**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»**

Кафедра электротехники

Н. П. ВОЛКОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

Пособие

Ч а с т ь II

Гомель 2025

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра электротехники

Н. П. ВОЛКОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

Часть II

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области транспорта и транспортной деятельности
для студентов специальности 6-05-0715- 09
«Системы обеспечения движения поездов»
в качестве пособия по учебной дисциплине
«Теоретические основы электротехники»*

Гомель 2025

УДК 621.3.01.7(075.8)
ББК 31.211.512
В67

Р е ц е н з е н т ы: кафедра электроснабжения (зав. кафедрой − канд. техн. наук, доцент *Т. В. Алферова* (ГГТУ им. П. О. Сухого);
доцент кафедры физики и электротехники канд. техн. наук *Д. В. Комнатный* (ГГТУ им. П. О. Сухого)

Волков, Н. П.

В67 Теоретические основы электротехники. Линейные цепи : пособие : в 2 ч. Ч. 2 / Н. П. Волков ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2025. – 104 с.
ISBN 978-985-891-199-7(ч. 2)

Во второй части пособия рассмотрены следующие вопросы: электрические цепи, содержащие индуктивно связанные элементы; резонансные режимы в электрических цепях; трехфазные цепи, а также цепи с периодическими несинусоидальными токами.

Предназначено для самостоятельной работы студентов по курсу «Теоретические основы электротехники».

УДК 621.3.01.7(075.8)
ББК 31.211.512

ISBN 978-985-891-199-7 (ч. 2)
ISBN 978-985-891-170-6

1 ЦЕПИ С ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Если в электрической цепи есть катушки, магнитные поля которых оказывают взаимное влияние друг на друга, то такая цепь называется *цепью с индуктивно связанными элементами*. Напряжение на зажимах любой из таких катушек зависит от изменения не только тока, проходящего через данную катушку, но и от токов, проходящих через другие индуктивно связанные с ней катушки. Это явление называется *явлением взаимоиндукции.*

Рассмотрим две индуктивно связанные катушки, размещенные на общем сердечнике (рисунок 1.1) и не имеющие электрической связи между собой. Пусть первая катушка имеет индуктивность L_1 и число витков w_1, а вторая − индуктивность L_2 и число витков w_2. Если первую катушку подключить к источнику синусоидального напряжения u_1, то по ней будет проходить синусоидальный ток i_1. Он создаст магнитное поле, которое будет пересекать витки первой катушки и частично витки второй.

Имеет место и обратное влияние. При протекании тока i_2 во второй катушке под действием источника гармонического напряжения u_2 в ней создается свое магнитное поле, пересекающее витки второй катушки и частично витки первой. Таким образом, изменение во времени магнитного поля сопровождается электромагнитными процессами, происходящими в обеих катушках по определенным законам.

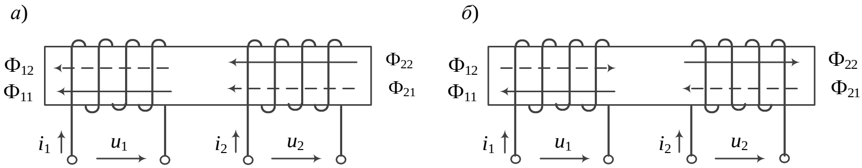

Рисунок 1.1

Направления магнитных потоков, создаваемых в катушках, согласуются с направлениями соответствующих токов по правилу правоходового винта.

Обозначим на рисунке магнитные потоки следующим образом:

Φ_{11} – поток самоиндукции в первой катушке, обусловленный током i_1 и сцеляющийся с витками w_1 первой катушки;

Φ_{22} – поток самоиндукции во второй катушке, обусловленный током i_2 и цепляющийся с витками w_2 второй катушки;

Φ_{12} – поток взаимной индукции в первой катушке, обусловленный током i_2 и сцепляющийся с витками w_1 первой катушки;

Φ_{21} – поток взаимной индукции во второй катушке, обусловленный током i_1 и сцепляющийся с витками w_2 второй катушки.

Запишем в соответствии с законом электромагнитной индукции выражения для ЭДС и напряжений, вызванные потоками

– самоиндукции:
$$e_{1L} = -u_{1L} = -L_1 \frac{di_1}{dt};$$
$$e_{2L} = -u_{2L} = -L_2 \frac{di_2}{dt}; \qquad (1.1)$$

– взаимной индукции:
$$e_{1M} = -u_{1M} = -M_{12} \frac{di_2}{dt};$$
$$e_{2M} = -u_{2M} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}, \qquad (1.2)$$

где $M_{12} = M_{21} = M$ – взаимная индуктивность, измеряемая в генри (Гн).

Как следует из рисунка 1.1, *а* магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в обеих катушках совпадают по направлению. Это соответствует *согласному включению* индуктивно связанных катушек.

На рисунке 1.1, *б* вторая катушка представлена с изменившимся направлением намотки витков. Соответственно изменились на противоположные направления потоков самоиндукции Φ_{22} и взаимной индукции Φ_{12}. В результате в обеих катушках магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции направлены навстречу друг другу. Такое включение индуктивно связанных катушек называется *встречным*.

Индуцированные в катушках ЭДС самоиндукции и взаимоиндукции уравновешиваются приложенными к катушкам напряжениями внешних источников

$$u_1 = u_{1L} \pm u_{1M} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt};$$
$$u_2 = u_{2L} \pm u_{2M} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \qquad (1.3)$$

или для синусоидальных величин в комплексной форме

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 \pm j\omega M \underline{I}_2;$$
$$\underline{U}_2 = j\omega L_2 \underline{I}_2 \pm j\omega M \underline{I}_1. \qquad (1.4)$$

Знак «*плюс*» в формулах (1.3) и (1.4) берут при согласном включении катушек, а знак «*минус*» – при встречном включении.

Чтобы не усложнять рисунки, сердечники катушек на электрических схемах обычно не изображают. Для удобства определения вида включения на схемах прибегают к специальной разметке выводов индуктивно связанных элементов цепи. Два вывода, принадлежащих двум разным индуктивно связанным катушкам цепи, называют *одноименными* и обозначают одинаковыми значками (например, * или •), руководствуясь следующим правилом: *при одинаковом направлении токов относительно одноименных выводов магнитные потоки самоиндукции и взаимоиндукции должны суммироваться*.

Представим на рисунке 1.2 схематическое изображение двух индуктивно связанных катушек с указанием одноименных зажимов и выбранных положительных направлений токов i_1 и i_2. На рисунке 1.2, *а* приведена схема согласного включения катушек, а на рисунке 1.2, *б* – схема встречного включения. Наличие индуктивной связи между катушками обозначают двойной стрелкой, около которой ставится буква M.

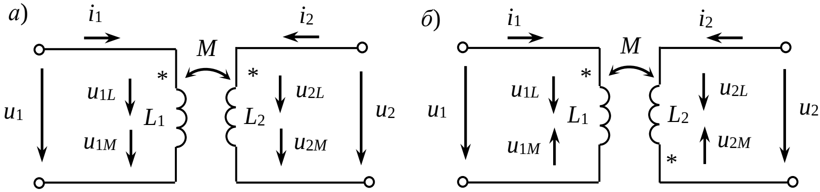

Рисунок 1.2

Степень индуктивной связи двух катушек характеризуется коэффициентом связи

$$k_{\text{c}} = M\sqrt{L_1 L_2}\,, \tag{1.5}$$

который может принимать значения от 0 до 1.

1.1 Последовательное соединение индуктивно связанных катушек

Рассмотрим на рисунке 1.3 электрическую цепь с последовательным соединением индуктивно связанных катушек. Катушки имеют соответственно индуктивности L_1 и L_2, активные сопротивления r_1 и r_2, а также взаимную индуктивность, равную M.

К цепи приложено синусоидальное напряжение u, под действием которого по катушкам протекает синусоидальный ток i. На рисунке 1.3, *а* катушки включены согласно, а на рисунке 1.3, *б* – встречно.

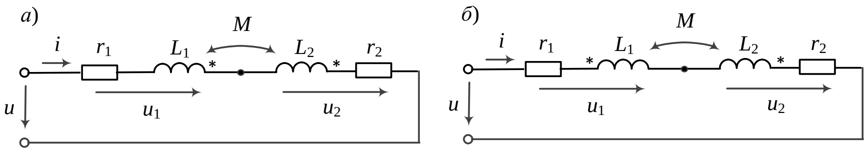

Рисунок 1.3

Напряжения на зажимах каждой из катушек

$$u_1 = r_1 i + L_1 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt};$$
$$u_2 = r_2 i + L_2 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt}. \qquad (1.6)$$

В приведенных выше формулах слагаемые $M \frac{di}{dt}$ учитывают со знаком «плюс» при согласном включении катушек, а со знаком «минус» − при встречном. Применив для цепи второй закон Кирхгофа, получим

$$u = u_1 + u_2 = (r_1 + r_2)i + (L_1 + L_2 \pm 2M)\frac{di}{dt}. \qquad (1.7)$$

Из соотношения (1.7) следует, что *наличие взаимной индукции при согласном включении катушек увеличивает индуктивность цепи, а при встречном включении, наоборот, индуктивность цепи уменьшается*.

Запишем уравнения (1.6) и (1.7) в комплексной форме:

$$\underline{U}_1 = r_1\underline{I} + j\omega L_1\underline{I} \pm j\omega M\underline{I} = (r_1 + j\omega L_1)\underline{I} \pm j\omega M\underline{I} = \underline{Z}_1\underline{I} \pm \underline{Z}_M\underline{I};$$

$$\underline{U}_2 = r_2\underline{I} + j\omega L_2\underline{I} \pm j\omega M\underline{I} = (r_2 + j\omega L_2)\underline{I} \pm j\omega M\underline{I} = \underline{Z}_2\underline{I} \pm \underline{Z}_M\underline{I};$$

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\underline{I} \pm 2\underline{Z}_M\underline{I} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \pm 2\underline{Z}_M)\underline{I}, \qquad (1.8)$$

где $\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1 = r_1 + jx_1$ − комплексное сопротивление первой катушки;

$\underline{Z}_2 = r_2 + j\omega L_2 = r_2 + jx_2$ − комплексное сопротивление второй катушки;

$\underline{Z}_M = j\omega M = jx_M$ − комплексное сопротивление, обусловленное индуктивной связью катушек (*сопротивление связи*).

Эквивалентное комплексное сопротивление последовательно соединенных двух индуктивно связанных катушек определяется из формулы (1.8):

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \pm 2\underline{Z}_M\,. \tag{1.9}$$

В формуле (1.9) знак «*плюс*» соответствует согласному включению катушек, а знак «*минус*» – встречному. Формула позволяет найти взаимную индуктивность *M*. Обозначим через $x_{\text{согл}} = x_1 + x_2 + 2x_M = \omega(L_1 + L_2 + 2M)$ индуктивное сопротивление цепи при согласном включении катушек, а через $x_{\text{встр}} = x_1 + x_2 - 2x_M = \omega(L_1 + L_2 - 2M)$ – индуктивное сопротивление цепи при встречном включении. Тогда взаимная индуктивность

$$M = \frac{x_{\text{согл}} - x_{\text{встр}}}{4\omega}.$$

Ниже приведены векторные диаграммы, построенные для согласного (рисунок 1.4, *а*) и встречного (рисунок 1.4, *б*) включения двух последовательно соединенных и индуктивно связанных катушек. При их построении принято, что $L_1 > M$ и $L_2 > M$. При этом, как при согласном, так и при встречном включениях катушек, ток *I* отстает по фазе от напряжения *U* цепи.

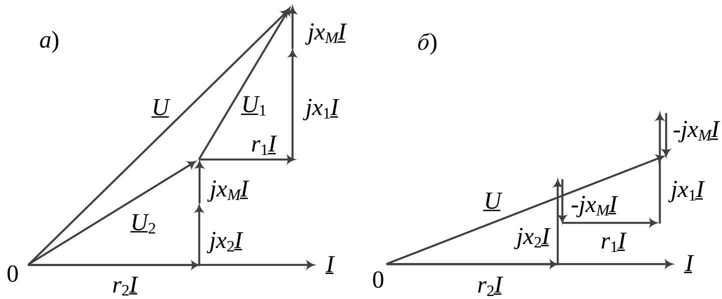

Рисунок 1.4

1.2 Параллельное соединение индуктивно связанных катушек

На рисунке 1.5 две катушки с сопротивлениями r_1 и r_2, индуктивностями L_1 и L_2 и взаимной индуктивностью *M* подключены к источнику синусоидального напряжения *u*, под действием которого в цепи протекают токи *i*, i_1 и i_2. Запишем в комплексной форме уравнения, связывающие напряжения параллельных ветвей с протекающими по ветвям токами:

− при согласном включении катушек

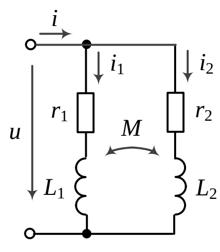

Рисунок 1.5

$$\underline{U} = r_1\underline{I}_1 + j\omega L_1\underline{I}_1 + j\omega M\,\underline{I}_2 = (r_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + j\omega M\,\underline{I}_2;$$

$$\underline{U} = r_2\underline{I}_2 + j\omega L_2\underline{I}_2 + j\omega M\,\underline{I}_1 = (r_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 + j\omega M\,\underline{I}_1;$$

– при встречном включении катушек

$$\underline{U} = r_1\underline{I}_1 + j\omega L_1\underline{I}_1 - j\omega M\,\underline{I}_2 = (r_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 - j\omega M\,\underline{I}_2;$$

$$\underline{U} = r_2\underline{I}_2 + j\omega L_2\underline{I}_2 - j\omega M\,\underline{I}_1 = (r_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 - j\omega M\,\underline{I}_1.$$

Введя обозначения $\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1$, $\underline{Z}_2 = r_2 + j\omega L_2$ и $\underline{Z}_M = j\omega M$, получим систему уравнений для обоих случаев в следующем виде:

$$\underline{U} = \underline{Z}_1\underline{I}_1 \pm \underline{Z}_M\,\underline{I}_2;$$

$$\underline{U} = \pm\underline{Z}_M\,\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\underline{I}_2.$$

Решим эту систему уравнений методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \pm\underline{Z}_M \\ \pm\underline{Z}_M & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \underline{U} & \pm\underline{Z}_M \\ \underline{U} & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{U}(\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{U} \\ \pm\underline{Z}_M & \underline{U} \end{vmatrix} = \underline{U}(\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_M).$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \underline{U}\,\frac{(\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \underline{U}\,\frac{(\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_M)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2};$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{U}\,\frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}.$$

Эквивалентное сопротивление двух параллельно соединенных индуктивно связанных катушек найдем по закону Ома

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M}. \qquad (1.10)$$

Знак «*минус*» в знаменателе формулы (1.10) ставится при согласном включении катушек, а знак «*плюс*» − при встречном.

При отсутствии индуктивной связи между катушками, т. е. при $Z_M = 0$, выражение для эквивалентного сопротивления принимает следующий вид:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

1.3 Расчет разветвленных цепей при наличии взаимной индуктивности

Расчет разветвленных цепей при наличии взаимной индуктивности можно производить, составляя уравнения непосредственно по законам Кирхгофа, либо применяя метод контурных токов. Метод узловых потенциалов использовать нельзя, т. к. токи в ветвях зависят не только от находящихся в них ЭДС источников и потенциалов узлов, к которым присоединены эти ветви, но и от токов других ветвей, с которыми они связаны через взаимную индукцию. Метод эквивалентного генератора можно применять в том случае, если ветвь, в которой требуется найти ток, не имеет индуктивной связи с остальной частью исследуемой цепи.

Нельзя использовать полученные ранее формулы для эквивалентной замены треугольника сопротивлений при наличии в нем индуктивной связи эквивалентной звездой и при обратном преобразовании.

В качестве примера составим уравнения для расчета цепи с индуктивно связанными элементам, схема которой представлена на рисунке 1.6, методом непосредственного применения законов Кирхгофа. Схема содержит два гармонических источника напряжения, под действием которых в ветвях протекают синусоидальные токи.

Произвольно выберем и укажем стрелками направления токов в ветвях и направления обхода двух независимых контуров схемы. При выбранных направлениях токов ветвей и указанных на схеме звездочками одноименных зажимах катушек имеем встречное включение индуктивно связанных катушек L_1 и L_2. Запишем для данной схемы уравнения по законам Кирхгофа для мгновенных величин:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0;$$

$$L_1\frac{di_1}{dt}-M\frac{di_2}{dt}+r_1i_1+\frac{1}{C_1}\int i_1dt+r_3i_3+\frac{1}{C_3}\int i_3dt=e_3;$$

$$r_2i_2+L_2\frac{di_2}{dt}-M\frac{di_1}{dt}-\frac{1}{C_3}\int i_3dt-r_3i_3=e_2-e_3.$$

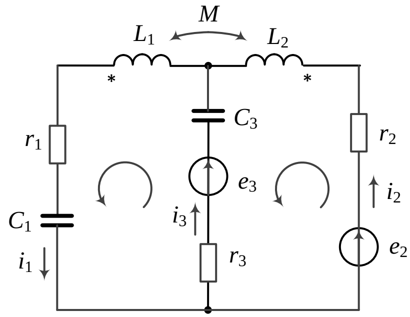

Рисунок 1.6

В более компактной форме эти уравнения можно записать для комплексной схемы замещения на рисунке 1.7, на которой заменим синусоидальные величины их комплексными изображениями, а последовательно соединенные пассивные элементы – комплексными сопротивлениями:

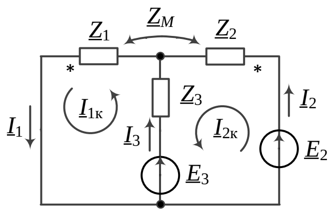

Рисунок 1.7

$$\underline{I}_1-\underline{I}_2-\underline{I}_3=0;$$

$$\underline{Z}_1\underline{I}_1-\underline{Z}_M\underline{I}_2+\underline{Z}_3\underline{I}_3=\underline{E}_3;$$

$$\underline{Z}_2\underline{I}_2-\underline{Z}_M\underline{I}_1-\underline{Z}_3\underline{I}_3=\underline{E}_2-\underline{E}_3,$$

где $\underline{Z}_1=r_1+j\omega L_1+\dfrac{1}{j\omega C_1}$; $\underline{Z}_2=r_2+j\omega L_2$;

$$\underline{Z}_3=r_3+\frac{1}{j\omega C_3};\ \underline{Z}_M=j\omega M.$$

Приведем также уравнения, составленные для расчета цепи методом контурных токов, принимая во внимание, что относительно контурных токов $\underline{I}_{1к}$ и $\underline{I}_{2к}$, указанных на рисунке 1.7, катушки включены встречно:

$$(\underline{Z}_1+\underline{Z}_3)\underline{I}_{1к}-\underline{Z}_M\underline{I}_{2к}-\underline{Z}_3\underline{I}_{2к}=\underline{E}_3;$$

$$-\underline{Z}_M\underline{I}_{1к}-\underline{Z}_3\underline{I}_{1к}+(\underline{Z}_2+\underline{Z}_3)\underline{I}_{2к}=\underline{E}_2-\underline{E}_3.$$

1.4 Баланс мощностей в индуктивно связанных цепях

На рисунке 1.8 приведен фрагмент электрической цепи, содержащий две индуктивно связанные катушки, которые имеют комплексные сопротивления $\underline{Z}_1 = r_1 + jx_1$ и $\underline{Z}_2 = r_2 + jx_2$. Комплексное сопротивление, обусловленное индуктивной связью катушек, $\underline{Z}_M = jx_M$. Пусть комплексные токи катушек соответственно равны $\underline{I}_1 = I_1 e^{j\alpha_1}$ и $\underline{I}_2 = I_2 e^{j\alpha_2}$.

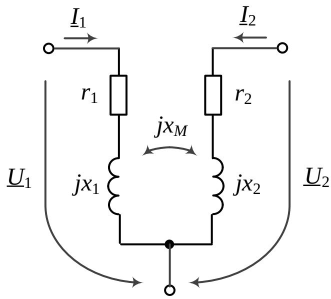

Рисунок 1.8

Напряжения на зажимах катушек

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 \pm \underline{Z}_M \underline{I}_2 = (r_1 + jx_1)\underline{I}_1 \pm jx_M \underline{I}_2;$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 \pm \underline{Z}_M \underline{I}_1 = (r_2 + jx_2)\underline{I}_2 \pm jx_M \underline{I}_1.$$

В формулах для напряжений на катушках знак «плюс» ставят при их согласном включении, а знак «минус» − при встречном.

Найдем комплексные мощности, выделяемые на катушках,

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \overset{*}{\underline{I}_1} = r_1 \underline{I}_1 \overset{*}{\underline{I}_1} + jx_1 \underline{I}_1 \overset{*}{\underline{I}_1} \pm jx_M \underline{I}_2 \overset{*}{\underline{I}_1} = r_1 I_1^2 + jx_1 I_1^2 + x_M \underline{I}_1 \underline{I}_2 e^{j(\alpha_2 - \alpha_1 \pm 90^\circ)} =$$

$$= r_1 I_1^2 + jx_1 I_1^2 + x_M I_1 I_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1 \pm 90^\circ) + jx_M I_1 I_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1 \pm 90^\circ) =$$

$$= r_1 I_1^2 \mp x_M I_1 I_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + jx_1 I_1^2 \pm jx_M I_1 I_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1).$$

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_2 \overset{*}{\underline{I}_2} = r_2 \underline{I}_2 \overset{*}{\underline{I}_2} + jx_2 \underline{I}_2 \overset{*}{\underline{I}_2} \pm jx_M \underline{I}_1 \overset{*}{\underline{I}_2} = r_2 I_2^2 + jx_2 I_2^2 + x_M I_1 I_2 e^{j(\alpha_1 - \alpha_2 \pm 90^\circ)} =$$

$$= r_2 I_2^2 + jx_2 I_2^2 + x_M I_1 I_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2 \pm 90^\circ) + jx_M I_1 I_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2 \pm 90^\circ) =$$

$$= r_2 I_2^2 \pm x_M I_1 I_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + jx_2 I_2^2 \pm jx_M I_1 I_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Суммарная комплексная мощность катушек

$$\underline{S} = r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 + j(x_1 I_1^2 + x_2 I_2^2) \pm j2x_M I_1 I_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = P + jQ, \quad (1.11)$$

где $P = r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2$;

$$Q = x_1 I_1^2 + x_2 I_2^2 \pm j2x_M I_1 I_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (1.12)$$

Из полученных результатов следует, что наличие индуктивной связи между катушками не влияет на выделяемую на резистивных элементах активную мощность. Реактивная мощность при этом больше при согласном включении катушек (знак «плюс» в формуле (1.12)), чем при встречном.

Пример 1.1 В цепи с индуктивно связанными элементами, схема которой дана на рисунке 1.9, действует синусоидальный источник с ЭДС E = 120 В и угловой частотой $\omega = 5\cdot10^3\ c^{-1}$. Параметры элементов схемы: r_1 = 10 Ом, r_2 = = 20 Ом, r_3 = 25 Ом, $C_1 = C_3$ = 10 мкФ, L_2 = 3 мГн, L_3 = 6 мГн. Коэффициент индуктивной связи $k_{\text{c}} = 1/(2\sqrt{2})$.

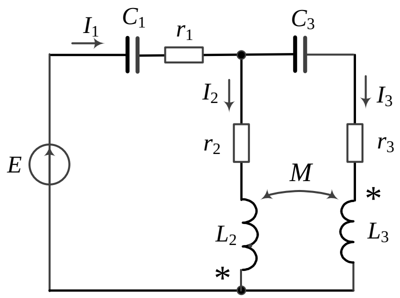

Рисунок 1.9

Требуется:

1 Найти токи ветвей.

2 Составить баланс мощностей.

Решение. Для указанного на схеме направления токов ветвей индуктивные катушки включены встречно. Найдем комплексные сопротивления ветвей схемы:

$$\underline{Z}_1 = r_1 - j\frac{1}{\omega C_1} = 10 - j20 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 + j\omega L_2 = 20 + j15 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = r_3 - j\frac{1}{\omega C_3} + j\omega L_3 = 25 + j10 \text{ Ом}.$$

Взаимная индуктивность между второй и третьей ветвями

$$M = k_{\text{c}}\sqrt{L_2 L_2} = 1{,}5 \text{ мГн}.$$

Комплексное сопротивление индуктивной связи

$$\underline{Z}_M = j\omega M = j7{,}5 \text{ Ом}.$$

Составим расчетную комплексную схему цепи (рисунок 1.10), укажем на ней независимые контуры I и II и запишем уравнения по законам Кирхгофа в комплексной форме, полагая, что $\underline{E} = E$, и учитывая встречное включение катушек:

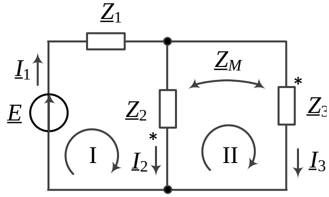

Рисунок 1.10

$$-\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0;$$

$$\underline{Z}_1\underline{I}_1+\underline{Z}_2\underline{I}_2-\underline{Z}_M\underline{I}_3=\underline{E};$$

$$\underline{Z}_2\underline{I}_2-\underline{Z}_M\underline{I}_3-\underline{Z}_3\underline{I}_3+\underline{Z}_M\underline{I}_2=(\underline{Z}_2+\underline{Z}_M)\underline{I}_2-(\underline{Z}_3+\underline{Z}_M)\underline{I}_3=0.$$

Запишем полученную систему уравнений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \underline{Z}_1 & \underline{Z}_2 & -\underline{Z}_M \\ 0 & \underline{Z}_2+\underline{Z}_M & -(\underline{Z}_3+\underline{Z}_M) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \underline{E} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем решение системы уравнений относительно токов ветвей:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \underline{Z}_1 & \underline{Z}_2 & -\underline{Z}_M \\ 0 & \underline{Z}_2+\underline{Z}_M & -(\underline{Z}_3+\underline{Z}_M) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \underline{E} \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3{,}385+j2{,}745 \\ 1{,}865+j1{,}183 \\ 1{,}52+j1{,}561 \end{bmatrix}.$$

Токи ветвей цепи

$$\underline{I}_1=I_1e^{j\alpha_1}=3{,}385+j2{,}745=4{,}358\,e^{j39^\circ}\text{ А};$$

$$\underline{I}_2=I_2e^{j\alpha_2}=1{,}865+j1{,}183=2{,}209\,e^{j32{,}4^\circ}\text{ А};$$

$$\underline{I}_3=I_3e^{j\alpha_3}=1{,}52+j1{,}561=2{,}179\,e^{j45{,}8^\circ}\text{ А}.$$

Найдем комплексную мощность источника:

$$\underline{S}_{\text{ист}}=P_{\text{ист}}+jQ_{\text{ист}}=\underline{E}\overset{*}{\underline{I}}_1=120(3{,}385-j2{,}745)=406{,}2-j329{,}1\text{ В·А};$$

$$P_{\text{ист}}=406{,}2\text{ Вт};\ Q_{\text{ист}}=-329{,}1\text{ вар}.$$

Активная мощность, выделяемая на нагрузке,

$$P_{\text{нагр}}=I_1^2r_1+I_2^2r_2+I_3^2r_3=406{,}165\text{ Вт}.$$

Реактивная мощность нагрузки

$$Q_{\text{нагр}}=-I_1^2x_{C1}+I_2^2x_{L2}-I_3^2x_{C3}+I_3^2x_{L3}-2x_MI_2I_3\cos(\alpha_2-\alpha_3)=-329{,}4\text{ вар}.$$

Результаты расчета показывают, что баланс активной и реактивной мощностей выполняется:

$$P_{\text{нагр}}\approx P_{\text{ист}};$$

$$Q_{\text{нагр}}\approx Q_{\text{ист}}.$$

1.5 Эквивалентная замена индуктивных связей

С целью упрощения расчетов электрических цепей схему, в которой присутствуют индуктивно связанные элементы, заменяют эквивалентной схемой без индуктивной связи.

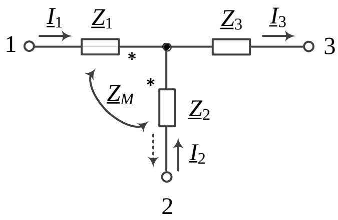

Рисунок 1.11

Рассмотрим схему на рисунке 1.11, на которой три ветви с комплексными сопротивлениями $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ и $\underline{Z}_3$ присоединены к общему узлу. Первая и вторая ветви с сопротивлениями $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ имеют индуктивную связь между собой и присоединены к общему узлу одноименными зажимами. При этом для указанных направлений токов эти ветви включены согласно. Соотношение между токами ветвей определяется первым законом Кирхгофа

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}_3.$$

Найдем напряжения $\underline{U}_{12}$ и $\underline{U}_{13}$ между выводами ветвей 1, 2 и 1, 3:

$$\underline{U}_{12} = \underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{Z}_M\underline{I}_2 - \underline{Z}_2\underline{I}_2 - \underline{Z}_M\underline{I}_1 = (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M)\underline{I}_1 - (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M)\underline{I}_2;$$

$$\underline{U}_{13} = \underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{Z}_M\underline{I}_2 + \underline{Z}_3\underline{I}_3.$$

Выполнив в последнем уравнении замену $\underline{I}_2 = -\underline{I}_1 + \underline{I}_3$, получим

$$\underline{U}_{13} = \underline{Z}_1\underline{I}_1 - \underline{Z}_M\underline{I}_1 + \underline{Z}_M\underline{I}_3 + \underline{Z}_3\underline{I}_3 = (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M)\underline{I}_1 + (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_M)\underline{I}_3.$$

На основании записанных выражений для напряжений $\underline{U}_{12}$ и $\underline{U}_{13}$ получаем схему без индуктивной связи на рисунке 1.12.

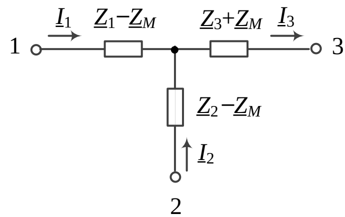

Рисунок 1.12

Изменим направление тока $\underline{I}_2$ на противоположное (на рисунке 1.11 ток указан пунктиром). В этом случае индуктивно связанные ветви останутся присоединенными к общему узлу одноименными зажимами, но будут включены встречно. Запишем выражения для напряжений $\underline{U}_{12}$ и $\underline{U}_{13}$ с учетом изменившегося соотношения между токами ветвей в следующем виде:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3;$$

$$\underline{U}_{12} = \underline{Z}_1\underline{I}_1 - \underline{Z}_M\underline{I}_2 + \underline{Z}_2\underline{I}_2 - \underline{Z}_M\underline{I}_1 = (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M)\underline{I}_1 + (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M)\underline{I}_2;$$

$$\underline{U}_{13} = \underline{Z}_1\underline{I}_1 - \underline{Z}_M\underline{I}_2 + \underline{Z}_3\underline{I}_3 = \underline{Z}_1\underline{I}_1 - \underline{Z}_M\underline{I}_1 + \underline{Z}_M\underline{I}_3 + \underline{Z}_3\underline{I}_3 =$$
$$= (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M)\underline{I}_1 + (\underline{Z}_M + \underline{Z}_3)\underline{I}_3.$$

Схема замещения без индуктивной связи будет такой же, как и для предыдущего случая на рисунке 1.12.

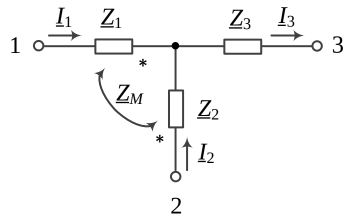

Рисунок 1.13

Присоединим индуктивно связанные ветви к общему узлу разноименными зажимами (рисунок 1.13) при их встречном включении. Составим уравнения для токов ветвей и напряжений $\underline{U}_{12}$ и $\underline{U}_{13}$:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}_3;$$

$$\underline{U}_{12} = \underline{Z}_1\underline{I}_1 - \underline{Z}_M\underline{I}_2 - \underline{Z}_2\underline{I}_2 + \underline{Z}_M\underline{I}_1 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_M)\underline{I}_1 - (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_M)\underline{I}_2;$$

$$\underline{U}_{13} = \underline{Z}_1\underline{I}_1 - \underline{Z}_M\underline{I}_2 + \underline{Z}_3\underline{I}_3 = \underline{Z}_1\underline{I}_1 + \underline{Z}_M\underline{I}_1 - \underline{Z}_M\underline{I}_3 + \underline{Z}_3\underline{I}_3 =$$

$$= (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_M)\underline{I}_1 + (\underline{Z}_3 - \underline{Z}_M)\underline{I}_3.$$

Системе уравнений, полученной для напряжений $\underline{U}_{12}$ и $\underline{U}_{13}$, соответствует схема цепи на рисунке 1.14.

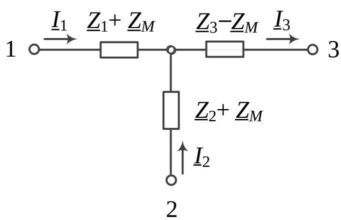

Рисунок 1.14

На основании полученных результатов сформулируем правило избавления от индуктивной связи в электрических цепях, которое называют *правилом индуктивной развязки*:

– *если две индуктивно связанные ветви присоединены к общему узлу одноименными зажимами, то в схеме замещения без индуктивной связи комплексные сопротивления этих ветвей уменьшают на значение* $\underline{Z}_M = j\omega M$*, а в третью ветвь, присоединенную к этому же узлу, добавляют сопротивление* $\underline{Z}_M$;

– *если две индуктивно связанные ветви присоединены к общему узлу разноименными зажимами, то в схеме замещения без индуктивной связи комплексные сопротивления этих ветвей увеличивают на* $\underline{Z}_M$*, а сопротивление третьей ветви, присоединенной к этому же узлу, уменьшают на* $\underline{Z}_M$.

1.6 Трансформатор без стального сердечника (воздушный трансформатор)

Трансформатор представляет собой статическое электромагнитное устройство, которое состоит из двух или нескольких индуктивно связанных катушек (обмоток), размещенных на одном сердечнике (магнитопроводе).

Трансформаторы используются для преобразования напряжений и токов, развязки и согласования отдельных участков цепи.

На рисунке 1.15 представлен простейший трансформатор, который состоит из двух обмоток и имеет сердечник, выполненный из неферромагнитного материала. Будем полагать, что магнитная проницаемость материала сердечника постоянная. Такие трансформаторы применяют в качестве элемента линейной электрической цепи в устройствах автоматики, связи, измерительной техники и т. п. В силу того, что материал сердечника имеет относительную магнитную проницаемость близкую к единице, такой трансформатор часто называют *воздушным.* Рассмотрим на элементарном уровне принцип работы такого трансформатора.

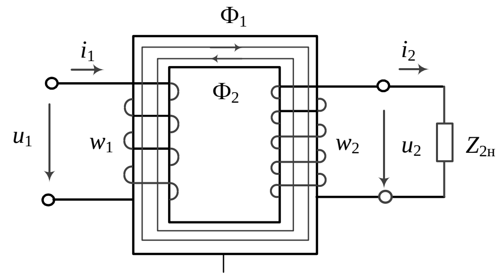

Рисунок 1.15

К *первичной* обмотке трансформатора с числом витков w_1 подключают синусоидальный источник с напряжением u_1. Ко *вторичной* обмотке с числом витков w_2 подключается нагрузка с сопротивлением $Z_{2н}$. Под действием источника по первичной обмотке протекает ток i_1 и возникает магнитный поток $Φ_1$, направление которого определяется правилом правоходового винта. Он пронизывает витки первичной и вторичной обмоток и индуцирует во вторичной обмотке ЭДС взаимоиндукции e_2, которая в свою очередь вызывает во вторичной обмотке ток i_2. Под действием этого тока во вторичной обмотке образуется магнитный поток $Φ_2$, направление которого по правилу Ленца будет противоположно направлению магнитного потока $Φ_1$. Таким образом, можно констатировать, что катушки трансформатора индуктивно связаны между собой и включены встречно.

В магнитопроводе трансформатора образуется результирующий магнитный поток Ф, который изменяется по синусоидальному закону и пронизывает обе катушки. Напряжения и токи обмоток трансформатора называют соответственно *первичными* и *вторичными*.

Поскольку магнитный поток Ф пронизывает обе обмотки, то в первичной обмотке будет наводиться ЭДС самоиндукции

$$e_1 = -w_1 \frac{d\Phi}{dt},$$

а во вторичной − ЭДС взаимоиндукции

$$e_2 = -w_2 \frac{d\Phi}{dt}.$$

Отношение

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{w_1}{w_2} = k_т \qquad (1.13)$$

называется *коэффициентом трансформации*.

Трансформатор может быть представлен схемой на рисунке 1.16, на которой активные сопротивления r_1 и r_2 изображают последовательно соединенными с индуктивностями L_1 и L_2 катушек. При этом будем пренебрегать распределенной емкостью между витками обмоток трансформатора.

На схеме трансформатора не указывают одноименные зажимы индуктивно связанных ветвей и полагают, что обмотки всегда включены встречно.

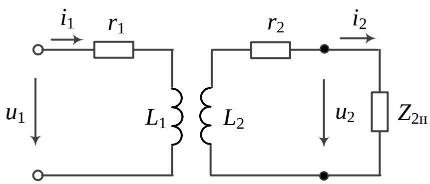

Рисунок 1.16

Запишем уравнения по второму закону Кирхгофа в дифференциальной форме для мгновенных величин

$$r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = u_1;$$

$$r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + u_2 = 0.$$

В комплексной форме эти уравнения примут следующий вид:

$$(r_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 = \underline{U}_1;$$

$$(r_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1 + \underline{U}_2 = 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1 = r_1 + jx_1; \quad \underline{Z}_2 = r_2 + j\omega L_2 = r_2 + jx_2;$$

$$\underline{Z}_M = j\omega M = jx_M; \quad \underline{Z}_{2\text{н}} = r_{2\text{н}} \pm jx_{2\text{н}}.$$

Получим уравнения трансформатора в следующей форме:

$$\begin{aligned} &\underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_M \underline{I}_2 = \underline{U}_1; \\ &-\underline{Z}_M \underline{I}_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2\text{н}})\underline{I}_2 = 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

1.6.1 Входное сопротивление трансформатора

Решая систему уравнений (1.14) методом Крамера, найдем ток $\underline{I}_1$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & -\underline{Z}_M \\ -\underline{Z}_M & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2\text{н}} \end{vmatrix} = \underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2\text{н}}) - \underline{Z}_M^2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \underline{U}_1 & -\underline{Z}_M \\ 0 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2\text{н}} \end{vmatrix} = \underline{U}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2\text{н}});$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\underline{U}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2\text{н}})}{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2\text{н}}) - \underline{Z}_M^2},$$

откуда найдем входное сопротивление трансформатора

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2\text{н}}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{\text{внос}}, \tag{1.15}$$

где $\underline{Z}_{\text{внос}} = -\dfrac{\underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2\text{н}}}$ – вносимое (из вторичного контура в первичный) сопротивление.

Найдем вещественную и мнимую составляющие вносимого сопротивления при активно-индуктивном характере сопротивления нагрузки $\underline{Z}_{2н} = r_{2н} + jx_{2н}$

$$\underline{Z}_{вноc} = -\frac{\underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2н}} = -\frac{(jx_M)^2}{(r_2 + r_{2н}) + j(x_2 + x_{2н})} = \frac{x_M^2}{r_{22} + jx_{22}} \cdot \frac{r_{22} - jx_{22}}{r_{22} - jx_{22}} =$$

$$= \frac{r_{22}x_M^2}{r_{22}^2 + x_{22}^2} - j\frac{x_{22}x_M^2}{r_{22}^2 + x_{22}^2} = r_{вноc} - jx_{вноc}, \qquad (1.16)$$

где $r_{22} = r_2 + r_{2н}$; $x_{22} = x_2 + x_{2н}$;

$r_{вноc} = \dfrac{r_{22}x_M^2}{r_{22}^2 + x_{22}^2}$ – вносимое активное сопротивление; (1.17)

$x_{вноc} = \dfrac{x_{22}x_M^2}{r_{22}^2 + x_{22}^2}$ – вносимое реактивное сопротивление. (1.18)

Вносимое активное сопротивление $r_{вноc}$ всегда учитывают с положительным знаком. В нем поглощается энергия, которая передается из первичной цепи во вторичную. Вносимое реактивное сопротивление в комплексной форме $jx_{вноc}$ имеет знак, противоположный знаку сопротивления jx_{22}.

Ток $\underline{I}_1$ можно выразить через входное сопротивление трансформатора по закону Ома

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{вх}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{вноc}} = \frac{\underline{U}_1}{(r_1 + r_{вноc}) + j(x_1 + x_{вноc})}. \qquad (1.19)$$

Вносимые активное и реактивное сопротивления представляют собой такие сопротивления, которые следовало бы включить в первичную цепь трансформатора последовательно с активным r_1 и реактивным x_1 сопротивлениями первичной обмотки, чтобы учесть влияние вторичной цепи трансформатора на ток его первичной цепи.

1.6.2 Схема замещения воздушного трансформатора

Схема двухобмоточного трансформатора, которая представлена на рисунке 1.16, может быть заменена эквивалентной схемой без индуктивной связи. С этой целью соединим между собой нижние выводы схемы, как показано на рисунке 1.17. Режим цепи при этом останется прежним. Обмотки трансформатора присоединяются к общему узлу одноименными зажимами.

Сопротивление $r_{вн}$ увеличивает входное сопротивление со стороны зажимов первичной обмотки по сравнению со значением r_1. Это обусловлено рассеиванием энергии в активном сопротивлении вторичной цепи.

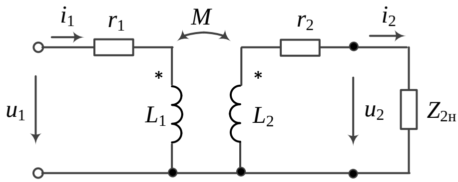

Рисунок 1.17

Сопротивление $x_{вн}$ увеличивает или уменьшает входное реактивное сопротивление по сравнению со значением x_1 в зависимости от знака реактивного сопротивления $x_2 + x_{2н}$.

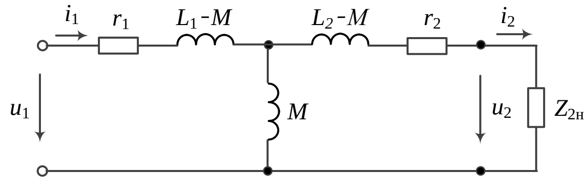

Рисунок 1.18

Применив к данной схеме правило индуктивной развязки, получим схему трансформатора на рисунке 1.18, в которой отсутствует индуктивная связь между первичной и вторичной обмотками.

Пример 1.2 Трансформатор на рисунке 1.19 подключен к источнику с напряжением $U_1 = 100$ В и имеет следующие параметры катушек: $r_1 = 3$ Ом; $r_2 = 3$ Ом; $x_1 = \omega L_1 = 4$ Ом; $x_2 = \omega L_2 = 9$ Ом; коэффициент связи $k_с = 1/3$. Определить показания измерительных приборов при разомкнутом и замкнутом ключе К.

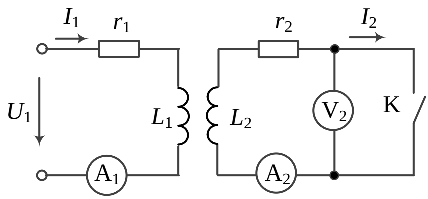

Рисунок 1.19

Решение. Полагаем, что $\underline{U}_1 = U_1 = 100$ В.

Комплексные сопротивления катушек:

$$\underline{Z}_1 = r_1 + jx_1 = 3 + j4 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 + jx_2 = 6 + j9 \text{ Ом}.$$

Сопротивление индуктивной связи

$$\underline{Z}_M = jx_M = jk_\text{с}\sqrt{x_1 x_2} = j2 \text{ Ом}.$$

Запишем систему уравнений для трансформатора в режиме холостого хода (ключ К разомкнут)

$$\underline{Z}_1 \underline{I}_{1\text{х}} = \underline{U}_1;$$

$$\underline{Z}_M \underline{I}_{1\text{х}} = \underline{U}_{2\text{х}}.$$

Ток первичной обмотки в режиме холостого хода

$$\underline{I}_{1\text{х}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{100}{3 + j4} = 12 - j16 = 20\, e^{-j53{,}1^\circ} \text{ А}.$$

Напряжение на разомкнутых зажимах вторичной обмотки

$$\underline{U}_{2\text{х}} = jx_M \underline{I}_{1\text{х}} = j2(12 - j16) = 32 + j24 = 40\, e^{j26{,}9^\circ} \text{ В}.$$

Таким образом, при разомкнутом ключе К амперметр A_1 покажет 20 А, амперметр A_2 покажет нуль, а показание вольтметра V_2 составит 40 В.

В режиме короткого замыкания, т. е. при замкнутом положении ключа *K*, система уравнений трансформатора будет записана следующим образом:

$$\underline{Z}_1 \underline{I}_{1\text{к}} - \underline{Z}_M \underline{I}_{2\text{к}} = \underline{U}_1;$$

$$-\underline{Z}_M \underline{I}_{1\text{к}} + \underline{Z}_2 \underline{I}_{2\text{к}} = 0.$$

Решая систему уравнений, получим значения токов первичной и вторичной обмоток трансформатора при его коротком замыкании со стороны выходных зажимов:

$$\underline{I}_{1к} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{U}_1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} = \frac{(6+j9)100}{(3+j4)(6+j9)-(j2)^2} = 13{,}41 - j15{,}45 = 20{,}45\ e^{-j49^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{2к} = \frac{\underline{Z}_M \underline{U}_1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} = \frac{j200}{(3+j4)(6+j9)-(j2)^2} = 3{,}65 - j = 3{,}78\ e^{-j15{,}4^\circ}\ \text{А}.$$

Убедимся в правильности полученных результатов по балансу электрических мощностей. Комплексная мощность, получаемая из сети,

$$\underline{S}_{ист} = P_{ист} + jQ_{ист} = \underline{U}_1 \overset{*}{\underline{I}}_{1к} = 100(13{,}41 + j15{,}45) = 1341 + j1545\ \text{В·А}.$$

$$P_{ист} = 1341\ \text{Вт};\ Q_{ист} = 1545\ \text{вар}.$$

Активная мощность, выделяемая на активных сопротивлениях трансформатора,

$$P_{нагр} = I_{1к}^2 r_1 + I_{2к}^2 r_2 = 20{,}45^2 \cdot 3 + 3{,}78^2 \cdot 6 = 1340{,}3\ \text{Вт}.$$

Реактивная мощность обмоток трансформатора

$$Q_{нагр} = I_{1к}^2 x_1 + I_{2к}^2 x_2 - 2x_M I_{1к} I_{2к} \cos\left[\arg(\underline{I}_{1к}) - \arg(\underline{I}_{2к})\right] =$$

$$= 20{,}45^2 \cdot 4 + 3{,}78^2 \cdot 9 - 2 \cdot 21543{,}86 \cdot 20{,}45 \cdot 3{,}78 \cos(-33{,}6^\circ) = 1543{,}86\ \text{вар}.$$

Баланс мощностей выполняется. Измерительные приборы при замкнутом ключе К будут иметь следующие показания: амперметр A_1 – 20,45 А; амперметр A_2 – 3,78 А; вольтметр V_2 –ноль.

2 РЕЗОНАНС В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Двухполюсные цепи, имеющие в своем составе индуктивности и емкости, характеризуются входными сопротивлениями, которые зависят от частоты. В силу того, что реактивные сопротивления индуктивностей и емкостей в комплексной форме имеют противоположные знаки, то при определенных частотах в таких цепях может происходить полная компенсация реактивного сопротивления. Входное сопротивление цепи приобретает чисто активный характер, а напряжение и ток на входе совпадают по фазе. Это означает, что рассматриваемая электрическая цепь характеризуется определенными избирательными свойствами, и в цепи имеет место особый режим, называемый *резонансом*.

Режим резонанса при определенных условиях может вызывать появление на отдельных участках токов и напряжений, превышающих по значениям входные величины.

Простейшими цепями, в которых имеет место резонанс, являются *колебательные контуры* с последовательным и параллельным соединением индуктивного и емкостного элементов. Благодаря своим избирательным частотным свойствам они находят широкое применение на практике.

2.1 Резонанс в последовательном контуре

Последовательный контур представляет электрическую цепь из соединенных последовательно сопротивления r, индуктивности L и емкости C. Цепь подключается к источнику с напряжением u (рисунок 2.1). Запишем уравнение цепи по второму закону Кирхгофа для мгновенных величин

$$u_r + u_L + u_C = ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = u. \tag{2.1}$$

Полагая, что к цепи приложено напряжение $u = U_m \sin \omega t$, получим закон изменения тока i, который смещен по фазе относительно приложенного к цепи напряжения на угол φ:

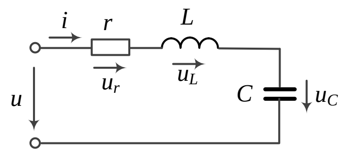

Рисунок 2.1

$$i = \frac{U_m}{Z}\sin(\omega t - \varphi) = I_m \sin(\omega t - \varphi), \tag{2.2}$$

где $Z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{r^2 + x^2};$ (2.3)

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} = \operatorname{arctg}\frac{x_L - x_C}{r} = \operatorname{arctg}\frac{x}{r}. \tag{2.4}$$

Запишем уравнение (2.1) в комплексной форме:

$$\underline{U}_r + \underline{U}_L + \underline{U}_C = r\underline{I} + jx_L\underline{I} - jx_C\underline{I} = \left[r + j\left(x_L - x_C\right)\right]\underline{I} = \underline{Z}\,\underline{I} = \underline{U}.$$

Комплексный ток в цепи

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{r + j(x_L - x_C)} = \frac{\underline{U}}{r + jx}. \tag{2.5}$$

Для рассматриваемой цепи резонанс наступает при $x = x_L - x_C = 0$, т. е. при $x_L = x_C$. Этому условию соответствует соотношение

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \qquad (2.6)$$

При $x_L = x_C$ напряжения на индуктивности и емкости равны по значению и противоположны по направлению, следовательно, они взаимно компенсируются. Такой режим цепи называют *резонансом напряжений.* Этому режиму последовательного контура соответствует векторная диаграмма, представленная на рисунке 2.2. Из нее следует, что вектор напряжения на индуктивности $\underline{U}_L$ опережает по фазе вектор тока $\underline{I}$ на 90°, в то время как вектор напряжения на емкости $\underline{U}_C$ находится в противофазе с вектором $\underline{U}_L$. За счет взаимной компенсации напряжений U_L и U_C входное напряжение U равно напряжению на активном сопротивлении r ($\underline{U}_r = \underline{U}$). При резонансе напряжений полное сопротивление цепи (2.3) является минимальным ($Z = r$), а ток достигает максимального значения

$$I = I_0 = \frac{U}{r} \qquad (2.7)$$

и совпадает по фазе с приложенным напряжением ($\varphi = 0$). При условии, когда $x_L = x_C >> r$, напряжения на индуктивности U_L и на емкости U_C могут значительно превышать входное напряжение источника U. В таком случае реактивные элементы в последовательном колебательном контуре должны рассчитываться на такое повышение напряжения, иначе они могут быть выведены из строя.

Из формулы (2.6) следует, что резонанс может быть достигнут при изменении параметров цепи (индуктивности L или емкости C) либо при изменении частоты источника напряжения. При неизменных значениях параметров L и C резонанс наступает при *резонансной* или *собственной угловой частоте*

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}. \qquad (2.8)$$

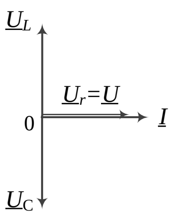

Рисунок 2.2

Индуктивное и емкостное сопротивления при резонансе

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho. \qquad (2.9)$$

Величина ρ называется *характеристическим сопротивлением* последовательного *r*,*L*,*C*- контура.

Напряжения на элементах цепи при резонансе:

$$U_{L0} = \omega_0 LI = \rho I; \quad U_{C0} = \frac{1}{\omega_0 C} I = \rho I; \quad U_{r0} = rI = U.$$

Безразмерную величину, равную отношению напряжения на индуктивности или емкости при резонансе к напряжению источника питания цепи, называют *добротностью контура*

$$Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{\rho I}{rI} = \frac{\rho}{r}. \qquad (2.10)$$

Добротность контура показывает, во сколько раз напряжение на индуктивном или емкостном элементе при резонансе превышает напряжение, приложенное к входным зажимам цепи.

Обратную величину $1/Q = d$ называют *затуханием контура*.

Будем полагать, что электрическое и магнитное поля пространственно разделены: электрическое поле сосредоточено в емкостном элементе, а магнитное – в индуктивном. В таком случае запасенная в контуре энергия при резонансе в любой момент времени

$$w = w_{\text{м}} + w_{\text{э}} = \frac{Li^2}{2} + \frac{Cu_C{}^2}{2}.$$

При токе в контуре $i = I_m \sin \omega_0 t$ напряжение на емкости

$$u_C = U_{Cm} \sin(\omega_0 t - 90^\circ) = -U_{Cm} \cos \omega_0 t.$$

В таком случае получим выражение для мгновенной энергии контура

$$w = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega_0 t + \frac{CU_{Cm}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{CU_{Cm}^2}{2} = \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{(\omega_0 C)^2} I_m^2 = \frac{C}{2} \cdot \frac{LC}{C^2} I_m^2 = \frac{LI_m^2}{2},$$

получим

$$w = \frac{LI_m^2}{2}(\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_{Cm}^2}{2} = \text{const},$$

т. е. запас энергии в реактивных элементах контура при резонансе не зависит от времени, происходит лишь перераспределение во времени энергии между емкостным и индуктивным элементами. Таким образом, энергия, первоначально запасенная в контуре при подключении его к источнику, колеблется в режиме резонанса между индуктивностью и емкостью без участия в этом процессе источника. Поэтому контуры подобного рода называются *колебательными*. Обмена энергией между источником и реактивными элементами при этом не происходит, источник доставляет энергию лишь активному сопротивлению.

Таким образом, при резонансе в последовательном контуре происходит взаимная компенсация индуктивных и емкостных сопротивлений, напряжений и мощностей. Потребляемая в контуре активная мощность P равна полной мощности S, а реактивная мощность Q равна нулю.

Пример 2.1 В последовательном контуре (см. рисунок 2.1) с добротностью Q = 3 имеет место резонанс, ток в цепи I_0 = 0,16 А. Найти ток и напряжения на элементах контура, если действующее напряжение U источника останется неизменным и равным 24 В, а частота увеличится в два раза.

Решение. При резонансе входное сопротивление цепи равно r, значение которого найдем по закону Ома

$$r = \frac{U}{I_0} = 150 \text{ Ом}.$$

По формуле (2.10) найдем напряжения на реактивных элементах

$$U_{L0} = U_{C0} = QU = 72 \text{ В},$$

а затем сопротивления индуктивного и емкостного элементов

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \rho = rQ = 450 \text{ Ом}.$$

При частоте $\omega = 2\omega_0$ индуктивное сопротивление увеличится в два раза до значения $x_L = 2\omega_0 L$ = 900 Ом, сопротивление емкости уменьшится в два раза до $x_C = \frac{1}{2\omega_0 C}$ = 225 Ом, а полное сопротивление контура будет равно

$$Z = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} = 691{,}5 \text{ Ом}.$$

Ток и напряжения на элементах схемы будут равны следующим значениям:

$$I=\frac{U}{Z}=0{,}035\text{ А},\ U_r=rI=5{,}25\text{ В};\quad U_L=x_L I=31{,}5\text{ В};\ U_C=x_C I=7{,}875\text{ В}.$$

2.1.1 Частотные характеристики и резонансные кривые последовательного контура

Проведем анализ последовательного контура на рисунке 2.1. Будем полагать, что амплитуда напряжения синусоидального источника неизменна, в то время как частота может изменяться в диапазоне от 0 до ∞.

При изменении частоты изменяются сопротивления реактивных элементов $x_L=\omega L,\ x_C=\dfrac{1}{\omega C}$, а также полное сопротивление Z и угол сдвига фаз φ между напряжением и током контура, определяемые формулами (2.3) и (2.4).

Зависимости параметров контура от частоты называются *частотными характеристиками*.

На рисунке 2.3 приведены частотные характеристики индуктивного $x_L(\omega)$, емкостного $x_C(\omega)$ элементов, а также реактивного сопротивления $x(\omega)$ контура. На рисунке 2.4 изображена *фазо-частотная характеристика* (ФЧХ) контура, представляющая зависимость фазового сдвига φ от частоты.

Из рисунков 2.3 и 2.4 следует, что при изменении частоты от 0 до ω_0 реактивное сопротивление контура имеет емкостный характер, а при частотах, превышающих резонансную, − индуктивный. При $\omega=\omega_0$ реактивное сопротивление цепи равно нулю ($x=0$, $\varphi=0$).

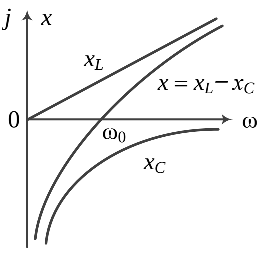

Рисунок 2.3

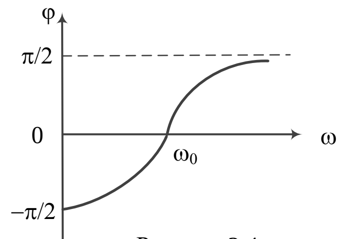

Рисунок 2.4

На рисунке 2.5 изображены резонансные кривые тока I, напряжений U_L, U_C и U_r на элементах контура в функции частоты. Зависимость модуля тока или напряжения от частоты называют *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ).

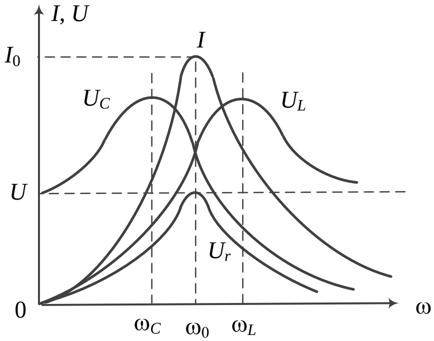

Рисунок 2.5

При ω = 0 ток в цепи в цепи отсутствует, т. к. сопротивление контура бесконечно велико. Напряжения на индуктивности и активном сопротивлении равны 0, а напряжение на емкости при этом равно напряжению источника $U_C = U$. С увеличением частоты ток растет и достигает предельного значения $I = I_0$ при ω = ω_0, т. к. полное сопротивление контура при этом минимально ($Z = r$). Дальнейшее увеличение частоты от ω_0 до ∞ характеризуется возрастанием полного сопротивления от r до ∞. Вследствие этого ток уменьшается от наибольшего значения до нуля. Напряжение на индуктивности стремится к значению, равному U, а напряжение на емкости – к нулю. Напряжение на активном сопротивлении $U_r = rI$ изменяется пропорционально току.

Напряжения на реактивных элементах $U_L = \omega LI$ и $U_C = \dfrac{1}{\omega C} I$ характеризуются сложными зависимостями, т. к. в приведенных выражениях оба сомножителя зависят от частоты. Проведем исследование этих зависимостей.

Напряжение на индуктивности

$$U_L = \omega LI = U\frac{\omega L}{Z} = U\frac{\omega L}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}; \qquad (2.11)$$

напряжение на емкости

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I = U\frac{1}{\omega C Z} = U\frac{1}{\omega C\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (2.12)$$

Найдем производные по ω напряжений U_L и U_C, представленные формулами (2.11) и (2.12), и приравняем их нулю. Из уравнений $\frac{dU_L}{d\omega}=0$ и $\frac{dU_C}{d\omega}=0$ получим выражения для частот ω_L и ω_C, при которых напряжения U_L и U_C имеют максимальные значения.

Исследуем сначала как изменяется напряжение на индуктивности от частоты:

$$\frac{dU_L}{d\omega}=LU\frac{\sqrt{r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}-\frac{\omega 2\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{2\sqrt{r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\left(L+\frac{1}{\omega^2 C}\right)}{r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}=0.$$

Так как знаменатель этого соотношения не равен нулю при любых значениях частоты ω, полагаем равным нулю числитель

$$\sqrt{r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}-\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\left(\omega L+\frac{1}{\omega C}\right)=0.$$

Приведем это выражение к общему знаменателю

$$\frac{r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2-\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\left(\omega L+\frac{1}{\omega C}\right)}{\sqrt{r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}=0$$

и приравняем к нулю числитель полученного соотношения

$$r^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2-\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\left(\omega L+\frac{1}{\omega C}\right)=0.$$

После несложных преобразований последнего выражения получим квадратное уравнение относительно переменной ω

$$r^2 - 2\frac{L}{C} + 2\frac{1}{\omega^2 C^2} = 0.$$

Найдем значение ω, принимая во внимание, что $\frac{L}{C} = \rho^2$ и $Q = \frac{\rho}{r}$,

$$\omega^2 = \frac{2}{C^2(2\rho^2 - r^2)} = \frac{2}{C^2\rho^2\left(2 - \frac{r^2}{\rho^2}\right)} = \frac{2}{LC\left(2 - \frac{1}{Q^2}\right)} = \omega_0^2\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1},$$

откуда получаем значение частоты, при которой напряжение на индуктивности достигает максимальное значение при резонансе,

$$\omega = \omega_L = \omega_0\sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}}. \qquad (2.13)$$

Проанализируем аналогичным образом формулу (2.12):

$$\frac{dU_C}{d\omega} = \frac{U}{C}\frac{-\frac{1}{\omega^2}\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{2}\frac{2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\left(L + \frac{1}{\omega^2 C}\right)}{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 0;$$

$$-\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - \omega\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\left(L + \frac{1}{\omega^2 C}\right) = 0;$$

$$\frac{-\left[r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right] - \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = 0;$$

$$-r^2 + 2\frac{L}{C} - 2\omega^2 L^2 = 0;$$

$$2\omega^2 L^2 = 2\rho^2 - r^2 = \rho^2\left(2 - \frac{r^2}{\rho^2}\right) = \frac{L}{C}\left(2 - \frac{1}{Q^2}\right);$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2LC}\frac{2Q^2 - 1}{Q^2} = \omega_0^2\frac{2Q^2 - 1}{2Q^2}.$$

Частота, при которой напряжение на емкости достигает максимальное значение при резонансе,

$$\omega = \omega_C = \omega_0\sqrt{\frac{2Q^2 - 1}{2Q^2}}. \qquad (2.14)$$

Из сопоставления формул (2.13) и (2.14) получаем, что $\omega_C < \omega_0$; $\omega_L > \omega_0$;

при этом
$$\omega_L\omega_C = \omega_0\sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}}\omega_0\sqrt{\frac{2Q^2 - 1}{2Q^2}} = \omega_0^2,$$

откуда
$$\omega_0 = \sqrt{\omega_L\omega_C}. \qquad (2.15)$$

Найдем отношение максимальных значений напряжений на индуктивности $U_{L\max}$ и емкости $U_{C\max}$ при резонансе с учетом соотношений (2.8) и (2.15)

$$\frac{U_{L\max}}{U_{C\max}} = \frac{\omega_L LI}{\frac{1}{\omega_C C}I} = \omega_L\omega_C LC = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} = 1.$$

Из полученного соотношения следует, что при резонансе $U_{L\max} = U_{C\max}$.

Согласно формулам (2.13) и (2.14) для того, чтобы частоты ω_L и ω_C были вещественными, необходимо выполнить следующее условие:

$$2Q^2 - 1 \geq 0 \quad \text{или} \quad Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Если добротность контура $Q < 1/\sqrt{2}$, то частоты ω_L и ω_C будут мнимыми, т. е. кривые $U_L(\omega)$ и $U_C(\omega)$ не будут иметь максимума.

При резонансной частоте $\omega = \omega_0$ напряжение на индуктивности U_L равно напряжению на емкости U_C, при этом значения напряжений пропорциональны добротности Q, как следует из приведенных ниже выражений:

$$U_L = \omega_0 L I_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} L \frac{U}{r} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{r} U = \frac{\rho}{r} U = QU;$$

$$U_C = \frac{1}{\omega_0 C} I_0 = \frac{\sqrt{LC}}{C} \frac{U}{r} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{r} U = \frac{\rho}{r} U = QU.$$

2.1.2 Зависимость формы резонансной кривой от параметров контура

Исследуем влияние параметров последовательного контура на характер резонансной кривой тока. Для удобства анализа будем осуществлять графические построения в относительных единицах: по оси абсцисс будем откладывать величину ω / ω_0, а по оси ординат – величину I / I_0.

Для заданного напряжения цепи U ток I определяется законом Ома

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (2.16)$$

Произведем преобразования в формуле полного сопротивления контура

$$Z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{r^2 + \omega_0^2 L^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} = r\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 L^2}{r^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} =$$

$$= r\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}.$$

Подставив полученное значение Z в формулу (2.16), получим

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{r\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}, \qquad (2.17)$$

откуда
$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}. \qquad (2.18)$$

На рисунке 2.6 качественно построено семейство резонансных кривых тока в относительных единицах согласно уравнению (2.18) для разных значений добротности Q контура: $Q_1 > Q_2 > Q_3$.

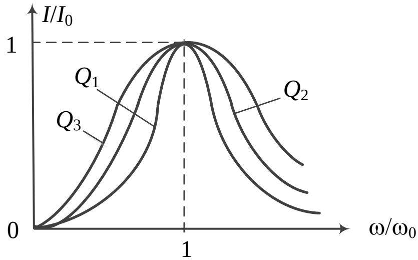

Рисунок 2.6

Все кривые при резонансе проходят через одну точку с координатами $I / I_0 = 1$ и $\omega / \omega_0 = 1$. Из формулы (2.18) и соответственно из рисунка 2.6 следует, что вид резонансных кривых контура целиком определяется его добротностью.

Резонансные кривые тем острее, чем выше добротность контура.

2.1.3 Полоса пропускания

Для оценки избирательных свойств цепи вводят понятие полосы пропускания контура. *Полосой пропускания* последовательного контура называют диапазон частот, в пределах которого отношение I / I_0. превышает $1/\sqrt{2} =$ = 0,707. Это соответствует разности частот АЧХ колебательного контура на рисунке 2.7, где $\omega_н$ – низшая, а $\omega_в$ – высшая частоты. При токе $I = I_0 / \sqrt{2}$ мощность, выделяемая в сопротивлении r, равна $\frac{1}{2} I_0^2 r$, т. е. составляет половину мощности, расходуемой при резонансе.

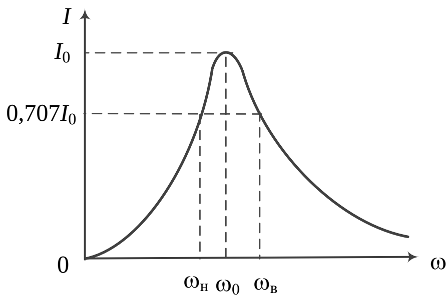

Рисунок 2.7

Рассмотрим частотную область в окрестностях резонансной частоты ω_0 и введем определения *расстройки* контура.

Разность между текущей частотой ω и резонансной частотой ω_0 называется *абсолютной расстройкой*
$$\Delta\omega = \omega - \omega_0.$$

Относительная расстройка имеет следующий вид:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}.$$

Удвоенная относительная расстройка при $\omega \approx \omega_0$ характеризуется соотношением

$$\varepsilon = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0\omega} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \cdot \frac{\omega + \omega_0}{\omega} \approx \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \cdot \frac{2\omega}{\omega} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}.$$

Обобщенной расстройкой называют отношение

$$\xi = \frac{x}{r} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{r} = \frac{\omega_0 L\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{1}{\omega C \omega_0 L}\right)}{r}.$$

С учетом соотношений (2.8) и (2.10) получим

$$\xi = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right). \qquad (2.19)$$

Обобщенная расстройка, как и все остальные, характеризует удаленность текущей частоты от резонансной. При резонансе $\omega = \omega_0$ и все расстройки равны нулю. При $\omega < \omega_0$ расстройки отрицательны, а при $\omega > \omega_0$ − положительны.

Определим низшую $\omega_н$ и высшую $\omega_в$ частоты полосы пропускания.

Запишем выражение для тока I последовательного контура в соответствии с формулами (2.17) и (2.19) и определением полосы пропускания

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Из полученного соотношения получаем квадратное уравнение относительно обобщенной расстройки

$$1 + \xi^2 = 2 \quad \text{или} \quad \xi^2 = 1,$$

решение которого дает два корня: $\xi_1 = -1$ и $\xi_2 = 1$.

Подставим поочередно значения корней в формулу (2.19) для определения частот $\omega_н$ и $\omega_в$. При решении уравнений будем учитывать только положительные значения частот.

Найдем решение для $\xi_1 = -1$:

$$Q\left(\frac{\omega_н}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_н}\right) = -1; \qquad \frac{\omega_н^2 - \omega_0^2}{\omega_0\omega_н} = -\frac{1}{Q}.$$

Получаем квадратное уравнение относительно низшей частоты $\omega_н$

$$\omega_н^2 + \frac{\omega_0}{Q}\omega_н - \omega_0^2 = 0,$$

в результате решения которого получаем

$$\omega_н = -\frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2 + \omega_0^2} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2} - 1\right). \qquad (2.20)$$

Выполним аналогичные операции для второго случая, когда $\xi_2 = 1$. Квадратное уравнение записывается относительно высшей частоты $\omega_в$

$$\omega_в^2 - \frac{\omega_0}{Q}\omega_в - \omega_0^2 = 0.$$

Решение уравнения дает следующий результат:

$$\omega_в = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2} + 1\right). \qquad (2.21)$$

Диапазон частот, соответствующий полосе пропускания,

$$\omega_в - \omega_н = \frac{\omega_0}{Q}. \qquad (2.22)$$

Найдем соотношение между частотами полосы пропускания и резонансной частотой. Из выражений (2.20) и (2.21) следует, что

$$\omega_в\omega_н = \omega_0^2$$

откуда получаем $$\omega_0 = \sqrt{\omega_в\omega_н}. \qquad (2.23)$$

2.2 Резонанс в параллельном контуре

Параллельный колебательный контур состоит из двух ветвей, в одной из которых имеется индуктивность, а во второй – емкость. Такой контур называется *простым*, потери в ветвях учитывают активными сопротивлениями r_1 и r_2 (рисунок 2.8). Ветви контура имеют комплексные сопротивления

$$\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L = r_1 + jx_1$$

и

$$\underline{Z}_2 = r_2 + \frac{1}{j\omega C} = r_2 - jx_2.$$

Комплексная проводимость первой ветви

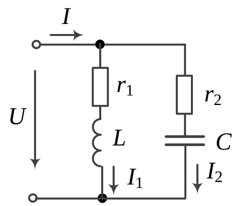

Рисунок 2.8

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{r_1 + j\omega L}\cdot\frac{r_1 - j\omega L}{r_1 - j\omega L} =$$

$$= \frac{r_1}{r_1^2 + \omega^2 L^2} - j\frac{\omega L}{r_1^2 + \omega^2 L^2} = g_1 - jb_1, \qquad (2.24)$$

где $g_1 = \dfrac{r_1}{r_1^2 + \omega^2 L^2}$ – активная составляющая проводимости первой ветви;

$b_1 = \dfrac{\omega L}{r_1^2 + \omega^2 L^2}$ – реактивная (индуктивная) проводимости первой ветви.

Комплексная проводимость второй ветви

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{r_2 - j\dfrac{1}{\omega C}}\cdot\frac{r_2 + j\dfrac{1}{\omega C}}{r_2 + j\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{r_2}{r_2^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}} + j\frac{\dfrac{1}{\omega C}}{r_2^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}} = g_2 + jb_2, \qquad (2.25)$$

где $g_2 = \dfrac{r_2}{r_2^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}$ – активная составляющая проводимости второй ветви;

$b_2 = \dfrac{\dfrac{1}{\omega C}}{r_2^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}$ – реактивная (емкостная) составляющая проводимости второй ветви.

Полагая, что $\underline{U} = U$, найдем токи в параллельных ветвях

$$\underline{I}_1 = \underline{U}\underline{Y}_1 = Ug_1 - jUb_1 = I_{1\text{а}} - jI_{1\text{р}};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{U}\underline{Y}_2 = Ug_2 + jUb_2 = I_{2а} + jI_{2р},$$

где $I_{1а}$ и $I_{2а}$ – активные составляющие;

$I_{1р}$ и $I_{2р}$ – реактивные составляющие токов ветвей.

Ток на входных зажимах контура

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (I_{1а} + I_{2а}) - j(I_{1р} - I_{2р}) = I_а - jI_р.$$

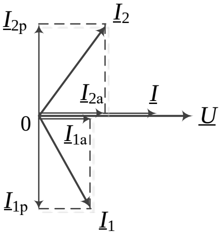

Рисунок 2.9

На рисунке 2.9 приведена векторная диаграмма токов, построенная для напряжения источника с нулевой начальной фазой. Из векторной диаграммы следует, что входной ток I совпадает по фазе с напряжением U при условии компенсации реактивных составляющих токов ветвей, т. е. равенстве нулю реактивной составляющей входного тока ($I_р = 0$). Такой режим в параллельном контуре называется *резонансом токов.*

$$I_р = I_{1р} - I_{2р} = U(b_1 - b_2) = 0,$$

откуда получаем следующее условие резонанса токов в параллельном контуре:

$$b_1 = b_2. \tag{2.26}$$

С учетом соотношений (2.24) и (2.25) равенство (2.26) примет такой вид:

$$\frac{\omega L}{r_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\dfrac{1}{\omega C}}{r_2^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}. \tag{2.27}$$

Условие резонанса в параллельном контуре изменением одной из величин (r_1, r_2, L, C, ω) при неизменных остальных четырех не всегда может быть реализовано. Резонанс будет иметь место в случае, если значение изменяемой величины при ее определении из уравнения (2.27) получается вещественным. При получении значения величины в виде мнимого или комплексного числа резонанс не может быть реализован.

Резонансную угловую частоту найдем, решив уравнение (2.27) относительно ω. С этой целью выполним некоторые преобразования в формуле. Умножим числитель и знаменатель правой части соотношения (2.27) на $\omega^2 C^2$, а затем разделим обе его части на ω, в результате получим

$$\frac{L}{r_1^2+\omega^2L^2}=\frac{C}{r_2^2\omega^2C^2+1}.$$

Приведем это соотношение к квадратному уравнению относительно ω:

$$LC(r_2^2C-L)\omega^2=r_1^2C-L,$$

из которого находим значение резонансной частоты

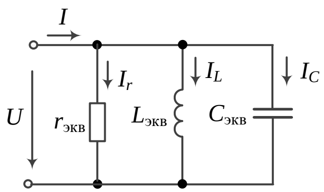

Рисунок 2.10

$$\omega_0'=\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{r_1^2C-L}{r_2^2C-L}}=\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{r_1^2-L/C}{r_2^2-L/C}}=\omega_0\sqrt{\frac{r_1^2-\rho^2}{r_2^2-\rho^2}}, \qquad (2.28)$$

где $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\rho=\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Уравнение (2.28) свидетельствует о том, что в отличие от последовательного контура резонансная частота параллельного контура в общем случае определяется не только его реактивными элементами L и C, но и сопротивлениями r_1 и r_2. Резонанс будет возможен, если сопротивления r_1 и r_2 оба больше или меньше характеристического сопротивления ρ.

При $r_1=r_2\neq\rho$ резонансная частота $\omega_0'=\omega_0$, т. е. такая же, как при резонансе в последовательном контуре.

В контурах с высокой добротностью $r_1 \ll \rho$ и $r_2 \ll \rho$, в этом случае

$$\omega_0'=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Заменим исходную схему на рисунке 2.8 эквивалентной (рисунок 2.10), состоящей из трех параллельных ветвей, параметры элементов которых определяются, исходя из следующих положений.

Эквивалентная комплексная проводимость исходной схемы на рисунке 2.8 равна сумме комплексных проводимостей параллельных ветвей

$$\underline{Y}_{\text{экв}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = (g_1 + g_2) - jb_1 + jb_2 = g - jb_1 + jb_2.$$

Таким образом, на рисунке 2.10 первая ветвь будет иметь активное сопротивление

$$r_{\text{экв}} = (g_1 + g_2)^{-1} = g^{-1} = \left[\frac{r_1}{r_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{r_2}{r_1^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}\right]^{-1}.$$

Вторая ветвь, имеющая индуктивную проводимость $b_1 = \dfrac{\omega L}{r_1^2 + \omega^2 L^2} = \dfrac{1}{\omega L_{\text{экв}}}$, представлена индуктивностью $L_{\text{экв}} = \dfrac{1}{\omega b_1}$.

В третью ветвь с емкостной проводимостью $b_2 = \dfrac{\dfrac{1}{\omega C}}{r_2^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}} = \omega C_{\text{экв}}$ включен емкостный элемент $C_{\text{экв}} = \dfrac{b_2}{\omega}$.

Векторная диаграмма токов эквивалентной схемы в режиме резонанса приведена на рисунке 2.11 при напряжении $\underline{U} = U$.

Ток в неразветвленной части цепи

$$\underline{I} = \underline{I}_r + \underline{I}_L + \underline{I}_C = U\left[g - j(b_1 - b_2)\right] = I_{\text{а}} - jI_{\text{р}}.$$

При резонансе $b_1 = b_2$ и $I_{\text{р}} = 0$, следовательно,

$$\underline{I} = I_{\text{а}} = \underline{I}_r = Ug.$$

Модули токов в ветвях с реактивными элементами

$$I_L = I_C,$$

где $I_L = Ub_1$; $I_C = Ub_2$.

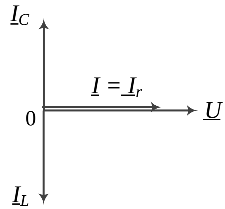

Рисунок 2.11

Если $b_1 = b_2 \gg g$, то токи в параллельных ветвях будут значительно больше тока в неразветвленной части цепи.

Добротностью Q параллельного контура называется отношение тока в одной из реактивных ветвей к току на входе контура или к току в ветви с активным сопротивлением при резонансе

$$Q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I} = \frac{I_L}{I_r}. \tag{2.29}$$

При резонансе в цепи с параллельным соединением элементов r, L, C энергия от источника поступает только к ветви с сопротивлением r. В то же время в ветвях с реактивными элементами контура циркулирует ток в результате обмена предварительно запасенной энергии между электрическим и магнитным полями емкости и индуктивности без участия внешнего источника.

Если в схеме на рисунке 2.10 будет отсутствовать ветвь с активным сопротивлением, то получим параллельный колебательный контур без потерь. При этом энергия от источника не будет поступать в нагрузку, входной ток I будет равен нулю, в то время как по индуктивности и емкости будет циркулировать ток.

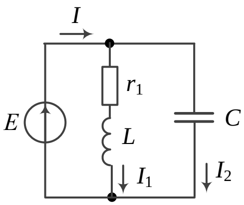

Рисунок 2.12

Пример 2.2 В цепи на рисунке 2.12 при резонансе потребляется активная мощность P = 60 Вт. ЭДС синусоидального источника E = 20 В, ток I_1 = = 5 А. Найти значения сопротивлений пассивных элементов цепи, а также токи I и I_2.

Решение. При резонансе полная мощность источника S равна активной мощности, потребляемой резистивным элементом, а реактивная мощность равна нулю:

$$S = P, \ \ Q = 0,$$

где $S = P = EI$ и $P = I_1^2 r$, откуда находим

$$r = \frac{P}{I_1^2} = 2{,}4 \text{ Ом и } I = \frac{P}{E} = 3 \text{ А}.$$

На основании закона Ома определяем полное сопротивление ветви с индуктивностью

$$Z_1 = \sqrt{r^2 + x_L^2} = \frac{E}{I_1} = 4 \text{ Ом},$$

а затем индуктивное сопротивление

$$x_L = \sqrt{Z_1^2 - r^2} = 3{,}2 \text{ Ом}.$$

Принимая во внимание, что потребляемая реактивная мощность равна нулю, найдем сопротивление емкости и ток I_2 из следующих уравнений:

$$Q = I_1^2 x_L - I_2^2 x_C = 0; \ \ I_2 = \frac{E}{x_C}.$$

$$x_C = \frac{E^2}{I_1^2 x_L} = 5\ \text{Ом};\qquad I_2 = \frac{E}{x_C} = 4\ \text{А}.$$

2.3 Резонанс в цепях со смешанным соединением элементов

В цепи, представленной на рисунке 2.13, резистивный, индуктивный и емкостный элементы соединены смешанным образом. Резонансный режим в данном случае возможен, если входное комплексное сопротивление цепи будет иметь только вещественную составляющую, а мнимая составляющая будет равна нулю.

Найдем входное сопротивление цепи

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = jx_L + \frac{r(-jx_C)}{r - jx_C}\cdot\frac{r + jx_C}{r + jx_C} = \frac{rx_C^2}{r^2 + x_C^2} + j\left(x_L - \frac{r^2 x_C}{r^2 + x_C^2}\right) = r_{\text{вх}} + jx_{\text{вх}}.$$

Приравняем к нулю реактивную составляющую входного сопротивления и найдем резонансную частоту

$$x_L - \frac{r^2 x_C}{r^2 + x_C^2} = 0 \quad \text{или} \quad \omega L = \frac{r^2 \dfrac{1}{\omega C}}{r^2 + \dfrac{1}{(\omega C)^2}}.$$

Выполним преобразования в последнем соотношении

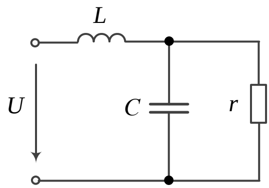

Рисунок 2.13

$$\omega L = \frac{r^2 \omega C}{r^2 (\omega C)^2 + 1}$$

и получим значение резонансной частоты исследуемой цепи

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{r^2 C - L}{r^2 L C^2}}.$$

В случае, если двухполюсник содержит больше двух реактивных элементов, его входное сопротивление может быть чисто активным при нескольких значениях частоты источника. Другими словами, двухполюсник может иметь несколько разных резонансных частот. Например, для цепи на рисунке 2.14, имеющей три реактивных элемента, возможно иметь два резонанса. Одним из них будет резонанс токов при частоте

$$\omega_{10} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}.$$

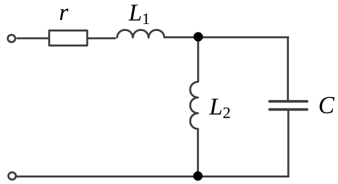

Рисунок 2.14

Другой резонанс будет на частоте ω_{20} в случае, когда входное сопротивление цепи имеет нулевую реактивную составляющую

$$j\omega_{20}L_1 + \frac{j\omega_{20}L_2 \dfrac{1}{j\omega_{20}C}}{j\omega_{20}L_2 + \dfrac{1}{j\omega_{20}C}} = 0.$$

Из полученного выражения находим вторую резонансную частоту

$$\omega_{20} = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}}.$$

Входное сопротивление при этом будет равно r.

Пример 2.3 На рисунке 2.15 источник с напряжением U = 40 В подключен к схеме со следующими параметрами элементов: r = 20 Ом, C_1 = 1,5 мкФ, C_2 = 0,5 мкФ, L = 8 Гн. Определить резонансные угловые частоты и токи схемы на резонансных частотах.

Решение. Схема имеет три реактивных элемента, следовательно, в ней возможны резонансы на двух разных частотах.

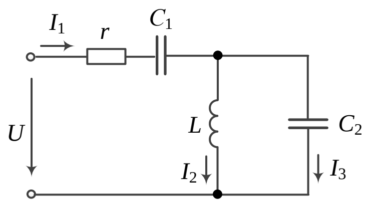

Рисунок 2.15

Первый резонанс при частоте ω_{10} будет иметь место в случае равенства нулю реактивной составляющей входного сопротивления схемы. Найдем входное комплексное сопротивление схемы, выполнив эквивалентные преобразования,

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = r - j\frac{1}{\omega C_1} + \frac{j\omega L \dfrac{1}{j\omega C_2}}{j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C_2}} = r - j\frac{1}{\omega C_1} + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 L C_2} =$$

$$= r + j\left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 L C_2} - \frac{1}{\omega C_1}\right) = r + j\frac{\omega^2 L (C_1 + C_2) - 1}{\omega C_1 (1 - \omega^2 L C_2)} = r + jx_{\text{вх}}.$$

Приравняв к нулю реактивную составляющую сопротивления $x_{вх}$

$$\frac{L(C_1 + C_2)\omega^2 - 1}{\omega C_1(1 - \omega^2 L C_2)} = 0,$$

найдем значение первой резонансной частоты

$$\omega_{10} = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}} = 250 \ \text{с}^{-1}.$$

Определим токи цепи, приняв $\underline{U} = U$:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{вх}} = \frac{40}{20} = 2 \ \text{А}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{-j\dfrac{1}{\omega_{10}C_2}}{j\omega_{10}L - j\dfrac{1}{\omega_{10}C_2}} = \frac{8}{3} \ \text{А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = -\frac{2}{3} \ \text{А}.$$

Вторая резонансная частота соответствует резонансу токов в параллельном контуре

$$\omega_{20} = \frac{1}{\sqrt{LC_2}} = 500 \ \text{с}^{-1}.$$

На этой частоте входной ток $I_1 = 0$, токи в параллельных ветвях равны по модулю и находятся в противофазе. Значения токов определяются по закону Ома

$$\underline{I}_2 = \frac{U}{j\omega_{20}L} = -j0{,}01 \ \text{А};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{U}{\dfrac{1}{j\omega_{20}C_2}} = j0{,}01 \ \text{А}.$$

Пример 2.4 Входное сопротивление цепи на рисунке 2.16 $\underline{Z}_{вх}$ = 20 Ом. Найти сопротивления r и x_L, если сопротивление x_C = 40 Ом.

Решение. Входное сопротивление цепи, в составе которой имеются индуктивность и емкость, имеет чисто резистивный характер. Следовательно, электрическая цепь находится в режиме резонанса.

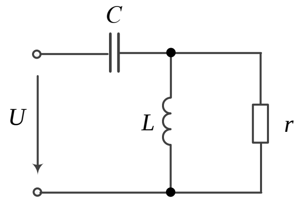

Рисунок 2.16

Найдем входное сопротивление цепи и выделим в нем вещественную и мнимую составляющие

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{rjx_L}{r + jx_L} \cdot \frac{r - jx_L}{r - jx_L} - jx_C = \frac{rx_L^2}{r^2 + x_L^2} + j\left(\frac{r^2 x_L}{r^2 + x_L^2} - x_C\right) = r_{вх} + jx_{вх}.$$

Исходя из условий резонанса ($\underline{Z}_{вх} = r_{вх}$; $x_{вх} = 0$), составим уравнения

$$\frac{rx_L^2}{r^2 + x_L^2} = 20; \qquad (2.30)$$

$$\frac{r^2 x_L}{r^2 + x_L^2} = 40, \qquad (2.31)$$

решая которые, найдем искомые величины. Разделим левые и правые части уравнений (2.30) и (2.31) друг на друга и получим соотношение

$$r = 2x_L,$$

подставив которое в уравнение (2.30), найдем

$$x_L = 50 \text{ Ом},$$

а затем $r = 100$ Ом.

3 ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

Многофазной системой называется совокупность электрических цепей, в которых действуют синусоидальные ЭДС одной и той же частоты, сдвинутые между собой по фазе и создаваемые общим источником электрической энергии. Каждая цепь, входящая в состав многофазной системы, называется *фазой* этой системы. Наименьшее количество фаз, входящих в многофазную систему, равно трем. Такие системы называются *трехфазными*, а ее фазы обозначают заглавными буквами A, B, C.

Трехфазная система была создана в 1891 г. русским инженером и ученым М. О. Доливо-Добровольским. Им были изобретены и разработаны все звенья этой системы: генераторы, трансформаторы, линии передачи и двигатели трехфазного тока.

В настоящее время практически все промышленные предприятия и бытовые потребители имеют трехфазную систему электроснабжения.

Трехфазные цепи имеют значительные преимущества в системах электроснабжения, т. к. позволяют передавать энергию от трехфазного генератора к трехфазной нагрузке по трем или четырем проводам вместо шести при питании потребителей от отдельных источников, что обеспечивает значительную экономию металла и уменьшает эксплуатационные расходы.

При симметричной нагрузке мгновенная мощность трехфазного источника не зависит от времени и не пульсирует с двойной частотой, как это имеет место при однофазном питании. Трехфазная система напряжений позволяет осуществлять простой способ получения вращающегося магнитного поля, которое лежит в основе действия трехфазных асинхронных двигателей, самых простых и надежных в работе.

Если в трехфазной системе действуют синусоидальные ЭДС с одинаковой амплитудой E_m и при этом каждая ЭДС отстает по фазе от предыдущей на один и тот же угол, равный $2\pi / 3$, то такая система ЭДС называется *симметричной*. ЭДС, наводимые в фазных обмотках генератора, называются *фазными* и обозначаются $E_ф$.

Симметричной может быть и отдельно рассматриваемая система токов или напряжений, определяемая аналогично указанной симметричной системе ЭДС. В дальнейшем будем рассматривать только симметричные трехфазные генераторы, которые вырабатывают симметричную систему фазных ЭДС

$$e_A = E_m \sin\omega t; \quad e_B = E_m \sin(\omega t - 2\pi / 3); \quad e_C = E_m \sin(\omega t + 2\pi / 3), \qquad (3.1)$$

графики мгновенных значений которых приведены на рисунке 3.1.

Комплексы действующих значений фазных ЭДС можно записать следующим образом:

$$\underline{E}_A = E_ф; \qquad \underline{E}_B = E_ф\, e^{-j2\pi/3}; \qquad \underline{E}_C = E_ф\, e^{j2\pi/3}, \qquad (3.2)$$

где $E_ф = E_m / \sqrt{2}$.

Векторная диаграмма системы фазных ЭДС генератора изображена на рисунке 3.2.

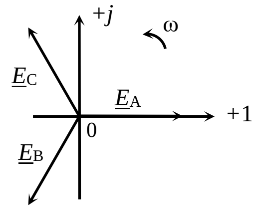

Рисунок 3.2

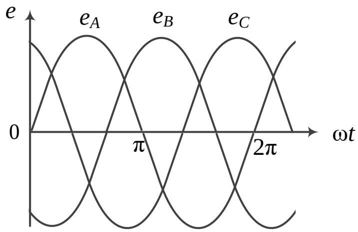

Рисунок 3.1

Соотношения (3.2) можно записать в краткой форме с использованием *фазового оператора* – комплексного числа

$$a = e^{j120^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Умножение вектора на оператор a означает поворот вектора на 120° в положительном направлении, т. е. против хода часовой стрелки.

Следовательно, умножение вектора на множитель a^2 означает поворот вектора на 240° в положительном направлении или поворот его на 120° в отрицательном направлении.

Таким образом, комплексы фазных ЭДС генератора можно представить следующим образом:

$$\underline{E}_A = E_ф; \quad \underline{E}_B = a^2 E_ф; \quad \underline{E}_C = aE_ф.$$

Для симметричной системы фазных ЭДС

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = E_ф(1 + a^2 + a) = 0, \text{ т. к. } (1 + a^2 + a) = 0.$$

Порядок прохождения фазных ЭДС через амплитудные (или нулевые) значения называют *последовательностью фаз* или *порядком чередования фаз.* Приведенная на рисунке 3.1 последовательность фаз *A, B, C* называется *прямой*. Так как роторы генераторов всегда вращаются в одном направлении, то прямой порядок чередования фаз ($A \rightarrow B \rightarrow C$) никогда не меняется.

Начала обмоток генератора, в которых индуцируются фазные ЭДС, обозначают буквами *A, B, C*, а концы – соответственно *X, Y, Z*. За условное положительное направление ЭДС в каждой фазе генератора принимают направление от конца к началу обмотки.

3.1 Способы соединения обмоток генератора и нагрузки

Существуют два способа соединения обмоток генераторов: *звездой* и *треугольником.* При соединении звездой (рисунок 3.3) концы X, Y, Z фазных обмоток генератора объединяют в один узел, называемый *нейтралью генератора* или его *нейтральной точкой* N.

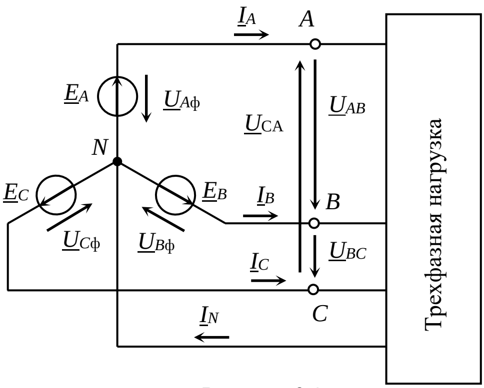

Рисунок 3.3

К началам фазных обмоток A, B, C присоединяются три *линейных* провода, идущие к нагрузке. При использовании четырехпроводной трехфазной системы электроснабжения к нейтральной точке N генератора присоединяют *нейтральный* провод.

Токи, протекающие по линейным проводам, называют *линейными* и обозначают $I_л$. Их будем всегда направлять от генераторных зажимов A, B, C к нагрузке. На рисунке 3.3 это токи $\underline{I}_A$, $\underline{I}_B$ и $\underline{I}_C$. Ток $\underline{I}_N$ в нейтральном проводе будем направлять к нейтральной точке N генератора.

Напряжения $U_{Aф}$, $U_{Bф}$, $U_{Cф}$ на обмотках генератора называют *фазными* и обозначают $U_ф$. Если пренебречь падениями напряжений в фазах генератора, то фазные напряжения будут равны соответствующим фазным ЭДС:

$$\underline{U}_{Aф} = \underline{E}_A; \quad \underline{U}_{Bф} = \underline{E}_B; \quad \underline{U}_{Cф} = \underline{E}_C; \quad E_ф = U_ф. \tag{3.3}$$

Напряжения между линейными проводами называются *линейными* и обозначаются $U_л$, на рисунке это напряжения U_{AB}, U_{BC}, U_{CA}. Положительное направление напряжения указывается порядком записи индексов. Линейные напряжения представляют собой разности двух фазных напряжений

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B; \quad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C; \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A. \tag{3.4}$$

Топографическая диаграмма фазных и линейных напряжений приведена на рисунке 3.4 и построена для $\underline{U}_{A\text{ф}} = U_{\text{ф}}$. Векторы линейных напряжений образуют равносторонний треугольник, при этом линейное и фазное напряжения связаны соотношением

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3}U_{\text{ф}}. \qquad (3.5)$$

Для принятой системы фазных ЭДС получаем действующие значения фазных и линейных напряжений в комплексной форме

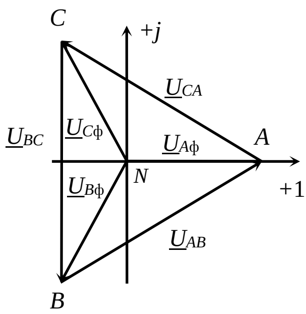

Рисунок 3.4

$$\underline{U}_{A\text{ф}} = U_{\text{ф}};\ \underline{U}_{B\text{ф}} = U_{\text{ф}}e^{-j120^\circ} = a^2U_{\text{ф}};\ \underline{U}_{C\text{ф}} = U_{\text{ф}}e^{j120^\circ} = aU_{\text{ф}}; \qquad (3.6)$$

$$\underline{U}_{AB} = U_{\text{л}}e^{j30^\circ};\ \ \underline{U}_{BC} = U_{\text{л}}e^{-j90^\circ};\ \underline{U}_{CA} = U_{\text{л}}e^{j150^\circ}. \qquad (3.7)$$

Из рисунка 3.4 и соотношения (3.5) следует, что

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{3}\,\underline{U}_{A\text{ф}}e^{j30^\circ},\ \text{а}\ \ \underline{U}_{A\text{ф}} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\sqrt{3}}e^{-j30^\circ} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}}. \qquad (3.8)$$

Из формул (3.7) вытекает, что линейные напряжения $\underline{U}_{AB}$, $\underline{U}_{BC}$ и $\underline{U}_{CA}$ образуют симметричную систему, для которой справедливы следующие соотношения:

$$\underline{U}_{AB} = U_{\text{л}}e^{j\psi_u};\ \underline{U}_{BC} = a^2\underline{U}_{AB};\ \underline{U}_{CA} = a\underline{U}_{AB},$$

где ψ_u – начальная фаза напряжения u_{AB}.

При другом виде соединения обмоток генератора, называемом *треугольником* (рисунок 3.5), конец каждой фазы соединяется с началом следующей, в результате фазные обмотки образуют замкнутый контур, в котором сумма комплексных фазных ЭДС равна нулю

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0,$$

и при этом ток в этом контуре отсутствует.

При таком способе соединения обмоток трехфазный генератор подключается к нагрузке только с помощью трехпроводной линии, а линейные напряжения равны фазным

$$\underline{U}_{AB} = \underline{E}_A;\ \ \underline{U}_{BC} = \underline{E}_B;\ \ \ \underline{U}_{CA} = \underline{E}_C,$$

т. е. $$U_{\text{л}} = E_{\text{ф}}. \tag{3.9}$$

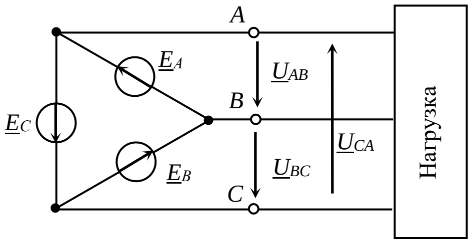

Рисунок 3.5

Фазы нагрузки имеют также два типа соединений: *звездой* (рисунок 3.6, *а*) и *треугольником* (рисунок 3.6, *б*). Токи, протекающие по фазам нагрузки, называются *фазными* и обозначаются $I_{\text{ф}}$.

При соединении нагрузки звездой общая точка обознается строчной буквой *n* и называется *нейтралью* нагрузки.

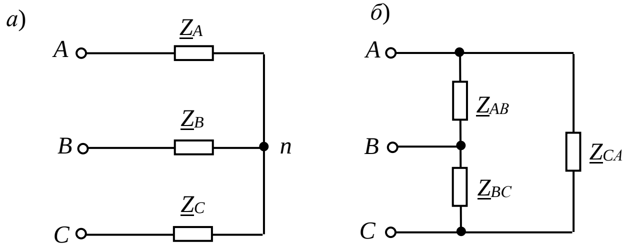

Рисунок 3.6

Путем эквивалентных преобразований можно переходить от одного вида соединений к другому. Формулы преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду и обратного перехода от звезды к эквивалентному треугольнику имеют следующий вид:

$$\underline{Z}_A = \frac{\underline{Z}_{CA}\underline{Z}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}+\underline{Z}_{BC}+\underline{Z}_{CA}};\ \underline{Z}_B = \frac{\underline{Z}_{AB}\underline{Z}_{BC}}{\underline{Z}_{AB}+\underline{Z}_{BC}+\underline{Z}_{CA}};\ \underline{Z}_C = \frac{\underline{Z}_{BC}\underline{Z}_{CA}}{\underline{Z}_{AB}+\underline{Z}_{BC}+\underline{Z}_{CA}}; \tag{3.10}$$

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_A + \underline{Z}_B + \frac{\underline{Z}_A\underline{Z}_B}{\underline{Z}_C};\ \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_B + \underline{Z}_C + \frac{\underline{Z}_B\underline{Z}_C}{\underline{Z}_A};\ \underline{Z}_{CA} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_A + \frac{\underline{Z}_C\underline{Z}_A}{\underline{Z}_B}. \tag{3.11}$$

3.2 Анализ трехфазных цепей

Все рассмотренные ранее методы расчета и анализа цепей синусоидального тока в символической форме в полной мере пригодны и для трехфазных цепей. Однако, принимая во внимание определенную специфику трехфазных цепей, их анализ удобно проводить с использованием векторных диаграмм, которые достаточно просто и наглядно дают возможность определять фазовые сдвиги между переменными.

3.2.1 Симметричный режим трехфазных цепей

На рисунке 3.7 изображена трехфазная цепь, состоящая из источника питания, связанного четырехпроводной линией с приемником электрической энергии (нагрузкой). Обмотки генератора и фазы приемника соединены звездой. Нейтральные точки *N* генератора и *n* нагрузки соединены между собой проводом с нулевым сопротивлением.

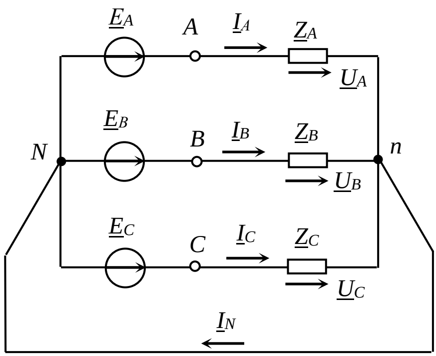

Рисунок 3.7

При *симметричном* режиме комплексные сопротивления всех фаз нагрузки одинаковы, а фазные ЭДС генератора образуют симметричную систему прямой последовательности. При анализе цепи будем полагать, что комплексные сопротивления фаз нагрузки имеют активно-индуктивный характер (φ > 0), т. е.

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z} = Z\, e^{j\varphi}\ .$$

Из схемы на рисунке 3.7 следует, что токи в фазах нагрузки равны соответствующим токам в линейных проводах

$$I_{\text{ф}} = I_{\text{л}} \tag{3.12}$$

Полагая, что $\underline{E}_A = E_{\text{ф}}$, и учитывая равенство потенциалов нейтральных точек *N* и *n*, фазные токи определяют по закону Ома

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{E_ф}{Ze^{j\varphi}} = Ie^{-j\varphi}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{E_ф e^{-j120^\circ}}{Ze^{j\varphi}} = Ie^{-j(120^\circ+\varphi)};$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{E_ф e^{j120^\circ}}{Ze^{j\varphi}} = Ie^{j(120^\circ-\varphi)},$$

где $I = \dfrac{E_ф}{Z}.$

Напряжения на фазах нагрузки равны соответствующим фазным ЭДС

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A; \quad \underline{U}_B = \underline{E}_B; \quad \underline{U}_C = \underline{E}_C.$$

На рисунке 3.8 приведена топографическая диаграмма напряжений и векторная диаграмма токов для этой схемы. Ток в нейтральном проводе

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0,$$

следовательно, в применении нейтрального провода нет необходимости.

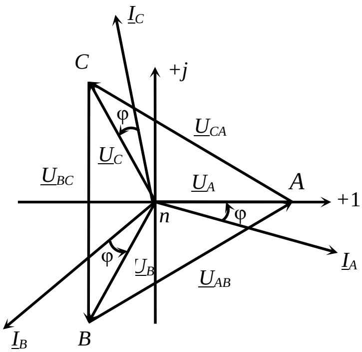

Рисунок 3.8

Активная мощность приемника

$$P = 3U_ф\, I_ф \cos\varphi.$$

Принимая во внимание, что при данном способе соединения фаз приемника $U_ф = \dfrac{U_л}{\sqrt{3}}$ и $I_ф = I_л$, получим формулу для расчета активной мощности симметричной трехфазной нагрузки, соединенной звездой,

$$P = \sqrt{3}\, U_л I_л \cos\varphi. \tag{3.13}$$

В этом выражении φ – фазовый сдвиг между фазным напряжением и фазным током.

Из векторной диаграммы на рисунке 3.8 следует, что векторы токов и векторы фазных напряжений образуют симметричные системы.

Таким образом, расчет симметричных цепей можно проводить только для одной *базовой* фазы, в качестве которой, как правило, принимают фазу *A*.

Соответствующие величины (токи, напряжения) в других фазах получают, умножая найденную для фазы *A* величину на оператор a^2 или a, например:

$$\underline{I}_B = a^2\,\underline{I}_A; \qquad \underline{I}_C = a\,\underline{I}_A.$$

При соединении фаз генератора звездой, а фаз нагрузки треугольником (рисунок 3.9, *а*) целесообразно перейти к схеме на рисунке 3.9, *б*, на которой фазы нагрузки находятся под действием системы линейных напряжений

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{3}\,\underline{E}_A e^{j30^\circ};\ \underline{U}_{BC} = \sqrt{3}\,\underline{E}_A e^{-j90^\circ};\ \underline{U}_{CA} = \sqrt{3}\,\underline{E}_A e^{j150^\circ}.$$

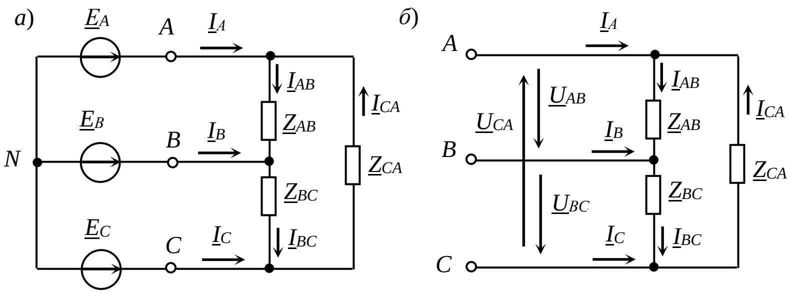

Рисунок 3.9

Фазные токи нагрузки определяют по закону Ома

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}; \quad \underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = a^2\underline{I}_{AB}; \quad \underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = a\underline{I}_{AB}.$$

При симметричной системе линейных напряжений и симметрии фаз нагрузки ($\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA}$) фазные токи образуют симметричную систему.

Линейные токи находим по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA} = \underline{I}_{AB}(1-a) = \underline{I}_{AB}\left(1+\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\,\underline{I}_{AB}e^{-j30^\circ};$$

$$\underline{I}_B = a^2\underline{I}_A; \quad \underline{I}_C = a\underline{I}_A.$$

Для симметричной нагрузки, соединенной треугольником, имеем следующие соотношения:

$$U_л = U_ф \text{ и } I_л = \sqrt{3}\ I_ф. \tag{3.14}$$

Формула для определения активной мощности, потребляемой нагрузкой, имеет такой же вид, как и в случае соединения симметричной нагрузки звездой

$$P = \sqrt{3}\, U_л I_л \cos \varphi.$$

Реактивную и полную мощности трехфазной симметричной системы находят по следующим формулам:

$$Q = \sqrt{3}\, U_л I_л \sin \varphi; \quad S = \sqrt{3}\, U_л I_л.$$

3.2.2 Передача энергии в трехфазной симметричной цепи

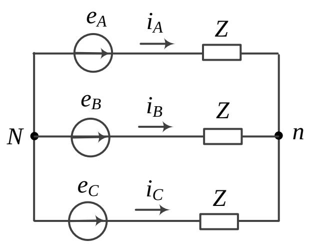

Рисунок 3.10

На рисунке 3.10 симметричная нагрузка с сопротивлением фаз $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$ подключена к трехфазному источнику с фазными ЭДС

$$e_A = E_m \sin \omega t;$$

$$e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ);$$

$$e_C = E_m \sin(\omega t + 120^\circ).$$

По цепи протекают токи

$$i_A = I_m \sin(\omega t - \varphi);$$

$$i_B = I_m \sin(\omega t - \varphi - 120^\circ);$$

$$i_C = I_m \sin(\omega t - \varphi + 120^\circ).$$

Найдем выражение для мгновенной активной мощности, передаваемой от источника к нагрузке,

$$p = e_A i_A + e_B i_B + e_C i_C = E_m I_m [\sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) +$$

$$+ \sin(\omega t - 120^\circ) \sin(\omega t - \varphi - 120^\circ) + \sin(\omega t + 120^\circ) \sin(\omega t - \varphi + 120^\circ)] =$$

$$= \frac{E_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi) + \cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi + 120^\circ) +$$

$$+\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi-120^\circ)]=3EI\cos\varphi=\mathrm{const},$$

т. к. $\cos(2\omega t-\varphi)+\cos(2\omega t-\varphi+120^\circ)+\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi-120^\circ)=0.$

Таким образом, в симметричной трехфазной цепи передача энергии от источника к потребителю осуществляется с постоянным значением и не зависит от времени. Такой режим создает благоприятные условия для работы трехфазного генератора, при котором вал генератора работает с постоянным моментом нагрузки.

3.2.3 Несимметричный режим трехфазных цепей

Несимметрия в трехфазной цепи появляется, если нарушается условие симметрии фазных ЭДС генератора, возникает различие в комплексных сопротивлениях фаз нагрузки, а также при отключении фазы или коротком замыкании ее. Рассмотрим несколько вариантов, при этом для всех случаев будем использовать только симметричные трехфазные источники с прямым порядком чередования фаз.

Трехфазная цепь типа «звезда – звезда» с нейтральным проводом

Схема такого типа приведена на рисунке 3.11. Если нейтральный провод имеет сопротивление $\underline{Z}_N$, отличное от нуля, то такую цепь можно рассматривать как цепь с тремя синусоидальными источниками, тремя независимыми контурами и двумя узлами. Она может быть рассчитана методом контурных токов или методом узловых потенциалов.

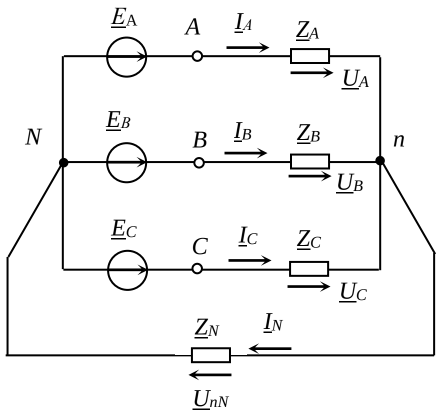

Рисунок 3.11

При наличии в схеме двух узлов целесообразно воспользоваться расчетом межузлового напряжения $\underline{U}_{nN}$ (*напряжения смещения нейтрали*)

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{E}_A \underline{Y}_A + \underline{E}_B \underline{Y}_B + \underline{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \tag{3.15}$$

где $\underline{Y}_A$, $\underline{Y}_B$, $\underline{Y}_C$, $\underline{Y}_N$ – комплексные проводимости ветвей схемы.

Затем находим напряжения на фазах нагрузки по второму закону Кирхгофа

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A - \underline{U}_{nN}; \quad \underline{U}_B = \underline{E}_B - \underline{U}_{nN}; \quad \underline{U}_C = \underline{E}_C - \underline{U}_{nN},$$

фазные токи

$$\underline{I}_A = \underline{U}_A \underline{Y}_A; \quad \underline{I}_B = \underline{U}_B \underline{Y}_B; \quad \underline{I}_C = \underline{U}_C \underline{Y}_C$$

и ток в нейтральном проводе

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C.$$

Токи во всех фазах несимметричной системы взаимозависимы, т. к. изменение сопротивления одной из фаз сопровождается изменением межузлового напряжения $\underline{U}_{nN}$, в результате чего изменяются фазные токи.

Если нейтральный провод имеет нулевое сопротивление $(Y_N = \infty)$, то напряжение смещения нейтрали U_{nN} будет равно нулю. В таком случае фазные напряжения нагрузки будут равны соответствующим фазным ЭДС и не будут зависить от изменения сопротивления ни одной из фаз. Такая система электроснабжения используется при питании бытовых потребителей.

Трехфазная цепь типа «звезда – звезда» без нейтрального провода

Рассмотрим схему на рисунке 3.12.

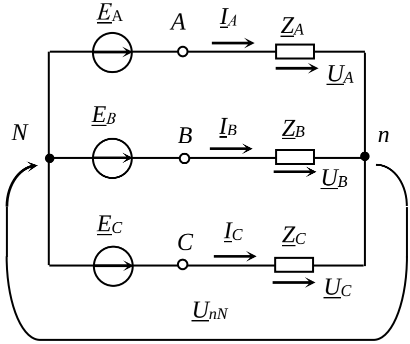

Рисунок 3.12

Полагая, что при отсутствии нейтрального провода $Y_N = 0$ в формуле (3.15), найдем значение напряжения смещения нейтрали

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{E}_A\underline{Y}_A + \underline{E}_B\underline{Y}_B + \underline{E}_C\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}. \qquad (3.16)$$

Остальные этапы расчета проводим точно так же, как и в предыдущем пункте, за исключением определения тока I_N, поскольку он отсутствует.

Пример 3.1 На рисунке 3.13 приведена схема трехфазной цепи, в которой обмотки генератора и нагрузка соединены звездой. Заданы фазная ЭДС $\underline{E}_A = 200\ e^{-j30^\circ}$ В и сопротивления фаз нагрузки $r = x_L = x_C = 100$ Ом.

Требуется:

1 Определить токи цепи и напряжения на фазах нагрузки.

2 Построить в масштабе топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов.

3 Составить баланс электрических мощностей.

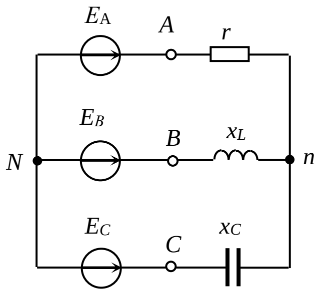

Рисунок 3.13

Решение. Расчет проведем, используя комплексную схему на рисунке 3.12, для которой $\underline{Z}_A = r$; $\underline{Z}_B = j\omega L$; $\underline{Z}_C = -j / (\omega C)$.

Запишем выражения для фазных ЭДС:

$$\underline{E}_A = 200\, e^{-j30^\circ} = 173{,}2 - j100 \text{ В};$$

$$\underline{E}_B = 200\, e^{-j150^\circ} = -173{,}2 - j100 \text{ В};$$

$$\underline{E}_C = 200\, e^{j90^\circ} = j200 \text{ В}.$$

Несмотря на то, что модули сопротивлений фаз равны, нагрузка является несимметричной, так как сопротивления имеют разный характер. Комплексные проводимости фаз нагрузки

$$\underline{Y}_A = 1/r = 0{,}01 \text{ См}; \ \underline{Y}_B = 1/j(\omega L) = -j0{,}01 \text{ См}; \ \underline{Y}_C = j\omega C = j0{,}01 \text{ См}.$$

Найдем напряжение смещения нейтрали

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{E}_A\underline{Y}_A + \underline{E}_B\underline{Y}_B + \underline{E}_C\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = -126{,}8 + j73{,}2 = 146{,}4\, e^{j150^\circ} \text{В},$$

а затем вычислим напряжения на фазах нагрузки

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A - \underline{U}_{nN} = 300 - j173{,}2 = 346{,}4\, e^{-j30^\circ}\ \text{В};$$

$$\underline{U}_B = \underline{E}_B - \underline{U}_{nN} = -46{,}4 - j173{,}2 = 179{,}34\, e^{-j105^\circ}\ \text{В};$$

$$\underline{U}_C = \underline{E}_C - \underline{U}_{nN} = 126{,}88 + j126{,}8 = 179{,}3\, e^{j45^\circ}\ \text{В}$$

и фазные токи

$$\underline{I}_A = \underline{U}_A \underline{Y}_A = 3 - j1{,}732 = 3{,}464\, e^{-j30^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_B = \underline{U}_B \underline{Y}_B = -1{,}732 + j0{,}464 = 1{,}793\, e^{j165^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_C = \underline{U}_C \underline{Y}_C = -1{,}268 + j1{,}268 = 1{,}793\, e^{j134^\circ}\ \text{А}.$$

По результатам расчета на рисунке 3.14 построены топографическая диаграмма напряжений в масштабе m_u =100 В/см и векторная диаграмма токов в масштабе m_i = 1 А/см. При построении топографической диаграммы в качестве базисной выбрана точка N (нейтраль генератора), ей придан потенциал, равный нулю, и она помещена в начало системы координат.

Векторы токов направлены из точки n (нейтрали нагрузки).

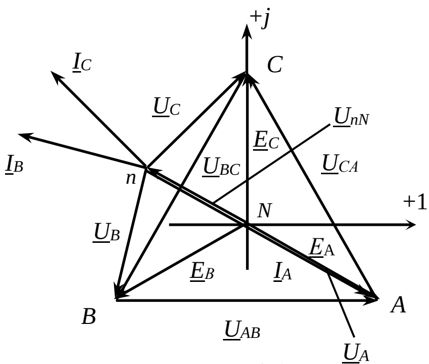

Рисунок 3.14

Составим баланс электрических мощностей.

Комплексная мощность источника

$$\underline{S}_{\text{ист}} = \underline{E}_A \overset{*}{\underline{I}}_A + \underline{E}_B \overset{*}{\underline{I}}_B + \underline{E}_C \overset{*}{\underline{I}}_C = 1200 \quad \text{В·А}.$$

Активная и реактивная мощности источника

$$P_{\text{ист}} = \mathrm{Re}\left[\underline{S}_{\text{ист}}\right] = 1200\ \text{Вт},$$

$$Q_{\text{ист}} = \mathrm{Im}\left[\underline{S}_{\text{ист}}\right] = 0.$$

Активная и реактивная мощности нагрузки

$$P_{\text{нагр}} = I_A^2 r = 1200 \text{ Вт};$$

$$Q_{\text{нагр}} = I_B^2 \omega L - I_C^2 \frac{1}{\omega C} = 0.$$

Баланс мощностей выполняется.

Несимметричная трехфазная нагрузка, соединенная звездой с заданной системой линейных напряжений (рисунок 3.15)

Если задана симметричная система напряжений $\underline{U}_{AB}$, $\underline{U}_{BC}$ и $\underline{U}_{CA}$ на зажимах нагрузки, соединенной звездой, то ее можно заменить симметричной системой фазных ЭДС $\underline{E}_A$, $\underline{E}_B$ и $\underline{E}_C$ (показаны на схеме 3.15 пунктирными линиями), значения которых находим по формулам

$$\underline{E}_A = \frac{\underline{U}_{AB}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ}; \quad \underline{E}_B = a^2 \underline{E}_A; \quad \underline{E}_C = a \underline{E}_A,$$

и перейти к расчету схемы, аналогичной рассмотренной ранее на рисунке 3.12.

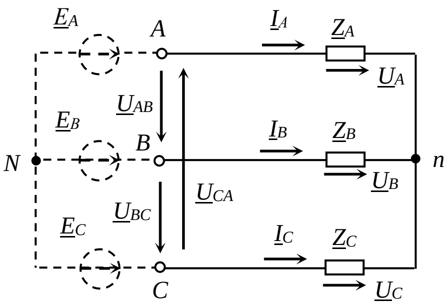

Рисунок 3.15

Можно избрать другой путь и выразить напряжения на фазах нагрузки через заданную систему линейных напряжений.

Фазным напряжениям нагрузки соответствуют фазные токи

$$\underline{I}_A = \underline{U}_A \underline{Y}_A; \; \underline{I}_B = \underline{U}_B \underline{Y}_B; \; \underline{I}_C = \underline{U}_C \underline{Y}_C,$$

где $\underline{Y}_A$, $\underline{Y}_B$, $\underline{Y}_C$ – комплексные проводимости соответствующих фаз нагрузки.

Запишем уравнение для токов по первому закону Кирхгофа в следующем виде:

$$\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C = 0. \tag{3.17}$$

Исключим из этого уравнения напряжения $\underline{U}_B$ и $\underline{U}_C$, выразив их через фазное напряжение $\underline{U}_A$ и линейные напряжения

$$\underline{U}_B = \underline{U}_A - \underline{U}_{AB}; \qquad \underline{U}_C = \underline{U}_{CA} + \underline{U}_A$$

Подставив эти соотношения в уравнение (3.17), получим

$$\underline{U}_A = \frac{\underline{U}_{AB}\underline{Y}_B - \underline{U}_{CA}\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}, \tag{3.18}$$

а затем круговой заменой индексов ($A \to B \to C \to A$) найдем выражения для двух других фазных напряжений:

$$\underline{U}_B = \frac{\underline{U}_{BC}\underline{Y}_C - \underline{U}_{AB}\underline{Y}_A}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}, \tag{3.19}$$

$$\underline{U}_C = \frac{\underline{U}_{CA}\underline{Y}_A - \underline{U}_{BC}\underline{Y}_B}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}. \tag{3.20}$$

По известным фазным напряжениям можно найти фазные токи.

Если трехфазная схема содержит несимметричную нагрузку, состоящую из некоторого числа комплексных сопротивлений, с различным способом соединения, то можно осуществить ряд эквивалентных преобразований в исходной схеме и привести ее к виду, представленному на рисунке 3.12 или на рисунке 3.15.

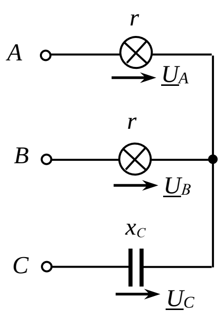

Рисунок 3.16

Пример 3.2 На рисунке 3.16 две электрические лампы накаливания с активным сопротивлением r каждая и конденсатор с сопротивлением x_C соединены звездой и подключены к симметричной системе линейных напряжений прямой последовательности. Определить, какая из ламп будет светить более ярко, если $r = x_C$.

Решение. Так как нагрузка несимметричная, то через лампы будут проходить разные по значению токи, обусловленные напряжениями U_A и U_B.

Воспользуемся формулами (3.18) и (3.19) и найдем отношение напряжений на лампах

$$\frac{U_A}{U_B} = \left|\frac{\underline{U}_{AB}\underline{Y}_B - \underline{U}_{CA}\underline{Y}_C}{\underline{U}_{BC}\underline{Y}_C - \underline{U}_{AB}\underline{Y}_A}\right|,$$

где $\underline{Y}_A = \underline{Y}_B = 1/r$, $\underline{Y}_C = 1 / -jx_C = j / r$.

Пусть $\underline{U}_{AB} = U_л$, тогда $\underline{U}_{BC} = a^2U_л$ и $\underline{U}_{CA} = aU_л$

$$\frac{U_A}{U_B}=\left|\frac{U_л/r-aU_л j/r}{a^2U_л j/r-U_л/r}\right|=\left|\frac{1{,}866+j0{,}5}{-0{,}134-j0{,}5}\right|=3{,}73.$$

Следовательно, лампа, присоединенная к фазе A, будет светить ярко, в то время как лампа, присоединенная к фазе B, − тускло.

Рассмотренная в примере схема может использоваться для определения порядка чередования фаз трехфазного источника.

3.3 Измерение мощности несимметричной трехфазной цепи

Рассмотрим вопрос расчета и измерения активной мощности в трехфазной цепи с несимметричной нагрузкой. С этой целью воспользуемся комплексной формой записи мощности. Будем полагать, что фазы нагрузки соединены звездой. Комплексная мощность трехфазной цепи равна сумме комплексных мощностей каждой из фаз

$$\underline{S}=\underline{S}_A+\underline{S}_B+\underline{S}_C=\underline{U}_A\overset{*}{\underline{I}}_A+\underline{U}_B\overset{*}{\underline{I}}_B+\underline{U}_C\overset{*}{\underline{I}}_C. \qquad (3.21)$$

Для определения активной мощности необходимо найти вещественную часть этого выражения

$$P=\mathrm{Re}\left[\underline{S}\right]=U_AI_A\cos\varphi_A+U_BI_B\cos\varphi_B+U_CI_C\cos\varphi_C.$$

Для измерения суммарной активной мощности, потребляемой несимметричной трехфазной нагрузкой, в соответствии с последним выражением потребуются три ваттметра. При этом подключение ваттметров будет возможно, если имеется нейтральный провод или нейтральная точка создана искусственно. Схема для измерения активной мощности с использованием трех ваттметров приведена на рисунке 3.17.

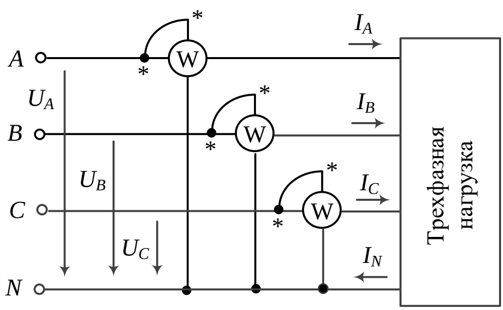

Рисунок 3.17

Такой метод измерения применяется в трехфазной четырехпроводной системе электроснабжения бытовых потребителей, когда важно знать активную мощность каждого индивидуального потребителя.

При отсутствии нейтрального провода измерение активной мощности можно осуществить с помощью двух ваттметров.

Так как токи, а также их сопряженные величины связаны первым законом Кирхгофа

$$\underline{I}_A^* + \underline{I}_B^* + \underline{I}_C^* = 0,$$

то можно выразить один из токов через два другие, например,

$$\underline{I}_C^* = -\underline{I}_A^* - \underline{I}_B^*.$$

Подставив значение $\underline{I}_C^*$ в формулу (3.21), получим

$$\underline{S} = (\underline{U}_A - \underline{U}_C)\underline{I}_A^* + (\underline{U}_B - \underline{U}_C)\underline{I}_B^* = \underline{U}_{AC}\underline{I}_A^* + \underline{U}_{BC}\underline{I}_B^*; \tag{3.22}$$

$$P = \mathrm{Re}\left[\underline{S}\right] = \mathrm{Re}\left[\underline{U}_{AC}\underline{I}_A^*\right] + \mathrm{Re}\left[\underline{U}_{BC}\underline{I}_B^*\right] = P_1 + P_2. \tag{3.23}$$

На рисунке 3.18 приведена схема включения ваттметров в соответствии с формулой (3.23). Суммарная активная мощность трехфазной нагрузки определяется алгебраической суммой показаний ваттметров

$$P = P_1 + P_2.$$

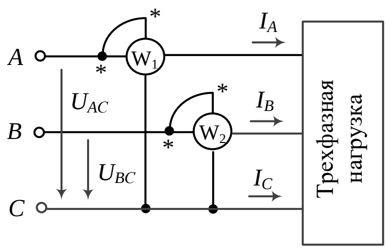

Рисунок 3.18

Следует иметь в виду, что показание одного из ваттметров может быть отрицательным или равным нулю, но при этом алгебраическая сумма показаний ваттметров будет всегда положительна.

Круговой заменой индексов напряжений и токов ($A \to B \to C \to A$) в формуле (3.23) можно получить два других варианта включения ваттметров.

Пример 3.3 К трехфазному источнику с симметричной системой линейных напряжений (рисунок 3.19) через линию, сопротивление каждого провода которой $\underline{Z}_л = 2 + j$ Ом, подключена нагрузка с заданными комплексными сопротивлениями: $\underline{Z}_1 = 8 - j12$ Ом, $\underline{Z}_2 = 9 + j13$ Ом, $\underline{Z}_3 = 14 - j21$ Ом, $\underline{Z}_4 = 6 - j12$ Ом, $\underline{Z}_5 = 7 - j22$ Ом. Линейное напряжение u_{AB} изменяется по синусоидальному закону: $u_{AB} = U_{л\,m} \sin(\omega t + \psi_u)$,

где $U_{л\,m} = 150\sqrt{6}$ В, $\psi_u = 30^\circ$.

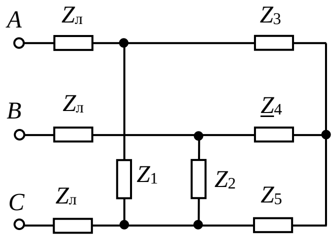

Рисунок 3.19

Требуется:

1 Найти токи на всех участках цепи.

2 Составить баланс мощностей.

3 Построить векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму напряжений.

Решение. К цепи приложена симметричная система комплексных линейных напряжений

$$\underline{U}_{AB} = \frac{U_{л\,m}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = 260\, e^{j30^\circ} = 225{,}2 + j130 \text{ В};$$

$$\underline{U}_{BC} = a^2 \underline{U}_{AB} = 260 e^{-j90^\circ} = -j260 \text{ В};$$

$$\underline{U}_{CA} = a \underline{U}_{AB} = 260 e^{j150^\circ} = -225{,}2 + j130 \text{ В}.$$

На рисунке 3.20 приведена расчетная схема цепи, в которой система линейных напряжений заменена системой соединенных звездой фазных ЭДС с

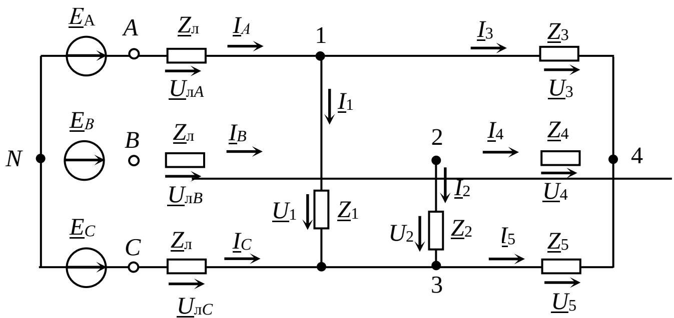

Рисунок 3.20

нейтральной точкой *N*.

Фазные ЭДС источника в комплексной форме:

$$\underline{E}_A = \frac{\underline{U}_{AB}}{\sqrt{3}} e^{j(\psi_u - 30^\circ)} = 150 \text{ В};$$

$$\underline{E}_B = a^2\underline{E}_A = -75 - j129{,}9 = 150\,e^{-j120^\circ}\ \text{В};$$

$$\underline{E}_C = a\underline{E}_A = -75 + j129{,}9 = 150\,e^{j120^\circ}\ \text{В}.$$

Обозначим узлы схемы цифрами 1, 2, 3, 4, укажем положительные направления токов на всех ее участках и соответствующие им падения напряжений на сопротивлениях схемы.

Проведем эквивалентные преобразования схемы, чтобы привести ее к виду на рисунке 3.12. Заменим звезду сопротивлений $\underline{Z}_3$, $\underline{Z}_4$, $\underline{Z}_5$ эквивалентным треугольником сопротивлений $\underline{Z}_6$, $\underline{Z}_7$, $\underline{Z}_8$ (рисунок 3.21):

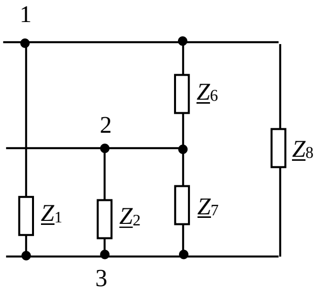

Рисунок 3.21

$$\underline{Z}_6 = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \frac{\underline{Z}_3\underline{Z}_4}{\underline{Z}_5} = 31{,}84 - j58{,}09\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_7 = \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \frac{\underline{Z}_4\underline{Z}_5}{\underline{Z}_3} = 16{,}03 - j27{,}74\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_8 = \underline{Z}_5 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_5\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} = 36{,}4 - j48{,}3\ \text{Ом}.$$

Заменим параллельно соединенные две пары сопротивлений $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_8$ и $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_7$ эквивалентными (рисунок 3.22):

$$\underline{Z}_9 = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_8}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_8} = 6{,}57 - j9{,}61\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_{10} = \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_7}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_7} = 15{,}7 + j7{,}59\ \text{Ом}.$$

Преобразуем треугольник сопротивлений $\underline{Z}_6$, $\underline{Z}_9$, $\underline{Z}_{10}$ в эквивалентную звезду (сопротивления $\underline{Z}_{11}$, $\underline{Z}_{12}$, $\underline{Z}_{13}$ на рисунке 3.23):

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{Z}_6\underline{Z}_9}{\underline{Z}_6 + \underline{Z}_9 + \underline{Z}_{10}} = 3{,}43 - j8{,}9\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_6\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_6 + \underline{Z}_9 + \underline{Z}_{10}} = 13{,}94 + j3{,}1\ \text{Ом};$$

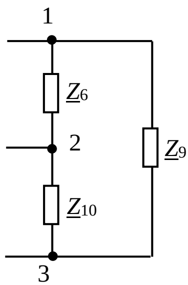

Рисунок 3.22

$$\underline{Z}_{13} = \frac{\underline{Z}_9 \underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_6 + \underline{Z}_9 + \underline{Z}_{10}} = 2{,}39 + j0{,}78 \text{ Ом.}$$

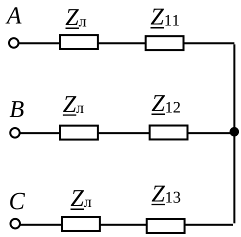

Рисунок 3.23

Эти сопротивления соединены последовательно с сопротивлениями $\underline{Z}_л$ линейных проводов. После замены последовательно соединенных сопротивлений эквивалентными получим конечную расчетную схему на рисунке 3.24 с комплексными сопротивлениями

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_л + \underline{Z}_{11} = 5{,}43 - j7{,}896 \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_B = \underline{Z}_л + \underline{Z}_{12} = 15{,}94 + j4{,}104 \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_C = \underline{Z}_л + \underline{Z}_{13} = 4{,}385 + j1{,}783 \text{ Ом.}$$

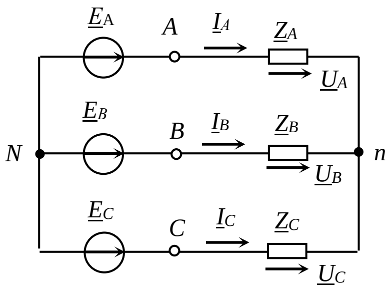

Рисунок 3.24

Произведем расчет схемы на рисунке 3.24, для чего определим межузловое напряжение

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{E}_A / \underline{Z}_A + \underline{E}_B / \underline{Z}_B + \underline{E}_C / \underline{Z}_C}{1/\underline{Z}_A + 1/\underline{Z}_B + 1/\underline{Z}_C} =$$

$$= -9{,}25 + j120{,}19 = 120{,}88\, e^{j96{,}1^\circ} \text{ В,}$$

а затем найдем напряжения на комплексных сопротивлениях схемы

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A - \underline{U}_{nN} = 159{,}25 - j120{,}19 \text{ В;}$$

$$\underline{U}_B = \underline{E}_B - \underline{U}_{nN} = -65{,}75 - j250{,}09 \text{ В;}$$

$$\underline{U}_C = \underline{E}_C - \underline{U}_{nN} = -65{,}75 + j9{,}71 \text{ В}$$

и токи, проходящие по линейным проводам цепи,

$$\underline{I}_A = \underline{U}_A / \underline{Z}_A = 19{,}75 + j6{,}593 = 20{,}82\, e^{j18{,}4^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_B = \underline{U}_B / \underline{Z}_B = -7{,}655 - j13{,}72 = 15{,}71\, e^{-j119{,}2^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_C = \underline{U}_C / \underline{Z}_C = -12{,}094 + j7{,}133 = 14{,}04\, e^{j149{,}5^\circ}.$$

Перейдем к схеме на рисунке 3.20 и найдем значения потенциалов узлов, приняв в качестве базисного узел N с потенциалом, равным нулю:

$$\underline{\varphi}_1 = \underline{E}_A - \underline{Z}_л \underline{I}_A = 117{,}08 - j32{,}92 \text{ В};$$

$$\underline{\varphi}_2 = \underline{E}_B - \underline{Z}_л \underline{I}_B = -73{,}41 - j94{,}81 \text{ В};$$

$$\underline{\varphi}_3 = \underline{E}_C - \underline{Z}_л \underline{I}_C = -43{,}68 + j127{,}73 \text{ В}.$$

По найденным значениям потенциалов узлов определяем напряжения $\underline{U}_1$ и $\underline{U}_2$ на сопротивлениях $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_2$ соответственно:

$$\underline{U}_1 = \underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_3 = 160{,}76 - j160{,}64 = 227{,}26\, e^{-j45^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_2 = \underline{\varphi}_2 - \underline{\varphi}_3 = -29{,}73 - j222{,}54 = 224{,}5\, e^{-j97{,}6^\circ} \text{ В}.$$

Токи $\underline{I}_1$ и $\underline{I}_2$ вычисляем по закону Ома

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 / \underline{Z}_1 = 15{,}45 + j3{,}096 = 15{,}76\, e^{j11{,}3^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{U}_2 / \underline{Z}_2 = -12{,}64 - j6{,}47 = 14{,}2\, e^{-j152{,}9^\circ} \text{ А}.$$

Остальные токи на фазах нагрузки находим на основании первого закона Кирхгофа:

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_A - \underline{I}_1 = 4{,}298 + j3{,}487 = 5{,}535\, e^{j39{,}1^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_4 = \underline{I}_B - \underline{I}_2 = 4{,}987 - j7{,}25 = 8{,}8 e^{-j55{,}5^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_5 = -(\underline{I}_3 + \underline{I}_4) = -9{,}285 + j3{,}764 = 10{,}02\, e^{j157{,}9^\circ} \text{ А}.$$

Проверим полученные результаты расчета токов по балансу электрических мощностей.

Комплексная мощность источников энергии

$$\underline{S}_{ист} = \underline{E}_A \overset{*}{\underline{I}}_A + \underline{E}_B \overset{*}{\underline{I}}_B + \underline{E}_C \overset{*}{\underline{I}}_C = 150\,(19{,}75 - j6{,}593) + (-75 - j129{,}93) \times$$

$$\times (-7{,}655 + j13{,}72) + (-75 + j129{,}9)(-12{,}094 - j7{,}133) = 7152 - j2058 \text{ В·А}.$$

Активная и реактивная составляющие мощности источников

$$P_{ист} = \mathrm{Re}\left[\underline{S}_{ист}\right] = 7152 \text{ Вт}; \quad Q_{ист} = \mathrm{Im}\left[\underline{S}_{ист}\right] = -2058 \text{ вар}.$$

Комплексная мощность, потребляемая сопротивлениями линейных проводов и сопротивлениями фаз нагрузки,

$$\underline{S}_{\text{нагр}} = (I_A^2 + I_B^2 + I_C^2)\underline{Z}_{\text{л}} + I_1^2\underline{Z}_1 + I_2^2\underline{Z}_2 + I_3^2\underline{Z}_3 + I_4^2\underline{Z}_4 + I_5^2\underline{Z}_5 =$$

$$= 7153{,}2 - j2057{,}3\,\text{В·А}.$$

Активная и реактивная составляющие мощности нагрузки

$$P_{\text{нагр}} = \text{Re}\lfloor\underline{S}_{\text{нагр}}\rfloor = 7{,}153{,}2\ \text{Вт}; \quad Q_{\text{нагр}} = \text{Im}\lfloor\underline{S}_{\text{нагр}}\rfloor = -2057{,}3\ \text{вар}.$$

Баланс мощностей выполняется.

Построим в масштабе m_u = 50 В/см топографическую диаграмму напряжений (рисунок 3.25, *а*) и векторную диаграмму токов в масштабе m_i = 10 А/см (рисунок 3.25, *б*).

Для построения топографической диаграммы напряжений отложим на комплексной плоскости комплексные потенциалы генераторных зажимов *A*, *B*, *C* и узлов 1, 2, 3 и 4. В начале координат поместим нейтральную точку *N*, потенциал которой приняли равным нулю.

Комплексные потенциалы точек схемы: $\underline{\varphi}_N = 0$; $\underline{\varphi}_A = 150$ В;

$$\underline{\varphi}_B = -75 - j129{,}9\ \text{В};\quad \underline{\varphi}_C = -75 + j129{,}9\ \text{В};$$

$$\underline{\varphi}_1 = 117{,}1 - j32{,}9\ \text{В};\quad \underline{\varphi}_2 = -73{,}4 - j94{,}8\ \text{В};$$

$$\underline{\varphi}_3 = -43{,}7 + j127{,}7\ \text{В};\quad \underline{\varphi}_4 = -16{,}3 + j8{,}5\ \text{В}.$$

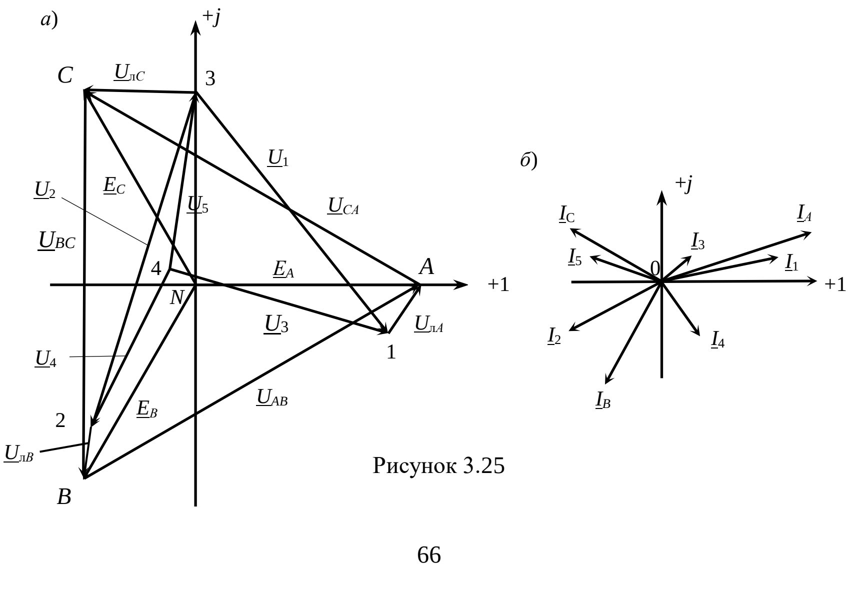

Рисунок 3.25

Соединяя точки на комплексной плоскости соответствующим образом, получим векторы комплексных напряжений на участках схемы.

Схему на рисунке 3.17 можно рассчитать, не прибегая к ее эквивалентным преобразованиям. С этой целью можно воспользоваться, например, расчетом токов схемы методом узловых потенциалов.

Примем потенциал узла N равным нулю и запишем в матричной форме систему уравнений для определения потенциалов узлов 1, 2., 3 и 4.

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & -\underline{Y}_{12} & -\underline{Y}_{13} & -\underline{Y}_{14} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{23} & -\underline{Y}_{24} \\ -\underline{Y}_{31} & -\underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} & -\underline{Y}_{34} \\ -\underline{Y}_{41} & -\underline{Y}_{42} & -\underline{Y}_{43} & \underline{Y}_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\varphi}_1 \\ \underline{\varphi}_2 \\ \underline{\varphi}_3 \\ \underline{\varphi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{J}_{\text{у}}^{(1)} \\ \underline{J}_{\text{у}}^{(2)} \\ \underline{J}_{\text{у}}^{(3)} \\ \underline{J}_{\text{у}}^{(4)} \end{bmatrix}$$

или
$$\left[\underline{Y}\right] \cdot \left[\underline{\varphi}\right] = \left[\underline{J}_{\text{у}}\right],$$

где $\underline{Y}_{11} = \dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{л}}} + \dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_3} = 0{,}46 - j0{,}109$ См;

$$\underline{Y}_{22} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{л}}} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_4} = 0{,}469 - j0{,}185 \text{ См;}$$

$$\underline{Y}_{33} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{л}}} + \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_5} = 0{,}521 - j0{,}127 \text{ См;}$$

$$\underline{Y}_{44} = \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_4} + \frac{1}{\underline{Z}_5} = 0{,}102 + j0{,}167 \text{ См;}$$

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = 0; \quad \underline{Y}_{13} = \underline{Y}_{31} = \frac{1}{\underline{Z}_1} = 0{,}038 - j0{,}058 \text{ См;}$$

$$\underline{Y}_{14} = \underline{Y}_{41} = \frac{1}{\underline{Z}_3} = 0{,}022 + j0{,}033 \text{ См;}$$

$$\underline{Y}_{23} = \underline{Y}_{32} = \frac{1}{\underline{Z}_2} = 0{,}036 - j0{,}052 \text{ См;}$$

$$\underline{Y}_{24} = \underline{Y}_{42} = \frac{1}{\underline{Z}_4} = 0{,}033 - j0{,}067 \text{ См;}$$

$$\underline{Y}_{34} = \underline{Y}_{43} = \frac{1}{\underline{Z}_5} = 0{,}047 + j0{,}067 \quad \text{См};$$

$$\underline{J}_{\text{у}}^{(1)} = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_{\text{л}}} = 60 - j30 \text{ А}; \quad \underline{J}_{\text{у}}^{(2)} = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_{\text{л}}} = -55{,}98 - j36{,}96 \text{ А};$$

$$\underline{J}_{\text{у}}^{(3)} = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_{\text{л}}} = -4{,}02 + j66{,}96 \text{ А}; \quad \underline{J}_{\text{у}}^{(4)} = 0.$$

Решив данную систему уравнений с использованием пакета Mathcad, найдем потенциалы узлов 1, 2, 3 и 4:

$$[\underline{\varphi}] = [\underline{Y}]^{-1}[\underline{J}_{\text{у}}];$$

$$\underline{\varphi}_1 = 117{,}084 - j32{,}916 \text{ В}; \quad \underline{\varphi}_2 = -73{,}405 - j94{,}812 \text{ В};$$

$$\underline{\varphi}_3 = -43{,}679 + j127{,}728 \text{ В}; \quad \underline{\varphi}_4 = -16{,}319 + j8{,}532 \text{ В}.$$

Токи ветвей рассчитываем по закону Ома

$$\underline{I}_A = \frac{-\underline{\varphi}_1 + \underline{E}_A}{\underline{Z}_{\text{л}}} = 19{,}75 + j6{,}583 = 16{,}02e^{j18{,}4^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_B = \frac{-\underline{\varphi}_2 + \underline{E}_B}{\underline{Z}_{\text{л}}} = -7{,}656 - j13{,}716 = 15{,}71e^{-j119{,}2^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = \frac{-\underline{\varphi}_3 + \underline{E}_C}{\underline{Z}_{\text{л}}} = -12{,}094 + j7{,}133 = 14{,}04e^{j149{,}5^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_3}{\underline{Z}_1} = 15{,}451 + j3{,}096 = 15{,}76e^{j11{,}3^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{\varphi}_2 - \underline{\varphi}_3}{\underline{Z}_2} = -12{,}642 - j6{,}466 = 14{,}2e^{-j152{,}9^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_4}{\underline{Z}_3} = 4{,}298 + j3{,}487 = 5{,}535e^{j39{,}1^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{\varphi}_2 - \underline{\varphi}_4}{\underline{Z}_4} = 4{,}987 - j7{,}251 = 8{,}8e^{-j55{,}5^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{\varphi}_3 - \underline{\varphi}_4}{\underline{Z}_5} = -9{,}285 + j3{,}764 = 10{,}02e^{j157{,}9^\circ}\ \text{А}.$$

Полученные значения комплексных токов ветвей схемы такие же, как и найденные ранее.

3.4 Вращающееся магнитное поле

Магнитное поле, ось которого вращается с постоянной угловой скоростью, называется *вращающимся магнитным полем.* Если при этом значение магнитной индукции на оси поля не меняется, то такое поле называется *круговым вращающимся*. Его можно изобразить на комплексной плоскости вращающимся вектором неизменной длины, конец которого описывает окружность.

На рисунке 3.26 изображен одиночный круговой виток, по которому проходит синусоидальный ток $i = I_m \sin \omega t$, положительное направление которого указано точкой и крестиком. Ток создает в витке магнитное поле, изменяющееся по синусоидальному закону. Магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции $\underline{B}$, максимальное значение которого имеет место на оси витка при максимальном токе I_m. Направление вектора $\underline{B}$ определяется правилом правоходового винта. На рисунке 3.26 указан вектор магнитной индукции $\underline{B}$ при положительном значении тока. Когда ток отрицателен, вектор $\underline{B}$ имеет противоположное направление (на рисунке 3.26 показано пунктиром). Таким образом вектор магнитной индукции изменяется вдоль оси витка по закону

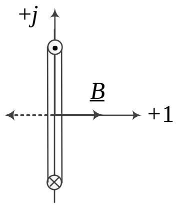

Рисунок 3.26

$$B = B_m \sin \omega t$$

в диапазоне от B_m до $-B_m$. Магнитное поле такого вида называют *пульсирующим*.

Воспользуемся формулой Эйлера и запишем закон изменения магнитной индукции на оси витка в следующем виде:

$$B = B_m \sin \omega t = \frac{B_m}{j2}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) = j\frac{B_m}{2}e^{-j\omega t} - j\frac{B_m}{2}e^{j\omega t}.$$

Как следует из полученной формулы, магнитное поле, пульсирующее по закону синуса, можно рассматривать как результат наложения двух круговых полей, вращающихся в противоположных направлениях с угловой скоростью, равной угловой частоте переменного тока, и имеющих максимальную индукцию на вращающейся оси, вдвое меньшую амплитуды индукции пульсирующего поля. На рисунке 3.27 вращающиеся векторы занимают положение для момента $t = 0$.

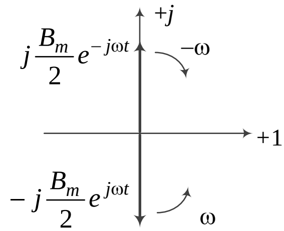

Рисунок 3.27

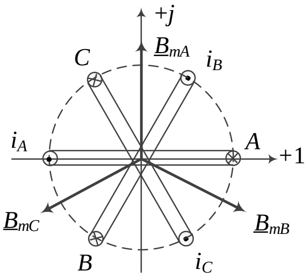

Рисунок 3.28

Рассмотрим случай, когда три одинаковые катушки, каждая из которых представлена на рисунке 3.28 круговым витком, расположены в пространстве таким образом, что их оси сдвинуты друг относительно друга на угол 120°. Пусть катушки подключены к источнику симметричного трехфазного напряжения прямой последовательности и через них протекают токи

$$i_A = I_m \sin \omega t;$$

$$i_B = I_m \sin(\omega t - 120^\circ);$$

$$i_C = I_m \sin(\omega t + 120^\circ).$$

Положительным направлениям токов, обозначенным на рисунке 3.28 точками и крестиками, соответствуют магнитные потоки, создаваемые этими токами. Магнитные потоки катушек будем характеризовать соответствующими векторами магнитной индукции на осях катушек, направления которых определяются правилом правоходового винта. При линейной зависимости магнитных индукций от токов мгновенные значения индукций фаз выразятся следующим образом:

$$B_A = B_m \sin \omega t;$$

$$B_B = B_m \sin(\omega t - 120^\circ);$$

$$B_C = B_m \sin(\omega t + 120^\circ),$$

где B_m – амплитуда индукции на оси каждой из катушек.

При выбранной на рисунке 3.28 системе координат комплексной плоскости найдем результирующий вектор напряженности магнитного поля $\underline{B}$ в виде суммы векторов магнитной индукции пульсирующих полей катушек:

$$\underline{B} = j(B_A + a^2 B_B + aB_C) =$$

$$= j\left[B_m \sin \omega t + a^2 B_m \sin(\omega t - 120^\circ) + aB_m \sin(\omega t + 120^\circ)\right] =$$

$$= jB_m(\sin \omega t + a^2 \sin \omega t \cos 120^\circ - a^2 \cos \omega t \sin 120^\circ + a \sin \omega t \cos 120^\circ +$$

$$+ a \cos \omega t \sin 120^\circ) = jB_m\left[\sin \omega t - \frac{1}{2}(a^2 + a)\sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 - a)\cos \omega t\right] =$$

$$= jB_m\left(\sin \omega t + \frac{1}{2}\sin \omega t + j\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cos \omega t\right) = j1{,}5B_m(\sin \omega t + j\cos \omega t) =$$

$$= -1{,}5B_m(\cos \omega t - j\sin \omega t) = -1{,}5B_m\, e^{-j\omega t}.$$

Полученное выражение показывает, что вектор магнитной индукции остается неизменным, равным по значению $1{,}5B_m$, и вращается в пространстве с угловой скоростью ω в направлении движения часовой стрелки. Если, не меняя пространственного расположения обмоток, поменять фазы токов в двух обмотках, например обмотку *B* подключить к фазе *C*, а обмотку *C* подключить к фазе *B*, то направление вращения магнитного поля изменится на противоположное.

Таким образом, с помощью трех обмоток, смещенных в пространстве на угол 120° относительно друг друга, по которым протекает симметричная система трехфазных токов, можно получить круговое вращающееся магнитное поле. Такое поле лежит в основе принципа действия трехфазных электродвигателей, асинхронных и синхронных.

4 ЦЕПИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМИ ТОКАМИ

В предыдущих разделах изучались линейные электрические цепи однофазного и трехфазного тока, в которых все источники генерировали ЭДС и токи синусоидальной формы и одинаковой частоты. На элементах цепи возникали синусоидальные напряжения той же частоты. В действительности, однако, по различным причинам источники могут генерировать ЭДС, форма которых может отличаться от классической синусоиды. Кроме того, в цепи могут использоваться нелинейные элементы или источники с разными частотами. По этим причинам токи и напряжения в цепи оказываются несинусоидальными.

В технике связи, радиоэлектронике и других областях электрические напряжения получают от специальных электронных устройств, называемых *генераторами сигналов*. К этим генераторам подводится электрическая энергия от внешних источников промышленной частоты, а с выходных зажимов снимают напряжения совершенно другой формы, т. е. сигналы, отличающиеся от синусоидальных.

При подключении линейной электрической цепи к источнику несинусоидального периодического напряжения в ветвях цепи протекают также несинусоидальные токи, форма кривых которых в общем случае отличается от формы кривой приложенного напряжения. Формы кривых токов и напряжений совпадают только в случае чисто резистивной цепи.

В ряде областей науки и техники, во многих электро- и радиотехнических цепях используют несинусоидальные периодические сигналы для работы применяемых там устройств. Таким образом, несинусоидальный режим во многих случаях является нормальным режимом работы и, следовательно, нужно уметь рассчитывать такие режимы работы.

Анализ процессов, происходящих в линейной электрической цепи, подключенной к источнику периодического несинусоидального напряжения, достаточно легко осуществить, если напряжение источника представить в виде совокупности постоянной и гармонических составляющих (*гармоник*) с различными частотами. Затем на основании принципа наложения рассмотреть реакцию цепи на воздействие каждой составляющей напряжения.

Математической основой для такого представления напряжения источника является тригонометрический ряд Фурье.

Анализ цепи под действием каждой отдельной синусоидальной составляющей можно проводить с использованием комплексного метода. Полученные при этом напряжения и токи на отдельных участках цепи будут представлять собой периодические несинусоидальные функции времени с периодом, равным периоду заданного несинусоидального напряжения источника.

4.1 Разложение периодической функции в тригонометрический ряд

Если мгновенные значения напряжений сигналов повторяются в одной и той же последовательности через равные промежутки времени, то они называются *периодическими*, а минимальный отрезок времени, через который эти повторения наблюдаются – *периодом* T.

На рисунке 4.1 приведена периодическая несинусоидальная функция $f(t) = f(t + T)$ с периодом, равным T или 2π.

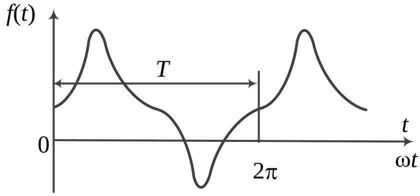

Рисунок 4.1

Всякая периодическая функция $f(\omega t)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, т. е. имеющая на заданном интервале конечное число максимумов и минимумов, а также разрывов первого рода, может быть разложена в тригонометрический ряд:

$$f(\omega t) = A_0 + A_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) + A_{2m}\sin(2\omega t + \psi_2) + \ldots + A_{km}\sin(k\omega t + \psi_k) + \ldots$$

или

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km}\sin(k\omega t + \psi_k), \tag{4.1}$$

где A_0 − постоянная составляющая, которая представляет собой среднее значение функции за период;

$A_{1m}\sin(\omega t + \psi_1)$ − первая (*основная*) гармоника;

k − номер гармоники;

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ − угловая частота основной гармоники ($k = 1$), период T которой равен периоду исходной функции $f(\omega t)$.

Гармоники, у которых $k > 1$, носят название *высших*. Постоянную составляющую A_0 называют *нулевой* гармоникой

Тригонометрический ряд, записанный в виде соотношения (4.1), называют рядом в *амплитудно-частотной* форме.

Запишем k-ю гармонику в следующем виде:

$$A_{km}\sin(k\omega t + \psi_k) = A_{km}\cos\psi_k \sin k\omega t + A_{km}\sin\psi_k \cos k\omega t =$$

$$= B_{km}\sin k\omega t + C_{km}\cos k\omega t,$$

где $B_{km} = A_{km}\cos\psi_k$; $C_{km} = A_{km}\sin\psi_k$.

Таким образом, выражение (4.1) примет следующий вид:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km}\sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_{km}\cos k\omega t. \tag{4.2}$$

Коэффициенты A_0, B_{km} и C_{km} ряда Фурье находят по следующим формулам:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)d(\omega t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt;$$

(4.3)

$$B_{km} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\sin k\omega t\, d(\omega t) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t\, dt; \qquad (4.4)$$

$$C_{km} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\cos k\omega t\, d(\omega t) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\, dt. \qquad (4.5)$$

В формулах (4.3)−(4.5) можно пользоваться также пределами интегрирования на сегменте $[-\pi; \pi]$ или $[-T/2; T/2]$.

Формула (4.2) представляет *тригонометрическую* форму ряда Фурье. Она может быть приведена к *амплитудно-частотной* форме (4.1) в виде суммы синусоидальных составляющих − гармоник с частотами, кратными основной частоте ω, амплитудами A_{km} и начальными фазами ψ_k

$$A_{km} = \sqrt{B_{km}^2 + C_{km}^2}; \qquad \psi_k = \operatorname{arctg}\frac{C_{km}}{B_{km}}.$$

Соотношения между коэффициентами A_{km}, B_{km} и C_{km} ряда Фурье можно представить в комплексной форме

$$\underline{A}_{km} = B_{km} + jC_{km} = A_{km}e^{j\psi_k}. \qquad (4.6)$$

Формулами (4.3)−(4.5) для определения коэффициентов A_0, B_{km}, C_{km} ряда Фурье пользуются в том случае, если функцию $f(\omega t)$ можно описать аналитически в достаточно простой форме.

Теоретически ряд Фурье содержит бесконечное число гармоник, однако в практических случаях этот ряд сходится достаточно быстро, поэтому в расчетах можно ограничиться сравнительно небольшим числом гармоник.

В общем случае графически функция сигнала $f(\omega t)$ представляет собой кривую, показывающую мгновенные значения, например напряжения в различные моменты времени. Другими словами, это будет *временнáя* характеристика, т. е. кривая мгновенных значений в функции времени.

Периодическую несинусоидальную функцию, которая представляет собой совокупность гармоник, характеризуют также *дискретным частотным* *спектром.* Его можно изображать графически в виде *спектра амплитуд* (амплитудно-частотного спектра) и *спектра фаз* (фазочастотного спектра). Для построения амплитудно-частотного спектра по оси абсцисс откладывают значения частот, кратных основной частоте ω. Затем из этих точек параллельно оси ординат проводят *спектральные линии*, длины которых в масштабе равны амплитудам гармоник соответствующих частот (рисунок 4.2, *а*). При графическом представлении фазо-частотного спектра параллельно оси ординат для

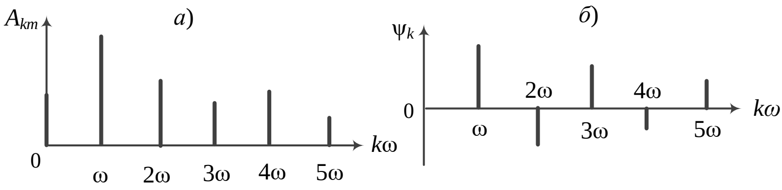

Рисунок 4.2

заданных частот откладывают значения начальных фаз соответствующих гармоник, выраженных в радианах или градусах (рисунок 4.2, *б*).

4.1.1 Свойства периодических кривых, обладающих симметрией

Разложение периодической несинусоидальной функции в ряд Фурье упрощается, если она обладает какой-либо симметрией.

Рассмотрим следующие случаи симметрии.

1 *Функция $f(\omega t)$ симметричная относительно оси абсцисс при совмещении двух полупериодов во времени* (рисунок 4.3).

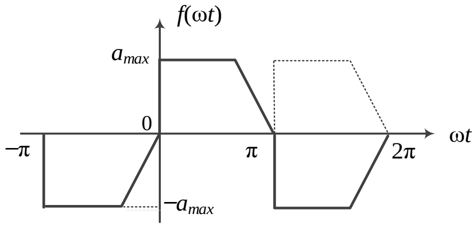

Рисунок 4.3

Такая кривая удовлетворяет условию

$$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi), \tag{4.7}$$

которое с учетом соотношения (4.2) можно записать следующим образом:

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km} \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} \cos k\omega t =$$

$$= -A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} B_{km} \sin k(\omega t + \pi) - \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} \cos k(\omega t + \pi).$$

Равенство левой и правой частей полученного соотношения выполняется при условии, если коэффициент $A_0 = 0$, а коэффициенты B_{km} и C_{km} равны нулю при четных значениях k ($k = 2, 4, 6, \ldots$).

Таким образом, функция, удовлетворяющая условию (4.7), раскладывается в ряд, который содержит только нечетные гармоники,

$$f(\omega t) = A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + A_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5) + \ldots . \quad (4.8)$$

2 *Функция $f(\omega t)$ симметрична оси ординат* (рисунок 4.4), т. е.

$$f(\omega t) = f(-\omega t). \quad (4.9)$$

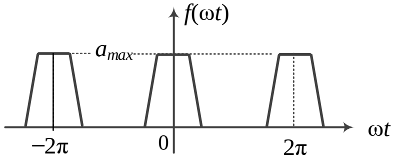

Рисунок 4.4

Данному условию соответствует соотношение

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km} \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} \cos k\omega t = A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} B_{km} \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} \cos k\omega t,$$

из которого следует, что при разложении в ряд Фурье эта функция содержит постоянную и косинусоидальные составляющие ($A_{km} = C_{km}$):

$$f(\omega t) = A_0 + A_{1m} \cos \omega t + A_{2m} \cos 2\omega t + A_{3m} \cos 3\omega t + \ldots .$$

Функции, для которых выполняется условие (4.9), называют *четными.* Линейная комбинация четных функций есть четная функция.

Для четной функции, интегрируемой на сегменте $[-\pi; \pi]$, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t)d(\omega t) = \int_{-\pi}^{0} f(\omega t)d(\omega t) + \int_{0}^{\pi} f(\omega t)d(\omega t).$$

При замене в формуле ωt на $(-\omega t)$ получаем

$$\int_{-\pi}^{0} f(\omega t)d(\omega t) = \int_{0}^{\pi} f(-\omega t)d(\omega t) = \int_{0}^{\pi} f(\omega t)d(\omega t),$$

следовательно, $$\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t)d(\omega t) = 2\int_{0}^{\pi} f(\omega t)d(\omega t).$$

В таком случае формулы (4.3)−(4.5) примут вид

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\omega t)d(\omega t) = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)dt; \tag{4.10}$$

$$B_{km} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\omega t)\sin k\omega t\, d(\omega t) = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\sin k\omega t\, dt; \tag{4.11}$$

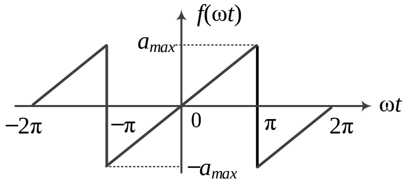

Рисунок 4.5

$$C_{km} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\omega t)\cos k\omega t\, d(\omega t) = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\, dt. \tag{4.12}$$

3 *Функция* $f(\omega \mathrm{t})$, *изображенная на рисунке* 4.5*, симметрична относительно начала координат*, т. е.

$$f(\omega t) = -f(-\omega t). \tag{4.13}$$

Запишем условие симметрии функции в соответствии с формулой (4.13)

$$A_0+\sum_{k=1}^{\infty}B_{km}\sin k\omega t+\sum_{k=1}^{\infty}C_{km}\cos k\omega t=-A_0+\sum_{k=1}^{\infty}B_{km}\sin k\omega t-\sum_{k=1}^{\infty}C_{km}\cos k\omega t.$$

Из приведенного соотношения следует, что функции такого рода при разложении в тригонометрический ряд имеют в своем составе только синусоидальные составляющие (A_0 = 0; C_{km} = 0; A_{km} = B_{km})

$$f(\omega t)=A_{1m}\sin\,\omega t+A_{2m}\sin\,2\omega t+A_{3m}\sin\,3\omega t+\ldots\,. \qquad (4.14)$$

Рассмотренная функция, которая удовлетворяет условию (4.13), называется *нечетной.* Для нечетных функций коэффициент

$$B_{km}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\omega t)\sin\,k\omega t\,d(\omega t)=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\sin\,k\omega t\,dt. \qquad (4.15)$$

При одновременном выполнении условий симметрии относительно оси абсцисс и начала координат в разложении будут содержаться только нечетные синусоидальные составляющие. А при симметрии функции одновременно относительно осей абсцисс и ординат ряд Фурье будет содержать только нечетные косинусоидальные составляющие.

Таким образом, при разложении в ряд Фурье периодической функции, представленной графически, следует предварительно выяснить, не обладает ли заданная функция каким-либо видом симметрии. Если симметрия функции имеет место, то заранее можно предсказать, какой гармонический спектр ей будет соответствовать.

Иногда в целях более удобного разложения функции в ряд Фурье сдвигают начало отсчета времени, что влечет изменение вида ряда. Но при этом амплитуды гармоник остаются прежними, а меняются их начальные фазы. Например, при переходе от функции $f(\omega t)$, представленной формулой (4.1), к функции $f_1(\omega t)=f\left[\omega(t-t_0)\right]$, т. е. при смещении начала отсчета времени на t_0 получим ряд

$$f_1(\omega t) = f\left[\omega(t - t_0)\right] = A_0 + A_{1m}\sin(\omega t + \psi_1') + A_{2m}\sin(2\omega t + \psi_2') + \ldots =$$

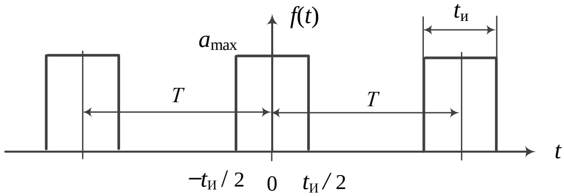

Рисунок 4.6

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km}\sin\left[k\omega(t - t_0) + \psi_k\right] = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km}\sin(k\omega t + \psi_k'), \qquad (4.16)$$

где $\psi_k' = \psi_k - k\omega t_0$.

4.1.2 Спектры простейших периодических сигналов

Исследуем несколько примеров периодических колебаний, которые часто используются в электротехнических и радиотехнических устройствах, системах автоматики и измерительной техники.

1 *Последовательность униполярных прямоугольных импульсов.*

На рисунке 4.6 изображены периодические сигналы прямоугольной формы продолжительностью $t_и$ и максимальным значением a_{max}. Разложим данную последовательность сигналов в ряд Фурье.

При выбранных на рисунке осях координат периодическая функция симметрична оси ординат, в силу чего коэффициенты B_{km} будут равны нулю, а амплитуды гармоник A_{km} будут равны соответствующим коэффициентам C_{km}.

Найдем значение постоянной составляющей, исходя из геометрии сигнала,

$$A_0 = \frac{a_{\max} t_{\text{и}}}{T}. \tag{4.17}$$

Для последовательности сигналов, приведенных на рисунке 4.6, отношение периода T к продолжительности импульса $t_{\text{и}}$ называется *скважностью*

$$S = \frac{T}{t_{\text{и}}}. \tag{4.18}$$

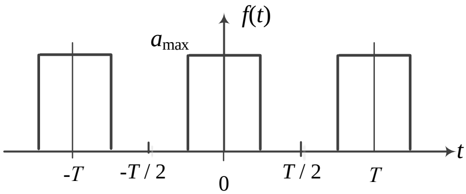

Рисунок 4.7

Формулу (4.17) можно записать в следующем виде:

$$A_0 = \frac{a_{\max}}{S}. \tag{4.19}$$

Коэффициент C_{km} определим согласно формуле (4.12)

$$C_{km} = \frac{4}{T}\int_0^{t_{\text{и}}/2} a_{\max}\cos k\omega t d(\omega t) = \frac{4a_{\max}}{k\omega T}\sin k\omega t\Big|_0^{t_{\text{и}}/2} = \frac{4a_{\max}}{k\omega T}\sin k\omega\frac{t_{\text{и}}}{2}.$$

С учетом соотношения $\omega T = 2\pi$ формула примет вид

$$C_{km} = \frac{4a_{\max}}{k2\pi}\sin k\frac{2\pi}{T}\frac{t_{\text{и}}}{2} = \frac{2a_{\max}}{k\pi}\sin k\pi\frac{t_{\text{и}}}{T} = \frac{2a_{\max}}{k\pi}\sin k\frac{\pi}{S}. \tag{4.20}$$

В итоге получили тригонометрический ряд Фурье

$$f(t) = \frac{a_{\max}}{S} + \frac{2a_{\max}}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{S}\cos\omega t + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{S}\cos 2\omega t + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{S}\cos 3\omega t + \ldots\right). \tag{4.21}$$

Для частного случая, когда длительность импульса равна $t_{\text{и}} = T/2$, а скважность $S = 2$ (рисунок 4.7), разложение функции в ряд Фурье будет представлено следующим образом:

$$f(t) = \frac{a_{\max}}{2} + \frac{2a_{\max}}{\pi}\left(\cos\omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t + \ldots\right). \tag{4.22}$$

2 *Последовательность биполярных прямоугольных импульсов*

Представленная на рисунке 4.8 периодическая функция носит название *миандр* и описывается уравнением

$$u(t)=\begin{cases}-a_{\max} & \text{при} \quad -\dfrac{T}{2}<t<0;\\[2ex] a_{\max} & \text{при} \quad 0<t<\dfrac{T}{2}.\end{cases}$$

Функция симметрична относительно начала координат и оси абсцисс при совмещении полупериодов во времени, следовательно, в ее разложении в ряд Фурье будут только нечетные синусоидальные составляющие

$$A_0 = 0;\ C_{km} = 0;\ A_{km} = B_{km}.$$

Коэффициент B_{km} находим по формуле (4.15)

$$B_{km}=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} a_{\max}\sin k\omega t dt=-\frac{4a_{\max}}{k\omega T}\cos k\omega t\Big|_0^{T/2}=-\frac{2a_{\max}}{k\pi}\left(\cos\frac{k\pi}{2}-1\right).$$

Получим ряд Фурье в следующей форме:

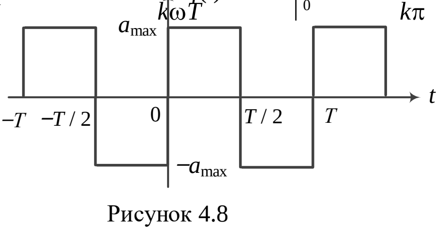

Рисунок 4.8

$$f(t) = \frac{4a_{\max}}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \ldots\right). \qquad (4.23)$$

3 *Пилообразная функция* (рисунок 4.9)

Уравнение функции на сегменте [0; T]

$$f(t) = \frac{a_{\max}}{T}t.$$

Разложим заданную функцию в тригонометрический ряд.
Постоянная составляющая:

$$A_0 = \frac{a_{\max}}{2}.$$

Найдем коэффициенты B_{km}, C_{km} ряда Фурье, применив правило интегрирования по частям,

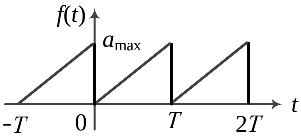

Рисунок 4.9

$$B_{km} = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{a_{\max}}{T}t\sin k\omega t dt = -\frac{2a_{\max}}{k\omega T^2}\int_0^T t d\cos k\omega t =$$

$$= -\frac{2a_{\max}}{k\omega T^2}\left(t\cos k\omega t\Big|_0^T - \int_0^T \cos k\omega t dt\right) = -\frac{2a_{\max}}{k\omega T^2}T\cos k\omega T = -\frac{a_{\max}}{k\pi};$$

$$C_{km} = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{a_{\max}}{T}t\cos k\omega t dt = \frac{2a_{\max}}{k\omega T^2}\int_0^T t d\sin k\omega t =$$

$$= \frac{2a_{\max}}{k\omega T^2}\left(t\sin k\omega t\Big|_0^T - \sin\int_0^T \cos k\omega t dt\right) = 0.$$

Коэффициент $A_{km} = B_{km} = -\frac{a_{\max}}{k\pi}$, в таком случае исследуемая функция представляется рядом в виде

$$f(t)=\frac{a_{\max}}{2}-\frac{a_{\max}}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\ldots\right). \qquad (4.24)$$

4 *Последовательность униполярных треугольных импульсов.*

Периодическая функция на рисунке 4.10 имеет следующее аналитическое выражение

$$u(t)=\begin{cases}-\dfrac{2a_{\max}}{T}t & \text{при} \quad -\dfrac{T}{2}<t<0;\\[2ex] \dfrac{2a_{\max}}{T}t & \text{при} \quad 0<t<\dfrac{T}{2}.\end{cases}$$

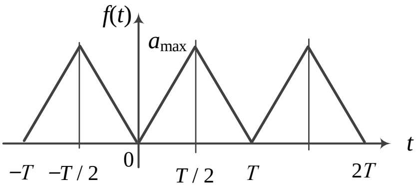

Рисунок 4.10

Анализируемая функция – четная, при разложении в ряд Фурье имеет в своем составе постоянную составляющую $A_0=\dfrac{a_{\max}}{2}$ и косинусоидальные гармонические составляющие $(A_{km}=C_{km})$.

Коэффициент C_{km} найдем по формуле (4.12)

$$C_{km}=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}\frac{2a_{\max}}{T}t\cos k\omega t\,dt=\frac{8a_{\max}}{k\omega T^2}\int_0^{T/2}td\sin k\omega t=$$

$$=\frac{8a_{\max}}{k\omega T^2}\left(t\sin k\omega t\Big|_0^{T/2}-\int_0^{T/2}\sin k\omega t dt\right)=\frac{8a_{\max}}{k\omega T^2}\cdot\frac{1}{k\omega}\cos k\omega t\Big|_0^{T/2}=$$

$$=\frac{8a_{\max}}{k^2\omega^2T^2}\left(\cos k\frac{\omega T}{2}-1\right)=\frac{2a_{\max}}{k^2\pi^2}(\cos k\pi-1).$$

Исследуемая периодическая функция раскладывается в ряд Фурье следующим образом:

$$f(t) = \frac{a_{\max}}{2} - \frac{4a_{\max}}{\pi^2}\left(\cos\omega t + \frac{1}{9}\cos 3\omega t + \frac{1}{25}\cos 5\omega t + \ldots\right). \qquad (4.25)$$

4.2 Комплексная форма ряда Фурье

Поскольку основным методом расчета цепей синусоидального тока является символический метод, ряд Фурье удобно представлять в комплексной форме. Пусть тригонометрический ряд задан в следующем виде:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(B_{km}\sin k\omega t + C_{km}\cos k\omega t). \qquad (4.26)$$

Введем условно отрицательные частоты и будем производить суммирование для значений k в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$. В этом случае формула ряда Фурье приобретает более компактный вид

$$f(\omega t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(B_{km}\sin k\omega t + C_{km}\cos k\omega t). \qquad (4.27)$$

В этой формуле каждая гармоника, кроме нулевой, входит под знак суммы дважды. При этом коэффициент A_0 определяется из формулы, полагая, что $k = 0$,

$$A_0 = \frac{C_{0m}}{2}.$$

Представим функции $\sin k\omega t$ и $\cos k\omega t$ соотношениями из формулы Эйлера

$$\sin k\omega t = \frac{1}{j2}(e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t});$$

$$\cos k\omega t = \frac{1}{2}(e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t})$$

и подставим их в формулу (4.12)

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{B_{km}}{j2}(e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}) + \frac{C_{km}}{2}(e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t})\right] =$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{C_{km} - jB_{km}}{2} e^{jk\omega t} + \frac{C_{km} + jB_{km}}{2} e^{-jk\omega t} \right).$$

Из формул (4.4) и (4.5) следует, что B_{km} является нечетной функцией индекса k, в то время как коэффициент C_{km} – четная функция индекса k, т. е.

$$B_{km} = -B_{-km}; \quad C_{km} = C_{-km}.$$

С учетом этого формула (4.13) приобретет следующий вид:

$$f(\omega t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{C_{km} - jB_{km}}{2} e^{jk\omega t} + \frac{C_{km} - jB_{km}}{2} e^{jk\omega t} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (C_{km} - jB_{km}) e^{jk\omega t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{F}_{km} e^{jk\omega t}, \qquad (4.28)$$

где $\underline{F}_{km} = C_{km} - jB_{km}$ – комплексный коэффициент ряда Фурье. (4.29)

Значение коэффициента $\underline{F}_{km}$ найдем, воспользовавшись соотношениями (4.4) и (4.5),

$$\underline{F}_{km} = C_{km} - jB_{km} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cos k\omega t \, d(\omega t) - j \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin k\omega t \, d(\omega t) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t)(\cos k\omega t - j \sin k\omega t) d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) e^{-jk\omega t} d(\omega t). \qquad (4.30)$$

4.3 Коэффициенты, характеризующие периодические несинусоидальные функции

В электротехнике и радиотехнике используют такие коэффициенты, как коэффициент формы кривой, коэффициент амплитуды, коэффициент искажения.

Коэффициент формы кривой $k_ф$ определяется в виде отношения действующего значения функции к среднему значению функции, взятой по абсолютному значению

$$k_ф = \frac{A}{A_{ср}}, \qquad (4.31)$$

где
$$A_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left|f(t)\right| dt}. \tag{4.32}$$

Коэффициент амплитуды равен отношению максимального значения функции к действующему

$$k_{\text{а}} = \frac{a_{\max}}{A}. \tag{4.33}$$

Коэффициент искажения определяется как отношение действующего значения основной гармоники к действующему значению функции

$$k_{\text{и}} = \frac{A_1}{A}. \tag{4.34}$$

4.4 Действующее значение несинусоидального периодического тока

Несинусоидальный ток по аналогии с синусоидальным током характеризуется *действующим значением*, которое принимается равным такому постоянному току I, при котором в одном и том же сопротивлении r за время, равное периоду T, выделяется такое же количество тепла, как и при переменном токе,

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}, \tag{4.35}$$

т. е. действующее значение периодического несинусоидального тока является его среднеквадратичным значением за период.

Подставим в формулу (4.15) значение тока $i(t)$, заданного рядом Фурье,

$$i(t) = I_0 + i_1 + i_2 + ... + i_k + ... = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k).$$

Интеграл будет представлен в виде суммы интегралов вида

$$\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2\,dt = I_0^2;$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T i_k^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k)\,dt = \frac{I_{km}^2}{2T}\int_0^T \left[1 - \cos 2(k\omega t + \psi_k)\right] dt = \frac{I_{km}^2}{2} = I_k^2;$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_0 I_{km}\sin(k\omega t+\psi_k)dt=0;$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_{km}\sin(k\omega t+\psi_k)I_{pm}\sin(p\omega t+\psi_p)dt=$$

$$=\frac{I_{km}I_{pm}}{T}\int_0^T\left\{\cos\left[(k-p)\omega t+\psi_k-\psi_p\right]-\cos\left[(k+p)\omega t+\psi_k+\psi_p\right]\right\}dt=0.$$

Таким образом, получаем

$$I=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+...+I_k^2+...}\,, \tag{4.36}$$

т. е. действующее значение тока равно корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей I_0 и действующих значений токов всех гармоник.

По аналогии с током запишем выражения для действующих значений ЭДС и напряжения:

$$E=\sqrt{E_0^2+E_1^2+E_2^2+...+E_k^2+...}\,;$$

$$U=\sqrt{U_0^2+U_1^2+U_2^2+...+U_k^2+...}\,.$$

4.5 Мощность периодического несинусоидального тока

Активная мощность периодического тока произвольной формы определяется как средняя мощность за период, т. е.

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt. \tag{4.37}$$

Пусть мгновенные значения напряжения и тока выражены в виде тригонометрических рядов

$$u(t)=U_0+u_1+u_2+...+u_k+...=U_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_{km}\sin(k\omega t+\psi_{uk});$$

$$i(t)=I_0+i_1+i_2+...+i_k+...=I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_{km}\sin(k\omega t+\psi_{ik}).$$

Мгновенная мощность $p(t)$ представляет выражение

$$p(t) = u(t)i(t) = \left(U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{uk}) \right) \left(I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ik}) \right).$$

При подстановке этого выражения в формулу (4.37) средняя мощность P будет представлена в виде суммы интегралов вида

$$\frac{1}{T}\int_0^T U_0 I_0 dt = U_0 I_0 = P_0;$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T U_0 i_k dt = 0; \quad \frac{1}{T}\int_0^T I_0 u_k dt = 0;$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T u_k i_k = \frac{1}{T}\int_0^T U_{km} \sin(k\omega t + \psi_{uk}) I_{km} \sin(k\omega t + \psi_{ik}) dt = U_k I_k \cos\varphi_k = P_k;$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T u_p i_q = \frac{1}{T}\int_0^T U_{pm} \sin(p\omega t + \psi_{up}) I_{qm} \sin(q\omega t + \psi_{iq}) dt = 0.$$

Таким образом, получаем

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + ... + P_k + ... = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k. \qquad (4.38)$$

Средняя мощность несинусоидального тока равна сумме средних мощностей отдельных гармоник. Постоянную составляющую P_0 при этом можно рассматривать как мощность нулевой гармоники с $\varphi_0 = 0$.

Полученное таким образом значение P представляет собой *активную* мощность, с которой электрическая энергия в единицу времени преобразуется на данном участке в тепловую, механическую или какую-либо форму энергии.

По аналогии с цепями синусоидального тока для рассматриваемых цепей можно ввести понятие *реактивной* мощности Q, которая представляет алгебраическую сумму реактивных мощностей отдельных гармоник

$$Q = Q_1 + Q_2 + ... + Q_k + ... = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin\varphi_k \qquad (4.39)$$

и *полной* мощности S, определяемой как произведение действующих значений тока и напряжения,

$$S = UI = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + I_3^2 + \ldots} \cdot \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots}. \qquad (4.40)$$

В некоторых случаях периодические несинусоидальные кривые напряжения и тока на рассматриваемом участке цепи заменяют эквивалентными синусоидами, действующие значения которых равны действующим значениям несинусоидальных величин. При этом подбирают такой угол сдвига фаз θ между эквивалентными синусоидами, при котором потребляемая активная мощность остается без изменения:

$$P = UI\cos\theta = S\cos\theta. \qquad (4.41)$$

Отношение активной мощности к полной называют *коэффициентом мощности*:

$$\frac{P}{S} = \cos\theta.$$

Для несинусоидальных токов в отличие от синусоидальных зависимость между активной, реактивной и полной мощностями определяется соотношением

$$P^2 + Q^2 = S^2 - T^2,$$

где T – мощность искажения, которая характеризует степень различия между формами кривых напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$.

Пример 4.1 Разложить в тригонометрический ряд периодическую несинусоидальную функцию напряжения на рисунке 4.11, ограничившись пятью гармониками.

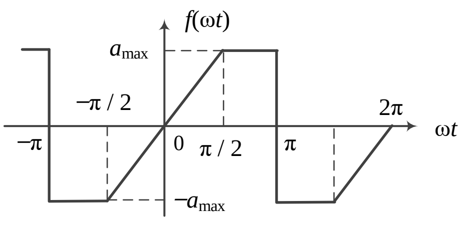

Рисунок 4.11

Решение. Форма заданной кривой имеет разные аналитические выражения на отдельных участках. Разобьем область интегрирования на сегменте [−π; π] на три участка и запишем уравнения кривой $f(\omega t)$ для этих участков:

$$f(\omega t)=\begin{cases} -a_{\max} & \text{при} \quad -\pi<\omega t\le -\pi/2; \\ \dfrac{2a_{\max}}{\pi}\omega t & \text{при} \quad -\pi/2\le\omega t\le \pi/2; \\ a_{\max} & \text{при} \quad \pi/2\le\omega t<\pi. \end{cases}$$

Из рисунка 4.11 следует, что функция симметрична относительно начала координат. Поэтому в разложении не будет постоянной и косинусоидальных составляющих, т. е. $A_0 = 0$ и $C_{km} = 0$. Найдем коэффициенты B_{km} ряда, применив формулу (4.13),

$$B_{km}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\omega t)\sin k\omega t\, d(\omega t)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{2a_{\max}}{\pi}\omega t\sin k\omega t\, d(\omega t)+\int_{\pi/2}^{\pi}a_{\max}\sin k\omega t\, d(\omega t)\right]=$$

$$=-\frac{4a_{\max}}{k\pi^2}\int_0^{\pi/2}\omega t d\cos\omega t\Big|_0^{\pi/2}+\frac{2a_{\max}}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin k\omega t d(\omega t)=$$

$$=-\frac{4a_{\max}}{k\pi^2}\left[\omega t\cos k\omega t\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\cos k\omega t d(\omega t)\right]-\frac{2a_{\max}}{k\pi}\cos k\omega t\Big|_{\pi/2}^{\pi}=$$

$$=-\frac{4a_{\max}}{k\pi^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cos k\frac{\pi}{2}+\frac{4a_{\max}}{k^2\pi^2}\sin k\omega t\Big|_0^{\pi/2}-\frac{2a_{\max}}{k\pi}\cos k\pi+\frac{2a_{\max}}{k\pi}\cos k\frac{\pi}{2}=$$

$$=\frac{4a_{\max}}{k^2\pi^2}\sin k\frac{\pi}{2}-\frac{2a_{\max}}{k\pi}\cos k\pi.$$

Найдем значения коэффициентов B_{km} для пяти гармоник:

$$B_{1m}=\frac{2a_{\max}}{\pi}\left(1+\frac{2}{\pi}\right);\qquad B_{2m}=-\frac{2a_{\max}}{2\pi};$$

$$B_{3m}=\frac{2a_{\max}}{3\pi}\left(1-\frac{2}{3\pi}\right);\quad B_{4m}=-\frac{2a_{\max}}{4\pi};\quad B_{5m}=\frac{2a_{\max}}{5\pi}\left(1-\frac{2}{5\pi}\right).$$

Искомый тригонометрический ряд имеет вид

$$u(t)=\frac{2a_{\max}}{\pi}\left[\left(1+\frac{2}{\pi}\right)\sin\omega t-\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3\pi}\right)\sin 3\omega t-\frac{1}{4}\sin 4\omega t+\cdots\right].$$

Пример 4.2 Источник генерирует периодическое несинусоидальное напряжение $u(\omega t)$, форма которого представлена на рисунке 4.12.

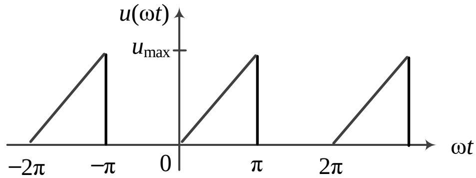

Рисунок 4.12

Требуется:

1 Представить напряжение $u(\omega t)$ в виде суммы первых пяти членов ряда Фурье, если u_{max} = 20 В.

2 Построить графики спектров амплитуд и начальных фаз напряжения $u(\omega t)$.

3 Рассчитать действующее значение напряжения источника.

Решение.

Уравнение функции напряжения имеет следующий вид:

$$u(\omega t)=\frac{u_{\max}}{\pi}\omega t \quad \text{при} \quad 0\le\omega t<\pi.$$

Найдем коэффициенты ряда Фурье:

$$A_0=U_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}u(\omega t)d(\omega t)=\frac{u_{\max}}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\omega t d(\omega t)=\frac{u_{\max}}{2\pi^2}\cdot\frac{(\omega t)^2}{2}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{u_{\max}}{4}=5\,\text{В};$$

$$B_{km}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}u(\omega t)\sin k\omega t d(\omega t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{u_{\max}}{\pi}\omega t\sin k\omega t d(\omega t)=$$

$$=-\frac{u_{\max}}{k\pi^2}\int_0^{\pi}\omega t d\cos k\omega t=-\frac{u_{\max}}{k\pi^2}\left[\omega t\cos k\omega t\Bigg|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos k\omega t d(\omega t)\right]=$$

$$= -\frac{u_{\max}}{k\pi^2}\left(\pi\cos k\pi - \frac{1}{k}\sin k\omega t\Big|_0^{\pi}\right) = -\frac{u_{\max}}{k\pi}\cos k\pi;$$

$$B_{1m} = \frac{u_{\max}}{\pi}; \quad B_{2m} = \frac{u_{\max}}{2\pi}; \quad B_{3m} = \frac{u_{\max}}{3\pi}; \; B_{4m} = \frac{u_{\max}}{4\pi}.$$

$$\mathrm{C}_{km} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u(\omega t)\cos k\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{u_{\max}}{\pi}\omega t\cos k\omega t d(\omega t) =$$

$$= \frac{u_{\max}}{k\pi^2}\int_0^{\pi}\omega t d\sin k\omega t = \frac{u_{\max}}{k\pi^2}\left[\omega t\sin k\omega t\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin k\omega t d(\omega t)\right] =$$

$$= \frac{u_{\max}}{k^2\pi^2}\cos k\omega t\Big|_0^{\pi} = \frac{u_{\max}}{k^2\pi^2}(\cos k\pi - 1);$$

$$C_{1m} = -\frac{2u_{\max}}{\pi^2}; \quad C_{2m} = 0; \quad C_{3m} = -\frac{2u_{\max}}{9\pi^2}; \quad C_{4m} = 0;$$

$$\underline{A}_{1m} = U_{1m} = B_{1m} + jC_{1m} = \frac{u_{\max}}{\pi} - j\frac{2u_{\max}}{\pi^2} = \frac{u_{\max}}{\pi}\left(1 - j\frac{2}{\pi}\right);$$

$$\underline{A}_{2m} = \underline{U}_{2m} = B_{2m} + jC_{2m} = -\frac{u_{\max}}{2\pi};$$

$$\underline{A}_{3m} = \underline{U}_{3m} = B_{3m} + jC_{3m} = \frac{u_{\max}}{3\pi} - j\frac{2u_{\max}}{9\pi^2} = \frac{u_{\max}}{3\pi}\left(1 - j\frac{2}{3\pi}\right);$$

$$\underline{A}_{4m} = U_{4m} = B_{4m} + jC_{4m} = -\frac{u_{\max}}{4\pi}.$$

Найдем численные значения комплексных амплитуд гармоник

$\underline{U}_{1m} = 7{,}54e^{-j32{,}5^\circ}$; $\underline{U}_{2m} = 3{,}18e^{j180^\circ}$; $\underline{U}_{3m} = 2{,}17e^{-j12^\circ}$; $\underline{U}_{4m} = 1{,}59e^{j180^\circ}$.

Напряжение источника представлено следующим рядом Фурье:

$$u(t) = U_0 + U_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m}\sin(\omega t + \psi_2) + U_{3m}\sin(\omega t + \psi_3) +$$

$$+ U_{4m}\sin(\omega t + \psi_4) = 5 + 7{,}54\sin(\omega t - 32{,}5^\circ) + 3{,}18\sin(2\omega t - 180^\circ) +$$

$$+ 2{,}17\sin(3\omega t - 12^\circ) + 1{,}59\sin(4\omega t - 180^\circ)\ \text{В}.$$

На рисунке 4.13 представлены графики спектров амплитуд (*а*) и начальных фаз (*б*) напряжения $u(t)$.

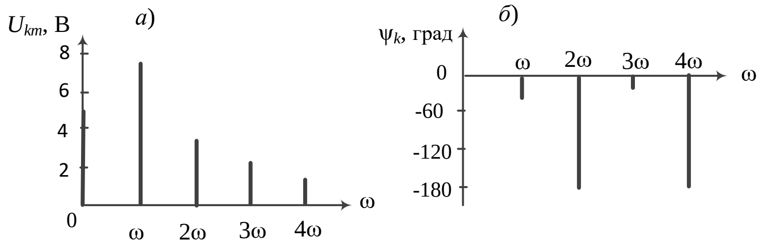

Рисунок 4.13

Действующее значение напряжения источника

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + U_{3m}^2 + U_{4m}^2}{2}} = 7{,}88 \text{ В}.$$

4.6 Расчет разветвленных цепей с периодическими несинусоидальными источниками

Пусть на рисунке 4.14 к линейному пассивному двухполюснику, внутренняя структура представляет собой разветвленную схему, состоящую из элементов *r*, *L* и *C*, подключен источник периодического несинусоидального напряжения, заданного некоторым графиком или аналитической зависимостью $u(t)$. Требуется рассчитать цепь, т. е. найти токи всех ветвей схемы. В основе расчета цепи с периодическим несинусоидальным источником лежит принцип наложения, который заключается в определении реакции цепи на воздействие каждой гармонической составляющей приложенного напряжения.

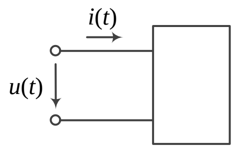

Рисунок 4.14

Алгоритм решения задач подобного рода может быть следующим:

1 Разложить заданное напряжение $u(t)$ источника в тригонометрический ряд Фурье, ограничив его некоторым числом гармоник,

$$u(t) = U_0 + U_{1m}\sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m}\sin(2\omega t + \psi_2) + U_{3m}\sin(3\omega t + \psi_3).$$

2 Применить принцип наложения и произвести расчет токов цепи для каждой составляющей в отдельности.

3 Рассмотреть результирующую реакцию исследуемой цепи путем сложения реакций для отдельных гармонических составляющих.

Сначала рассчитывают токи, возникающие в цепи от действия постоянной составляющей U_0 напряжения (нулевой гармоники), затем токи от действия первой гармоники, а далее от действий высших гармоник.

Расчет токов от действия нулевой гармоники напряжения выполняют, пользуясь методами расчета цепей постоянного тока. При этом следует иметь в виду, что катушка в расчетной схеме представляет собой короткозамкнутый участок, а конденсатор − разрыв участка цепи.

При расчете токов первой (основной) и высших гармоник целесообразно воспользоваться символическим методом анализа цепей с синусоидальными источниками и токами.

Мгновенное значение тока в любой ветви схемы равно сумме мгновенных значений токов отдельных гармоник. Полученные таким образом токи будут представлять периодические несинусоидальные функции времени, причем их период будет равен периоду напряжения источника.

Следует отметить, что *суммировать комплексы напряжений или токов отдельных гармоник нельзя. Можно суммировать только мгновенные значения величин, выраженные как функции времени.*

При выполнении расчетов необходимо учитывать, что индуктивное сопротивление увеличивается с ростом частоты

$$x_L^{(k)} = k\omega L,$$

где верхний индекс k соответствует номеру гармоники.

Емкостное сопротивление, наоборот, уменьшается с ростом частоты

$$x_C^{(k)} = 1/k\omega C.$$

Резистивные сопротивления при относительно невысоких частотах, когда можно пренебрегать поверхностным эффектом, будем полагать независящими от частоты.

Электрическая цепь может иметь в своем составе несколько гармонических источников с кратными частотами. В этом случае токи в ветвях цепи будут периодическими и несинусоидальными. Алгоритм расчета в этом случае несколько изменяется. Исключается первый пункт разложения приложенного напряжения в ряд Фурье. Рассматривается воздействие на схему источников напряжения или тока одинаковой частоты с учетом изменения структуры цепи и параметров входящих в нее элементов.

Пример 4.3 Источник синусоидального напряжения $u = U_m \sin \omega t$ подключен к нагрузке с сопротивлением r через диод с идеальной вольт-амперной характеристикой (рисунок 4.15). Дано: U_m = 20 В и r = 10 Ом.

Требуется:

1 Построить кривую тока цепи.

2 Представить кривую тока в виде ряда Фурье, ограничившись постоянной составляющей и четырьмя первыми гармониками.

3 Найти действующее значение тока.

4 Определить активную мощность, выделяемую на нагрузке, а также значения мощностей от действия отдельных гармонических составляющих.

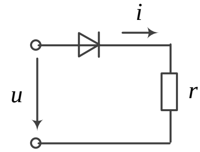

Рисунок 4.15

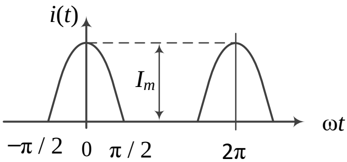

Рисунок 4.16

Решение.

В цепи с однополупериодным выпрямителем кривая тока представляет последовательность положительных импульсов синусоидальной формы и приведена на рисунке 4.16. Для выбранной на рисунке системы координат ток изменяется в диапазоне изменения ωt от $-\pi / 2$ до $-\pi / 2$ по закону

$$i(t) = I_m \cos \omega t,$$

где $I_m = \dfrac{U_m}{r} = 2$ А.

Функция $i(t)$ имеет симметрию относительно оси ординат, следовательно, при разложении в ряд Фурье будет иметь постоянную и косинусоидальные составляющие.

Найдем постоянную составляющую тока

$$I_0 = A_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi/2} i(t)d(\omega t) = \frac{I_m}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos \omega t d(\omega t) = \frac{I_m}{\pi}\sin \omega t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{I_m}{\pi} = 0{,}64 \text{ А}.$$

Рассчитаем амплитуды первой и высших гармоник тока по формуле

$$I_{km} = A_{km} = C_{km} = \frac{2I_m}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos \omega t \cos k\omega t d(\omega t).$$

Заменим подынтегральное выражение следующим соотношением:

$$\cos \omega t \cos k\omega t = \frac{1}{2}\left[\cos(1+k)\omega t + \cos(1-k)\omega t\right]$$

и подставим формулу для интегрирования

$$I_{km}=\frac{2I_m}{2\pi}\left[\int\limits_0^{\pi/2}\cos(1+k)\omega t d(\omega t)+\int\limits_0^{\pi/2}\cos(1-k)\omega t d(\omega t)\right]=$$

$$=\frac{I_m}{\pi}\left[\frac{1}{1+k}\sin(1+k)\omega t\Big|_0^{\pi/2}+\frac{1}{1-k}\sin(1-k)\omega t\Big|_0^{\pi/2}\right]=$$

$$=\frac{I_m}{\pi}\left[\frac{1}{1+k}\sin(1+k)\frac{\pi}{2}+\frac{1}{1-k}\sin(1-k)\frac{\pi}{2}\right]=\frac{I_m}{\pi(1-k^2)}\cos k\frac{\pi}{2}.$$

При нахождении амплитуды тока первой гармоники (k = 1) получим неопределенность типа 0/0, которую раскроем по правилу Лопиталя

$$I_{1m}=\frac{2I_m}{\pi}\lim_{k\to 1}\frac{\frac{d}{dk}(\cos k\pi/2)}{\frac{d}{dk}(1-k^2)}=\frac{2I_m}{\pi}\lim_{k\to 1}\frac{-\frac{\pi}{2}\sin k\frac{\pi}{2}}{-2k}=\frac{I_m}{2}=1\text{ А};$$

Амплитуды высших гармоник тока

$$I_{2m}=\frac{2I_m}{\pi(-3)}\cos\pi=\frac{2I_m}{3\pi}=0{,}42\text{ А};\quad I_{3m}=0;$$

$$I_{4m}=\frac{2I_m}{\pi(-15)}\cos 2\pi=-\frac{2I_m}{15\pi}=0{,}085\text{ А};\quad I_{5m}=0;$$

$$I_{6m}=\frac{2I_m}{\pi(-35)}\cos 3\pi=-\frac{2I_m}{35\pi}=0{,}036\text{ А}.$$

Таким образом, мгновенное значение тока на нагрузке

$$i(t)=I_0+I_{1m}\cos\omega t+I_{2m}\cos 2\omega t+I_{4m}\cos 4\omega t+I_{6m}\cos 6\omega t=$$

$$=0{,}64+1\cos\omega t+0{,}42\cos 2\omega t+0{,}085\cos 4\omega t+0{,}036\cos 6\omega t\text{ А}.$$

Найдем действующее значение тока в цепи

$$I=\sqrt{I_0^2+\frac{I_{1m}^2+I_{2m}^2+I_{4m}^2+I_{6m}^2}{2}}=\sqrt{0{,}64^2+\frac{1^2+0{,}42^2+0{,}085^2+0{,}036^2}{2}}=1\text{ А}.$$

Действующее значение тока, заданного функцией $i(t) = I_m \cos \omega t$ в диапазоне изменения аргумента от $-\pi / 2$ до $\pi / 2$ можно определить как среднеквадратичное за период по формуле:

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} i^2 d(\omega t)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} I_m^2 \cos^2 \omega t d(\omega t)} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 2\omega t) d(\omega t)} =$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} d(\omega t) + \frac{I_m^2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \cos 2\omega t d(\omega t)} =$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{4\pi} \omega t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{I_m^2}{8\pi} \sin 2\omega t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}} = \frac{I_m}{2} = 1 \text{ А}.$$

Активную мощность, выделяющуюся на сопротивлении r нагрузки, определим как среднее значение мощности за период при протекании по нагрузке тока $i(t)$

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} i^2 r d(\omega t) = \frac{I_m^2 r}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \omega t d(\omega t) =$$

$$= \frac{I_m^2 r}{2\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} d(\omega t) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \cos 2\omega t d(\omega t) \right] = \frac{I_m^2 r}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \omega t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{I_m^2 r}{4\pi} \pi = 10 \text{ Вт}.$$

Определим значения активной мощности, обусловленные действием постоянной и гармоническими составляющими тока:

$$P_0 = I_0^2 r = 0{,}64^2 \cdot 10 = 4{,}096 \text{ Вт};$$

$$P_1 = \left(\frac{I_{1m}}{\sqrt{2}} \right)^2 r = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ Вт};$$

$$P_2 = \left(\frac{I_{2m}}{\sqrt{2}} \right)^2 r = \frac{0{,}42^2}{2} \cdot 10 = 0{,}882 \text{ Вт};$$

$$P_4=\left(\frac{I_{4m}}{\sqrt{2}}\right)^2 r=\frac{0{,}085^2}{2}\cdot 10=0{,}036\,\text{Вт};$$

$$P_6=\left(\frac{I_{6m}}{\sqrt{2}}\right)^2 r=\frac{0{,}036^2}{2}\cdot 10=0{,}0065\,\text{Вт}.$$

Активную мощность периодического несинусоидального тока найдем в виде суммы мощностей от действия всех рассматриваемых гармоник

$$P=P_0+P_1+P_2+P_4+P_6=10{,}02\,\text{Вт}.$$

Из последнего соотношения следует, что значение мощности практически полностью определяется действием постоянной составляющей, а также первой и второй гармониками тока. Вклад остальных высших гармоник ничтожен и составляет всего 0,42 % от суммарной мощности, потребляемой нагрузкой.

Пример 4.4 К цепи, схема которой дана на рисунке 4.17, приложено периодическое несинусоидальное напряжение $u(t)=U_0+u_1+u_2=40+$ $+\,80\cos(\omega t-30^\circ)-30\sin(2\omega t-60^\circ)$ В. Параметры элементов цепи: $r_1=16$ Ом, $r_2=20$ Ом, $r_3=24$ Ом, $L_1=18$ мГн, $L_3=30$ мГн, $C_2=40$ мкФ. Угловая частота напряжения (основной гармоники) $\omega=1000$ с$^{-1}$.

Требуется:

1 Найти действующие значения напряжения источника и токов ветвей.

2 Записать выражение для мгновенных значений входного тока цепи.

3 Найти активную, реактивную и полную мощности, расходуемые в цепи.

Решение. В соответствии с принципом наложения рассмотрим реакцию цепи на воздействие каждой гармоники напряжения. Исходную схему представим в виде суммы трех частичных схем, в каждой из которых действует только одна из гармоник напряжения $u(t)$. Расчет схемы нулевой гармоники выполняют, пользуясь методами анализа цепей постоянного тока. При расчете схем основной и высших гармоник используют метод комплексных амплитуд. При обозначении токов и сопротивлений ветвей будем использовать два индекса: нижний, который соответствует порядковому номеру ветви, и верхний, который соответствует номеру гармоники.

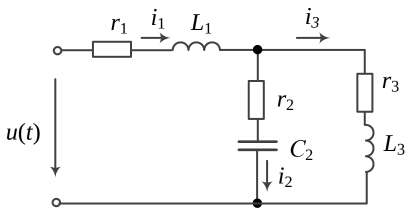

Рисунок 4.17

Расчет токов нулевой гармоники выполним для схемы замещения, приведенной на рисунке 4.18. Схема содержит источник постоянного напряжения $U_0=40$ В и активные сопротивления.

Индуктивные элементы заменены перемычками, а емкостный элемент – разрывом участка цепи. Токи ветвей находим по закону Ома

$$I_1^{(0)} = I_3^{(0)} = \frac{U_0}{r_1 + r_3} = 1\,\text{А}; \qquad I_2^{(0)} = 0.$$

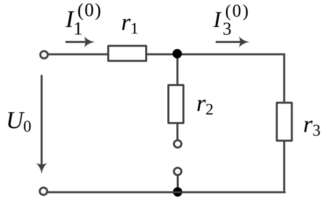

Рисунок 4.18

Мощность, обусловленная токами нулевой гармоники,

$$P_0 = (I_1^{(0)})^2 r_1 + (I_3^{(0)})^2 r_3 = 40\ \text{Вт}.$$

Для расчета токов ветвей первой гармоники воспользуемся комплексной схемой замещения, приведенной на рисунке 4.19. На этой схеме все последовательно соединенные элементы заменены комплексными сопротивлениями

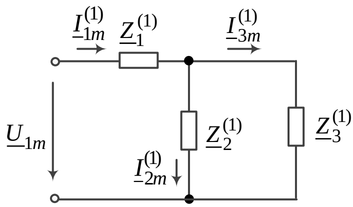

Рисунок 4.19

$$\underline{Z}_1^{(1)} = r_1 + j\omega L_1 = 16 + j18\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_2^{(1)} = r_2 - j\frac{1}{\omega C_2} = 20 - j25\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_3^{(1)} = r_3 + j\omega L_3 = 24 + j30\ \text{Ом}.$$

К схеме приложена первая гармоника напряжения

$$u_1 = 80\cos(\omega t - 30^\circ) = 80\sin(\omega t + 60^\circ)\ \text{В},$$

представленная комплексной амплитудой

$$\underline{U}_{1m} = 80e^{j60^\circ} = 40 + j69{,}28\ \text{В}.$$

Определяем эквивалентное комплексное сопротивление схемы для первой гармоники напряжения

$$\underline{Z}_{\text{эк}}^{(1)} = \underline{Z}_1^{(1)} + \frac{\underline{Z}_2^{(1)}\underline{Z}_3^{(1)}}{\underline{Z}_2^{(1)} + \underline{Z}_3^{(1)}} = 43{,}598 + j14{,}864\ \text{Ом}.$$

Находим по закону Ома комплексную амплитуду входного тока

$$\underline{I}_{1m}^{(1)} = \frac{\underline{U}_{1m}}{\underline{Z}_{\text{эк}}^{(1)}} = 1{,}307 + j1{,}143 = 1{,}737e^{j41{,}2^\circ}\ \text{А}.$$

На основании полученного значения запишем следующее выражение для мгновенного значения входного тока:

$$i_1^{(1)} = \mathrm{Im}\left[\underline{I}_{1m}^{(1)} e^{j\omega t}\right] = 1{,}737\,\sin(\omega t + 41{,}2^\circ)\ \text{А}.$$

Определяем комплексные амплитуды токов в параллельных ветвях

$$\underline{I}_{2m}^{(1)} = \underline{I}_{1m}^{(1)} \frac{\underline{Z}_3^{(1)}}{\underline{Z}_2^{(1)} + \underline{Z}_3^{(1)}} = 0{,}104 + j1{,}503 = 1{,}507\, e^{j86^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{3m}^{(1)} = \underline{I}_{1m}^{(1)} - \underline{I}_{2m}^{(1)} = 1{,}203 - j0{,}36 = 1{,}256\, e^{-j16{,}7^\circ}\ \text{А}.$$

Активная мощность первой гармоники, потребляемая цепью,

$$P_1 = \mathrm{Re}\left[\frac{\underline{U}_{1m}\overset{*}{\underline{I}}{}_{1m}^{(1)}}{2}\right] = 65{,}752\ \text{Вт}.$$

Реактивная мощность первой гармоники

$$Q_1 = \mathrm{Im}\left[\frac{\underline{U}_{1m}\overset{*}{\underline{I}}{}_{1m}^{(1)}}{2}\right] = 22{,}417\ \text{вар}.$$

Аналогичным образом рассчитаем токи ветвей схемы для второй гармоники напряжения $u_2 = -30\sin(2\omega t - 60^\circ) = 30\sin(2\omega t + 120^\circ)$ В.

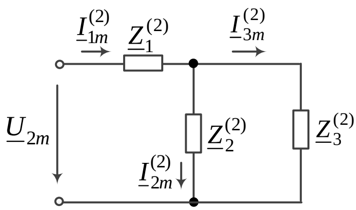

Рисунок 4.20

С этой целью будем использовать комплексную схему на рисунке 4.20, к которой приложена комплексная амплитуда напряжения

$$\underline{U}_{2m} = 30e^{j120^\circ} = -15 + j25{,}98\ \text{В}.$$

Комплексные сопротивления ветвей схемы для второй гармоники:

$$\underline{Z}_1^{(2)} = r_1 + j2\omega L_1 = 16 + j36\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_2^{(2)} = r_2 - j\frac{1}{2\omega C_2} = 20 - j12{,}5\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_3^{(2)} = r_3 + j\omega L_3 = 24 + j60\ \text{Ом}.$$

Определив эквивалентное сопротивление схемы

$$\underline{Z}_{\text{эк}}^{(2)} = \underline{Z}_1^{(2)} + \frac{\underline{Z}_2^{(2)}\underline{Z}_3^{(2)}}{\underline{Z}_2^{(2)} + \underline{Z}_3^{(2)}} = 39{,}107 + j31{,}51 \text{ Ом},$$

найдем комплексные амплитуды токов ветвей:

$$\underline{I}_{1m}^{(2)} = \frac{\underline{U}_{2m}}{\underline{Z}_{\text{эк}}^{(2)}} = 0{,}17 - j0{,}137 = 0{,}219\, e^{-j38{,}9^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{2m}^{(2)} = \underline{I}_{1m}^{(2)} \frac{\underline{Z}_3^{(2)}}{\underline{Z}_2^{(2)} + \underline{Z}_3^{(2)}} = 0{,}208 - j0{,}067 = 0{,}218\ e^{-j17{,}9^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{3m}^{(2)} = \underline{I}_{1m}^{(2)} - \underline{I}_{2m}^{(2)} = -0{,}037 - j0{,}07 = 0{,}08\, e^{-j118{,}1^\circ} \text{ А}.$$

Мгновенный входной ток второй гармоники

$$i_1^{(2)} = \mathrm{Im}\left[\underline{I}_{1m}^{(2)} e^{j2\omega t}\right] = 0{,}219 \sin(2\omega t - 38{,}9^\circ) \text{ А}.$$

Вычисляем активную и реактивную мощности для второй гармоники:

$$P_2 = \mathrm{Re}\left[\frac{\underline{U}_{2m}\overset{*}{\underline{I}}{}_{1m}^{(2)}}{2}\right] = 0{,}935 \text{ Вт};$$

$$Q_2 = \mathrm{Im}\left[\frac{\underline{U}_{2m}\overset{*}{\underline{I}}{}_{1m}^{(2)}}{2}\right] = 0{,}753 \text{ вар}.$$

Действующее значение напряжения источника

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{1m}^2 + U_{2m}^2}{2}} = \sqrt{40^2 + \frac{80^2 + 30^2}{2}} = 72{,}46 \text{ В}.$$

Действующие значения токов ветвей:

$$I_1 = \sqrt{(I_1^{(0)})^2 + \frac{(I_{1m}^{(1)})^2 + (I_{1m}^{(2)})^2}{2}} = \sqrt{1 + \frac{1{,}737^2 + 0{,}219^2}{2}} = 1{,}591 \text{ А};$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{(I_{2m}^{(1)})^2 + (I_{2m}^{(2)})^2}{2}} = \sqrt{\frac{1{,}507^2 + 0{,}218^2}{2}} = 1{,}077 \text{ А};$$

$$I_3=\sqrt{(I_3^{(0)})^2+\frac{(I_{3m}^{(1)})^2+(I_{3m}^{(2)})^2}{2}}=\sqrt{1+\frac{1{,}256^2+0{,}08^2}{2}}=1{,}339\ \text{А}.$$

Мгновенный входной ток

$$i(t)=I_1^{(0)}+i_1^{(1)}+i_1^{(2)}=1+1{,}737\sin(\omega t+41{,}2^\circ)+1{,}219\sin(2\omega t-38{,}9^\circ)\ \text{А}.$$

Активная мощность, расходуемая в цепи,

$$P=P_0+P_1+P_2=106{,}687\ \text{Вт}.$$

Реактивная мощность

$$Q=Q_1+Q_2=23{,}17\ \text{вар}.$$

Полная мощность

$$S=UI_1=72{,}46\cdot 1{,}591=115{,}28\ \text{В·А}.$$

4.7 Высшие гармоники в трехфазных цепях

Трехфазные генераторы по техническим и технологическим особенностям генерируют в фазных обмотках ЭДС, характер которых несколько отличаются от идеальных синусоид. По этой причине в ЭДС реальных генераторов неизбежно присутствуют высшие гармоники. Так как трехфазные генераторы имеют симметричное устройство, то в их фазных обмотках генерируются периодические ЭДС, имеющие симметрию относительно оси абсцисс. Следовательно, при разложении в ряд Фурье кривые этих ЭДС будут содержать только нечетные гармоники. Во всех фазах они по форме одинаковые и сдвинуты относительно друг друга по фазе на треть периода, т. е. при заданной ЭДС в фазе A $e_A(t)$ в фазах B и C будем иметь ЭДС $e_B(t-T/3)$ и $e_C(t+T/3)$ соответственно.

Исследуем гармоники порядка k во всех фазах генератора с учетом того, что $k\omega T=k\cdot 2\pi$.

Если $e_{Ak}(t)=E_{km}\sin(k\omega t+\psi_k)$, то $e_{Bk}(t)=E_{km}\sin\left(k\omega t+\psi_k-k\frac{2}{3}\pi\right)$, а

$$e_{Ck}(t)=E_{km}\sin\left(k\omega t+\psi_k+k\frac{2}{3}\pi\right).$$

Из приведенных выше формул следует, что все гармоники, порядок которых кратен трем (k = 3, 9, 15, 21, …) находятся в фазе друг с другом и образуют симметричные *системы нулевой последовательности.* Как нетрудно убедиться, гармоники, имеющие порядок k = 1, 7, 13, 19, … , образуют симметричные системы *прямой последовательности*. Гармоники, для которых k = 5, 11, 17, 23, …, образуют симметричные системы *обратной последовательности*. На рисунке 4.21 приведены симметричные системы векторов нулевой ($\underline{A}_0 - \underline{B}_0 - \underline{C}_0$), прямой ($\underline{A}_1 - \underline{B}_1 - \underline{C}_1$) и обратной ($\underline{A}_2 - \underline{C}_2 - \underline{B}_2$) последовательностей.

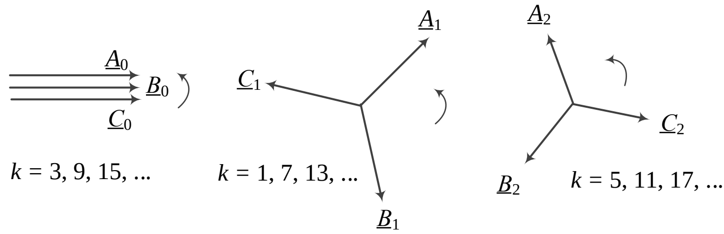

Рисунок 4.21

Рассмотрим влияние высших гармоник в составе фазных ЭДС на значения напряжений и токов для некоторых схем соединения трехфазных цепей.

Если обмотки генератора соединены звездой, то фазные напряжения на обмотках содержат все нечетные гармоники:

$$U_{\text{ф}} = E_{\text{ф}} = \sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + \ldots}\,.$$

Линейные напряжения, равные разности соответствующих фазных ЭДС, не содержат гармоник, кратных трем, так как они образуют нулевую последовательность и при вычитании их разность равна нулю:

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3}\sqrt{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 \ldots}\,.$$

Таким образом, отношение линейного напряжения к фазному

$$U_{\text{л}} / U_{\text{ф}} < \sqrt{3}.$$

При симметричной нагрузке, соединенной звездой, фазные токи основной составляющей и всех высших гармоник, за исключением гармоник, кратных трем, образуют системы прямой и обратной последовательностей, и их сумма равна нулю. Гармоники, порядка кратного трем, образуют систему нулевой последовательности и при наличии нейтрального провода создают в нем ток, равный утроенной сумме токов высших составляющих нулевой последовательности,

$$I_N = 3\sqrt{I_3^2 + I_9^2 + I_{15}^2 + \ldots}\,.$$

При отсутствии нейтрального провода токи нулевой последовательности в каждой из фаз равны нулю. Поэтому между нейтралями генератора и симметричной нагрузки возникает напряжение

$$U_N = \sqrt{E_3^2 + E_9^2 + E_{15}^2 + \ldots}\,.$$

При соединении фаз трехфазного генератора треугольником сумма ЭДС гармоник, образующих прямую и обратную последовательности, равна нулю. Гармоники порядка, кратного трем, равны друг другу и совпадают по фазе, поэтому их сумма равна утроенному значению высших гармоник порядка, кратного трем. Если разомкнуть обмотки и включить вольтметр между концами разрыва на рисунке 4.22, то показание вольтметра будет иметь следующее значение:

$$U_{\text{v}} = 3\sqrt{E_3^2 + E_9^2 + E_{15}^2 + \ldots}\,.$$

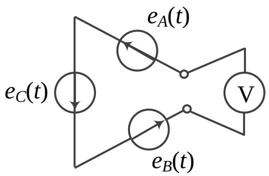

Рисунок 4.22

Открытый треугольник с ЭДС, содержащими высшие гармоники, кратные трем, применяется в качестве утроителя частоты.

При соединении фаз генератора в замкнутый треугольник ЭДС гармоник порядка, кратного трем, вызывают внутренний ток в обмотках генератора. Этот ток протекает в замкнутом треугольнике даже в том случае, когда генератор находится в режиме холостого хода. При этом гармоники ЭДС нулевой последовательности, вызывающие ток в треугольнике, будут равны падениям напряжений на внутренних сопротивлениях фаз генератора. Следовательно, напряжения на зажимах генератора (линейные напряжения) не будут иметь составляющих нулевой последовательности. Фазное напряжение, равное в данном случае линейному,

$$U_{\text{ф}} = U_{\text{л}} = \sqrt{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 + \ldots}\,.$$

Если к зажимам генератора, соединенного треугольником, подключить нагрузку, то вследствие отсутствия в напряжениях гармоник нулевой последовательности токи во внешней цепи не будут иметь гармоник, кратных трем. Поэтому фазный ток генератора при симметричной нагрузке

$$I_{\text{ф}} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + \ldots}\,,$$

а линейный ток

$$I_{л} = \sqrt{3}\sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2 + \ldots}\,.$$

Таким образом, отношение линейного тока треугольника к его фазному току меньше $\sqrt{3}$, т. е. $I_{л} / I_{ф} < \sqrt{3}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Бессонов, Л. А.** Теоретические основы электротехники : учеб. : в 2 т. Т. 1. Электрические цепи / Л. А. Бессонов. – М. : Юрайт, 2021. – 725 с.

2 Основы теории цепей : учеб. для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – М. : Энергия, 1989. – 528 с.

3 **Нейман, Л. Р.** Теоретические основы электротехники : в 2 т. Т. 1 / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. – Л. : Энергоиздат, 1981. – 536 с.

4 **Батура, М. П.** Теория электрических цепей / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулев. – Минск : Выш. шк., 2007. – 606 с.

5 **Атабеков, Г. И.** Основы теории цепей : учеб. для вузов / Г. И. Атабеков. – 3-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2009. – 424 с.

6 **Шебес, М. Р.** Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособие для вузов / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – М. : Высш. шк., 1990. – 488 с.

7 **Новгородцев, А. Б.** Теоретические основы электротехники. 30 лекций по теории электрических цепей : учеб. пособие / А. Б. Новгородцев. – 2-е изд. – СПб. : Питер, 2006. – 576 с.

8 **Волков, Н. П.** Теоретические основы электротехники. Линейные цепи : пособие в 2 ч. Ч. I, /Н. П. Волков. Гомель. БелГУТ, 2024. − 114 с.

9 **Фурсов В. Б.** Теоретические основы электротехники. Теория цепей. Теория поля. Компьютерное моделирование. Задачи : учебн. для вузов / В. Б. Фурсов. – СПб : Лань, 2024. – 436 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ВОЛКОВ Николай Петрович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ
ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

Пособие

ЧАСТЬ II

Редактор *Д. В. Марцинкевич*
Технический редактор *В. Н. Кучерова*

Подписано в печать 21.03.2025 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 6,04. Уч.-изд. л. 4,56. Тираж 100 экз.
Зак. № 579. Изд. № 17

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
№ 3/1583 от 14.11.2017.

Ул. Кирова, 34, 246653 г. Гомель