются через искомые функции:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= c\psi - zw_{,x} & (c \leq z \leq c+h); \\ u^{(3)} &= z\psi - zw_{,x} & (-c \leq z \leq c); \\ u^{(2)} &= -c\psi - zw_{,x} & (-c-h \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $z$  – расстояние от рассматриваемой точки до центральной оси стержня; запятые в нижнем индексе здесь и далее обозначают производные по следующим за ними переменным.

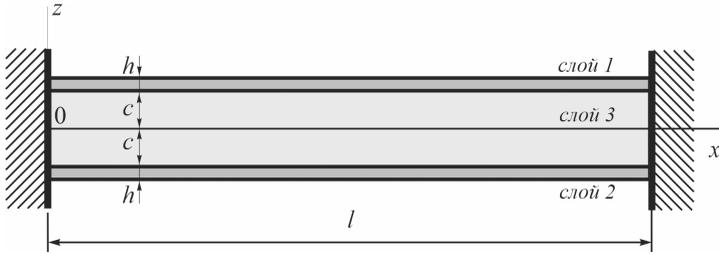


Рисунок 1 – Сэндвич-стержень

Для вычисления напряжений используем закон Гука в девиаторно-скалярном виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)} &= \left( K_b + \frac{4}{3} G_b \right) \epsilon_{xx}^{(k)} \quad (k = 1, 2); \\ \sigma_{xx}^{(3)} &= \left( K_f + \frac{4}{3} G_f \right) \epsilon_{xx}^{(3)}; \quad \sigma_{xz}^{(3)} = 2G_f \epsilon_{xz}^{(3)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\sigma_{xx}^{(k)}$  – нормальное напряжение в  $k$ -м слое;  $K_{b(f)}$ ,  $G_{b(f)}$  – модули объемной деформации и сдвига материала несущих слоев (индекс  $b$ ) и заполнителя (индекс  $f$ ) соответственно.

В слоях стержня действуют изгибающие моменты  $M^{(k)}$  и продольные силы  $N^{(k)}$

$$M^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z dz; \quad N^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} dz, \quad (3)$$

где  $b_0$  – ширина поперечного сечения.

Уравнения движения получим, используя вариационный принцип Гамильтона – Остроградского [11],

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (E_k - W) dt = 0; \quad \int_{t_0}^{t_1} (\delta E_k - \delta W) dt = 0,$$

где  $E_k$  – кинетическая энергия системы;  $W$  – потенциальная энергия деформации.

При определении потенциальной энергии деформации пренебрегаем слагаемыми, обусловленными действием касательных напряжений  $\sigma_{xz}$ . Такой материал заполнителя будем называть легким.

Учет всех сил инерции неоправданно усложняет задачу. Поэтому оставим лишь слагаемое, соответствующее поперечным колебаниям стержня. Используя соотношения для потенциальной и кинетической энергий, после преобразований получаем систему дифференциальных уравнений движения в усилиях (3):

$$c(N^{(1)},_x - N^{(2)},_x) + M^{(3)},_x = 0, \\ M ,_{xx} = m_1 \ddot{w}, \quad (4)$$

где  $M$  – обобщенный внутренний момент,

$$M = \sum_{k=1}^3 M^{(k)};$$

$m_1$  – инерционный член,

$$m_1 = 2\rho_b h + 2\rho_f c,$$

$\rho$  – плотность материала слоев.

Начально-краевая задача замыкается присоединением к (4) граничных и начальных условий.

Выразим обобщенные моменты в (3) с помощью соотношений (2) через перемещения, получим систему дифференциальных уравнений движения в перемещениях:

$$b_1 \Psi ,_{xx} - b_2 w ,_{xxx} = 0; \\ b_2 \Psi ,_{xxx} - b_3 w ,_{xxxx} = m_1 \ddot{w}. \quad (5)$$

Коэффициенты системы (5):

$$b_1 = 2c^2 \left[ h \left( K_b + \frac{4}{3} G_b \right) + \frac{1}{3} c \left( K_f + \frac{4}{3} G_f \right) \right]; \\ b_2 = 2c \left[ h \left( c + \frac{1}{2} h_l \right) \left( K_b + \frac{4}{3} G_b \right) + \frac{1}{3} c^2 \left( K_f + \frac{4}{3} G_f \right) \right]; \\ b_3 = 2h \left( c^2 + ch + \frac{1}{3} h^2 \right) \left( K_b + \frac{4}{3} G_b \right) + \frac{2}{3} c^3 \left( K_f + \frac{4}{3} G_f \right).$$

Начальные условия движения сформулируем следующим образом:

$$w(x, 0) = w_0(x); \quad \dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x), \quad (6)$$

где  $w_0(x)$ ,  $\dot{w}_0(x)$  – перемещения и скорости точек центральной оси стержня в начальный момент времени ( $t = 0$ ) соответственно.

В случае жесткого защемления торцов стержня на концах ( $x = 0, l$ ) должны выполняться следующие условия:

$$\psi = 0, \quad w = 0, \quad w_{,r} = 0. \quad (7)$$

**2 Решение задачи.** Решим систему (5) относительно неизвестных  $w(x, t)$  и  $\psi(x, t)$ . В итоге получим дифференциальное уравнение в частных производных для определения прогиба стержня:

$$w_{,xxxx} + f_1 \ddot{w} = 0, \quad (8)$$

где 
$$f_1 = \frac{m_1 b_1}{b_1 b_3 - b_2^2} > 0.$$

Численный анализ коэффициента  $f_1$  позволил установить, что для реальных материалов и толщин слоев он положителен.

Решение будем искать в виде

$$w(x, t) = T(t)W(x). \quad (9)$$

Подстановка выражения (9) в уравнение (8) позволяет разделить переменные и получить для них два независимых уравнения:

$$W_{,xxxx} - \lambda^4 W = 0; \quad \ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (10)$$

где  $\omega$  – частота собственных колебаний,  $\lambda^4 = f_1 \omega^2 > 0$ .

Первое обыкновенное дифференциальное уравнение для координатной функции в (10) имеет постоянные коэффициенты. Общее решение уравнения [12]:

$$W(x) = C_1 \operatorname{ch}(\lambda x) + C_2 \operatorname{sh}(\lambda x) + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x). \quad (11)$$

Постоянные  $C_1, \dots, C_4$  и частотное уравнение для определения  $\omega_n$  получим из граничных условий. При жестком защемлении обоих торцов стержня (7) они будут нулевыми, поэтому приходим к системе однородных алгебраических уравнений. Приравняв нулю детерминант матрицы коэффициентов системы и раскрыв его, получаем характеристическое уравнение для определения собственных чисел  $\lambda$ , где каждому числу  $s$  с номером  $n$  соответствует свой набор констант.

Подставим значения в (7) с учетом выражения (11) и получим

$$\begin{aligned} C_1 \operatorname{ch}(0) + C_2 \operatorname{sh}(0) + C_3 \cos(0) + C_4 \sin(0) &= 0; \\ C_1 \lambda \operatorname{sh}(0) + C_2 \lambda \operatorname{ch}(0) - C_3 \lambda \sin(0) + C_4 \lambda \cos(0) &= 0; \\ C_1 \operatorname{ch}(\lambda l) + C_2 \operatorname{sh}(\lambda l) + C_3 \cos(\lambda l) + C_4 \sin(\lambda l) &= 0; \\ C_1 \lambda \operatorname{sh}(\lambda l) + C_2 \lambda \operatorname{ch}(\lambda l) - C_3 \lambda \sin(\lambda l) + C_4 \lambda \cos(\lambda l) &= 0. \end{aligned}$$

Приравняв определитель к нулю, получим трансцендентное уравнение для определения собственных чисел  $\lambda_n$ :

$$1 - \operatorname{ch}(\lambda l) \cos(\lambda l) = 0.$$

После определения корней  $\lambda_n$  частоты собственных колебаний вычисляются из выражения

$$\omega_n^2 = \frac{\lambda_n^4}{f_1}.$$

Второе уравнение из (10) имеет следующее решение

$$T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t),$$

где  $A$  и  $B$  – константы интегрирования, вычисляемые по начальным условиям (6).

**3 Численный анализ.** Сравним собственные частоты колебаний сэндвич-стержней, получающиеся при учете сжимаемости заполнителя и без него. На рисунке 2 приведены зависимости указанных частот для жестко защемленного по торцам стержня от толщины несущих слоев ( $a$ ) ( $c = 0,09$ ) и заполнителя ( $b$ ) ( $h = 0,02$ ): 1 –  $\omega_0$  (несжимаемый заполнитель); 2 –  $\omega_1$  (несжимаемый заполнитель); 3 –  $\omega_0$  (сжимаемый заполнитель); 4 –  $\omega_1$  (сжимаемый заполнитель). Пакет набран из материалов Д16Т – фторопласт – Д16Т [1]. Сравнение проводилось с моделью, рассмотренной в [13].

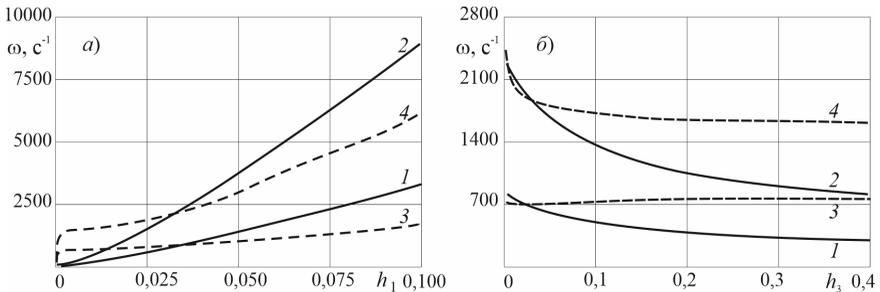


Рисунок 2 – Зависимости частот собственных колебаний от толщины несущих слоев ( $a$ ) и заполнителя ( $b$ )

Для тонкого заполнителя частоты, посчитанные по двум моделям, практически совпадают. При росте толщин слоев различие достигает порядка 200 %. Это может объясняться особенностью построения решения моделей: в случае несжимаемости заполнителя для каждого волнового числа  $n$  существует одна частота  $\omega_n$ ; при сжимаемом заполнителе колебательный процесс для каждого значения параметра  $n$  оказывается четырехчастотным, в сравнении участвовала минимальная из четырех частот. Поэтому для более полной картины необходимо в дальнейшем исследовать не только частоты, но и перемещения при свободных колебаниях.

**Выводы.** В данной работе рассмотрена методика нахождения частот собственных колебаний сэндвич-стержней с несжимаемым легким заполнителем. Получены система дифференциальных уравнений движения и характеристическое уравнение для определения собственных чисел. Проведено сравнение результатов расчетов со случаем, при котором сжимаемость заполнителя учитывается.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 344 с.
- 2 Собственные колебания трехслойного стержня на упругом основании / В. Д. Кубенко [и др.] // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42, № 5. – С. 57–63.
- 3 Леоненко, Д. В. Импульсные колебания трехслойных стержней на упругом инерционном основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 140–145.
- 4 Бабажанов, Б. Б. Колебания трехслойного стержня под действием мгновенно-нарастающей нагрузки / Б. Б. Бабажанов // Вестник науки и образования. – 2020. – № 10-2 (88). – С. 6–12.
- 5 Analysis of bending vibrations of a three-layered pre-twisted sandwich beam with an exact dynamic stiffness matrix / M. B. Hamzehkhani [et al.] // Composites Part C: Open Access. – 2024. – Vol. 14. – Article 100473. – 21 p.
- 6 Коган, Е. А. О построении общей теории трехслойных стержней при статическом и динамическом нагружении / Е. А. Коган, Е. А. Скрыпников // Современные тенденции развития науки и образования: теория и практика : сб. материалов 3-й Международ. науч.-практ. конф., Москва, 20 июня 2019 г. – М. : ВИПО, 2019. – Т. 4. – С. 198–205.
- 7 Vibration characteristics of novel multilayer sandwich beams: Modelling, analysis and experimental validations / M. Li [et al.] // Mechanical Systems and Signal Processing, 2020. – Vol. 142. – Article 106799.
- 8 Старовойтов, Э. И. Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // Механика композитных материалов. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120.
- 9 Khudoynazarov, K. Longitudinal-radial vibrations of a viscoelastic cylindrical three-layer structure / K. Khudoynazarov // Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering. – 2024. – Vol. 22, no 3. – P. 473–484.
- 10 Vibration frequency analysis of three-layered cylinder shaped shell with effect of FGM central layer thickness / M. Ghamkhar [et al.] // Scientific Reports. – 2009. – Vol. 9. – Article 1566. – 13 p.
- 11 Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
- 12 Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1976. – 576 с.
- 13 Леоненко, Д. В. Свободные колебания упругого трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем / Д. В. Леоненко // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2003. – № 3 (18). – С. 28–31.

*D. V. LEONENKO*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

### FREE VIBRATIONS OF A SANDWICH ROD WITH A LIGHT FILLER

Free vibrations of a sandwich rod with rigidly clamped ends are considered. The deformation of the outer layers is described by the Bernoulli model, and the inner layer by the Timoshenko model. The materials of the layers are incompressible. Using the Hamilton – Ostrogradsky variational principle, a system of motion differential equations is obtained, the solution of the system is found by the variables separation method. A numerical analysis of natural frequencies is carried out.

**Keywords:** sandwich rod, free vibration, lightweight filler.

Получено 31.10.2024

УДК 620.174:666.3.046.4

*А. П. ПАВЛЕНКО, Н. А. АХРАМЕНКО, М. В. БУЙ*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **АЛЮМООКСИДНАЯ КЕРАМИКА С НАНОДИСПЕРСНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ**

Рассматривается влияние нанодисперсии на спекаемость и некоторые свойства алюмооксидной керамики, получены изображения структуры материалов. Установлено, что материалы, содержащие 30 мас. % нанодисперсионной фракции, имеют меньшую на 50 °С температуру спекания и более плотную структуру спека. Абразивный износ спеченных материалов снижается примерно на 25 %.

**Ключевые слова:** керамика, структура, износостойкость, нанодисперсионная составляющая, спекание.

**Введение.** Изделия из технической керамики находят всё большее распространение в различных областях науки и техники. Наиболее успешно они конкурируют с изделиями из других материалов в условиях, где первостепенное значение имеют такие свойства материалов, как твердость, механическая прочность, термостойкость, износостойкость [1, 2]. Одно из направлений успешного использования керамических материалов в узлах трения – в различного рода нитеводителях [3].

Наибольшее распространение в качестве материала нитеводителей получила алюмооксидная керамика благодаря ряду присущих ей уникальных свойств: высокой твердости и износостойкости, механической прочности и термостойкости. С развитием керамической технологии всегда стояла задача повышения технологических параметров алюмооксидной керамики. Во многом эти свойства определяются составом керамики и ее структурой. С целью повышения механических свойств в состав керамики вводили многочисленные добавки, которые действительно позволили получить материалы с высокими значениями прочности и твердости [4].

Большое значение имеет и дисперсность исходных материалов. В настоящее время широко исследуются и применяются материалы нанодисперсионного состава. Нанодисперсионные порошки обладают уникальными свойствами, во многом отличающимися от свойств микродисперсионных порошков. Поэтому несомненный интерес представляет изучение влияния содержания нанодисперсионной фракции на свойства спеченных керамических материалов [5].

Для формования изделий сложной формы с высокими требованиями к геометрии детали наиболее подходит метод горячего литья под давлением термопластичных шликеров. Кроме того, традиционной керамической технологии присущи несомненные достоинства: большой опыт использования [6–8],

низкая энергоемкость, не требуется уникальное дорогостоящее оборудование для реализации экстремальных условий – сверхвысоких температур и давления. Известно, что изготовление литейных термопластичных шликеров из порошков высокой дисперсности и формование изделий методом горячего литья затруднительно, а порой и невозможно [6, 7]. Попытка изготовления шликеров из нанопорошков оксида алюминия была неудачной – шликеры оказались практически нетекучими даже при 30 % содержании термопластичной связки на основе парафина и воска [9, 10].

Была поставлена задача адаптации традиционной керамической технологии к порошковым смесям, содержащим нанодисперсные ингредиенты. Выбран компромисс – введение в состав микронных порошков оксида алюминия нанодисперсного размера.

Для исследований использовали композиции порошков оксида алюминия микронной дисперсности фирмы «Degussa» (Германия) (далее – порошок А), и порошков оксида алюминия нанодисперсности (Франция), (далее – порошок В). Согласно заявленным параметрам (таблица 1) порошки В содержат не менее 99 мас. %  $\alpha$ - $Al_2O_3$ , частицы имеют сферическую форму. Температура плавления 2000 °С. Из порошков А и В оксида алюминия были приготовлены композиции, состав которых приведен в таблице 2. По причине низкой текучести шликеров содержание нанопорошков в композициях было ограничено 30 мас. %.

Композиции перемешивали в фарфоровых барабанах, футерованных плитками из 100 %  $Al_2O_3$  фирмы «Brisk», корундовыми шарами той же фирмы в течение 1 часа. С целью предотвращения агрегатирования частиц в барабан добавляли 0,3 мас. % этилового спирта.

**Таблица 1 – Параметры нанопорошка**

Показатель	Значение
Содержание основной фракции $\alpha$ - $Al_2O_3$ , мас. %	99,0
Цвет	белый
Удельная поверхность (БЭТ), м <sup>2</sup> /г	35–40
Насыпная плотность, г/см <sup>3</sup>	1,7
Вероятностный размер	36
Размер средний по поверхности, нм	45
Средний массовый размер, нм	54

**Таблица 2 – Составы композиций**

Вариант	Порошок А, мас. %	Порошок В, мас. %
1	70	30
2	80	20
3	90	10
4	92	8
5	95	5
6	99	1
7	100	0

Из порошков композиции на лабораторной шликерной мешалке приготавливались термопластичные шликеры со связкой, состоящей из 90 мас. % парафина и 10 мас. % воска. Содержание связки в шликерах составило 13,6–13,8 мас. %. Из шликеров на литьевой машине У-141 была предпринята попытка формования штабиков (5,4×8,5×60,0 мм) в металлические формы для оценки свойств полученных материалов. Однако было обнаружено, что шликеры получились слишком вязкими, вероятно, по причине значительного содержания частиц нанодисперсности. Поэтому появилась необходимость дополнительного введения в состав шликеров 5 % воска, что позволило обеспечить их достаточную текучесть.

Учитывая сложности подбора состава технологической связки для каждого состава, на этапе исследования свойств материалов сочли целесообразным перейти к методу сухого прессования образцов. Однако следует помнить, что методом сухого прессования можно формовать образцы относительно простой формы, изделия сложной формы следует формовать методом горячего литья под давлением термопластичных шликеров, поэтому содержание нанодисперсии в порошках оставили прежним – не более 30 %.

Из порошка композиций на основе керамики удельной поверхностью 5000 см<sup>2</sup>/г готовили пресс-порошки с термопластичной связкой на основе поливинилового спирта (ПВС). Содержание связки в пресс-порошке – 3 мас. % из расчета на сухой ПВС. Полученная масса последовательно перетиралась через сита 2; 1; 0,45 и подсушивалась до остаточной влажности 3–4 %.

Из полученного пресс-порошка методом сухого прессования в высокоточные металлические прессформы на гидравлическом прессе усилием 60 тонн были отформованы штапики прямоугольной формы размером 8×8×60 мм. Температура прессования – 180 °С, усилие прессования – 30 т.

Выжигание связки проводили в печи электрической типа СНОЛ-1,6 в никелевых лодочках в засыпке техническим глиноземом. Скорость подъема температуры до максимального значения – 10 °С/мин, максимальная температура – 1100 °С, время выдержки при максимальной температуре – 1 ч, охлаждение с печью, со скоростью не более 10 °С/мин.

Режим спекания подбирался индивидуально для каждого состава. За температуру спекания ( $T_{сп}$ ) условно принята температура термообработки, после которой материал достигал максимальной плотности, а водопоглощение спека не превышало 0,3 %.

Спекание проводили в различных условиях:

- 1) спекание в вакуумной печи СШВЭ-1,2,5/25-И2 при разряжении  $10^{-5}$  МПа;
- 2) спекание в электрической высокотемпературной печи с хромитлантановыми нагревателями СВК 5163.00.00.00 в окислительной среде (воздух) при нормальном давлении;
- 3) спекание в туннельной газовой печи.

Изучено влияние содержания нанодисперсной фракции в порошках на структуру, некоторые свойства и износостойкость спеченного материала.

**Влияние содержания нанофракции на температуру получения плотного керамического материала.** Определены температуры спекания для материалов различного состава при термообработке в различных условиях (таблица 3). Установлено, что среда спекания и температурно-временной режим оказывают значимое влияние на свойства полученных материалов. Наибольшие значения плотности для всех материалов достигаются при спекании в вакууме или в газовой печи, при спекании в окислительной воздушной атмосфере значения плотности ниже.

*Таблица 3 – Зависимость плотности керамики от состава и условий спекания*

Состав	Печь, марка. Среда в печи	Температура спекания $T_{сп}$ , °С	Время выдержки, ч	Водопоглощение $B$ , %	Плотность, г/см <sup>3</sup>
1 3 6	СШВ-1.2,5/25-И2 Разряжение $10^{-5}$ МПа	1500	3	2,2 3,4 3,0	3,77 3,63 3,60
1 3 6	СШВ-1.2,5/25-И2 Разряжение $10^{-5}$ МПа	1550	3	0,14 3,5 2,6	3,84 3,72 3,64
1 3 6	СШВ-1.2,5/25-И2 Разряжение $10^{-5}$ МПа	1600	3	0,01 1,1 1,2	3,86 3,75 3,66
1 3 6	СВК 5163.00.00.00, воздушная при нормальном давлении	1500	3	1,1 2,5 2,0	3,65 3,62 3,63
1 3 6	СВК 5163.00.00.00, воздушная при нормальном давлении	1550	3	0,1 1,0 1,6	3,75 3,65 3,63
1 3 6	СВК 5163.00.00.00, воздушная при нормальном давлении	1600	3	0,5 2,2 0,9	3,80 3,69 3,63
1 3 6	Газовая туннельная	1600	4	0,3 0,7 1,1	3,85 3,74 3,65

Наименьшая температура спекания наблюдается у материалов, содержащих 30 мас. % нанодисперсного порошка. Таким образом, оптимальные режимы спекания порошков композиционных материалов в вакуумной печи:

- 1) для состава, содержащего 30 мас. % нанопорошка – 1550 °С – 3 часа;
- 2) для составов № 2 и № 1, включающих соответственно 8 и 1 мас. % нанопорошка, – 1600 °С – 3 часа.

Некоторые характеристики материалов, полученных по оптимальным режимам, приведены в таблице 4. Установлено, что введение в состав композиций алюмооксидной керамики 30 мас. % нанодисперсной фракции позволяет

снизить температуру спекания в вакууме примерно на 50 °С. При этом достигается максимальная плотность материала – 3,84 г/см<sup>3</sup>.

**Таблица 4 – Свойства корундовой керамики, спеченной по оптимальным режимам спекания**

Обозначение образца	Состав композиции	Температура, °С	Время, ч	Плотность, г/см <sup>3</sup>	Водопоглощение, %	Предел прочности при изгибе $\sigma$ , МПа	Твердость, HRA	Износ, мм
№ 1	70–30	1550	3	3,84	0,14	238	86	0,9
№ 3	92–8	1600	3	3,75	1,1	220	75	1,1
№ 6	99–1	1600	3	3,66	1,3	187	82	1,2
№ 7	ВК94–1	1550	4	3,77	0,02	188	79	1,2

Плотность материалов, полученных спеканием в условиях вакуума, значительно выше, чем у материалов, полученных спеканием в воздушной (окислительной) среде. Выше также их механическая прочность и твердость.

При увеличении времени выдержки от 2,5 до 4,0 часов в случае спекания в воздушной среде при 1550 °С плотность и твердость материалов практически не меняются, механическая прочность незначительно возрастает.

В условиях вакуума введение в состав КМ нанопорошков в количестве 30 мас. % позволило снизить температуру спекания на 40–50 градусов, при этом незначительно повысилась достигаемая плотность спека, прочность и твердость материалов.

Проведена оценка структуры алюмооксидной керамики, содержащих нанодисперсию. Структуру изучали на шлифах материалов на оптическом микроскопе NU-2 фирмы *Carl Zeiss Jena*. Шлифы готовили по следующей методике:

- образцы керамики заливали эпоксидной смолой с отвердителем;
- грубое шлифование проводили на шлифовальном станке 03ШП на алмазном круге зернистостью 40 мкм под струей воды в течение 20 мин;
- тонкое шлифование проводили на шлифовальном станке 03ШП на деревянном круге алмазными пастами АСМ 14/10 и АСМ 7/5 НВМ последовательно в течение 10 мин каждой;
- полирование проводили вручную на деревянном круге техническим глиноземом ГО в течение 10–20 мин;
- доводку поверхности проводили вручную на деревянном круге, покрытом фетром, окисью хрома до получения зеркальной поверхности.

Для выявления границ зерен проводили химическую обработку поверхности шлифов: 30 мин в 10%-м растворе NaOH, затем в 18%-м растворе HF в течение 0,5–2 часов (до выявления структуры). Фотографии поверхности образцов приведены на рисунке 1.

Структура образца № 1, содержащего 30 мас. % нанопорошков, более мелкокристаллическая и более однородная. Структура образцов 3, 6, 7 керамики,

показанная на рисунке 1, б–з, очень похожая – плотная, с малым количеством включений и пор, с четкими границами зерен. Структура образцов 3, 6 более крупнокристаллическая: средний размер кристаллов – 10–20 мкм, средний размер пор – 5–10 мкм. Большие темные пятна с прямыми гранями на фотографии структуры могут быть интерпретированы как следы от вырывания зерен при шлифовке.

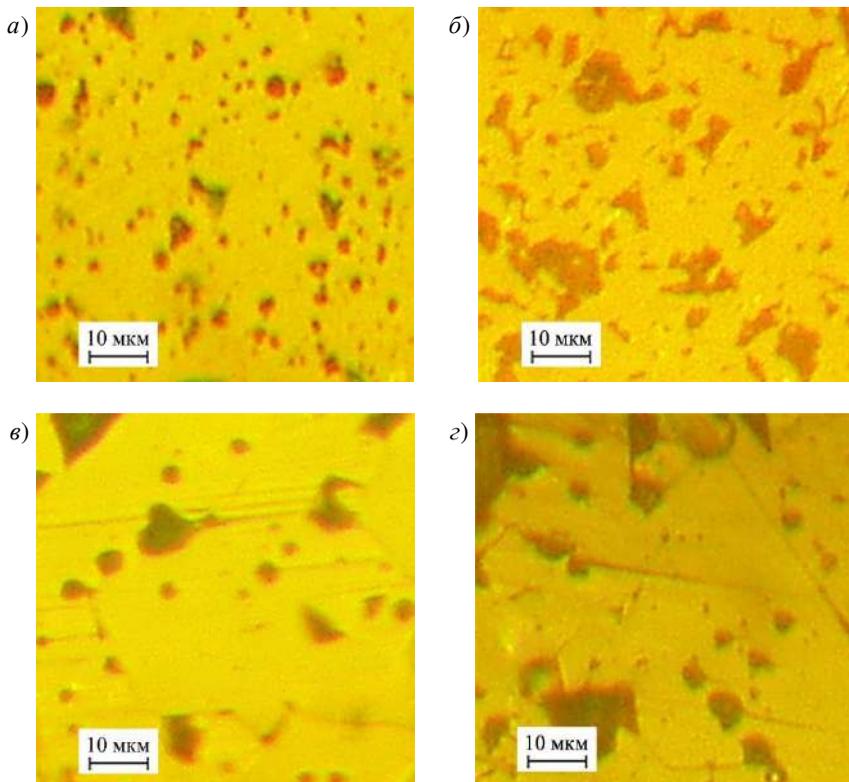


Рисунок 1 – Структура алюмооксидной керамики:  
а – образец № 1; б – образец № 3; в – образец № 6; з – образец № 7

Таким образом, анализ приведенных на рисунке 1 фотографий показывает, что введение в состав композиционного материала на основе корундовой керамики нанопорошков  $Al_2O_3$  позволяет получать порошки с более плотной и однородной структурой.

Проведена оценка износоустойчивости полученных материалов. Измерение износоустойчивости корундовой керамики проводили по разработанной ранее методике [11]. Измерения проводили на трех образцах квадратного

сечения 4×4 мм из каждой партии керамики, которые изготавливали на шлифовально-полировальном станке ЗШП-350 с помощью разработанного приспособления, обеспечивающего правильность углов параллелепипеда. Образцы шлифовали на алмазной шайбе до получения полного контакта площадью 16 мм<sup>2</sup>.

Условия эксперимента: нагрузка на образце – 8 Н, линейная скорость шайбы в зоне контакта – 15 м/с, время трения – 60 с. Образцы и шайба охлаждались водой.

Измеряли износ керамики (линейный) за определенное время. Результаты испытаний образцов представлены в таблице 5.

Таблица 5 – Износ материалов

Обозначение образца	Содержание нанопорошков, мас. %	Износ, потери веса $\Delta P$ , мг		Линейный износ $\Delta L$ , мм	
		Интервал значений	Среднее	Интервал значений	Среднее
1	30	46,3–54,7	50,5	0,9–1,0	0,9
3	8	47,8–56,6	51,9	0,92–1,3	1,1
6	1	51,7–62,0	56,8	1,10–1,25	1,2
7	ВК94-1	46,7–55,7	57,8	0,9–1,0	0,99

Установлено, что наименьший износ наблюдается у образцов № 1, содержащих наибольшее количество нанопорошков. Образцы 3 и 6, изготовленные из керамики с большим содержанием микронной фракции  $Al_2O_3$ , менее стойки к истиранию. Таким образом, введение в состав алюмооксидной керамики нанопорошков позволяет, хотя и незначительно, повысить их износостойкость.

**Выводы.** Изучено влияние содержания нанодисперсионной фракции на спекаемость порошков. Установлено, что введение в состав композиций алюмооксидной керамики 30 мас. % нанодисперсионной фракции позволяет снизить температуру спекания в вакууме примерно на 50 °С. При этом достигается максимальная плотность материала – 3,84 г/см<sup>3</sup>.

Изучены некоторые свойства полученных материалов, которые особенно значимы для керамики, используемой в деталях трения. Установлено, что материалы с 30%-м содержанием нанодисперсионной фракции обладают более высоким (примерно на 15–20 %) пределом механической прочности при изгибе, более высокими значениями твердости и микротвердости.

Методом оптической и электронной микроскопии проведена оценка структуры полученных материалов. Установлено, что материалы, содержащие 30 мас. % нанодисперсионной фракции имеют более плотную и однородную структуру, причем размер кристаллов и пор уменьшается на 5–15 %.

Проведена оценка износостойкости полученных материалов. Установлено, что увеличение содержания нанодисперсионной фракции до 30 мас. % позволяет снизить абразивный износ полученных спеченных материалов примерно на 25 %.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Функциональные материалы на основе наноструктурированных порошков гидроксида алюминия / П. А. Витязь [и др.]. – Минск : Беларуская навука, 2010. – 181 с.

2 **Nadolny, K.** State of the art in production, properties and applications of the microcrystalline sintered corundum abrasive grains / K. Nadolny // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2014. – Vol. 74, is. 9–12. – P. 1445–1457.

3 **Бельский, Е. И.** Новые материалы в технике / Е. И. Бельский, А. М. Дмитриевич, Е. Б. Ложечников. – Минск : Беларусь, 1971. – 270 с.

4 Химическая технология керамики и огнеупоров./ П. П. Будников [и др.]. – М. : Стройиздат, 1972. – 552 с.

5 **Хрустов, В. Р.** Разработка и исследование керамик на основе нанопорошков оксидов алюминия, циркония и церия : автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.16.06 / В. Р. Хрустов. – Екатеринбург : Институт электрофизики УрО РАН, 2010. – 25 с.

6 **Павленко, А. П.** Подбор состава технологической связки термопластичных шликеров из порошков неорганических материалов / А. П. Павленко // Горная механика и машиностроение. – 2016. – № 4. – С. 62–67.

7 **Павленко, А. П.** Формование изделий из алюмооксидной керамики / А. П. Павленко, Н. А. Ахраменко // Горная механика и машиностроение. – 2017. – № 3. – С. 77–85.

8 **Павленко, А. П.** Оптимизация процесса удаления технологической связки из изделий на основе керамики / А. П. Павленко, Н. А. Ахраменко // Горная механика и машиностроение. – 2019. – № 4. – С. 85–91.

9 A novel value-added utilization route for washed residue of secondary aluminum dross: Preparing corundum-spinel ceramic spheres for high-temperature heat storage / Y. Zhang [et al.] // Ceramics International. – 2024. – Vol. 50, is. 1, part B. – P. 1379–1388.

10 Synthesis and study of the properties of corundum-mullite ceramic as a component of ceramic composite materials / T. M. Volobueva [et al.] // Glass and Ceramics. – 2024. – Vol. 80, is. 9–10. – P. 357–363.

11 **Дынкович, В. Н.** Методика ускоренной оценки износостойкости керамических материалов / В. Н. Дынкович, А. П. Павленко // Трение и износ. – 2006. – Т. 27, № 2. – С. 221–224.

*A. PAVLENKO, N. AKHRAMENKO, M. BUI*  
*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

### ALUMINUM OXIDE CERAMICS WITH A NANODISPERSED COMPONENT

In this article, the effect of the nanofraction content on the sintering ability and some properties of aluminum oxide ceramics is studied, and images of the structure of the materials are obtained. It is established that materials containing 30 wt. % nanodisperse fraction have a sintering temperature that is 50 °C lower and a more dense sinter structure. The abrasive wear of sintered materials is reduced by approximately 25 %.

**Keywords:** ceramics, structure, wear resistance, nanodispersed component, sintering.

Получено 11.06.2024

УДК 691-419:539.371

*В. С. САЛИЦКИЙ*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **КРУГЛАЯ ПЯТИСЛОЙНАЯ ПЛАСТИНА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ НАГРУЗКИ**

Осуществлена постановка краевой задачи об изгибе симметричной по толщине упругой круглой пятислойной пластины с двумя заполнителями. Пластина подвергается воздействию равномерно распределенной кольцевой поперечной нагрузки. Деформирование внешних и внутренних тонких несущих слоев подчиняется гипотезам Кирхгофа. Для сравнительно толстых заполнителей выполняется гипотеза Тимошенко. Уравнения равновесия пластины получены вариационным методом Лагранжа с учетом работы касательных напряжений в заполнителях. Приведено точное решение поставленной краевой задачи и выполнена его численная апробация.

**Ключевые слова:** круглая пятислойная пластина, распределенная по кольцу нагрузка, точное решение.

**Введение.** В связи с возросшими современными требованиями промышленности к прочности и материалоемкости конструкций резко усилился спрос на использование композитных элементов. Поэтому разработка механико-математических моделей деформирования слоистых стержней, пластин и оболочек является актуальной задачей. Особую ценность имеют аналитические решения краевых задач для слоистых конструкций.

Различные подходы к построению моделей слоистых элементов таких конструкций описаны в монографиях [1–4], где рассматриваются особенности квазистатического и динамического деформирования. Для неупругих элементов применены соотношения теории малых упругопластических деформаций с отработанными для некоторых конструкционных материалов функциями пластичности Ильюшина. Приведены примеры решения конкретных задач для трехслойных и многослойных конструкций.

Изгибу трехслойных стержней и пластин посвящены работы [5, 6]. Кинематические гипотезы соответствуют ломаной линии: в несущих слоях по Кирхгофу, в заполнителе – Тимошенко. Приведены точные решения соответствующих задач и проведена их численная апробация. В [7, 8] исследован изгиб трехслойных пластин на основании Пастернака, в публикации [9] – неосесимметричное нагружение таких пластин в своей плоскости.

Динамическое воздействие на пятислойные пластины рассмотрено в статьях [10, 11].

Исследование деформирования круглой пятислойной симметричной по толщине пластины при непрерывных нагрузках проведено в [12–15]. Получены решения краевых задач и приведены численные результаты.

В данной работе представлены постановка и точное решение задачи об изгибе пятислойной круговой пластины под действием равномерно распределенной по кольцу нагрузки.

**1 Постановка краевой задачи.** Используется цилиндрическая система координат, связанная со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя (рисунок 1). Гипотезы Кирхгофа принимаются для тонких высокопрочных несущих слоев: внешних с толщинами  $h_2 = h_4$  и внутреннего с толщиной  $h_1$ . В этих слоях нормаль после нагружения не изменяет своей длины, остается прямолинейной и перпендикулярной деформированной срединной поверхности. В сравнительно толстых легких заполнителях, для которых  $h_3 = h_5$ , выполняются гипотезы Тимошенко, предполагающие наличие отклонения от перпендикуляра к деформированной срединной поверхности, называемого относительным сдвигом  $\psi(r)$ . Толщины слоев и радиальная координата отнесены к радиусу  $r_0$  пластины, через  $w(r)$  обозначен ее прогиб.

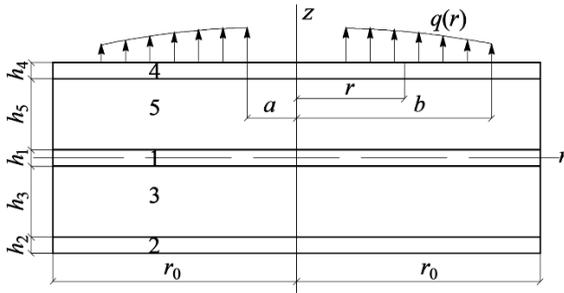


Рисунок 1 – Схема пятислойной пластины при круговой нагрузке

Предполагается, что на пластину действует кольцевая нагрузка, равномерно распределенная в области  $a \leq r \leq b$ :

$$q = q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)), \quad (1)$$

где  $q_0$  – интенсивность нагрузки;  $H_0(x)$  – известная функция Хэвисайда;  $b, a$  – внешний и внутренний радиусы силового кольца.

Система дифференциальных уравнений равновесия для определения искомых функций  $\psi(r)$  и  $w(r)$  получена в [14] при непрерывной нагрузке. В случае нагрузки (1) она в перемещениях принимает вид

$$\begin{aligned} L_2 (a_4 \psi - a_5 w_{,r}) - 2h_3 G_3 \psi &= 0; \\ L_3 (a_5 \psi - a_6 w_{,r}) &= -q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)), \end{aligned} \quad (2)$$

где запятой в индексе обозначена производная по радиальной координате;

$$a_4 = \left[ 2K_2^+ h_2 h_3^2 + 2K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right]; \quad a_5 = \left[ K_2^+ h_2 h_3 (h_1 + 2h_3 + h_2) + K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{2h_3^2}{3} \right) \right];$$

$$a_6 = \left[ 2K_2^+ h_2 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right];$$

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}; \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Граничные условия при жесткой заделке контура

$$\psi = w = w_{,r} = 0 \text{ при } r = 1. \quad (3)$$

**2 Решение краевой задачи.** В общем случае нагружения решение задачи об изгибе пятислойной круговой пластины представляется в виде [12]:

$$\psi = C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \psi_r;$$

$$w = \frac{a_5}{a_6} \int \psi dr + \frac{1}{a_6} \int L_3^{-1}(q) dr - \frac{C_1}{4a_6} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5 r^2}{4a_6} + C_6 \ln r + C_4, \quad (4)$$

где  $I(x)$ ,  $K(x)$  – функции Бесселя и Макдональда;  $\psi_r$  – неизвестное частное решение дифференциального уравнения, зависящее от вида внешней нагрузки;  $C_1, \dots, C_6$  – константы интегрирования, следующие из условий на контуре и требований ограниченности решения в центре пластины.

Подстановка нагрузки (1) в выражение интегрального оператора дает

$$\int L_3^{-1}(q) dr = q_0 \left[ H(b-r) \left( \frac{r^4 - 5b^4}{64} - \frac{b^4}{16} \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{b^2 r^2}{8} \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{b^2 r^2}{16} \right) - H(a-r) \left( \frac{r^4 - 5a^4}{64} - \frac{a^4}{16} \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{a^2 r^2}{8} \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{a^2 r^2}{16} \right) \right].$$

В силу линейности системы уравнений (2) искомое частное решение можно получить в виде разности двух решений для подобной пластины при круговой нагрузке, полученных в [15]. При нагрузке (1) оно будет

$$\psi_r = \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \left[ \frac{b^2}{r} - r + 2b (K_1(\beta b) I_1(\beta r) - I_1(\beta b) K_1(\beta r)) \right] - \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(a-r) \left[ \frac{a^2}{r} - r + 2a (K_1(\beta a) I_1(\beta r) - I_1(\beta a) K_1(\beta r)) \right] + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2 r}, \quad (5)$$

где  $\beta$ ,  $\gamma_1$  – коэффициенты, выражаемые через  $a_i$ .

Интеграл от относительного сдвига  $\psi$  в выражении для прогиба (4) с учетом частного решения (5) получаем в виде

$$\int \psi dr = \frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} \times \left[ H_0(b-r) \left( \frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) \right) + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b) I_0(\beta r) + I_1(\beta b) K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right] -$$

$$-H_0(a-r) \left( \frac{a^2-r^2}{2} + a^2 \ln \left( \frac{r}{a} \right) + \frac{2a}{\beta} (K_1(\beta a)I_0(\beta r) + I_1(\beta a)K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right) \Bigg].$$

Константы интегрирования получим из граничных условий (3) и решения (4)

$$C_1 = -\frac{q_0(b^2-a^2)}{2}, \quad C_2 = \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)} \left( \frac{b^2-a^2}{2} - bK_1(\beta)I_1(\beta b) + aK_1(\beta)I_1(\beta a) \right),$$

$$C_3 = \frac{q_0 \gamma_1}{\beta^2} (bI_1(\beta b) - aI_1(\beta a)), \quad C_5 = \frac{q_0}{8} (2b^2 - b^4 - 2a^2 + a^4), \quad C_6 = \frac{q_0}{16b_3} (b^4 - a^4),$$

$$C_4 = -\frac{a_5 \gamma_1 q_0}{a_6 \beta^4 I_1(\beta)} \left( \frac{I_0(\beta) \beta (b^2 - a^2)}{2} - bI_1(\beta b) + aI_1(\beta a) \right) + \frac{q_0 (b^4 - a^4)}{32a_6} + \frac{q_0 (b^2 - a^2)}{16a_6}.$$

Подстановка констант интегрирования в решение (4) дает

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2} \left[ \frac{I_1(\beta r)}{I_1(\beta)} \left( \frac{b^2 - a^2}{2} - bK_1(\beta)I_1(\beta b) + aK_1(\beta)I_1(\beta a) \right) + K_1(\beta r) \times \right. \\ &\times (bI_1(\beta b) - aI_1(\beta a)) + \frac{H_0(b-r)}{2} \left( \frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) \right) - \\ &\left. - \frac{H_0(a-r)}{2} \left( \frac{a^2}{r} - r + 2a(K_1(\beta a)I_1(\beta r) - I_1(\beta a)K_1(\beta r)) \right) - \frac{(b^2 - a^2)}{2r} \right], \\ w &= \frac{a_5}{a_6} \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)} \left[ \frac{I_0(\beta r)}{I_1(\beta)} \left( \frac{b^2}{2} - bK_1(\beta)I_1(\beta b) \right) - \frac{b^2 I_0(\beta) \beta}{2\beta^2 I_1(\beta)} + \frac{bI_1(\beta b)}{\beta^2 I_1(\beta)} - \frac{bI_1(\beta b)K_0(\beta r)}{\beta} - \right. \\ &\left. - \frac{b^2}{2} \ln(r) - \frac{H_0(b-r)}{2} \left( \frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln \left( \frac{r}{b} \right) + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b)I_0(\beta r) + I_1(\beta b)K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right) \right] + \\ &+ \frac{q_0}{8a_6} \left[ \left( \frac{r^4 - 5b^4}{8} - \frac{b^4}{2} \ln \left( \frac{r}{b} \right) - b^2 r^2 \ln \left( \frac{r}{b} \right) + \frac{b^2 r^2}{2} \right) H_0(b-r) + \right. \\ &\left. + b^2 r^2 (\ln r - 1) + \frac{b^2}{4} r^2 (2 - b^2) + \frac{b^4}{2} \ln r + \frac{b^4}{4a_6} + \frac{b^2}{2a_6} \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

**2 Численные результаты.** Проведен расчет перемещений пятислойной пластины, несущие слои которой толщинами  $h_1 = h_2 = h_4 = 0,02$  выполнены из дюралюминия Д16-Т, а заполнители, для которых  $h_3 = h_5 = 0,1$ , – из фторопласта. Упругие характеристики материалов приведены в [1]. Разность радиусов кольца силовой нагрузки  $b - a = 0,25$ . Ее значение  $q_0 = 1$  МПа.

Рисунок 2 иллюстрирует перемещения в пластине при различных размерах силового кольца:  $l - a = 0$ ;  $2 - a = 0,25$ ;  $3 - a = 0,5$ ;  $4 - a = 0,75$ . Наибольший прогиб имеет место при  $a = 0,25$ , относительный сдвиг – при  $a = 0,5$ .

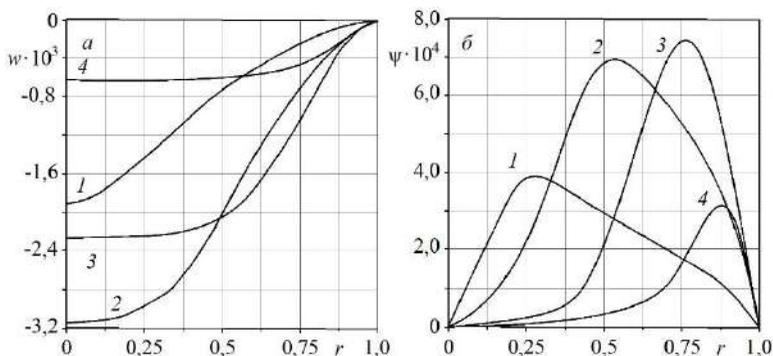


Рисунок 2 – Перемещения при различных внутренних радиусах  $a$  кольцевой нагрузки

На рисунке 3 показано изменение максимальных прогибов  $w$  в центре пластины и относительных сдвигов  $\psi$  при  $r = 0,75$  в зависимости от внутреннего радиуса  $a$  кольца нагрузки при  $b - a = 0,05$ . Здесь экстремум прогиба достигается примерно при  $a = 0,3$ , относительного сдвига – при  $a = 0,6$

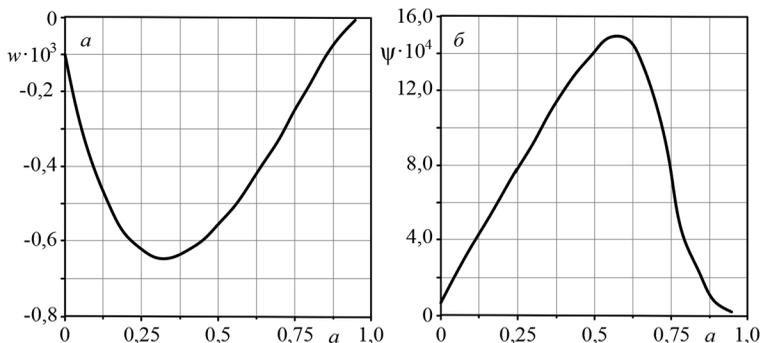


Рисунок 3 – Перемещения при различных внутренних радиусах  $a$  кольцевой нагрузки

**Заключение.** Предложенная математическая модель деформирования пятислойной симметричной по толщине упругой круглой пластины позволяет исследовать ее НДС при непрерывных и локальных кольцевых нагрузках.

*Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция».*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Aghalovyan, L.** Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan. – Singapore–London : World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.

2 **Абдусаттаров, А.** Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : Ideal Press, 2023. – 381 с.

3 **Журавков, М. А.** Математические модели механики твердого тела // М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.

4 **Zhuravkov, M. A.** Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Y. Lyu, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.

5 Деформирование ступенчатой композитной балки в температурном поле / Э. И. Старовойтов [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 4. – С. 987–993.

6 **Захарчук, Ю. В.** Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 66–75.

7 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.

8 **Козел, А. Г.** Термосиловой изгиб упругой трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 90–96.

9 **Нестерович, А. В.** Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 1 (42). – С. 85–90.

10 **Лачугина, Е. А.** Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими наполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.

11 **Лачугина, Е. А.** Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // Теоретическая и прикладная механика. – 2023. – Вып. 38. – С. 227–233.

12 **Салицкий, В. С.** Уравнения равновесия круговой пятислойной пластины в усилиях / В. С. Салицкий // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVII Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. – 2021. – Т. 1. – С. 199–201.

13 **Салицкий, В. С.** Изгиб защемленной по контуру круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15 – С. 209–213.

14 **Салицкий, В. С.** Изгиб круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2023. – Вып. 38 – С. 234–239.

15 **Салицкий, В. С.** Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

*V. S. SALICKY*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **ROUND FIVE-LAYER PLATE UNDER AXIALLY SYMMETRIC CIRCULAR LOAD**

A boundary value problem is formulated for a bending of a circular elastic five-layer plate, symmetric in thickness, with two fillers. The plate is subjected to uniformly distributed circular transverse load. Deformation of the outer and inner thin bearing layers obeys the Kirchhoff hypotheses. For relatively thick fillers, the Timoshenko hypothesis is satisfied. Equilibrium equations for the plate are obtained by the Lagrange variational method taking into account the work of the tangential stresses in the fillers. An exact solution to the boundary value problem is given and its numerical testing is performed.

**Keywords:** round five-layer plate, load distributed over a ring, exact solution.

Получено 30.10.2024

УДК 621.791

*Л. В. САМУСЕВА, Н. А. ОДИНЦОВ, М. Ю. ШЕРШНЁВ*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **ОСОБЕННОСТИ ТЕХНОЛОГИИ АРГОНОДУГОВОЙ СВАРКИ**

Приведена информация об истории возникновения сварки в среде защитного газа, существующих ее видах и областях применения. Рассмотрен технологический процесс аргонодуговой сварки неплавящимся электродом. Представлены некоторые параметры, характеризующие процесс сварки. Обсуждаются условия, сопровождающие аргонодуговую сварку изделий из алюминия, нержавеющей стали и титана, а также титана со сталью.

**Ключевые слова:** аргонодуговая сварка, неплавящийся электрод, технология сварки, сварное соединение.

**Введение.** Сваркой называют технологический процесс получения неразъемных соединений в результате установления межатомных связей между свариваемыми деталями при их местном нагреве и/или пластическом деформировании [1]. В настоящее время сварка применяется практически во всех отраслях экономики для соединения элементов толщиной от нескольких микрон (в микроэлектронике) до нескольких метров (в тяжелом машиностроении) [2, 3].

Дуговая электрическая сварка была изобретена в начале XIX века. Уже тогда было замечено, что для получения качественного соединения металлов в процессе сварки требуется удаление кислорода, азота и водорода из расплава с целью предотвращения образования нежелательных пузырьков или пор. Это потребовало применения для защиты свариваемых деталей от воздействия окружающей среды сварочной ванны или дополнительных приспособлений [4].

В 1890 году было предложено техническое решение сварки неплавящимся электродом в среде защитного газа [5] (рисунок 1, а). Но и в течение первой половины XX века возникали значительные трудности при сварке алюминия и магния, поскольку эти металлы при нагреве быстро вступают в реакцию с воздухом, что приводит к дефектам в структуре шва, которые снижают его прочность и способствуют быстрому разрушению соединения. В 1941 году был разработан технологический процесс сварки цветных металлов в защитной атмосфере гелия неплавящимся вольфрамовым электродом [6] (рисунок 1, б). Позднее в качестве защитной среды стали использовать аргон, который тяжелее кислорода и поэтому вытесняет его молекулы из области сварочной ванны, обеспечивая ее изоляцию от кислородной среды. Соответствующая сварка была названа аргонодуговой.

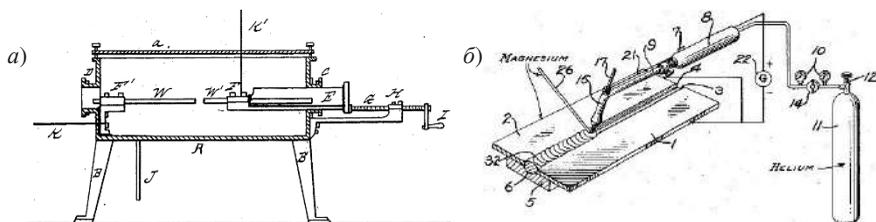


Рисунок 1 – Технические решения сварки неплавящимся электродом в среде защитного газа по патентам [1] (а) и [2] (б)

В настоящее время существуют следующие разновидности аргодуговой сварки: MMA (*Manual Metal Arc*) – ручная штучными (покрытыми) электродами; TIG (*Tungsten Inert Gas*) – ручная с использованием неплавящегося электрода под защитой инертных газов; MIG (*Metal Inert Gas*) – с плавящимся металлическим электродом (проволокой) в среде инертного/активного защитного газа с автоматической подачей присадочной проволоки. В США для автоматизированной (роботизированной) сварки TIG применяется аббревиатура GTAW (*Gas Tungsten Automatic Welding*).

К особенностям аргоновой сварки неплавящимся электродом относится возможность сваривать такие химически активные металлы, как алюминий, титан и их сплавы, нержавеющие стали, медь, бронзу, латунь, цирконий, молибден, никель и т. д. [7, 8]. Также возможно соединение друг с другом пористых [9] и разнородных материалов, например, углеродистых и легированных сталей, меди с латунью и др. Во многих отраслях промышленности аргодуговая сварка применяется для сварки тонких заготовок, в первую очередь из цветных металлов. Фактически данный вид сварки позволяет осуществлять соединение наиболее широкой номенклатуры сплавов при разнообразных конфигурациях изделий. Он обеспечивает высокое качество сварных швов, дает возможность точного поддержания глубины проплавления металла, что весьма важно при сварке тонкого слоя металла в случае одностороннего доступа к поверхности изделия. Применение такой сварки открывает широкие возможности для развития областей техники и промышленности, связанных с работой в экстремальных условиях: авиации, химического машиностроения, производства железнодорожного подвижного состава, приборостроения, строительства.

В данной работе рассматриваются факторы, которые следует принимать во внимание при использовании аргодуговой сварки для соединения деталей, изготовленных из металлов, которые находят широкое применение в конструкциях транспортных средств.

**Технология аргодуговой сварки неплавящимся электродом.** В этом случае дуга горит между свариваемым изделием и вольфрамовым электродом (рисунок 2). Через сопло горелки вдувается газ (аргон) защищающий электрод от взаимодействия с атмосферным воздухом. Со стороны в зону дуги подается присадочный материал, который не включается в электрическую цепь.

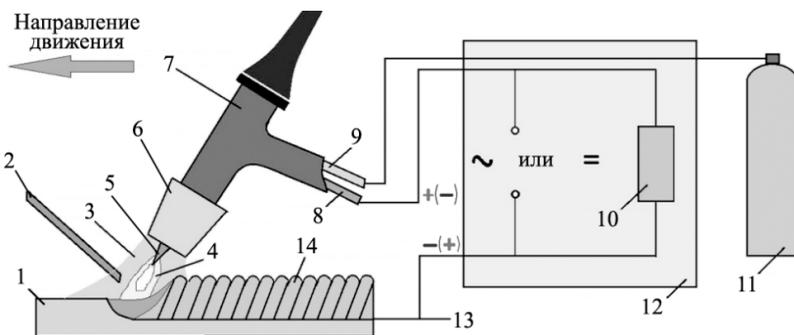


Рисунок 2 – Схема аргонодуговой сварки неплавящимся электродом:  
 1 – обрабатываемое изделие; 2 – присадочная проволока; 3 – защитный газ; 4 – электрическая дуга; 5 – вольфрамовый электрод; 6 – сопло горелки; 7 – сварочная горелка; 8 – токопровод; 9 – канал подачи газа в горелку; 10 – осциллятор; 11 – баллон с аргоном; 12 – сварочный аппарат; 13 – заземление; 14 – сварной шов

Чаще всего неплавящийся электрод изготавливается из вольфрама. Из-за своей инертной природы аргон в зоне горения дуги не вступает в химические взаимодействия с расплавленным металлом и иными газами. Кроме того, будучи на 40 % тяжелее воздуха, он защищает сварочную ванну от взаимодействия с кислородом, вытесняя его из зоны сварки.

Перенос электродного металла при аргоновой сварке осуществляется крупнокапельным или струйным путем. При крупнокапельном наблюдаются значительное разбрызгивание металла и неустойчивость процесса сварки. Малое давление в дуге предопределяет значительный размер капель, что ведет к снижению технологических характеристик по сравнению с полуавтоматической сваркой в углекислом газе. Диапазон токов, при которых реализуется крупнокапельный перенос, достаточно велик, например, для проволоки диаметром  $d = 1,6$  мм  $I_{св} = 120 \dots 240$  А. Увеличение силы тока  $I_{св}$  до 260 А приводит к струйному переносу, улучшению стабильности процесса сварки, уменьшению разбрызгивания [4]. При сварке на постоянном токе в случае его обратной полярности аргон становится средой с хорошей электропроводностью [10].

Зажигание дуги при сварке вольфрамовым электродом не может быть выполнено путем касания изделия. С одной стороны, ионизировать дуговой промежуток за счет искры между изделием и электродом достаточно сложно вследствие высокого потенциала ионизации аргона (при использовании плавящегося электрода дуга зажигается при соприкосновении проволоки с изделием вследствие появления паров железа, потенциал ионизации которых в 2,5 раза ниже, чем у аргона). С другой стороны, при соприкосновении изделия с вольфрамовым электродом он загрязняется и интенсивно оплавляется.

При аргоновой сварке неплавящимся электродом для зажигания дуги параллельно источнику питания подключается так называемый осциллятор

(см. рисунок 2), который подает на электрод высоковольтные импульсы, способные ионизировать дуговой промежуток и обеспечить зажигание дуги после включения подачи тока. Затем осциллятор переходит в режим стабилизатора, подавая импульсы на дугу при смене полярности, что обеспечивает устойчивое горение дуги и предотвращает деионизацию дугового промежутка.

При выполнении сварки на постоянном токе до 300 А на аноде выделяется 70 %, на катоде – 30 % тепла. Чтобы максимально проплавлять изделие при минимальном разогреве электрода, в большинстве случаев используется ток прямой полярности. Так свариваются титан, практически все стали. Алюминий для разрушения тугоплавкой оксидной пленки сваривают на переменном токе.

Чистый аргон в силу своей инертности не может защищать металл от влаги, различных включений и других загрязнений, которые попадают в зону сварки из присадочного металла или свариваемых кромок. Поэтому иногда к аргону добавляют 3–5 % кислорода. Он вступает в химические реакции с вредными примесями и способствует их превращению в соединения (шлаки), всплывающие на поверхность сварочной ванны, тем самым предотвращая пористость.

**Сварка алюминия.** Алюминий плавится при 627 °С, имеет относительно невысокую плотность (2700 кг/м<sup>3</sup> против 7800 кг/см<sup>3</sup> у стали), обладает высокой электропроводностью и теплопроводностью. При нагреве и расплавлении он не изменяет своего цвета, поэтому степень его нагрева трудно контролировать. При температурах 400–500 °С, близких к температуре плавления, прочность алюминия и его сплавов резко падает [11], происходит значительное снижение их вязкости, что может стать причиной развития значительной деформации и разрушения металла в зоне нагрева под действием собственного веса.

Исходя из положения элемента в электрохимическом ряду напряжения металлов алюминий активно взаимодействует с кислородом, образуя на поверхности оксидную пленку Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. Из-за высокой температуры плавления (2050 °С) такую пленку трудно растворять флюсами, поэтому обычная дуговая сварка оказывается невозможной. Пленка оксида, покрывая капли расплавленного металла, препятствует сплавлению металла сварочной ванны с основным металлом и образование шва. Она загрязняет шов неметаллическими включениями и ведет к снижению его пластичности. Для получения высококачественного сварного соединения оксидную пленку следует удалять. До сварки это осуществляется химическими и механическими способами, а во время сварки – действием эффекта катодного распыления, который заключается в интенсивном нагреве локального участка при бомбардировке катода положительными ионами, что ведет к испарению металла и эмиссии электронов, приводящей к разрушению оксидной пленки. При сварке на переменном токе такое разрушение происходит в полупериод кривой тока, при котором основной металл является катодом. Во втором полупериоде происходит только нагрев металла. Вследствие значительных отличий физических характеристик изготовленного из вольфрама неплавящегося электрода и алюминиевого сплава основного металла при сварке

на переменном токе проявляется выпрямляющее действие сварочной дуги, которое неблагоприятно сказывается на качестве сварного соединения.

**Сварка нержавеющей сталей.** Особенности нержавеющей сталей, по сравнению с углеродистыми, являются более низкая теплопроводность, большие литейная усадка и коэффициент теплового расширения, повышенное омическое сопротивление. Коррозионная стойкость таких сталей объясняется образованием на поверхности плотной пассивной пленки оксида хрома  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ . Ее наличие и химическая активность хрома ведут к усложнению процесса сваривания вследствие повышенной склонности металла к охрупчиванию и росту зерна, последствия которого нельзя устранить термической обработкой.

Нержавеющие стали характеризуются высоким содержанием хрома и никеля и представляют собой твердый раствор углерода и легирующих элементов хрома, никеля и титана в  $\gamma$ -железе, что и определяет высокую коррозионную стойкость. При сварке таких сталей из-за нагрева в интервале температур 450–850 °С комплексные карбиды железа и хрома выпадают из твердого раствора, что ведет к обеднению хромом и повышению склонности стали к межкристаллитной коррозии. Чтобы предотвратить такое выпадение, сварка должна осуществляться при малой погонной энергии сварочными материалами, содержащими элементы-стабилизаторы, в качестве которых выступают ниобий и титан.

Учитывая структурные изменения, протекающие при нагреве свариваемого металла, при выборе режима сварки следует учитывать склонность основного металла и металла шва и околошовной зоны к образованию кристаллизационных трещин, поскольку не всегда удается добиться, чтобы их механические характеристики оказались близкими к свойствам основного металла. Также требуется принимать меры по повышению стойкости к образованию пор, возникающих в результате насыщения металла водородом.

Изделия или элементы конструкции из нержавеющей стали свариваются на постоянном токе. При постоянной подаче присадочного материала угол между ним и электродом должен быть близок к 90°. Необходимо удалять образующуюся в процессе сваривания пленку оксида. По окончании сварочного процесса подача аргона не должна прекращаться, пока температура металла не снизится до 400 °С.

В целом при сварке нержавеющей сталей требуется применение специальных присадочных материалов, выбор и соблюдение оптимальных режимов сварки [12]. В некоторых случаях проводится специальная термическая обработка сварных соединений.

**Сварка титана.** Титан относится к числу широко распространенных в природе металлов. Его температура плавления 1665 °С, выше, чем у железа (1539 °С), и он является тугоплавким металлом. Из всех тугоплавких материалов именно титан и его сплавы получили наиболее широкое применение в промышленности в качестве конструкционных материалов. Помимо высокой

жаропрочности титан и его сплавы обладают высокой удельной прочностью, которая сочетается с высокой коррозионной стойкостью при комнатной температуре. Благодаря высоким физико-механическим и физико-химическим характеристикам, высокой сопротивляемости коррозии сплавы титана применяются в самых разных отраслях промышленности.

Если при нормальных условиях титан имеет высокую коррозионную стойкость, то при высоких температурах он и его сплавы становятся весьма активными по отношению к кислороду, водороду и азоту. Они, а также углерод образуют с титаном твердые растворы внедрения и хрупкие оксиды, гидриды, нитриды и карбиды, которые являются вредными примесями, значительно снижающими механические характеристики металла.

При температурах выше 600 °С титан начинает взаимодействовать с кислородом воздуха, что приводит к образованию не только окислы, но и оксида титана  $TiO_2$ . Хрупкий поверхностный слой оксида титана представляет собой твердый раствор кислорода в титане, который называют альфированным слоем. Его наличие ведет к образованию холодных трещин, поэтому допускается содержание кислорода не более 0,015 %. Склонность титана к образованию холодных трещин связана также с водородом, который при содержании его выше предельной растворимости охрупчивает металл в результате гидридного превращения. Азот, активно взаимодействуя с титаном, повышает его прочность, но снижает пластичность, поэтому в сплавах титана допускается содержание азота не более 0,05 %.

Изложенные факты свидетельствуют о значительных проблемах при использовании обычной сварки для соединения конструкций из титана и его сплавов, причем главнейшая из них связана с получением сварных соединений, обладающих высокой пластичностью. Поэтому сварка изделий из титана чаще всего осуществляется в среде чистого аргона, причем она может выполняться как плавящимся, так и неплавящимся электродом [13, 14].

При необходимости сварка титана со сталью также проводится в среде защитного газа аргона. Технологический процесс должен предусматривать материалы и режимы сварки, которые препятствуют образованию в сварных швах хрупких фаз  $FeTi$  и  $Fe_2Ti$ . В этом случае для обеспечения надежности соединения могут использоваться комбинированные вставки из тантала и бронзы или бронзы и ниобия. Сварка проводится вольфрамовым электродом в камере с контролируемой атмосферой.

**Заключение.** Сварка – высокопроизводительный и экономичный процесс, который получил широкое распространение в различных отраслях промышленного комплекса. Аргонодуговая сварка – не самый простой, но один из самых эффективных видов сварки. В статье рассмотрены особенности, которые требуются принимать во внимание при выполнении аргонодуговой сварки неплавящимся электродом изделий из алюминия, нержавеющей стали и титана для обеспечения высокого качества сварных соединений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 ГОСТ 2601-84. Сварка металлов. Термины и определения основных понятий. – Дата введения 1985-07-01. – М. : Изд-во стандартов, 1997. – 55 с.
- 2 **Чернышов, Г. Г.** Сварочное дело. Сварка и резка металлов / Г. Г. Чернышов. – М. : Академия, 2013. – 492 с.
- 3 **Федин, А. П.** Сварочное производство / А. П. Федин. – Минск : Выш. шк., 1992. – 302 с.
- 4 **Лихачев, В. Л.** Электродуговая сварка : пособие для сварщиков и специалистов сварочного производства / В. Л. Лихачев. – М. : Солон-Пресс, 2017. – 639 с.
- 5 Method of welding by electricity : Pat. 419032 United States : CPC B 23K 11/04 / C. L. Coffin. – Filed 25.06.1889 ; Patented 07.01.1890. – 2 p.
- 6 Welding torch : Pat. 2274631 United States : IPC B 23K 35/22; B 23K 9/035; B 23K 9/23 / R. Meredith. – Filed 04.01.1941 ; Patented 24.02.1942. – 5 p.
- 7 **Murphy, A. B.** A Perspective on arc welding research: the importance of the arc, unresolved questions and future directions // Plasma Chemistry and Plasma Processing. – 2015. – Vol. 35, is. 3. – P. 471–489.
- 8 Сварка жаропрочного сплава ХН45МВТЮБР / К. Н. Коржов [и др.] // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2024. – № 3. – С. 578–582.
- 9 **Rabiei, A.** A study on welding of porous metals and metallic foams / A. Rabiei, J. Cance, Z. Chacko // Advanced Engineering Materials. – 2024. – Vol. 26, is. 4. – Article 2301430.
- 10 **Патон, Б. Е.** Применение защитных газов в сварочном производстве (обзор) / Б. Е. Патон, С. Т. Римский, В. И. Галинич // Автоматическая сварка. – 2014. – № 6–7. – С. 17–24.
- 11 **Дриц, А. М.** Влияние способа сварки на остаточные напряжения в сварных соединениях алюминиевого сплава 1565Ч / А. М. Дриц, В. В. Овчинников, Р. Б. Резцов // Технология легких сплавов. – 2024. – № 2. – С. 23–32.
- 12 Study of the TIG welding process of thin-walled components made of 17-4 PH steel in the aspect of weld distortion distribution / M. Mróz [et al.] // Materials. – 2023.– Vol. 16, no. 13. – Article 4854. – 21 p.
- 13 Investigating the influence mechanism of different shielding gas types on arc characteristics and weld quality in TA2 laser-arc hybrid welding / H. Zhang [et al.] // Metals. – 2024. – Vol. 14, no. 8. – Article 946. – 17 p.
- 14 **Гареев, И. С.** Технологические особенности энергосберегающей аргонодуговой сварки корпусных конструкций из титанового сплава ОТ4 / И. С. Гареев, С. А. Собко, М. С. Писарев // Сварочное производство. – 2022. – № 8. – С. 39–46.

*L. V. SAMUSEVA, N. A. ODINTSOV, M. Y. SHERSHNYOV*  
*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## FEATURES OF AN ARGON-ARC WELDING TECHNOLOGY

The article provides information on the history of welding in a protective gas environment, its existing types and areas of application. The technological process of an argon-arc welding with a non-consumable electrode is considered. Some parameters characterizing the welding process are presented. The conditions accompanying argon-arc welding of products made of aluminum, stainless steel and titanium, as well as titanium with steel are discussed.

**Keywords:** argon-arc welding, non-consumable electrode, welding technology, welded joint.

Получено 29.10.2024

УДК 691-419:534.13

Э. И. СТАРОВОЙТОВ

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***КОЛЕБАНИЯ СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНЫ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РЕЗОНАНСНОЙ НАГРУЗКИ**

Исследованы поперечные колебания круговой сэндвич-пластины с учетом температуры окружающей среды. Нагрузка резонансная, гармоническая, равномерно распределенная. Температурное поле в пластине однородное, стационарное. Пластина симметричная по толщине. Несущие слои предполагаются тонкими, высокопрочными. Получено аналитическое решение задачи с помощью разложения искомых функций в ряд по системе собственных ортонормированных функций. Приведены результаты числового параметрического анализа прогиба от времени и температуры.

**Ключевые слова:** круговая трехслойная пластина, температура, резонансная нагрузка.

**Введение.** Слоистые конструктивные элементы широко применяются в транспортном машиностроении, аэрокосмическом комплексе и строительстве с середины прошлого века. Исследование их поведения при динамическом нагружении с учетом температуры окружающей среды в настоящее время является одной из наиболее актуальных задач. Созданию необходимых математических моделей посвящено значительное число публикаций.

В монографиях [1–3] разработаны расчетные модели статического и динамического деформирования слоистых конструкций при воздействии различных физико-механических полей. Предлагаются подходы к выбору кинематических гипотез, постановке и методике решения задач статики и динамики, отмечаются возникающие при температурных воздействиях особенности. В обзорной работе [4] изложены суть асимптотического метода решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и методика применения этого метода при решении статических и динамических краевых задач для тонкостенных тел (балки, пластины, оболочки). Рассмотрены как классические, так и неклассические краевые задачи, более общие результаты проиллюстрированы решениями конкретных задач. В монографии [5] выполнен анализ термических напряжений в композитных балках, пластинах и оболочках. Рассматриваются статические и динамические реакции для связанных и несвязанных термоупругих задач, термическая потеря устойчивости и эффекты явления флаттера панелей.

В статьях [6–9] рассмотрены свободные колебания и нестационарные нагружения тонкостенных элементов конструкций, включая цилиндрические оболочки. В работах [10, 11] предложена дискретно-слоистая модель внутреннего демпфирования колебаний многослойной пластины по Томпсону – Кельвину – Фойгту. Показано, что для тонких пластин размерность поставленной задачи может быть уменьшена с помощью упрощающих гипотез для каждого слоя.

В статьях [12, 13] анализируются характеристики динамических и квазистатических процессов в трехслойных пластинах, связанных с основанием Пастернака. Получены аналитические решения и проведен численный анализ перемещений в слоях пластины. В работах [14, 15] исследовано деформирование трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем и при осесимметричных нагрузках в своей плоскости. Воздействие температуры на деформацию композитного ступенчатого стержня и трехслойной пластины, нагруженной моментной нагрузкой, рассматривалось в работах [16, 17].

Здесь предложена постановка начально-краевой задачи о резонансных поперечных колебаниях трехслойной круговой пластины и получено аналитическое решение, учитывающее температуру окружающей среды.

**1 Постановка начально-краевой задачи.** Используется цилиндрическая система координат, связанная со срединной плоскостью наполнителя (рисунок 1). В симметричной по толщине трехслойной пластине для тонких несущих слоев толщиной  $h_1 = h_2 = h$  принимаются гипотезы Кирхгофа. Наполнитель считается легким, не учитывается работа касательных напряжений, относительно толстым ( $h_3 = 2c$ ). В нем справедлива гипотеза Тимошенко: нормаль к срединной поверхности остается прямолинейной, несжимаемой и поворачивается на дополнительный угол  $\psi(r, t)$ . Внешняя поверхность находится под воздействием окружающей среды, благодаря которой изменяется температура пластины.

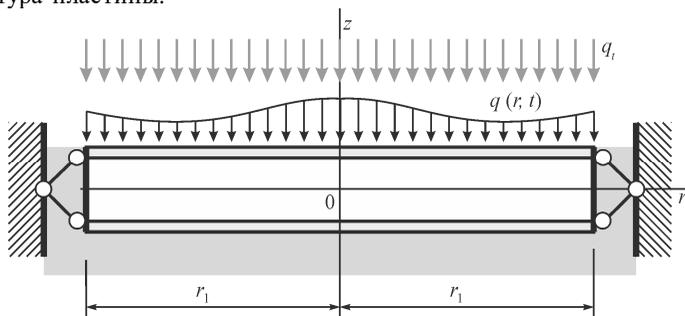


Рисунок 1 – Схема нагружения сэндвич-пластины

Напряжения и деформации связаны законом Гука с учетом температуры:

$$s_{\alpha}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{\alpha}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T) \quad (\alpha = r, \varphi);$$

$$s_{rz}^{(3)} = 2G_k \varepsilon_{rz}^{(3)}, \quad (1)$$

где  $s_{\alpha}^{(k)}, s_{rz}^{(3)}, (\varepsilon_{\alpha}^{(k)}, \varepsilon_{rz}^{(3)})$  – девиаторы тензоров напряжений (деформаций);  $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$  – среднее напряжение (деформация);  $G_k(T), K_k(T)$  – термозависимые модули сдвига и объемного деформирования, в несущих слоях,  $G_1 = G_2 = G, K_1 = K_2 = K; \alpha_{0k}$  – коэффициент линейного температурного расширения материалов слоев.

Гармоническая силовая нагрузка равномерно распределена по внешней поверхности верхнего слоя:

$$q(r, t) = q_0 (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)), \quad (2)$$

где  $q_0 = \text{const}$ ;  $\omega_k$  – интенсивность и частота нагрузки, совпадающая с одной из частот основного тона пластины  $\omega_k = \omega_n$ ;  $D, E$  – параметры нагрузки.

Общие уравнения колебаний рассматриваемой пластины без учета температурного поля приведены в [1]. В нашем случае остаются два уравнения, коэффициенты  $a_i$  будут зависеть от температуры через модули упругости, а в правой части второго уравнения появится резонансная нагрузка (2):

$$L_2(a_4 \Psi - a_5 w_{,r}) = 0;$$

$$L_3(a_5 \Psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} = q_0 (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)), \quad (3)$$

где  $w, \Psi$  – искомые прогиб и относительный сдвиг;  $M_0 \ddot{w}$  – инерционные силы, причем  $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_1^2$ ;  $\rho_k$  – плотность материала; точка над переменной обозначает производную по времени; дифференцирование по координате  $r$  обозначено запятой в нижнем индексе;  $a_i$  – коэффициенты,

$$a_4 = c^2 \left( 2hK^+ + \frac{2}{3} cK_3^+ \right); \quad a_5 = c \left[ 2h \left( c + \frac{1}{2} h \right) K^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right];$$

$$a_6 = 2h \left( c^2 + ch + \frac{1}{3} h \right) K^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+; \quad K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k; \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k;$$

$L_2, L_3$  – дифференциальные операторы,

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}; \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Для описания зависимости упругих характеристик материалов слоев от температуры используется формула, предложенная Беллом [2]:

$$\{G(T), K(T)\} = \{G(0), K(0)\} \varphi(T),$$

$$\varphi(T) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < \frac{T}{T_m} \leq 0,06; \\ 1,03 \left( 1 - \frac{T}{2T_m} \right) & \text{при } 0,06 < \frac{T}{T_m} \leq 0,57, \end{cases} \quad (4)$$

где  $T_m$  – температура плавления;  $G(0) = G_0 / \varphi(T_0)$ ;  $K(0) = K_0 / \varphi(T_0)$ ,  $G_0, K_0$  – значения модулей при температуре  $T_0$ .

На контуре пластины принимается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев  $\Psi(r_1, t) = 0$ . Граничные условия:

– при заделке контура пластины

$$\Psi(r_1, t) = w(r_1, t) = w_{,r}(r_1, t) = 0;$$

– при шарнирном опирании (см. рисунок 1)

$$\Psi(r_1, t) = w(r_1, t) = 0; \quad M_r(r_1, t) = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_r^{(k)} z dz = 0, \quad (5)$$

где  $\sigma_r^{(k)}$  – радиальные напряжения;  $M_r$  – радиальный изгибающий момент,

$$M_r = a_3 \Psi_{,r} - a_6 w_{,rr} - a_{60} \frac{w_{,r}}{r_1}, \quad a_{60} = 2hK^-(c^2 + ch + \frac{1}{3}h^2) + \frac{2}{3}c^3 K_3^-.$$

В начальный момент времени прогиб и скорость отсутствуют:

$$w(r, 0) = 0; \quad \dot{w}(r, 0) = 0. \quad (6)$$

Таким образом, перемещения рассматриваемой пластины должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений в частных производных (7), граничным условиям (5) и начальным условиям (6).

**2 Решение начально-краевой задачи.** Система (3) после преобразований приводится к виду

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{a_5}{a_4} w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r}; \\ L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} &= q_0 (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$M^4 = \frac{a_4}{a_6 a_4 - a_5^2} M_0.$$

Относительный сдвиг  $\Psi$  ограничен в центре пластины, поэтому  $C_4 = 0$ . Подставив первое уравнение (7) в граничные условия (5), получаем

$$C_3 = -\frac{a_5}{a_4 r_1} w_{,r}(r_1, t).$$

Искомые функции и нагрузку разложим в ряд по системе собственных функций  $v_n \equiv v_n(\beta_n r)$ , полученной в [1]:

$$\begin{aligned} w(r, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t); \quad \Psi(r, t) = \frac{a_5}{a_4} \sum_{n=0}^{\infty} v_{,r} T_n(t); \quad q(r, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t); \quad (8) \\ v_n(\beta_n r) &\equiv \frac{1}{d_n} \left[ J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_0(\beta_n r) \right], \end{aligned}$$

где  $T_n(t)$  – неизвестная функция времени;  $\beta_n$  – собственные числа;  $d_n$  – нормировочные коэффициенты;  $J_0(\beta_n r)$ ,  $I_0(\beta_n r)$  – функции Бесселя;  $q_n(t)$  – коэффициенты разложения нагрузки (2) в ряд по частотам  $\omega_k$ ,

$$\begin{aligned} q_n(t) &= \frac{1}{M_0} \int_0^{r_1} q(r, t) v_n r dr = D_n \cos(\omega_k t) + E_n \sin(\omega_k t), \\ D_n &= Df(\beta_n), \quad E_n = Ef(\beta_n); \end{aligned}$$

$$f(\beta_n) = \frac{q_0 r_1}{M_0 d_n \beta_n} \left[ J_1(\beta_n r_1) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_1(\beta_n r_1) \right].$$

Дифференциальное уравнение для определения искомой функции времени  $T_n(t)$  получается из второго уравнения системы (7) после подстановки выражений (8) с учетом коэффициентов  $q_n(t)$ :

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = D_n \cos(\omega_k t) + E_n \sin(\omega_k t), \quad (9)$$

где  $\omega_n$  – частоты собственных колебаний, причем  $\omega_n^2 = \beta_n^4 / M^4$ .

Решение уравнения (9) можно принять в виде

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + y_n(t), \quad (10)$$

где  $y_n(t)$  – частное решение, зависящее от частоты резонансной нагрузки  $\omega_k$ ,

$$y_n(t) = \begin{cases} \frac{E_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \sin(\omega_k t) + \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \cos(\omega_k t) & \text{при } n \neq k, \\ \frac{D_k}{2\omega_k} t \sin(\omega_k t) - \frac{E_k}{2\omega_k} t \cos(\omega_k t) & \text{при } n = k. \end{cases}$$

Константы интегрирования в (10) получим из начальных условий (6):

$$A_n = - \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2}, & n \neq k, \\ 0, & n = k, \end{cases} \quad B_n = - \frac{1}{\omega_n} \begin{cases} \frac{\omega_k E_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2}, & n \neq k \\ -\frac{E_k}{2\omega_k}, & n = k \end{cases}. \quad (11)$$

Таким образом, резонансные колебания сэндвич-пластины при учете окружающей температуры описываются формулами (8)–(11).

**3 Численная апробация решения.** Рассмотрим сэндвич-пластину единичного радиуса, шарнирно опертую по контуру. Слои выполнены из материалов Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т с толщинами  $h_1 = h_2 = 0,01$ ,  $h_3 = 0,05$ . Для вычисления собственных частот  $\omega_n$  использовались приведенные в [1] собственные числа. Их зависимость от температуры учтена через упругие модули материалов слоев (4). Амплитуда интенсивности равномерно распределенной нагрузки  $q_0 = 50$  Па,  $D = E = 1$ . Кривые соответствуют температурам: 1 –  $T = 20$  °С; 2 –  $T = 220$  °С.

Рисунок 2 иллюстрирует рост амплитуды колебаний при частоте резонансной нагрузки  $\omega_k$ , совпадающей с частотой основного тона:  $\omega_k = \omega_0$  (рисунок 2, а),  $\omega_k = \omega_1$  (рисунок 2, б). Процесс графически неразличим и представлен, по сути, огибающими. При увеличении собственной частоты наблюдается падение скорости роста амплитуды колебаний за принятый интервал времени. Например, максимальный прогиб при частоте  $\omega_0$  больше соответствующего прогиба при частоте  $\omega_1$  примерно в 15 раз. Нагревание пластины приводит к росту прогиба на 11 %.

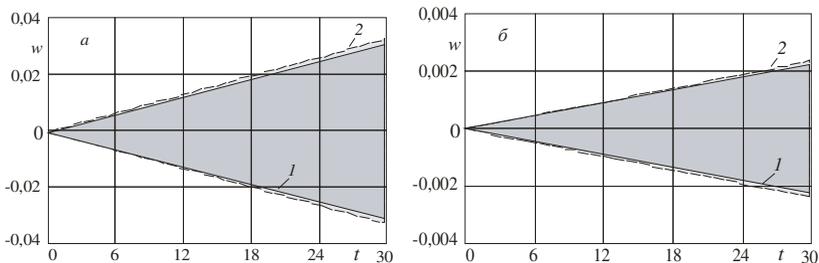


Рисунок 2 – Нарастание амплитуды прогиба во времени

На рисунке 3 для более наглядного эффекта влияния температуры принят интервал, в 100 раз меньший. Увеличение амплитуды, связанное с учетом температуры составляет 30 %.

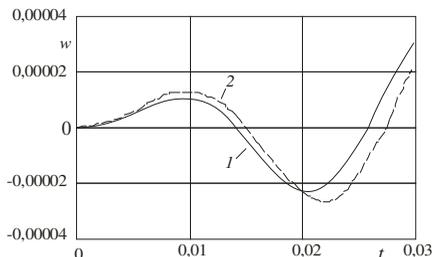


Рисунок 3 – Воздействие температуры на прогиб при резонансе по частоте  $\omega_0$

**Выводы.** Предложенная математическая модель термосилового резонансного воздействия на трехслойную упругую круговую пластину позволяет учитывать влияние температуры окружающей среды на параметры колебаний.

*Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция».*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Горшков, А. Г.** Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.
- 2 **Журавков, М. А.** Математические модели механики твердого тела // М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021 – 535 с.
- 3 **Zhuravkov, M. A.** Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.
- 4 **Reddy, J. N.** Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis / J. N. Reddy. – 2nd ed. – Boca Raton : CRC Press, 2003. – 858 p.
- 5 **Carrera, E.** Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications / E. Carrera, F. A. Fazzolari, M. Cinefra. – Academic Press, 2016. – 440 p.
- 6 **Mikhasev, G. I.** Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells / G. I. Mikhasev, H. Altenbach // Thin-walled laminated structures (Advanced Structured Materials. Vol. 106). – Cham : Springer, 2019. – P. 157–198.

7 **Leonenko, D. V.** Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // *International Applied Mechanics*. – 2016. – Vol. 52, no. 4. – P. 359–367.

8 **Fedotenkov, G. V.** Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // *Lobachevskii journal of mathematics*. – 2019. – Vol. 40, no. 4. – P. 439–447.

9 **Tarlakovskii, D. V.** Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovsky, G. V. Fedotenkov // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.

10 **Paimushin, V. N.** Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. *Mechanics of Composite Materials* / V. N. Paimushin, R. K. Gazizullin. – 2017. – Vol. 53, no. 3. – P. 407–436.

11 **Paimushin, V. N.** Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping. *Mechanics of Composite Materials* / V. N. Paimushin, V. A. Firsov, V. M. Shishkin. – 2017. – Vol. 53, no. 4. – P. 609–630.

12 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2014. – № 1. – С. 59–63.

13 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации*. – 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

14 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации*. – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.

15 **Нестерович, А. В.** Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации*. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

16 Деформирование ступенчатой композитной балки в температурном поле / Э. И. Старовойтов [и др.] // *Инженерно-физический журнал*. – 2015. – Т. 88, № 4. – С. 987–993.

17 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб трехслойной пластины в температурном поле моментной нагрузкой / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, А. Абдусаттаров // *Механика. Исследования и инновации*. – 2023. – Вып. 16. – С. 189–195.

*E. I. STAROVOITOV*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **OSCILLATIONS OF A SANDWICH PLATE IN A TEMPERATURE FIELD UNDER A RESONANT LOAD**

The transverse vibrations of a circular sandwich plate are investigated taking into account the ambient temperature. The load is resonant, harmonic, uniformly distributed. The temperature field in the plate is homogeneous, stationary. The plate is symmetrical in thickness. The load-bearing layers are assumed to be thin and highly durable. An analytical solution to the problem is obtained by expanding the sought-for functions in a series according to a system of eigen orthonormal functions. The results of a numerical parametric analysis of deflection versus time and temperature are presented.

**Keywords:** circular three-layer plate, temperature, resonant load.

Получено 15.08.2024

УДК 539.371

К. В. СУСЛОВ

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ ПЯТИСЛОЙНОГО СИММЕТРИЧНОГО ПО ТОЛЩИНЕ СТЕРЖНЯ**

Рассматривается задача об изгибе упругого симметричного по толщине пятислойного стержня. Несущие слои предполагаются тонкими, высокопрочными. Для них принята гипотеза плоских поперечных сечений Бернулли. В сравнительно толстых легких заполнителях поперечные сечения остаются плоскими, но поворачиваются на некоторый дополнительный угол относительно нормали к деформированной срединной поверхности. Дифференциальные уравнения равновесия получены с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа. Численно проанализирована форма представления решения полученной системы уравнений.

**Ключевые слова:** пятислойный стержень, изгиб, упругость, уравнения равновесия.

**Введение.** Исследование слоистых конструкций, которые в настоящее время активно применяются в различных сферах современной техники, интенсивно развивается с начала 40-х годов XX века. Подходы к разработке методик решения краевых задач, рассматривающих воздействие внешней среды на тонкостенные элементы конструкций, предложены в монографиях [1–3]. Кинематические гипотезы учитывают, как правило, относительный сдвиг и работу касательных напряжений в заполнителе, тонкость и жесткость несущих слоев.

В статьях [4–7] исследуется динамическое деформирование трехслойных и пятислойных круговых пластин. Геометрические гипотезы соответствуют ломаной линии, заполнители приняты легкими, т. е. не учитывается работа касательных напряжений. Аналитические решения, описывающие собственные и вынужденные колебания, получены в виде разложения искомым перемещений в ряды по системам собственных функций. Приведены численные результаты для частот собственных колебаний.

Публикации [8, 9] посвящены квазистатическому деформированию трехслойных пластин, связанных с упругими основаниями Винклера и Пастернака соответственно. Приведены аналитические решения и результаты численных исследований. Сжимаемость описывает функция, линейная по толщине слоя. В статье [10] исследуется влияние температуры на напряженно-деформированное состояние трехслойного стержня с жестким заполнителем. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем рассмотрено в статье [11]. В работах [12–14] анализируется деформация изгиба симметричной по толщине круговой пятислойной пластины с двумя заполнителями, находящейся под действием непрерывных и локальных нагрузок.

В данной работе представлены методика получения уравнений равновесия симметричного по толщине пятислойного стержня и анализ вида их решения.

**Постановка задачи.** Декартова система координат привязана к срединной плоскости внутреннего несущего слоя 1 пятислойного стержня (рисунок 1). В тонких несущих слоях 1, 2, 4 выполняются гипотезы Кирхгофа, в соответствии с которыми поперечные сечения остаются плоскими и перпендикулярными деформированной осевой линии после воздействия нагрузки. В сравнительно толстых заполнителях 3, 5 справедлива гипотеза Тимошенко: поперечные сечения после приложения нагрузки остаются плоскими, несжимаемыми по толщине, но поворачиваются на дополнительный угол  $\psi(x, t)$ . Искомыми функциями являются прогиб стержня  $w(x, t)$  и относительный сдвиг  $\psi(x, t)$ . Поверхностная нагрузка  $q(x, t)$  распределена по верхней плоскости стержня.

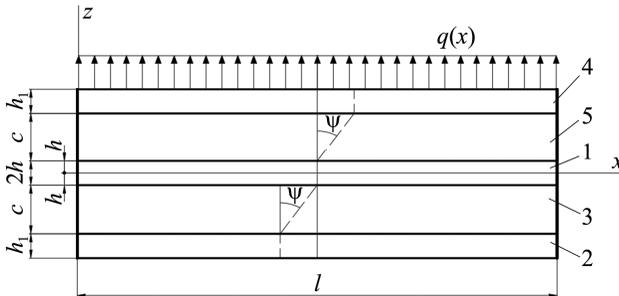


Рисунок 1 – Расчетная схема пятислойной балки

Выражения продольных перемещений  $u_x^{(k)}$  ( $k = 1, \dots, 5$  – номер слоя) через искомые функции  $w(x, t)$ ,  $\psi(x, t)$  получим исходя из принятых гипотез:

$$\begin{aligned}
 u_x^{(4)} &= -zw_{,x} + c\psi, & (c + h \leq z \leq c + h + h_1); \\
 u_x^{(5)} &= -zw_{,x} + (z - h)\psi, & (h \leq z \leq c + h); \\
 u_x^{(1)} &= -zw_{,x}, & (-h \leq z \leq h); \\
 u_x^{(3)} &= -zw_{,x} + (z + h)\psi, & (-h - c \leq z \leq -h); \\
 u_x^{(2)} &= -zw_{,x} - c\psi, & (-h - h_1 - c \leq z \leq -h - c),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $z$  – координата рассматриваемого волокна (расстояние до срединной поверхности внутреннего несущего слоя);  $c\psi$  – величина смещения внешних несущих слоев за счет деформации заполнителей; запятая в нижнем индексе имеет смысл производной по координате  $x$ .

Продольные деформации следуют из соотношений Коши [1] и перемещений в слоях стержня (1):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^{(4)} &= -zw_{,xx} + c\psi_{,x}; & \varepsilon_{xz}^{(4)} &= 0; \\
 \varepsilon_x^{(5)} &= -zw_{,xx} + (z - h)\psi_{,x}; & \varepsilon_{xz}^{(5)} &= \frac{\psi}{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^{(1)} &= -zw_{,xx}; \quad \varepsilon_{xz}^{(1)} = 0; \\
\varepsilon_x^{(3)} &= -zw_{,xx} + (z+h)\Psi_{,x}; \quad \varepsilon_{xz}^{(3)} = \frac{\Psi}{2}; \\
\varepsilon_x^{(2)} &= -zw_{,xx} - c\Psi_{,x}; \quad \varepsilon_{xz}^{(2)} = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

После определения продольных перемещений и деформаций напряжения в слоях определяются с помощью закона Гука:

$$s_{xx}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{xx}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}, \quad s_{xz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}, \quad s_{xz}^{(5)} = 2G_5 \varepsilon_{xz}^{(5)}, \tag{3}$$

где  $s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \sigma^{(k)} \delta_{ij}$  – девиатор тензора напряжений,  $\sigma^{(k)} = \frac{1}{3} \sigma_{xx}^{(k)}$ ;  $\varepsilon_{ij}^{(k)} = \varepsilon_{ij}^{(k)} - \varepsilon^{(k)} \delta_{ij}$  – девиатор тензора деформаций,  $\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3} \varepsilon_{xx}^{(k)}$ ;  $\delta_{ij}$  – символы Кронекера;  $G_k, K_k$  – модули упругости материалов слоев (сдвига и объемного деформирования).

Для получения системы дифференциальных уравнений, описывающей изгиб рассматриваемого стержня, используем вариационный принцип Лагранжа с добавлением сил инерции:

$$\delta A = \delta W, \tag{4}$$

где  $\delta A$  – виртуальная работа внешней нагрузки, включая силы инерции;  $\delta W$  – вариация работы внутренних силовых факторов,

$$\begin{aligned}
\delta A &= \iint_S q \delta w dS = \int_0^l b_0 q \delta w dx; \\
\delta W &= \iint_S \sum_{k=1}^5 \int (\sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} + \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} \delta_{k3} + \sigma_{xz}^{(5)} \delta \varepsilon_{xz}^{(5)} \delta_{k5}) dz dS.
\end{aligned} \tag{5}$$

где  $b_0$  – ширина поперечного сечения;  $\delta$  – оператор вариации.

Подставим работы (5) в (4) с учетом виртуальных деформаций, следующих из (3). Уравнение (4) должно выполняться при любых вариациях искомым функций, поэтому коэффициенты при этих вариациях равны нулю. Отсюда следуют уравнения равновесия в обобщенных внутренних усилиях:

$$H_{,x} - Q = 0; \quad M_{,xx} + b_0 q = 0, \tag{6}$$

где  $H_{,x}, Q, M_{,xx}$  – обобщенные внутренние усилия и моменты:

$$\begin{aligned}
H &= (M_x^{(3)} + M_x^{(5)}) + c(N_x^{(4)} - N_x^{(2)}) + h(N_x^{(3)} - N_x^{(5)}); \quad Q^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xz}^{(k)} dz; \\
M_x &= \sum_{k=1}^5 M_x^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz; \quad N_x = \sum_{k=1}^5 N_x^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz.
\end{aligned}$$

Используя соотношения закона Гука (3), можно получить выражение для введенных усилий через искомые функции. Их подстановка в уравнения (6) приводит к системе уравнений равновесия для определения искомых функций:

$$\begin{aligned} a_1 \Psi_{,xx} - a_2 w_{,xxx} - a_3 \Psi &= 0; \\ a_2 \Psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} &= -q. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь коэффициенты выражаются через геометрические и упругие характеристики материалов слоев:

$$\begin{aligned} a_1 &= \left[ c^2 \left( \frac{2}{3} K_2^+ c + 2K_3^+ h_1 \right) \right]; \\ a_2 &= \left[ \frac{1}{3} K_2^+ c^2 (2c + 3h) + K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c) \right]; \quad a_3 = \left[ 2G^{(2)} c \right]; \\ a_4 &= \left[ \frac{2}{3} K_2^+ c (c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \frac{2}{3} K_3^+ h_1 (h_1^2 + 3(h_1 + h + c)(h + c)) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Для исследования разрешимости системы (3) сведем ее к двум отдельным уравнениям относительно искомых функций. Проинтегрируем и умножим на необходимые коэффициенты второе уравнение, чтобы вычитанием из первого получить отдельное уравнение относительно  $\psi(x)$ :

$$\Psi_{,xx} - \beta^2 \Psi = \gamma \left( \int q dx + C_1 \right), \quad (9)$$

где  $C_1$  – константа интегрирования;

$$\beta^2 = \frac{a_3 a_4}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad \gamma = \frac{a_2}{a_1 a_4 - a_2^2}.$$

После определения относительного сдвига  $\psi(x)$  прогиб  $w(x)$  следует из второго уравнения системы (6). Покажем, что введенный коэффициент  $\beta^2$  положителен и не уходит в бесконечность, то есть  $a_1 a_4 - a_2^2 \neq 0$ .

На рисунках 2–4 представлены **результаты численного исследования** знака  $\beta^2$  для рассматриваемых стержней ( $l = 1$ ), слои которых выполнены из материалов Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т (кривая 1), титан – фторопласт-4 – титан – фторопласт-4 – титан (кривая 2), Д16-Т – пенопласт – титан – пенопласт – Д16-Т (кривая 3) и титан – пенопласт – титан – пенопласт – титан (кривая 4).

Зависимость параметра  $\beta^2$  от относительной толщины срединного несущего слоя  $h$  при толщинах внешних слоев  $h_1 = 0,02$  и заполнителя  $c = 0,2$  показана на рисунке 2. При  $h = 0$  исследуемый параметр в ноль не обращается и сохраняет положительный знак для всех пакетов балки, причем с увеличением толщины срединного несущего слоя он растет по кубической параболе. Зависимость того же параметра от толщины внешних несущих слоев  $h_1$  при  $h = 0,02$ ;  $c = 0,2$  иллюстрирует рисунок 3, а от толщины заполнителя  $c$  при  $h = h_1 = 0,02$  – рисунок 4.

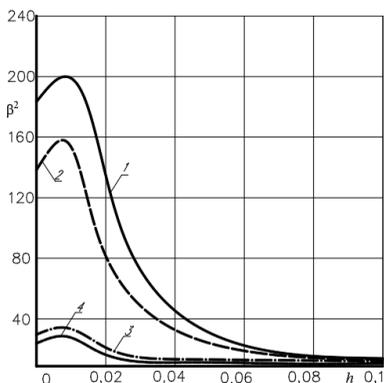


Рисунок 2 – Зависимость  $\beta^2$  от толщины внутреннего несущего слоя  $h$

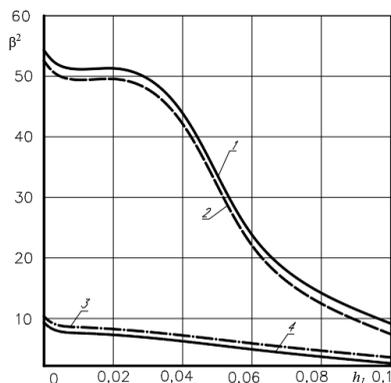


Рисунок 3 – Зависимость  $\beta^2$  от толщин внешних несущих слоев  $h_1$

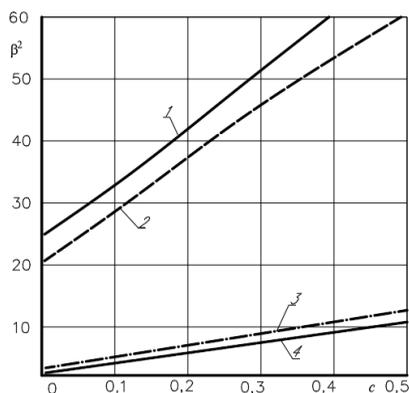


Рисунок 4 – Изменение  $\beta^2$  при различных толщинах  $c$

**Заключение.** Полученная система дифференциальных уравнений равновесия и проведенный численный анализ являются основой для дальнейшего решения задачи об изгибе пятислойного стержня, симметричного по толщине, и определения путей практического применения такой конструкции.

*Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция».*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.

2 Zhuravkov, M. A. Mechanics of Solid Deformable Body // M. A. Zhuravkov, Y. Lyu, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.

3 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов [и др.]. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.

4 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *Strength of materials*. – 2002. – Vol. 34, no. 5. – P. 474–481.

5 **Лачугина, Е. А.** Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е. А. Лачугина // *Механика. Исследования и инновации*. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.

6 **Лачугина, Е. А.** Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями / Е. А. Лачугина // *Механика. Исследования и инновации*. – 2023. – № 16. – С. 111–116.

7 **Лачугина, Е. А.** Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2023. – Вып. 38. – С. 227–233.

8 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // *Механика композитных материалов*. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120.

9 **Козел, А. Г.** Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич пластины // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2018. – Т. 332, № 6. – С. 25–34.

10 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2013. – Т. 22, № 1. – С. 31–35.

11 **Захарчук, Ю. В.** Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации*. – 2019. – Вып. 12. – С. 66–75.

12 **Салицкий, В. С.** Изгиб защемлённой по контуру круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // *Механика. Исследования и инновации*. – 2022. – Вып. 15. – С. 209–213.

13 **Салицкий, В. С.** Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

14 **Суслов, К. В.** Изгиб пятислойной балки симметричной по толщине / К. В. Суслов // III Республиканский форум молодых ученых учреждений высшего образования : сб. материалов форума, Брест, 21–24 мая 2024 г. – Брест : БрГТУ, 2024. – С. 61–63.

*K. V. SUSLOV*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **METHOD OF SOLVING THE PROBLEM OF A FIVE-LAYER SYMMETRICAL THICKNESS ROD EQUILIBRIUM**

There is considered the problem of bending of an elastic five-layer rod symmetrical in thickness. The bearing layers are assumed to be thin and highly durable. The hypothesis of Bernoulli's flat cross-sections is adopted for them. In relatively thick lightweight fillers, the cross-sections remain flat, but rotate by some additional angle relative to the normal to the deformed middle surface. Differential equilibrium equations are obtained using the principle of possible Lagrange displacements. The form of representation of the solution of the obtained system of equations is numerically analyzed.

**Keywords:** five-layer rod, bending, elasticity, equilibrium equations.

Получено 25.10.2024

УДК 539.621:004.94

*О. А. СУХАНОВА, А. О. ШИМАНОВСКИЙ*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **РЕШЕНИЕ В ANSYS WORKBENCH ЗАДАЧИ О НАГРЕВЕ ТЕЛ ПРИ ТРЕНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ**

Решается динамическая связанная задача об анализе тепловых процессов в упруго-деформируемых телах, которые находятся в контактном взаимодействии : полуцилиндре, скользящем по шероховатой поверхности неподвижного параллелепипеда. Разработан алгоритм решения термopочностной задачи в среде пакета ANSYS Workbench. Рассмотрены детали создания конечно-элементной модели. Приведены результаты расчетов эквивалентных по Мизесу напряжений и температуры в контактирующих телах.

**Ключевые слова:** конечно-элементное моделирование, контактное взаимодействие, термopочностная задача.

При эксплуатации подвижных сочленений механизмов их работоспособность во многом определяется особенностями трения и износа контактирующих деталей. Поверхности, находящиеся во фрикционном взаимодействии, испытывают нагрев, а тепловые деформации на дискретных пятнах фактического контакта влияют на нагрузочную способность деталей, долговечность и надежность конструкции в целом [1, 2]. Генерируемые в результате трения одного тела о поверхность другого тепловые потоки распространяются вглубь сопрягаемых деталей, распределяясь в зависимости от теплофизических, механических свойств взаимодействующих объектов, геометрии области их контакта [3–5]. Экспериментальная оценка нестационарных температурных полей затруднена вследствие непрерывности перемещения, случайности размеров микроскопических пятен нагрева и охлаждения на поверхностях сопрягаемых тел. В свою очередь расчетные методы дают возможность оценки температуры в областях расположения пятен контакта и за их пределами.

В настоящее время значительное развитие получили методы мультифизического компьютерного моделирования технических объектов, позволяющих комплексно рассмотреть при численных расчетах различные физические процессы и взаимосвязи между ними. В частности, имеются публикации, в которых анализируется изменение температуры, связанное с тепловыделением в месте контакта трущихся деталей [6, 7]. В большинстве таких работ анализируются процессы, наблюдаемые при работе дисковых тормозов [8–11]. Также существуют исследования сварки трением [12] и работы амортизирующих устройств [13]. Однако в них, как правило, весьма сокращенно описываются детали построения компьютерной модели, связанные с необходимостью совместного решения задач механики и теплового анализа, что не всегда позволяет подтвердить адекватность получаемых результатов.

Представленная статья является дальнейшим развитием опубликованных ранее работ [14–16]. В ней приводится детальное описание решения задачи об анализе тепловых процессов, связанных со скольжением одного тела по поверхности другого при наличии сухого трения, в среде программного пакета инженерного анализа методом конечных элементов ANSYS Workbench, а также приводятся некоторые результаты расчетов.

Первой стадией работы стало построение геометрической модели, включающей платформу в форме параллелепипеда размерами 200×20×10 мм, с которой находится в контакте полуцилиндр радиусом 10, длиной 20 мм.

Сразу же были задан материал элементов модели и его свойства, для чего использована ячейка инженерных данных Engineering Data проекта Project Schematic. Из стандартной библиотеки Workbench была выбрана конструкционная сталь (structural steel) с модулем упругости 200 ГПа и коэффициентом Пуассона 0,3. Для анализа связанных полей потребовалось задать не только прочностные характеристики, но и свойства стали для теплового расчета: теплопроводность (Isotropic thermal conductivity) 60,5 Вт/м·К, удельная теплоемкость для нестационарного теплового расчета (Specific heat constant pressure) 434 Дж/кг·К. При необходимости проверка правильности ввода характеристик материала осуществляется путем отключения фильтра Filter Engineering Data.

Далее в ветке дерева проекта Model – Geometry был назначен двадцатиузловой гексаэдрический (или brick) элемент Solid 226, используемый для связанных расчетов в объемной постановке. Такой тип конечного элемента задан для обоих тел вводом команды

et.matid.226.11.

Здесь число 11 свидетельствует о наличии степени свободы не только по перемещениям, но и по температуре.

Конечно-элементная сетка (рисунок 1) была сгенерирована в ветке Mesh. Общее количество элементов моделей полуцилиндра и параллелепипеда составило 5500 и 27436 соответственно.

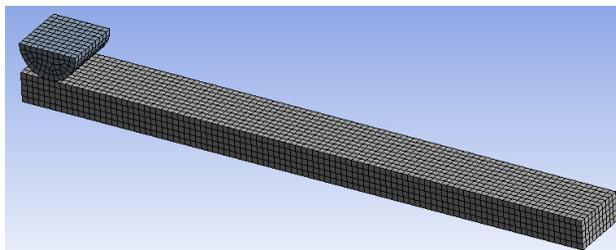


Рисунок 1 – Конечно-элементная модель

Несимметричный (Asymmetric) контакт с трением (Frictional contacts) создан в ветке Connections. Он предполагает, что все контактные элементы определены на одной поверхности, а целевые, в отличие от симметричного контакта, на

другой. Значение коэффициента трения принималось равным 0,3. Для обеспечения сходимости решения были приняты следующие настройки контактной пары: Formulation – Augmented Lagrange; Update Stiffness – Each Iteration; Normal Stiffness Factor – 0,1; Auto Detection – Generate Automatic Connection on refresh – No.

Для того чтобы учесть тепловыделение при трении, в ANSYS используется формула

$$q = FHGT \cdot \tau \cdot v ,$$

где  $q$  – плотность теплового потока при трении, Вт/м<sup>2</sup>;  $FHGT$  – коэффициент рассеяния энергии;  $\tau$  – эквивалентное напряжение трения, Дж/м<sup>3</sup>;  $v$  – скорость скольжения, м/с.

Распределение тепла между контактной ( $c$ ) и целевой ( $t$ ) поверхностью описывается зависимостями

$$q_c = FWGT \cdot q ; \quad q_t = (1 - FWGT) \cdot q ,$$

где  $FWGT$  – весовой коэффициент распределения тепла, изменяющийся в пределах от 0 до 1.

Параметры для плотности теплового потока были определены в ветке программы Contacts – Frictional комбинацией команд:

```
keyopt,cid,1,1
rmodif,cid,15,1
rmodif,cid,18,0.5
```

Здесь опция «1» в первой строке позволяет использовать температуру в качестве степени свободы для структурного анализа. Число «15» позволяет назначить  $FHGT = 1$ ; а «18» –  $FWGT = 0,5$  (т. е. тепло, образующееся при трении, равномерно распределяется между контактной и целевой поверхностями).

В окне Toolbox Analysis Systems, был выбран расчетный модуль – нестационарный прочностной анализ Transient structural. В ветке Transient заданы следующие настройки: Number of steps – 1; Auto time stepping – on; Initial time step – 0,01; Stabilization – constant; Energy dissipation ratio – 0,1

В тестовом примере принято, что на верхнюю поверхность полуцилиндра, перемещающегося по жестко закрепленной платформе со скоростью 0,01 м/с, действует давление 10 МПа. Тепловые граничные условия задавались командами:

```
tref,22
cmsel,s,temp
d,all,temp,22
allsel,all
```

Здесь в первой строке задана температура, при которой тела не испытывают тепловую деформацию – 22 °С. Во второй строке выбраны узлы на поверхностях, ранее помеченные как «temp». Третья строка назначает узлам

начальное значение температуры, четвертая – выбирает все узлы на поверхностях для последующего расчета.

В ходе расчетов были получены распределения напряжений, деформаций и температур для разных моментов времени. На рисунке 2 приведена картина распределения эквивалентных по Мизесу напряжений для момента времени  $t = 10$  с, из которой видно, что максимальные напряжения наблюдаются вдоль продольных ребер полуцилиндра. Аналогичное распределение напряжений наблюдается и в иные моменты времени. Характер распределения температуры на контактных поверхностях для момента  $t = 0,1$  с приведен на рисунке 3. Наибольшие температуры имеют место на поверхности полуцилиндра.

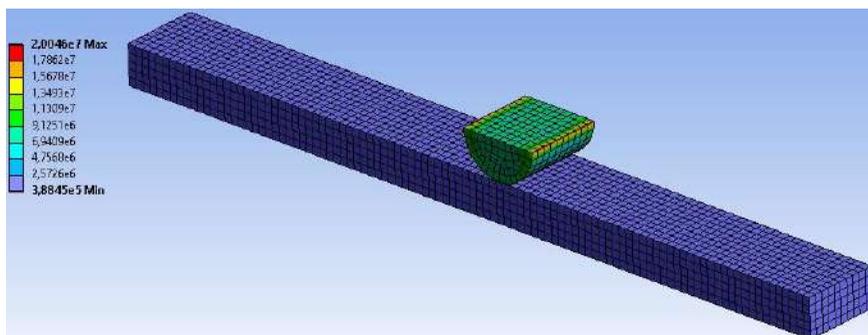


Рисунок 2 – Распределение эквивалентных по Мизесу напряжений в момент  $t = 10$  с

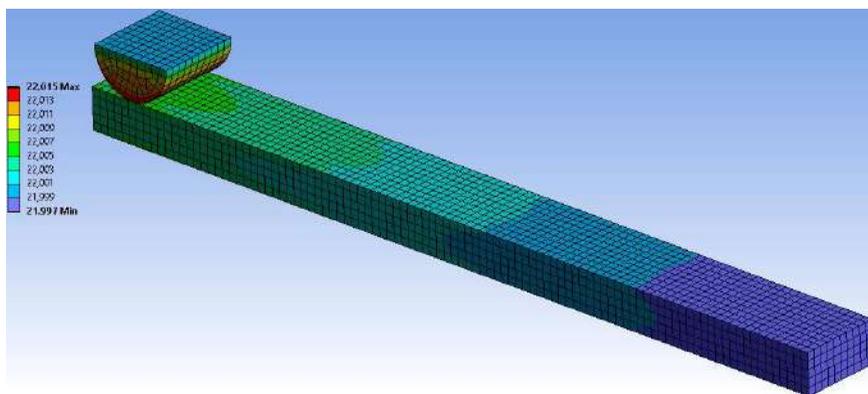


Рисунок 3 – Распределение температуры на поверхностях тел в момент  $t = 0,1$  с.

Построены зависимости температуры от времени для нескольких точек, находящихся вблизи поверхности параллелепипеда (рисунок 4). Они демонстрируют, что наибольшая температура наблюдается на первых секундах движения, когда место контакта располагается вблизи конкретной точки. Затем вследствие теплопроводности материала наблюдается постепенное снижение

температуры. Незначительность ее изменения (лишь на тысячные доли градуса) связана с малой скоростью движения полуцилиндра.

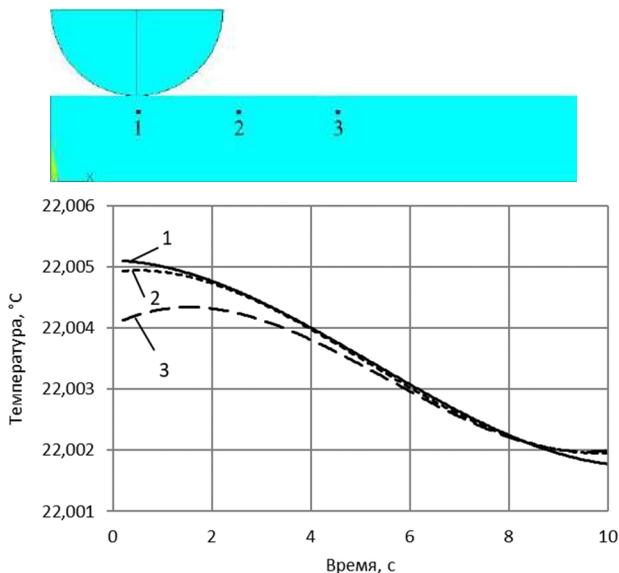


Рисунок 4 – Изменение температуры в зависимости от времени для точек 1, 2 и 3

Представленная методика решения термпрочностной задачи позволяет исследовать более сложные динамические системы, в которых существенную роль играет нагрев тел, обусловленный трением скольжения. В таких случаях потребуются значительные вычислительные ресурсы, однако алгоритм действий будет включать описанные в работе этапы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Полюшкин, Н. Г.** Основы теории трения, износа и смазки : учеб. пособие / Н. Г. Полюшкин. – Красноярск : Краснояр. гос. аграр. ун-т, 2013. – 192 с.
- 2 **Яицков, И. А.** Отвод тепловой энергии путем теплопроводности элементов конструкции дисковых тормозных механизмов / И. А. Яицков, Е. С. Федотов // Современные проблемы теории машин. – 2021. – № 12. – С. 16–20.
- 3 **Маломыжев, Д. О.** Анализ достоверности решения методом конечных элементов задачи расчета деталей на усталостную прочность при повторно-переменных напряжениях / Д. О. Маломыжев, А. А. Пыхалов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2022. – № 1 (73). – С. 10–20.
- 4 **Li, D. H.** Dynamic thermomechanical analysis on stiffened composite plates with damage / D. H. Li, S. Ma // Journal of Thermal Stresses. – 2023. – Vol. 46, is. 12. – P. 1267–1295.
- 5 **Faidh-Allah, M. H.** Numerical and finite element contact temperature analysis of friction materials type effect on a thermal transient behavior of a single-disc dry clutch / M. H. Faidh-Allah // Tribologia. – 2017. – Vol. 271, is. 1. – P. 35–43.

6 Numerical analysis of temperature distribution in sliding contacts of pin on disc model / A. K. Singh [et al.] // *Vibroengineering Procedia*. – 2019. – Vol. 29. – P. 274–278.

7 **Wu, G.** Thermal-mechanical coupling analysis of disc brake based on ANSYS Workbench / G. Wu, D. Zhang // *Lubrication Engineering*. – 2022. – Vol. 47, is. 10. – P. 126–133 (in Chinese).

8 Thermal stress simulation and fatigue life of commercial vehicle disk brakes under emergency braking conditions / X. Yin [et al.] // *AIP Advances*. – 2023. – Vol. 13, is. 12. – Article 125220. – 10 p.

9 **Mouffak, E.** Transient thermal behavior of automotive dry clutch discs by using ANSYS software / E. Mouffak, M. Bouchetara // *Mechanics*. – 2016. – Vol. 22, is. 6. – P. 562–570.

10 **Belhocine, A.** Finite element analysis (FEA) of frictional contact phenomenon on vehicle braking system / A. Belhocine, O. I. Abdullah // *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. – 2022. – Vol. 50, is. 9. – P. 2961–2996.

11 Моделирование термодинамических процессов в дисковых тормозах карьерной спецтехники с использованием метода конечных элементов (часть 1) / А. А. Волосатов [и др.] // *Вестник Кузбасского государственного технического университета*. – 2024. – № 3 (163). – С. 65–77.

12 Влияние формы заготовок на остаточные напряжения при линейной сварке трением / А. Н. Паутов [и др.] // *Frontier Materials & Technologies*. – 2022. – № 4. – С. 102–112.

13 **Бояршинов, Д. А.** Модель термомеханического поведения амортизационного узла / Д. А. Бояршинов, О. Ю. Сметанников // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2022. – Т. 15, № 3. – С. 303–315.

14 **Суханова, О. А.** Анализ пластических деформаций при скольжении сферической колодки по поверхности диска / О. А. Суханова // *Механика. Исследования и инновации*. – 2018. – Вып. 11. – С. 230–234.

15 **Шимановский, А. О.** Изменение напряженно-деформированного состояния элементов дискового тормоза при торможении / А. О. Шимановский, О. А. Суханова // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*. – 2020. – Т. 66, № 4. – С. 8–18.

16 **Суханова, О. А.** Моделирование тепловых процессов, связанных со скольжением твердого тела по неподвижной поверхности / О. А. Суханова // *Проблемы безопасности на транспорте : материалы XIII Междунар. науч.-практ. конф. , Гомель, 21–22 ноября 2024 г. : в 2 ч. Ч. 2.* – Гомель : БелГУТ, 2024. – С. 206–208.

*O. A. SUKHANOVA, A. O. SHIMANOVSKY*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **SOLUTION OF A PROBLEM OF BODIES HEATING AT SLIDING FRICTION IN ANSYS WORKBENCH**

A dynamic coupled problem of analyzing thermal processes in elastically deformable bodies that are in contact interaction is solved: a semi-cylinder sliding along the rough surface of a stationary parallelepiped. An algorithm for solving a thermal strength problem in the ANSYS Workbench package environment is developed. Details of creating a finite element model are considered. The results of calculating the von Mises equivalent stresses and temperature in contacting bodies are presented.

**Keywords:** finite element modeling, contact interaction, thermal strength problem.

Получено 10.10.2024

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ПУБЛИКАЦИИ (EDUCATIONAL AND METHODOLOGICAL PUBLICATIONS)

ISSN 2519-8742. Механика. Исследования и инновации. Вып. 17. Гомель, 2024

---

УДК 531.391

*Д. В. КОМНАТНЫЙ*

*Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого,  
Гомель, Беларусь*

### УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ С ПРИСОЕДИНЕННЫМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ МАЯТНИКОМ

Исследована колебательная система из вешего стержня, вращающегося вокруг горизонтальной оси, и прикрепленного к нему математического маятника, которая в некоторых случаях может быть использована для моделирования динамики цистерн с жидким грузом методом механической аналогии. С применением уравнений Лагранжа второго рода получены нелинейные дифференциальные уравнения малых колебаний такой системы. Обсуждаются способы их аналитического решения.

**Ключевые слова:** колебательная система, механическая аналогия, уравнения малых колебаний, метод Галеркина.

**Введение.** На современном железнодорожном и автомобильном транспорте широкое применение находит подвижной состав с цистернами. Исследования его динамики, ставящие целью исключение возможности аварий, имеют большое практическое значение, особенно, если учесть, что значительную долю перевозимых жидких грузов составляют опасные: газы, горючие, ядовитые вещества [1]. Наиболее общим способом исследования таких задач является рассмотрение колебаний транспортного средства на основе подходов теории колебаний твердых тел и механики жидкости [1–3]. Трудности решения уравнений гидродинамики (уравнений Навье – Стокса) вызвали появление метода упрощенного решения задач динамики цистерн методом механической аналогии [4, 5]. В результате развития этого подхода разработан ряд механических моделей колебаний жидкости в цистернах [1].

*Пружинно-массовые модели*, в которых движение жидкости моделируется движением пружинного маятника, соединенного с резервуаром. В [5] предложена модель в виде материальной точки, присоединенной пружинами

к стенкам резервуара. В [1] используется несколько таких маятников. В [6] предложена модель с нелинейной силой упругости пружин.

Модель в виде эквивалентного физического маятника предложена в работе [7]. В статье [1] описана модель из нескольких маятников, расположенных вертикально и связанных со стенками резервуара. В [8] представлена модель из нескольких физических маятников, совершающих вращательные движения. В статье [9] используется модель в виде сферического маятника.

Описание движения цистерны осуществляется на основе применения *многомассовых систем*. Для прогнозирования опрокидывания цистерны в [10] предложена система из двух физических маятников. В [11, 12] для анализа колебаний конструкций тяжелых жидкостных ракет-носителей использована система в виде вертикального весоного стержня, к которому прикреплены два математических маятника.

Аварийный режим движения с отрывом резервуара от платформы транспортного средства может быть выполнен путем анализа системы, состоящей из стержня, к которому прикреплен математический маятник. В данной статье получены и исследованы уравнения движения указанной системы.

**Вывод уравнений движения.** Рассматриваемая колебательная система изображена на рисунке 1. Для нее в качестве обобщенных координат можно принять углы отклонения стержня  $\theta$  и маятника  $\varphi$ .

Для получения уравнений движения такой системы целесообразно использовать уравнения Лагранжа второго рода [13]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \theta}, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, \quad (2)$$

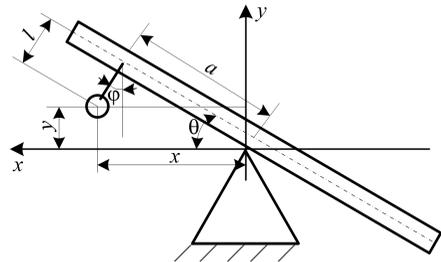


Рисунок 1 – Рассматриваемая механическая система

где  $t$  – время;  $T$ ,  $\Pi$  – кинетическая и потенциальная энергия системы; точка над переменной соответствует дифференцированию по времени.

Кинетическая энергия системы может быть определена способом, описанным в [13]. Из рисунка 1 следует, что координаты  $x$ ,  $y$  математического маятника выражаются формулами

$$x = a \cos \theta + l \sin \varphi; \quad y = a \sin \theta - l \cos \varphi,$$

где  $a$  – расстояние от оси вращения стержня до места крепления маятника;  $l$  – длина нити маятника.

Квадрат линейной скорости маятника

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2al\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin(\varphi - \theta).$$

Кинетическая энергия системы получается суммированием энергий стержня и маятника

$$T = \left[ \frac{I + ma^2}{2} \right] \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} \left[ l^2 \dot{\phi}^2 + 2al\dot{\theta}\dot{\phi} \sin(\phi - \theta) \right], \quad (3)$$

где  $I$  – момент инерции стержня относительно оси вращения;  $m$  – масса груза математического маятника.

Принимая за начало отсчета положение, при котором стержень горизонтален, а нить маятника вертикальна, в соответствии с рисунком 1 получаем выражение потенциальной энергии

$$\Pi = mg(a \sin \theta + l(1 - \cos \phi)), \quad (4)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $m/c^2$ .

После подстановки (3) и (4) в (1) и (2) а также выполнения необходимых преобразований получаем уравнения движения системы:

$$\left[ I + ma^2 \right] \ddot{\theta} + mal\dot{\phi} \sin(\phi - \theta) + mal\dot{\phi}^2 \cos(\phi - \theta) = -mga \cos \theta. \quad (5)$$

$$ml^2\ddot{\phi} + mal\ddot{\theta} \sin(\phi - \theta) - mal\dot{\theta}^2 \cos(\phi - \theta) = -mgl \sin \phi. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) являются существенно нелинейными. Для дальнейшего анализа примем, что углы  $\phi$  и  $\theta$  малы. В таком случае уравнения упрощаются по [13]:  $\sin(\phi - \theta) \approx \phi - \theta$ ;  $\cos(\phi - \theta) \approx 1$ ; членами, содержащими квадраты производных, пренебрегаем. В результате подстановки получаем:

$$\left[ I + ma^2 \right] \ddot{\theta} + mal\ddot{\phi}(\phi - \theta) + mga\theta = 0. \quad (7)$$

$$ml^2\ddot{\phi} + mal\ddot{\theta}(\phi - \theta) + mgl\phi = 0. \quad (8)$$

Но и уравнения (7), (8) остаются нелинейными, что требует использования соответствующих методов их решения.

**Решение уравнений движения.** Для решения системы нелинейных уравнений второго порядка в [14] рекомендуется метод Пуанкаре, в котором требуется вводить малый параметр, но в этом же источнике нет никакого указания на его порядок малости. Решение этим методом получается в виде ряда, исследование которого на сходимость представляет собой нетривиальную задачу и зачастую не проводится. При решении технических задач используется, как правило, только первое приближение. Насколько оно отличается от точного решения, остается неизвестным. Полученные методом Пуанкаре решения технических задач оказываются правдоподобными, однако они могут оказаться недостаточными для анализа безопасности движения транспортных средств.

Описанный в [15] метод Галеркина не требует введения малого параметра, поэтому его использование представляется целесообразным для решения урав-

нений (7), (8). Следуя [15], они преобразуются в систему дифференциальных уравнений первого порядка путем введения вспомогательных переменных  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \beta,$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{mga}{I+ma^2}\theta - \frac{mal}{I+ma^2}(\varphi-\theta)\frac{d\beta}{dt}; \quad \frac{d\beta}{dt} = -\frac{g}{l}\varphi - \frac{a}{l}(\varphi-\theta)\frac{d\alpha}{dt}.$$

Решение системы ищется в виде ряда Фурье. На практике возможно удержание только нескольких членов ряда, например,

$$\theta = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t + A_3 \cos 3\omega_1 t + A_4 \sin 3\omega_1 t;$$

$$\varphi = B_1 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t + B_3 \cos 3\omega_2 t + B_4 \sin 3\omega_2 t.$$

Чтобы отыскать фигурирующие в данных выражениях коэффициенты, подстановкой предполагаемых решений в первые два уравнения системы получают соотношения для вспомогательных переменных, которые затем подставляют в оставшиеся два уравнения. Методом тригонометрической коллокации [15] получаются алгебраические уравнения, позволяющие найти неизвестные в предполагаемом решении. Таким образом, метод Галеркина позволяет аналитически учесть только основную гармонику и небольшое число высших гармоник. Полученное этим методом решение является приближенным, уточнение решения затруднено большим объемом вычислений. Вопрос об устойчивости полученного решения в рамках метода Галеркина не решается и представляет собой самостоятельную проблему [15].

**Заключение.** Анализ уравнений (5)–(8) движения рассмотренной системы, включающей стержень с прикрепленным математическим маятником, дает основание заключить, что колебания этой системы являются существенно нелинейными. Для практических приложений аналитический расчет параметров движения такой системы удобно осуществлять методом Галеркина, не требующим введения малого параметра. Этим методом могут быть получены приближенные или оценочные решения, так как практически реализовать можно только решения с небольшим числом членов ряда Фурье, которым представляется решение. Для уточненных расчетов движения системы возникает необходимость использования численных методов [1].

Выполненный анализ может быть полезен при изучении методов решения задач динамики систем с несколькими степенями свободы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Высоцкий, М. С.** Динамика автомобильных и железнодорожных цистерн / М. С. Высоцкий, Ю. М. Плескачевский, А. О. Шимановский. – Минск : Белавтотракторостроение, 2006. – 320 с.
- 2 **Богомаз, Г. И.** Динамика железнодорожных вагонов-цистерн / Г. И. Богомаз. – Киев : Наукова думка, 2004. – 224 с.

3 Кузнецова, М. Г. Анализ подходов к моделированию колебаний ньютоновских и неньютоновских жидкостей в замкнутых резервуарах / М. Г. Кузнецова // Механика. Исследования и инновации. – 2016. – Вып. 9. – С. 67–77.

4 Моисеев, Н. Н. Движение тел, имеющих полости, частично заполненные идеальной капельной жидкостью / Н. Н. Моисеев // Доклады АН СССР. – 1952. – Т. 85, № 4. – С. 125–138.

5 Graham, E. W. The characteristics of fuel motion which affect airplane dynamics / E. W. Graham, A. M. Rodrigues // Journal of Applied Mechanics. – 1952. – Vol. 19, no. 3. – P. 381–388.

6 Кузнецова, М. Г. Компьютерное моделирование динамики машины с навесным резервуаром для жидкости / М. Г. Кузнецова, М. А. Бойкачев // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 134–139.

7 Graham, E. W. The forces produced by fuel oscillations in a rectangular tank : Technical Report SM-13748 / E. W. Graham. – Santa Monica : Douglas Aircraft Company, 1959. – 111 p.

8 Mariotta, G. Directional stability of articulated tank vehicles. A simplified model / G. Mariotta // International Journal of Heavy Vehicle Systems. – 2003. – Vol. 10, no. 1–2. – P. 144–165.

9 Kana, D. D. Validated spherical pendulum model for rotary liquid slosh / D. D. Kana // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1989. – Vol. 26, no. 3. – P. 188–195.

10 Ibrahim, R. A. Recent advances in liquid sloshing dynamics / R. A. Ibrahim, V. N. Pirlipchuk, T. Ikeda // Applied Mechanics Reviews. – 2001. – Vol. 54, no. 7. – P. 193–199.

11 Колесников, К. С. Жидкостная ракета, как объект регулирования / К. С. Колесников. – М. : Машиностроение. – 1969. – 298 с.

12 Колесников, К. С. Динамика ракет / К. С. Колесников. – М. : Машиностроение. – 1980. – 376 с.

13 Теоретическая механика. Динамика. Практикум : учеб. пособие в 2 ч. Ч. 2. Динамика материальной системы. Аналитическая механика / В. А. Акимов [и др.]. – Минск : Новое знание, 2010. – 836 с.

14 Блехман, И. И. Синхронизация динамических систем / И. И. Блехман. – М. : Наука, 1971. – 896 с.

15 Горяченко, В. Д. Основы теории колебаний / В. Д. Горяченко. – М. : Высш. шк., 2001. – 395 с.

*D. V. KOMNATNY*

*Gomel State Technical University named by P. O. Sukhoi, Gomel, Belarus*

## **OSCILLATIONS EQUATIONS OF A ROD WITH AN ATTACHED MATHEMATICAL PENDULUM**

An oscillatory system consisting of a heavy rod rotating around a horizontal axis and a mathematical pendulum attached to it is investigated. In some cases, this system can be used to model the dynamics of tanks with liquid cargo using the mechanical analogy method. Using the Lagrange equations of the second kind, nonlinear differential equations of small oscillations of such a system are obtained. Methods for their analytical solution are discussed.

**Keywords:** oscillatory system, mechanical analogy, equations of small oscillations, Galerkin method.

Получено 16.05.2024

УДК 378: 37.012

Н. Р. САВРАСОВА, С. В. СЛЕПОВА

*Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинск, Россия*

## **МЕТОДИКА ОРГАНИЗАЦИИ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА В УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВЕННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ЦЕЛЕВОЙ АУДИТОРИИ**

Предложена методика организации учебного процесса, учитывающая дифференциацию современной целевой студенческой аудитории. На примере курса теоретической механики описан субъектно-ориентированный подход, позволяющий учесть образовательные возможности различных категорий студентов за счет выстраивания индивидуальных образовательных траекторий.

**Ключевые слова:** организация учебного процесса, субъектно-ориентированный подход, индивидуальная образовательная траектория.

Современная целевая студенческая аудитория в силу разнообразных причин существенно дифференцирована. Студенты, обучающиеся в одной группе, отличаются степенью подготовки, способностями, мотивацией, организацией своей учебной деятельности. С другой стороны, в реальном учебном процессе преподаватель максимально загружен, поэтому учесть особенности каждого студента практически невозможно, однако применить субъектно-ориентированный подход можно к отдельным категориям студентов [1].

Предлагаем классифицировать студенческую аудиторию по образовательному потенциалу (способности + мотивация) и по способу организации учебного процесса. *По образовательному потенциалу* в студенческой аудитории можно выделить «отличников» (нужна только оценка 5), «хорошистов» (нужна стипендия) и «троечников» (лишь бы сдать). При этом не всегда мотивация и уровень подготовки соответствуют друг другу. *По способу организации учебного процесса* всех перечисленных выше студентов можно разделить на тех, кто работает систематически, т. е. выполняет все задания в ходе учебного процесса планомерно и своевременно, и на тех, кто принимается за работу в последний момент, когда подходит предельный срок сдачи. Согласно анкетированию студенческой аудитории таких студентов-дедлайнеров большинство [2, 3]. Несистематичная, непоследовательная учеба не способствует успешному усвоению материала и в итоге не дает нужного образовательного эффекта [4, 5].

Для эффективного осуществления учебного процесса необходимо максимально заинтересовать студентов, учитывая их способности, мотивацию и особенности самоорганизации [6]. При этом учет разного образовательного потенциала целевой студенческой аудитории не должен сводиться к снижению уровня преподавания. Ориентироваться нужно прежде всего на студентов, способных освоить дисциплину в полном (классическом) объеме.

Для того чтобы удовлетворить образовательные потребности студентов в зависимости от их способностей и мотивации, предлагаем использовать субъектно-ориентированный подход, который заключается в выстраивании индивидуальной образовательной траектории для различных категорий студентов [2, 7]. Такая организация учебного процесса в течение последних пяти лет апробируется на кафедре «Техническая механика» ЮУрГУ при изучении курса теоретической механики.

На начальном этапе студентов информируют о возможности освоения дисциплины в рамках одной из трех образовательных траекторий: «основная», «продвинутая» и «базовая». Преподаватель подробно излагает требования, которые нужно выполнить для получения в итоге оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

«Основная» траектория обеспечивает стандартный (классический) образовательный уровень с результирующими оценками (при успешном освоении) «хорошо» или «отлично».

«Продвинутая» траектория – это углубленное изучение дисциплины, посещение факультативных занятий с целью освоения методов решения сложных нестандартных задач и, как результат, успешное участие в университетской, Всероссийской и Международной олимпиадах, получение итоговой оценки «отлично» на экзамене и повышенной стипендии. Предназначена для увлеченных заинтересованных и пытливых студентов, которые с легкостью справляются с классическими заданиями. К сожалению, таких обучающихся традиционно немного. Большинство из этих студентов в дальнейшем занимаются научно-исследовательской деятельностью, успешно применяя полученные знания и опыт.

«Базовая» траектория подразумевает выполнение минимальных требований, необходимых для формирования указанных в рабочей программе дисциплины компетенций, и, следовательно, получение в результате оценки не выше «удовлетворительно» на этапе промежуточного контроля. Студентам со слабой подготовкой и (или) мотивацией рекомендуется освоить как минимум эту программу [2].

Лекции и практические занятия для всей целевой студенческой аудитории (ЦСА) проводятся в полном объеме, согласно учебному плану дисциплины. Формирование индивидуальной образовательной траектории (ИОТ) происходит в зависимости от сознательного выбора обучающимися уровня сложности и объема индивидуальных семестровых и тестовых заданий, выполняемых контрольных работ, исходя из своих способностей и мотивации. Следование по самостоятельно выбранной той или иной ИОТ приводит к разному уровню освоения учебного материала: знанию основных понятий и определений, умению применять основные законы теоретической механики к решению стандартных задач; способности творчески выбирать и применять рациональные методы кинематического, статического и динамического анализа при исследовании оригинальных задач в нестандартной постановке.

Варианты ИОТ для односеместрового курса теоретической механики показаны на рисунке 1.



сил трения, ИСЗ-8 – динамика материальной точки в инерциальной системе отсчета; ИСЗ-9 – теорема об изменении кинетической энергии; ИСЗ-10 – принцип Даламбера; ИСЗ(д) – дополнительные индивидуальные семестровые задания; уровни изучения дисциплины: Ур 1 – первый (базовый); Ур 2 – второй (основной); Ур 3 – третий (продвинутый); КР – контрольная работа.

Варианты разноуровневых задач ИСЗ-5 показаны на рисунке 2. В них заданы силовые нагрузочные характеристики, значения линейных и угловых параметров геометрии. Необходимо вычислить реакции внешних и внутренних связей, ограничивающих движение сочлененной конструкции. Схемы задач первого, второго и третьего уровней показаны на рисунке 2, а–в соответственно. Для самостоятельной работы студентов авторами разработано учебное пособие по статике [8], в котором содержится 11 разноуровневых заданий по 30 вариантов в каждом. В пособии приведены подробные решения типовых и нестандартных задач.

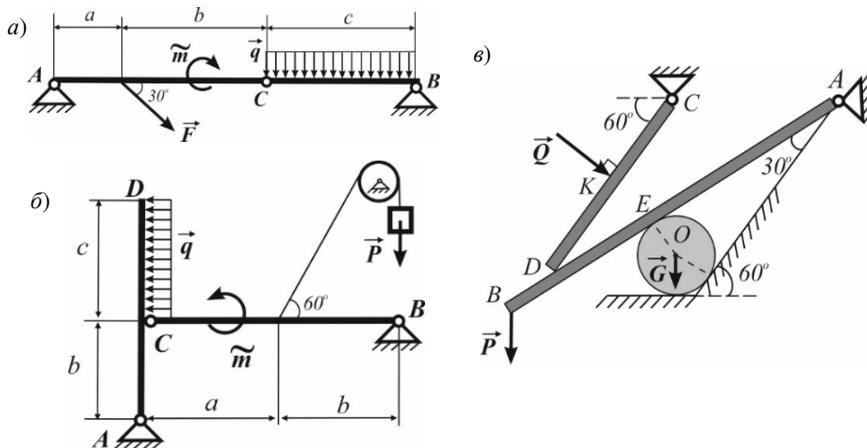


Рисунок 2 – Задания разных уровней сложности в ИСЗ-5

Количество обязательных заданий в каждой ИОТ с учетом их уровней сложности представлено в таблице 1. Дополнительно студентам предлагается (по желанию) посещать факультативные занятия по углубленному изучению отдельных тем теоретической механики, в том числе и с целью подготовки к университетской, Всероссийской и Международной олимпиадам по предмету.

Таблица 1 – Контрольные мероприятия для различных ИОТ

ИОТ	Количество ИСЗ			Тесты, КР	Максимальная оценка на экзамене
	Уровень 1	Уровень 2	Уровень 3		
Базовая	5	2	–	Уровень 1	3
Основная	2	6	1	Уровень 2, 3	4, 5
Продвинутая	2	5–8	2–4	Уровень 2, 3	5

После изучения каждого раздела, целесообразно провести очно контрольную работу, включив (на выбор) задачи различной степени сложности: на «3», «4», «5» – первого, второго или третьего уровней сложности. По результатам контрольных работ определяется рейтинг студента при освоении разделов и всей дисциплины в целом, а также соответствие его знаний заявленной образовательной траектории.

Если в вузе введена балльно-рейтинговая система, то по результатам контрольных работ может быть выставлена соответствующая оценка за экзамен «автоматом», так как баллы за контрольную работу имеют большой вес и, следовательно, дают наибольший прирост к текущему рейтингу по сравнению с другими контрольными мероприятиями, которые студенты выполняют вне стен вуза, т. е. без контроля преподавателя. Если промежуточная аттестация не предусматривает оценки «автоматом», то рейтинг студента по результатам контрольных работ дает разные стартовые возможности на экзамене.

Успешное освоение выбранной образовательной траектории в любом случае зависит от своевременного выполнения текущих учебных мероприятий, т. е. от умения студентов организовать свой образовательный процесс.

Для того, чтобы студенты-дедлайнеры «не сошли» с выбранной траектории из-за своей неорганизованности и включались в работу своевременно, нужно им помочь систематизировать учебный процесс. Для этого следует увеличить количество дедлайнов по ходу изучения дисциплины. Например, поставить жесткие сроки сдачи каждого задания и не принимать задания после этих сроков. Если за несданное вовремя задание будет грозить переход на более низкий уровень или теряться шанс получить экзаменационную оценку «автоматом», то это заставит студентов систематически работать в течение семестра. Как показывают исследования [3, 4], такие меры позволяют уменьшить количество дедлайнеров с 70 до 35 %, т. е. вдвое.

Таким образом, к преимуществам предложенного субъектно-ориентированного подхода можно отнести следующее:

- самостоятельный выбор студентами ИОТ приводит к более ответственному отношению к учебе и систематичному выполнению контрольных заданий с целью удержаться на выбранном уровне или перейти на более высокий;
- студенты со слабой первоначальной подготовкой получают возможность больше времени уделять изучению обязательных тем, выполняя задания текущего контроля преимущественно первого уровня;
- введение жестких сроков для прохождения в течение семестра контрольных мероприятий (ИСЗ, тестов, КР) побуждает студентов к последовательной и планомерной работе, что способствует более успешному усвоению учебного материала.

Применение субъектно-ориентированного подхода при изучении теоретической механики привело к повышению количественной и качественной успеваемости студентов. Можно рекомендовать использовать изложенный подход при обучении студентов бакалавриата и специалитета инженерно-техническим дисциплинам.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Слепова, С. В. Дифференциация современной студенческой аудитории / С. В. Слепова, Н. Р. Саврасова // Актуальные проблемы современной науки, техники и образования : тезисы докл. 77-й Междунар. науч.-техн. конф. – Магнитогорск : Изд-во МГТУ, 2019. – Т. 2. – С. 459–460.

2 Слепова, С. В. Выстраивание индивидуальной образовательной траектории в современном учебном процессе / С. В. Слепова, Н. Р. Саврасова // Международный журнал экспериментального образования. – 2021. – № 1. – С. 52–57.

3 Маякова, О. В. Особенности преподавания анатомии человека в условиях пандемии новой коронавирусной инфекции / О. В. Маякова, Ю. А. Кудряшова, А. М. Филенко // Материалы научной и научно-методической конференции профессорско-преподавательского состава Кубанского государственного университета физической культуры, спорта и туризма. – Краснодар : КГУФКСТ, 2021. – С. 193–195.

4 Окишев, С. В. Траектории успеваемости и их использование при анализе учебного процесса / С. В. Окишев // Мир науки. Педагогика и психология. – 2022. – Т. 10, № 4. – Ст. 19PDMN422. – 28 с.

5 Головкина, М. В. Проблемы интенсификации обучения студентов технических вузов при изучении естественно-научных дисциплин / М. В. Головкина // Международный журнал экспериментального образования. – 2021. – № 1. – С. 31–36.

6 Краснопеева, Т. О. Проектирование индивидуальных образовательных траекторий в информационной образовательной среде / Т. О. Краснопеева, А. И. Шевченко, С. К. Гураль // Язык и культура. – 2020. – № 51. – С. 153–176.

7 Саврасова, Н. Р. Опыт преподавания теоретической механики с применением субъектно-ориентированного подхода / Н. Р. Саврасова, С. В. Слепова // Наука ЮУрГУ : материалы 73-й науч. конф. – Челябинск : Изд. центр ЮУрГУ, 2021. – Секции технических наук. – С. 306–310.

8 Слепова, С. В. Теоретическая механика. Статика : учебное пособие / С. В. Слепова, Н. Р. Саврасова. – М. ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2024. – 196 с.

*N. R. SAVRASOVA, S. V. SLEPOVA*

*South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia*

## METHODOLOGY OF EDUCATIONAL PROCESS ORGANIZING IN CONDITIONS OF SIGNIFICANT DIFFERENTIATION OF THE TARGET AUDIENCE

The methodology of the educational process organization, which takes into account the differentiation of the modern target student audience, is proposed. On the example of the course of engineering mechanics the subject-oriented approach is described, that allows to take into account educational opportunities of different categories of students by building individual educational trajectories.

**Keywords:** organisation of educational process, subject-oriented approach, individual educational trajectory.

Получено 18.05.2024

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи, представляемые в сборник научных трудов «Механика. Исследования и инновации», должны соответствовать следующим требованиям.

1 Материал статьи должен отражать профиль сборника научных трудов.

2 Статья не должна быть опубликована ранее в каком-либо печатном или электронном издании. Возможна публикация расширенного варианта какой-либо работы с обязательным упоминанием ее исходного варианта в списке литературных источников и тексте.

3 Статьи оформляются в соответствии с шаблоном, который можно найти на сайте БелГУТа (<http://www.bsut.by/>). Рукопись представляется на русском, английском либо белорусском языке. Аннотация и ключевые слова в обязательном порядке представляются на русском и английском языках. Для размещения статьи в разделе «Научные публикации» объем рукописи должен составлять не менее 0,35 авторского листа (не менее 5 *полных* страниц при оформлении по указанному шаблону).

4 Основная часть статьи должна включать:

– введение, в котором обосновывается цель работы и дается краткий обзор литературы по данной проблеме; для включения в раздел «Научные публикации» статья должна содержать ссылки на работы иных авторов, статьи в периодических изданиях, а также на работы на английском языке; не допускаются ссылки в одной фразе сразу на несколько работ без описания их особенностей;

– описание методики, аппаратуры, материалов, объектов исследования и подробное освещение содержания исследований, проведенных авторами, включая графики и другой иллюстративный материал; полученные результаты должны быть проанализированы с точки зрения их достоверности, научной новизны и сопоставлены с соответствующими известными данными; иллюстрации и формулы, встречающиеся в статье, нумеруются в соответствии с порядком цитирования в тексте;

– обсуждение, в котором автор должен представить свою интерпретацию полученных в ходе исследования результатов; для публикаций по физико-математическим наукам обязательно необходимо объяснить, в чем состоит новизна работы по сравнению с предыдущими исследованиями;

– заключение, содержащее сформулированные в сжатом виде выводы, которые должны вытекать из полного текста статьи, а не только из ее названия.

5 Рисунки, формулы и таблицы вставляются непосредственно в текст статьи и должны быть пронумерованы в соответствии с порядком упоминания в тексте.

6 Список литературы, размещаемый по окончании текста статьи, должен включать библиографические данные в соответствии с СТБ 7.1–2024. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. **Для включения в раздел «Научные публикации» список литературы должен включать не менее 10 наименований, причем количество работ одного конкретного автора не должно превышать пяти** (исключение могут представлять только обзорные статьи).

7 Работы, показавшие при проверке на плагиат наличие заимствований без упоминания оригинальных публикаций, не рассматриваются, о чем информируются авторы. Материалы, не соответствующие требованиям пп. 3–6, не отправляются на рецензирование и возвращаются авторам для доработки.

8 Вместе с материалами статьи на адрес электронной почты редакции [tm.belsut@gmail.com](mailto:tm.belsut@gmail.com) следует выслать сведения об авторах, включающие фамилию, имя, отчество (полностью), место работы, занимаемую должность, ученую степень, ученое звание, адрес для переписки (почтовый и электронной почты), номер телефона для оперативной связи.

9 Направляя статью для публикации, авторы соглашаются с возможной редакционной правкой, не искажающей содержание статьи.

Научное издание

**Механика.  
Исследования и инновации**

Международный сборник научных трудов

Выпуск 17

Научный редактор А. О. Шимановский

Редактор А. А. Павлюченкова  
Технический редактор В. Н. Кучерова

Подписано в печать 30.12.2024 г. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.  
Усл. печ. л. 9,3. Уч.-изд. л. 10,11. Тираж 100 экз.  
Зак. № 2443. Изд. № 52.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Белорусский государственный университет транспорта.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий  
№ 1/361 от 13.06.2014.  
№ 2/104 от 01.04.2014.  
№ 3/1583 от 14.11.2017.  
Ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель