**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ**
**«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»**

**Кафедра «Прикладная математика»**

**Т. В. ПРИЩЕПОВА**

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**Учебно-методическое пособие для студентов экономических специальностей факультета безотрывного обучения**

**Гомель 2008**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Прикладная математика»

Т. В. ПРИЩЕПОВА

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие для студентов экономических специальностей факультета безотрывного обучения

*Одобрено методической комиссией факультета безотрывного обучения*

Гомель 2008

УДК 519.21
ББК 22.171
П77

Р е ц е н з е н т – доцент кафедры математического анализа
О. В. Якубович (УО «ГГУ им. Ф. Скорины»).

**Прищепова, Т. В.**

П77 Основы теории вероятностей : учеб.-метод. пособие для студентов экономических специальностей факультета безотрывного обучения / Т. В. Прищепова; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2008. – 140 с.
ISBN 978-985-468-375-1

Содержит основные разделы теории вероятностей, предусмотренные учебной программой по специальностям РД РБ 1-250108, РД РБ 1-250110 по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика». Приведены задания для расчётно-графических работ. Содержит достаточное количество справочного материала и задания для самостоятельной индивидуальной работы и примеры ее выполнения.

Предназначено для студентов экономических специальностей факультета безотрывного обучения. Может быть использовано при выполнении курсовых и дипломных проектов студентами, аспирантами и научными работниками, занимающимися вероятностными методами.

**УДК 519.21**
**ББК 22.171**

**ISBN 978-985-468-375-1**



## ВВЕДЕНИЕ

Наблюдаемые нами события (явления) можно подразделить на следующие три вида: достоверные, невозможные и случайные.

*Достоверным* называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий $S$. Например, если в сосуде содержится вода при нормальном атмосферном давлении и температуре минус 20 °С, то событие «вода в сосуде находится в твердом состоянии» есть достоверное. В этом примере заданные атмосферное давление и температура воды составляют совокупность условий $S$.

*Невозможным* называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий $S$. Например, событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии» заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий предыдущего примера.

*Случайным* называют событие, которое при осуществлении совокупности условий $S$ может либо произойти, либо не произойти. Например, если брошена монета, то она может упасть так, что сверху будет либо «герб», либо «решка». Поэтому событие «при бросании монеты выпал «герб» – случайное. Каждое случайное событие, в частности выпадение «герба», есть следствие действия очень многих случайных причин (в нашем примере: сила, с которой брошена монета; форма монеты и другие). Невозможно учесть влияние на результат всех этих причин, поскольку число их очень велико и законы их действия неизвестны. Поэтому теория вероятностей не ставит перед собой задачу предсказать, произойдет единичное событие или нет, – она просто не в силах это сделать.

По-иному обстоит дело, если рассматриваются случайные события, которые могут многократно наблюдаться при осуществлении одних и тех же условий $S$, т. е. если речь идет о массовых однородных случайных событиях. Оказывается, что достаточно большое число однородных случайных событий, независимо от их конкретной природы, подчиняется определенным закономерностям, а именно вероятностным закономерностям. Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Итак, *предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.*

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надежности, теории массового обслуживания, теоретической физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории автоматического управления, общей теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках. Теория вероятностей служит также для обоснования математической и прикладной статистики, которая в свою очередь используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, предупредительном и приемочном контроле качества продукции и для многих других целей.

В последние годы методы теории вероятностей все шире и шире проникают в различные области науки и техники, способствуя их прогрессу.



# 1 СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

## 1.1 Пространство элементарных событий. Операции над событиями

### *1.1.1 Пространство элементарных событий*

**Вероятностными экспериментами** (в дальнейшем будем обозначать символом «E») называются испытания, которые могут быть многократно воспроизведены при соблюдении одних и тех же фиксированных условий, результат которых не удается заранее однозначно предсказать. Приведем несколько примеров случайных экспериментов:

E: подбрасывание двух монет;

E: подбрасывание игральной кости;

E: подсчет числа покупателей в магазине в течение рабочего дня;

E: изучение отклонения заработной платы работников от среднего значения заработной платы на предприятии и т. д.

*Случайными* называются явления, исход которых при одинаковом комплексе условий заранее нельзя предсказать.

Однако при многократном воспроизведении указанных экспериментов можно заметить некоторые закономерности. Изучение таких закономерностей, возникающих при взаимодействии большого числа случайных факторов, и разработка математических моделей случайных экспериментов являются предметом **теории вероятностей**.

*Опытом*, или *экспериментом*, называют всякое осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых происходит соответствующее случайное явление. Возможный результат опыта называют *событием*.

Для каждого случайного эксперимента можно указать множество, в котором представлена информация о всех возможных взаимоисключающих исходах этого эксперимента. Это множество называется *пространством элементарных исходов* (или *событий*). Обозначается буквой $\Omega$ (омега).

Элементарным исходом (событием) $\omega$ называется любой мысленно возможный неразложимый результат вероятностного эксперимента E.

Пространство элементарных исходов, состоящее из конечного или счетного числа элементов называется *дискретным*. Пространство элементарных исходов, состоящее из несчетного числа элементарных исходов называется *непрерывным*.

В общем случае пространство элементарных событий $\Omega$ может быть любой природы, как конечным, так и бесконечным, как дискретным, так и непрерывным.

**Пример 1** E: Подбрасывание одной монеты. $\Omega = \{Г, Р\}$.

**Пример 2** E: Подбрасывание двух монет. $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$.

**Пример 3** E: Подбрасывание игрального кубика. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

**Пример 4** E: Подбрасывание монеты до тех пор, пока на ней не выпадет герб. $\Omega = \{Г, РГ, РРГ, РРРГ, РРРРГ, РРРРРГ, \ldots\}$.

В эксперименте с подбрасыванием одной монеты (пример 1) элементарными исходами будут выпадение Г и Р. То есть $\omega_1$ = «Г», $\omega_2$ = «Р» – элементарные события. В эксперименте с подбрасыванием игрального кубика (пример 3) элементарными исходами будут выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6. То есть $\omega_1$ = «1», $\omega_2$ = «2», $\omega_3$ = «3», $\omega_4$ = «4», $\omega_5$ = «5», $\omega_6$ = «6» – элементарные события.

*Случайным* называется такое событие, которое является подмножеством пространства элементарных событий. Случайные события будем обозначать заглавными латинскими буквами ($A$, $B$, $C$, ...). Элементарные исходы, которые принадлежат множеству $A$ (то есть $\omega_i \in A$), называются *благоприятными* событию $A$.

Таким образом, любое событие, связанное с данным испытанием, можно описать в виде совокупности благоприятных ему элементарных событий.

В рассмотренном выше **примере 1**: $E$: Подбрасывание одной монеты. $\Omega = \{Г, Р\}$.

Событие $A$ = {выпадение герба}, $A = \{Г\}$; событие $B$ = {выпадение решки}, $B = \{Р\}$.

В рассмотренном выше **примере 2**: E: Подбрасывание двух монет. $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$.

Событие $A$ = {выпадение герба на двух монетах}, $A = \{ГГ\}$; событие $B$ = {выпадение решки на двух монетах}, $B = \{РР\}$, событие $C$ = {выпадение решки только на одной монете}, $C = \{ГР, РГ\}$, событие $D$ = {выпадение герба хотя бы на одной монете}, $D = \{ГГ, ГР, РГ\}$.

В рассмотренном выше **примере 3**: E: Подбрасывание игрального кубика. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Событие $A$ = {выпадение четного числа очков}, $A = \{2, 4, 6\}$; событие



$B$ = {выпадение нечетного числа очков}, $B = \{1, 3, 5\}$; событие $C$ = {выпадение числа очков меньше 6}, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; событие $D$ = {выпадение числа очков больше 2}, $D = \{3, 4, 5, 6\}$.

*Невозможным событием* называется событие, которое никогда не произойдет в данном случайном эксперименте, то есть совпадающее с пустым множеством $\varnothing$.

*Достоверным событием* называется событие, которому благоприятны все возможные элементарные исходы пространства элементарных исходов $\Omega$ и которое обязательно произойдет в результате вероятностного эксперимента E. В этом случае $A = \Omega$.

В рассмотренном выше **примере 3**: E: Подбрасывание игрального кубика. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Достоверное событие $E$ = {выпадение числа очков или четного, или нечетного}, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; невозможное событие $F$ = {выпадение числа очков больше 6}, $F = \{\varnothing\}$.

В рассмотренном выше **примере 4**: E: Подбрасывание монеты до тех пор, пока на ней не выпадет герб. $\Omega = \{Г, РГ, РРГ, РРРГ, РРРРГ, \ldots\}$.

Достоверное событие $A$ = {монету подбросят хотя бы один раз},

$A = \{Г, РГ, РРГ, РРРГ, РРРРГ, РРРРРГ, \ldots\} = \Omega$.

### *1.1.2 Операции над событиями*

Пусть имеется пространство элементарных событий произвольной природы. Будем рассматривать в качестве событий подмножества $A$, $B$, $C$, ... этого пространства.

**События *A* и *B*** называются **несовместными**, если они не могут произойти одновременно, то есть одновременное осуществление событий $A$ и $B$ есть событие невозможное.

**Несколько событий** называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других в этом испытании.

**События *A* и *B*** называются **совместными**, если они могут произойти одновременно.

**Несколько событий** называются **совместными**, если появление одного из них не исключает появление других в этом испытании.

В рассмотренном выше **примере 1**: $E$: Подбрасывание одной монеты. $\Omega = \{Г, Р\}$.

Событие $A = \{Г\}$ и событие $B = \{Р\}$ – несовместные.

В рассмотренном выше **примере 2**: $E$: Подбрасывание двух монет.

$\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$.

События $A = \{ГГ\}$, $B = \{РР\}$, $C = \{ГР, РГ\}$ – несовместные. События $A = \{ГГ\}$ и $D = \{ГГ, ГР, РГ\}$ – совместные. События $B = \{РР\}$ и $D = \{ГГ, ГР, РГ\}$ – несовместные. Событие $C = \{ГР, РГ\}$ и $D = \{ГГ, ГР, РГ\}$ – совместные.

В рассмотренном выше **примере 3**: *E*: Подбрасывание игрального кубика. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Событие $A = \{2, 4, 6\}$ и событие $B = \{1, 3, 5\}$ – несовместные. Событие $A = \{2, 4, 6\}$ и событие $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ – совместные.

**Несколько событий образуют полную группу, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.** В частности, если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится только одно из них (***будем использовать это далее***).

В рассмотренном выше **примере 1**: *E*: Подбрасывание одной монеты. $\Omega = \{Г, Р\}$.

Событие $A = \{Г\}$ и событие $B = \{Р\}$ – образуют полную группу событий.

В рассмотренном выше **примере 2**: *E*: Подбрасывание двух монет. $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$.

Событие $A = \{ГГ\}$ и событие $B = \{РР\}$, событие $C = \{ГР, РГ\}$ – образуют полную группу событий.

В рассмотренном выше **примере 3**: *E*: Подбрасывание игрального кубика. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Событие $A = \{2, 4, 6\}$ и событие $B = \{1, 3, 5\}$ – образуют полную группу событий.

**Суммой (объединением) событий *A* и *B*** (обозначается $\boldsymbol{A \cup B}$ или $\boldsymbol{A + B}$) называется третье событие, состоящее в осуществлении хотя бы одного из событий *A* или *B*, то есть, когда происходит или *A*, или *B*, или оба вместе. Благоприятными событию $A \cup B$ являются все исходы, благоприятные хотя бы одному из событий *A* или *B*.

Аналогично определяется **сумма любого числа событий** $A_1 \cup A_2 \cup \cup A_3 \cup \ldots$ Это событие состоит в осуществлении хотя бы одного из событий $A_1$, $A_2$, $A_3$,… Благоприятными этому событию являются все элементарные исходы, благоприятные хотя бы одному из событий $A_1$, $A_2$, $A_3$, …

**Произведением (пересечением) событий *A* и *B*** (обозначается $\boldsymbol{A \cap B}$ или ***AB***) называется третье событие, состоящее в одновременном осуществлении событий *A* и *B*. Событию $A \cap B$ благоприятны исходы, благоприятные и событию *A* и событию *B*, то есть исходы, которые одновременно принадлежат двум событиям *A* и *B*.



Согласно определению **произведение любого числа событий** $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap_{\ldots}$ состоит в одновременном осуществлении событий $A_1$, $A_2$, $A_3$, … Благоприятными этому событию являются исходы, благоприятные всем рассматриваемым событиям $A_1$, $A_2$, $A_3$, …

**Разностью событий *A* и *B*** (обозначается $\boldsymbol{A \setminus B}$, или $\boldsymbol{A - B}$) называется третье событие, состоящее в осуществлении события *A* без осуществления события *B*. Событие $A \setminus B$ состоит из всех элементарных исходов, благоприятных событию *A*, за исключением исходов, благоприятных событию *B*.

**Противоположным событию *A*** называется событие $\overline{A}$, состоящее в ненаступлении события *A*. Событию $\overline{A}$ благоприятны все возможные исходы пространства элементарных событий, кроме тех, которые благоприятны событию *A*. То есть $\overline{A} = \Omega \setminus A$, $\overline{A} + A = \Omega$.

**События *A* и *B*** называются **несовместными**, если они не могут произойти одновременно, то есть одновременное осуществление событий *A* и *B* есть событие невозможное ($A \cap B = \varnothing$).

В рассмотренном выше **примере 1**: Е: Подбрасывание одной монеты. $\Omega = \{Г, Р\}$.

Событие $A$ = {выпадение герба}, $A = \{Г\}$; событие $B$ = {выпадение решки}, $B = \{Р\}$.

$A \cup B$ состоит в выпадении либо герба, либо решки: $A \cup B = \{Г, Р\}$;

$A \cap B$ – невозможное событие : $A \cap B = \{\varnothing\}$;

$A \setminus B$ состоит в выпадении герба: $A \setminus B = \{Г\}$;

$\overline{A}$ состоит в выпадении решки: $\overline{A} = \{Р\}$;

$\overline{B}$ состоит в выпадении герба: $\overline{B} = \{Г\}$.

В рассмотренном выше **примере 2**: *E*: Подбрасывание двух монет. $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$.

Событие $A$ = {выпадение герба на двух монетах}, $A = \{ГГ\}$; событие $B$ = {выпадение решки на двух монетах}, $B = \{РР\}$, событие $C$ = {выпадение решки только на одной монете},$C = \{ГР, РГ\}$, событие $D$ = {выпадение герба хотя бы на одной монете}, $D = \{ГГ, ГР, РГ\}$.

$A \cup B = \{ГГ, РР\}$; $A \cap B = \{\varnothing\}$; $A \setminus B = \{ГГ\}$; $B \setminus A = \{РР\}$, $\overline{A} = \{ГР, РГ, РР\}$,

$\overline{B} = \{ГГ, ГР, РГ\}$, $A \cup D = \{ГГ, ГР, РГ\}$; $A \cap D = \{ГГ\}$; $A \setminus D = \{\varnothing\}$; $D \setminus A = \{ГР, РГ\}$, $\overline{D} = \{РР\}$.

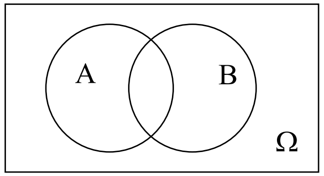
В рассмотренном выше **примере 3**: *E*: Подбрасывание игрального кубика. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Событие $A$ = {выпадение четного числа очков}, $A = \{2, 4, 6\}$; событие $B$ = {выпадение нечетного числа очков}, $B = \{1, 3, 5\}$, событие $C$ = {выпадение числа очков меньше 6}, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, событие $D$ = {выпадение числа очков больше 2}, $D = \{3, 4, 5, 6\}$.

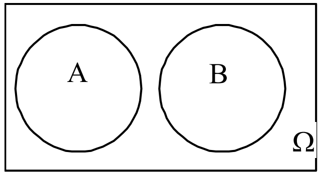
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A \cap B = \{\varnothing\}$; $A \setminus B = \{2, 4, 6\}$; $B \setminus A = \{1, 3, 5\}$, $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$, $\overline{B} = \{2, 4, 6\}$, $A \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$; $A \cap D = \{4, 6\}$; $A \setminus D = \{2\}$; $D \setminus A = \{3, 5\}$.

***Геометрическая интерпретация операций над событиями. Диаграммы Эйлера-Венна***

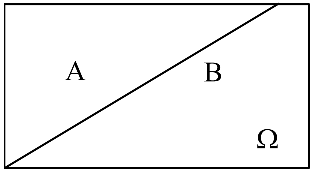
Производится испытание: в прямоугольнике, изображенном на рисунке 1, выбирается наугад точка. Пространством элементарных исходов $\Omega$ данного эксперимента является множество всех точек данного прямоугольника. (Это пространство элементарных исходов является непрерывным.) Рассмотрим события: $A$ = {выбранная точка попала в область $A$}; $B$ = {выбранная точка попала в область $B$}.



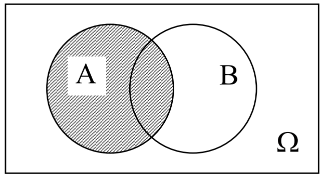
События $A$ и $B$ совместные, не образуют полную группу событий



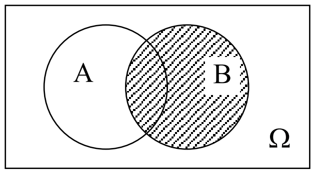
События $A$ и $B$ несовместные, не образуют полную группу событий



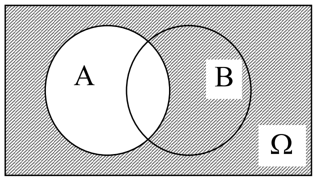
События $A$ и $B$ несовместные, образуют полную группу событий



$A$



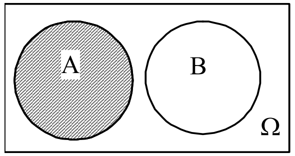
$B$



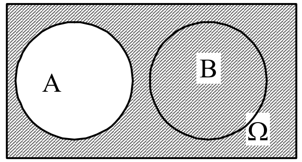
$\overline{A}$

Рисунок 1 (начало) – Диаграммы Эйлера-Венна для двух событий

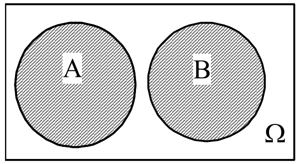




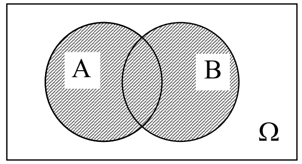
$A$



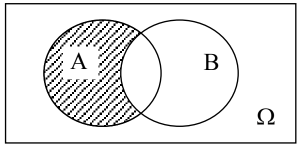
$\overline{A}$



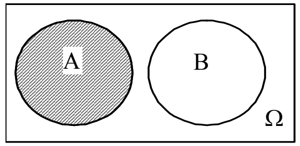
$A \cup B = A + B$



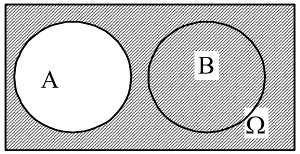
$A \cup B = A + B$



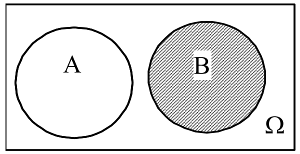
$A \setminus B = A - B$



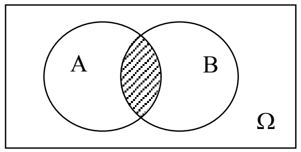
$A \setminus B = A - B$



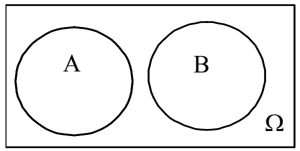
$\Omega \setminus A = \Omega - A$



$B \setminus A = A \setminus B$



$A \cap B = AB$



$A \cap B = AB = \varnothing$

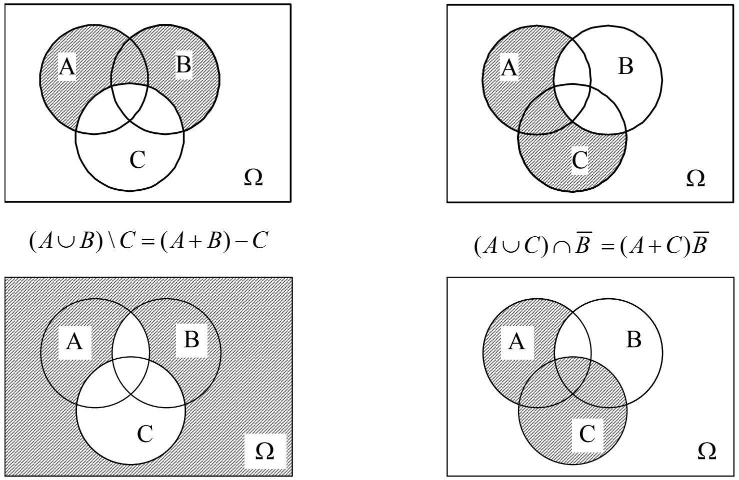
Рисунок 1 (окончание)

**Пример 5** Производится испытание: в прямоугольнике, изображенном на рисунке 1, выбирается наугад точка. Пространством элементарных исходов $\Omega$ данного эксперимента является множество всех точек данного прямоугольника. (Это пространство элементарных исходов является непрерывным.) Рассмотрим события: $A$ – {выбранная точка попала в область $A$}; $B$ –

{выбранная точка попала в область $B$}, $C$ – {выбранная точка попала в область $C$}.

Пусть рассматриваются три совместных события: $A$, $B$, $C$. На рисунке 2 изображены области, попадание в которые благоприятно событиям

$$(A\cup B)\setminus C,\ (A\cup C)\cap\overline{B},\ (\overline{A\cap B})\setminus C,\ (A\cap\overline{B})\cup C.$$




$(A\cup B)\setminus C=(A+B)-C$ $\quad$ $(A\cup C)\cap\overline{B}=(A+C)\overline{B}$

$(\overline{A\cap B})\setminus C=(\overline{AB})-C$ $\quad$ $(A\cap\overline{B})\cup C\ \ (A\overline{B})+C$

Рисунок 2 – Диаграммы Эйлера-Венна для трех событий

**Вопросы для самоконтроля**

1 Что называют опытом, или испытанием?
2 Что называют событием?
3 Какое событие называют достоверным?
4 Какое событие называют невозможным?
5 Какое событие называют случайным?
6 Какие события называют совместными?
7 Какие события называют несовместными?
8 Какие события называют противоположными?
9 Что называют полной группой событий?
10 Что называют элементарным исходом?
11 Какие элементарные исходы называют благоприятствующими данному событию?
12 Что представляет собой полная группа событий при подбрасывании трех монет?
13 Что представляет собой полная группа событий при подбрасывании двух игральных костей?



## 1.2 Вероятность

### *1.2.1 Относительная частота случайного события. Понятие вероятности случайного события. Аксиомы теории вероятностей*

Пусть вероятностный эксперимент $E$ воспроизведен при одинаковых условиях $n$ раз. При этом некоторое случайное событие $A$ произошло $m$ раз $(m\le n)$. Число $m$ называется *частотой* появления случайного события $A$, а отношение $W=\dfrac{m}{n}$ называется *относительной частотой* (или *частостью*) случайного события $A$.

Относительная частота события обладает следующими свойствами:

**1** Относительная частота случайного события есть число, заключенное между нулем и единицей: $0\le W(A)\le 1$.

**2** Относительная частота достоверного события равна единице: $W(\Omega)=1$.

**3** Относительная частота невозможного события равна нулю $W(\varnothing)=0$.

**4** Относительная частота суммы двух несовместных событий $A$ и $B$ равна сумме частот этих событий: $W(A+B)=W(A)+W(B)$.

**Пример 6** Среди 1000 новорожденных оказалось 515 мальчиков. Чему равна частота рождения мальчиков?

Решение. Поскольку в данном случае $n=1000$, $m=515$, то

$$W=\frac{m}{n}=\frac{515}{1000}=0{,}515.$$

Следует отметить, что относительная частота наступления некоторого случайного события не является постоянной величиной, однако она обладает устойчивостью, стремлением к некоторому постоянному числу, и колебания ее относительно этого постоянного числа тем меньше, чем больше проведено экспериментов.

Для того чтобы сравнивать между собой события по степени их возможности, необходимо связать с каждым из них некоторое число, которое тем больше, чем более возможно наступление события. Это число называется **вероятностью** события.

***Вероятность случайного события А*** – это числовая функция *P(A),* определенная на пространстве элементарных событий $\Omega$, характеризующая меру объективной (не зависящей от воли исследователя) возможности наступления события $A$.

Замечательным экспериментальным фактом является то, что при неограниченном увеличении числа испытаний относительная частота события $A$ приближается к вероятности события $A$ и стабилизируется около этого значения.

При **статистическом определении вероятности** в качестве вероятности события используется относительная частота этого события в большой серии испытаний.

Например, если обычную монету подбрасывать $n = 30$ раз, наблюдая при этом 12 выпадений герба, то $m = 12$, а $W = \frac{m}{n} = \frac{12}{30} = 0{,}4$. При $n = 400$ подбрасываниях возможно 205 появлений герба, при этом относительная частота появления герба составит 0,5125.

Вероятность события $A$ вычисляется без проведения опытов, а относительная частота только после проведения опытов.

Сформулируем **основное положение теории вероятностей**. Пусть дано *дискретное* пространство элементарных событий $\Omega$ с элементами $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$,… Полагаем, что каждому из элементарных событий $\omega_i$ поставлена в соответствие некоторая неотрицательная числовая характеристика $p_i = P(\omega_i)$, называемая **вероятностью** этого события, причем

$$p_1 + p_2 + ... + p_n + ... = \sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1.$$

По определению, вероятность $P(A)$ любого события $A$ равна сумме вероятностей всех составляющих его элементарных событий:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i).$$

Рассмотрим аксиомы, которым должны удовлетворять вероятности любых событий:

**А1** (аксиома неотрицательности). Вероятность любого события $A$ есть неотрицательное число:

$$P(A) \geq 0, \text{ для любого события } A.$$

**А2** (аксиома нормированности). Вероятность достоверного события (всего пространства элементарных исходов $\Omega$) равна единице:

$$P(\Omega) = 1.$$

**А3** (аксиома аддитивности). Вероятность суммы счетного числа несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$



**Основные следствия из аксиом теории вероятностей:**

**1** Вероятность невозможного события равна нулю: $P(\varnothing) = 0$.

**2** Вероятность любого случайного события есть число, заключенное в отрезке от нуля до единицы: $0 \leq P(A) \leq 1$.

**3** Вероятность события $\overline{A}$, противоположного событию $A$, можно определить следующим образом: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

### *1.2.2 Классический метод определения вероятности*

Если пространство элементарных событий некоторого эксперимента состоит из конечного числа элементов $\omega_1$, $\omega_2$, …, $\omega_n$, причём все исходы являются равновозможными, то есть

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_n),$$

то для определения вероятности любого события $A$, связанного с данным экспериментом, можно воспользоваться так называемым **классическим методом определения вероятности**, согласно которому вероятность любого события $A$ определяется по формуле

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1}$$

где $m$ – число элементарных исходов, благоприятных событию $A$;

$n$ – общее число исходов пространства элементарных событий $\Omega$.

Ограничения классического способа:

а) все элементарные исходы вероятностного эксперимента E должны быть равновозможными, то есть $P(\omega_i) = P(\omega_j)$, для любых $i, j$;

б) множество всех элементарных исходов пространства $\Omega$ должно быть конечным. Например, классический метод нельзя применить для вычисления вероятности того, что монета выпадет при втором подбрасывании монеты для примера 4:

E: Подбрасывание монеты до тех пор, пока на ней не выпадет герб.

$\Omega$ = {Г, РГ, РРГ, РРРГ, РРРРГ, РРРРРГ, … }. В данном случае пространство $\Omega$ бесконечно.

**Пример 7** При наборе телефонного номера абонент набирает 2 последние цифры наугад, помня лишь, что они одинаковые и нечетные. Найти вероятность того, что номер будет набран правильно с первой попытки.

Р е ш е н и е. Элементарными исходами рассматриваемого эксперимента являются возможные варианты последовательного набора двух одинаковых цифр из пяти. В условии указано, что цифры нечетные и одинаковые, поэтому выбирать будем дважды одну и ту же цифру из 1, 3, 5, 7, 9.

Пространство элементарных исходов рассматриваемого эксперимента:

$\Omega = \{(1, 1), (3, 3), (5, 5), (7, 7), (9, 9)\}$.

В данном случае пространство элементарных исходов состоит из 5 элементов: $n = 5$.

Поскольку цифры набираются случайным образом, все элементарные исходы равновозможны, то для вычисления вероятности интересующего нас события можно воспользоваться классическим методом определения вероятностей.

Число исходов, благоприятных событию $A$, равно 1, так как при наборе только одной комбинации цифр номер будет набран правильно : $m = 1$.

Отсюда: $P\left(A\right) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{5} = 0{,}05.$

**Пример 8** Бросают две игральные кости. Определить вероятности событий $A$ = {на верхних гранях двух костей выпадут нечетные числа очков}; событие $B$ ={на верхних гранях двух костей выпадет число очков, сумма которых меньше 10}; $C$ = {на верхних гранях двух костей выпадет число очков, сумма которых не меньше 10}.

Решение. Пространство элементарных исходов данного эксперимента состоит из 36 элементов и может быть представлено в условных обозначениях следующим образом:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, \\ 21, & 22, & 23, & 24, & 25, & 26, \\ 31, & 32, & 33, & 34, & 35, & 36, \\ 41, & 42, & 43, & 44, & 45, & 46, \\ 51, & 52, & 53, & 54, & 55, & 56, \\ 61, & 62, & 63, & 64, & 65, & 66 \end{Bmatrix}, (n = 36),$$

где, например, исход (11) соответствует тому, что в результате подбрасывания двух игральных костей на верхней грани первой кости выпала (1) и на верхней грани второй кости выпала (1).

Все элементарные исходы данного пространства $\Omega$ равновероятны. Таким образом, для определения вероятностей всех событий, связанных с этим опытом, можем воспользоваться классическим методом определения вероятности. Выпишем исходы, благоприятные интересующим нас событиям: $A = \{11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53, 55\}, (m = 9)$,

тогда $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25;$



$B = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 51, 52, 53, 54, 61, 62, 63\}, (m = 30)$,

$P(B) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6} = 0{,}833.$

$C = \{46, 55, 56, 64, 65, 66\}, (m = 6)$,

$P(C) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6} = 0{,}167.$

Согласно следствию 3 из аксиом, вероятность события $C$ можно вычислить, используя противоположное событие $\overline{C}$. Событие $\overline{C} = B$. $P(\overline{C}) = P(B) = 0{,}833$.

Тогда вероятность события $C$: $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}833 = 0{,}167$.

### *1.2.3 Комбинаторика и вероятность*

*Комбинаторика* – это раздел математики, в котором изучаются способы подсчета числа элементов в конечных множествах. Формулы комбинаторики используют при непосредственном вычислении вероятностей.

Множества элементов, состоящие из одних и тех же различных элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются *перестановками* этих элементов. Число всевозможных перестановок из $n$ элементов обозначают через $P_n = n!$ (читается *эн-факториал*), где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot n$, например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

**Замечание** – Для пустого множества принимается соглашение – пустое множество можно упорядочить только одним способом; по определению полагают $0! = 1$.

*Размещениями (или упорядоченными выборками без возвращения)* называют множества, составленные из $n$ различных элементов по $m$ элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений определяется формулой $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ (читается *размещения m элементов из n*).

*Сочетаниями (или неупорядоченными выборками без возвращения)* из $n$ различных элементов по $m$ называются множества, содержащие $m$ элементов из числа $n$ заданных, и которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний из $n$ элементов по $m$ обозначают: $C_n^m$. Это число выражается формулой $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ (читается *сочетания m элементов из n*).

Отметим, что числа перестановок, размещений и сочетаний связаны равенством $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_n}$.

**Замечание** – Выше предполагалось, что все $n$ элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае множества с повторениями вычисляют по другим формулам.

Например, если среди $n$ элементов есть $n_1$ элементов одного вида, $n_2$ элементов другого вида и т. д., то число перестановок с повторениями определяется формулой $P_n = \dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...n_k!}$, где $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Упорядоченные выборки, элементы которых могут повторяться, называют *упорядоченными выборками с возвращениями.* Число всех возможных способов выбора $m$ элементов из $n$ элементов определяется формулой $\overline{A}_n^m = n^m$.

Неупорядоченные выборки, элементы которых могут повторяться, называют *неупорядоченными выборками с возвращениями.* Число всех возможных способов выбора $m$ элементов из $n$ элементов определяется формулой $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила.

***Правило суммы.*** Если некоторый объект $A$ может быть выбран из множества объектов этого вида $m$ способами, а другой объект $B$ может быть выбран из множества объектов этого вида $n$ способами, то выбрать либо $A$, либо $B$ можно $m + n$ способами.

***Правило произведения.*** Если объект $A$ можно выбрать из множества объектов этого вида $m$ способами и после каждого такого выбора объект $B$ можно выбрать из множества объектов этого вида $n$ способами, то пара объектов *(A, B)* в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Для вычисления числа комбинаций удобно пользоваться таблицей 1.

*Таблица 1* – **Способы выбора *m* элементов из *n* элементов**

| Выборка | Упорядоченная | Неупорядоченная |
|---|---|---|
| С повторением (с возвращением) | $\overline{A}_n^m = n^m$ | $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$ |
| Без повторения (без возвращения) | $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ | $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ |

**Пример 9** При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно с первой попытки, если абонент помнит:

а) что это цифры 1 и 2;

б) что это нечетные и различные цифры;

в) только то, что цифры нечетные.



Определим события $A$ = {номер набран правильно с первой попытки, при условии, что абонент помнит, что это цифры 1 и 2}; событие $B$ ={номер набран правильно с первой попытки, при условии, что абонент помнит, что это нечетные и различные цифры}; $C$ = {номер набран правильно с первой попытки, при условии, что абонент помнит только то, что цифры нечетные}.

Решение. а) Пространство элементарных исходов данного эксперимента состоит из 2 элементов: $\Omega = \{12, 21\}$, ($n$ = 2).

Все элементарные исходы данного пространства $\Omega$ равновероятны. Таким образом, для определения вероятностей всех событий, связанных с этим опытом, можем воспользоваться классическим методом определения вероятности. Число исходов, благоприятных событию $A$ = {номер набран правильно с первой попытки, при условии, что абонент помнит, что это цифры 1 и 2}, равно 1, т. к. при наборе только одной комбинации цифр номер будет набран правильно: $m$ = 1.

Следовательно, $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

Решим эту задачу, используя формулы комбинаторики.

Вычислим число способов выбора двух цифр из двух – выборка упорядоченная, без возвращения: $A_2^2 = \dfrac{2!}{(2-2)!} = 2$, ($n$ = 2). Число исходов, благоприятных событию $A$, равно 1, т. к. при наборе только одной комбинации цифр номер будет набран правильно: $m$ = 1.

Следовательно, $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

б) Пространство элементарных исходов данного эксперимента состоит из элементов:

$\Omega$ = {13, 15, 17, 19, 31, 35, 37, 39, 51, 53, 57, 59, 71, 73, 75, 79, 91, 93, 95, 97}, ($n$ = 20).

Все элементарные исходы данного пространства $\Omega$ равновероятны. Таким образом, для определения вероятностей всех событий, связанных с этим опытом, можем воспользоваться классическим методом определения вероятности. Число исходов, благоприятных событию $B$ ={номер набран правильно с первой попытки, при условии, что абонент помнит, что это нечетные и различные цифры}, равно 1, т. к. при наборе только одной комбинации цифр номер будет набран правильно: $m$ = 1.

Следовательно, $P(B) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$.

Решим эту задачу, используя формулы комбинаторики.

Вычислим число способов выбора двух цифр из пяти (1, 3, 5, 7, 9) – выборка упорядоченная, без возвращения $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 20$, ($n = 20$). Число исходов, благоприятных событию $B$, равно 1, т. к. при наборе только одной комбинации цифр номер будет набран правильно: $m = 1$.

Следовательно, $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{20} = 0{,}05$.

в) Пространство элементарных исходов данного эксперимента состоит из элементов:

$\Omega = \{11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, 35, 37, 39, 51, 53, 55, 57, 59, 71, 73, 75, 77, 79, 91, 93, 95, 97, 99\}$, ($n = 25$).

Все элементарные исходы данного пространства $\Omega$ равновероятны. Таким образом, для определения вероятностей всех событий, связанных с этим опытом, можем воспользоваться классическим методом определения вероятности. Число исходов, благоприятных событию $C$ = {номер набран правильно с первой попытки, при условии, что абонент помнит только то, что цифры нечетные}, равно 1, т. к. при наборе только одной комбинации цифр номер будет набран правильно: $m = 1$.

Следовательно, $P(C) = \frac{m}{n} = \frac{1}{25} = 0{,}04$.

Решим эту задачу, используя формулы комбинаторики.

Вычислим число способов выбора двух цифр из пяти (1, 3, 5, 7, 9) – выборка упорядоченная, с возвращением: $\overline{A}_5^2 = 5^2 = 25$, ($n = 25$). Число исходов, благоприятных событию $C$, равно 1, т. к. при наборе только одной комбинации цифр номер будет набран правильно: $m = 1$.

Следовательно, $P(C) = \frac{m}{n} = \frac{1}{25} = 0{,}04$.

**Пример 10** На пяти одинаковых карточках написаны буквы: *к, н, и, г, а*. Карточки перемешивают и наудачу извлекают по одной, располагая на столе одна за другой. Какова вероятность получить слово *книга* ?

Решение. Определим событие $A$ = {получено слово ***книга***}.

Вычислим число способов перестановок пяти карточек: $P_5 = 5! = 120$, ($n = 120$). Число исходов, благоприятных событию $A$, равно 1: $m = 1$.

Следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{120} = 0{,}0083$.

**Пример 11** На десяти одинаковых карточках написаны буквы: *м, а, т, е, м, а, т, и, к, а*. Карточки перемешивают и наудачу извлекают по одной, располагая на столе одна за другой. Какова вероятность получить слово *математика*?



Решение. Определим событие $A$ = {получено слово ***математика***}.

Вычислим число способов перестановок десяти карточек с повторениями по формуле $P_n = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\ldots n_k!}$, $P_{10} = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 151200$, где $n_1 = 2$ (число повторений буквы ***м***), $n_2 = 3$ (число повторений буквы ***а***), $n_3 = 2$ (число повторений буквы ***т***), $n_4 = 1$ (число повторений буквы ***е***), $n_5 = 1$ (число повторений буквы ***и***), $n_6 = 1$ (число повторений буквы ***к***).

Число исходов, благоприятных событию $A$, равно 1: $m = 1$.

Следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{151200} = 0{,}0000066$.

**Пример 12** В отделе работают 3 женщины и 4 мужчины. Среди работников отдела разыгрываются 3 билета в театр. Какая вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся:

а) 3 женщины;

б) 1 мужчина и 2 женщины?

Решение. Обозначим события $A$ ={ среди обладателей билетов окажутся три женщины}; $B$ ={ среди обладателей билетов окажутся один мужчина и две женщины}.

а) Определим вероятность события $A$ ={среди обладателей билетов окажутся три женщины}.

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно распределить 3 билета среди 7 человек, выборка неупорядоченная без возвращения: $C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$.

Определим число исходов, благоприятствующих событию $A$, то есть число способов распределения 3 билетов среди 3 женщин: $C_3^3 = \frac{3!}{3!(3-3)!} = 1$.

Вероятность события $A$ $P(A) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35} = 0{,}0286$.

б) Определим вероятность события $B$ ={среди обладателей билетов окажутся один мужчина и две женщины}.

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно распределить 3 билета среди 7 человек, выборка неупорядоченная без возвращения.

$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$.

Определим число исходов, благоприятствующих событию $B$, то есть число способов распределения 3 билетов среди 1 мужчины и 2 женщин: $C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4$ (число мужчин из 4, которые могут получить билет, равно 4), а число групп по две женщин из 3, которые могут получить билеты в театр, равно $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$.

Произведение $C_4^1 \cdot C_3^2 = 4 \cdot 3 = 12$ равно числу благоприятствующих случаев распределения трех билетов среди работников отдела так, чтобы один билет получил мужчина и два – женщины.

Вероятность события $B$ $P(B) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_7^3} = \frac{4 \cdot 3}{35} = 0{,}3429$.

### *1.2.4 Геометрические вероятности*

Классический метод определения вероятности предполагает, что число элементарных исходов $\Omega$ вероятностного эксперимента $E$ конечно. На практике встречаются опыты, для которых множество таких исходов бесконечно. Иногда для вычисления вероятностей случайных событий, чтобы преодолеть недостаток классического определения вероятности, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят *геометрические вероятности – вероятности попадания точки в область.*

Рассмотрим сначала квадрируемую область на плоскости, то есть область, имеющую площадь. Обозначим эту область буквой $G$, а ее площадь $S_G$. В области $G$ содержится область $g$ площади $S_g$ (рисунок 3). В область $G$ наудачу брошена точка. Будем считать, что брошенная точка может попасть в некоторую часть области $G$ с вероятностью, пропорциональной площади этой части и не зависящей от ее формы и расположения. Пусть событие $A$ – попадание брошенной точки в область $g$, тогда геометрическая вероятность этого события определяется формулой

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G}.$$

В общем случае понятие геометрической вероятности вводится следующим образом. Обозначим меру всей области (длину, площадь, объем) через $mes\,G \neq 0$, а меру области, попадание в которую благоприятствует событию $A$, – через $mes\,g$. Вероятность попадания в область $g$ точки, брошенной в область $G$, определяется формулой



$$P(A) = \frac{mes_g}{mes_G}.$$

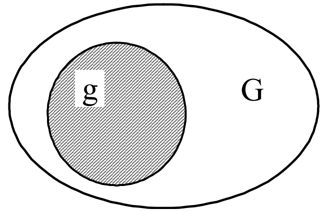



Рисунок 3 – Геометрическая интерпретация вероятностного эксперимента

**Пример 13** В круг вписан квадрат. Наудачу в круг бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадет в квадрат? Какова вероятность того, что точка не попадет в квадрат?

Решение. Введем обозначения: $R$ – радиус круга, $a$ – сторона вписанного квадрата, $S$ – площадь круга, $S_1$ – площадь, вписанного квадрата (рисунок 4).

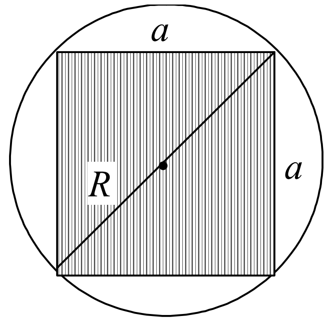



Рисунок 4 – Геометрическая интерпретация вероятностного эксперимента

Событие $A$ ={точка, наудачу брошенная в круг, попала в квадрат}.

Как известно, площадь круга $S = \pi R^2$, сторона вписанного квадрата через радиус описанной окружности выражается формулой $a = R\sqrt{2}$, площадь квадрата $S_1 = a^2 = 2R^2$. Мера всей области $mes\,G = S = \pi R^2$, а мера области, попадание в которую благоприятствует событию $A$, $mes\,g = S_1 = 2R^2$.

Вероятность события $A$ $P\left(A\right)=\dfrac{mes_g}{mes_G}=\dfrac{S_1}{S}=\dfrac{2R^2}{\pi R^2}=\dfrac{2}{\pi}=0{,}637$.

Событие $B$ ={точка, наудачу брошенная в круг, не попала в квадрат}.

События $A$ и $B$ являются противоположными событиями. Соответственно вероятность события $B$ $P(B)=1-P(A)=1-0{,}637=0{,}363$.

**Вопросы для самоконтроля**

1 Что называют вероятностью события?

2 Чему равна вероятность достоверного события?

3 Чему равна вероятность невозможного события?

4 В каких пределах заключена вероятность случайного события?

5 Какое определение вероятности называют классическим?

6 Что называют перестановками?

7 По какой формуле вычисляют число перестановок из $n$ различных элементов?

8 Что называют размещениями?

9 По какой формуле вычисляют число размещений из $n$ различных элементов по $m$ элементов?

10 Что называют сочетаниями? По какой формуле вычисляют число сочетаний из $n$ элементов по $m$ элементов?

11 Каким равенством связаны числа перестановок, размещений и сочетаний?

12 По какой формуле вычисляется число перестановок из $n$ элементов, если некоторые элементы повторяются?

13 Какой формулой определяется число размещений по $m$ элементов с повторениями из $n$ элементов?

14 Какой формулой определяется число сочетаний с повторениями из $n$ элементов по $m$ элементов?

15 В чем заключаются правила суммы и произведения?

16 В чем состоит геометрический способ вычисления вероятностей? Условия его применения.

## 1.3 Теоремы сложения и умножения вероятностей

### *1.3.1 Теоремы сложения вероятностей*

В общем случае теорема сложения вероятностей для двух событий $A$ и $B$ определяется по формуле

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\,. \qquad (2)$$

Если события $A$ и $B$ – несовместны, то есть $A\cap B=\varnothing$, $P(A\cap B)=0$, то

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\,. \qquad (3)$$

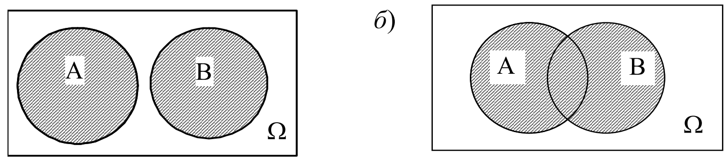
Проиллюстрируем теорему сложения вероятностей на рисунке 5:



для случая *а)* $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;

для случая *б)* $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

*а)* *б)*




$A\cup B$ $A\cup B$

Рисунок 5 – Сумма несовместных (а) и совместных (б) событий

Теорема сложения вероятностей для трех событий $A$, $B$, $C$ может быть записана следующим образом:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-$$
$$-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

Если события $A$, $B$, $C$ – попарно несовместны, то

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)\,.$$

Согласно аксиоме 3 для счетного числа несовместных событий $A_1$, $A_2$, $A_3$,…

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup ...)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...$$

**Пример 14** Правильная монета подбрасывается три раза. Найти вероятность события $A$ = {герб выпал или один, или два раза}.

Решение. Пространство элементарных исходов данного эксперимента может быть представлено в условных обозначениях следующим образом: $\Omega$ = {*РРР*, *ГРР*, *РГР*, *РРГ*, *ГГР*, *ГРГ*, *РГГ*, *ГГГ*}, ($n$ = 8).

Определим события $B$ = {герб выпал один раз}; $C$ ={герб выпал два раза}, которые несовместны.

Таким образом, для определения вероятности события $A$ = {герб выпал или один, или два раза}, можем воспользоваться теоремой сложения вероятностей несовместных событий $P(A)=P(B\cup C)=P(B)+P(C)$.

Все элементарные исходы данного пространства $\Omega$ равновероятны. Таким образом, для определения вероятностей событий $B$ и $C$ можем воспользоваться классическим методом определения вероятности. Выпишем исходы, благоприятные интересующим нас событиям:

$B$ = {*ГРР*, *РГР*, *РРГ*}, ($m$ = 3), $P(B)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{3}{8}=0{,}375$;

$C = \{ГРГ, ГГР, РГГ\}$, $(m=3)$, $P(C) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$.

Тогда вероятность события $A$ $P(A) = 0{,}375 + 0{,}375 = 0{,}750$.

**Пример 15** Из трех карточек с цифрами 1, 4, 5 произвольным образом выбирают 2 и укладывают на стол в порядке их появления. Предполагая, что все возможные исходы данного опыта равновероятны, найти вероятность того, что полученное таким образом число будет или четное, или меньше 50.

Решение. Пространство элементарных исходов данного эксперимента может быть представлено следующим образом: $\Omega = \{14, 15, 41, 45, 51, 54\}$, $(n=6)$.

Определим событие $A =$ {полученное случайным образом число будет или четное, или меньше 50}.

Определим события $B =$ {полученное случайным образом число будет четное}; $C =$ {полученное случайным образом число будет меньше 50}, которые совместны.

Таким образом, для определения вероятности события $A$ можем воспользоваться теоремой сложения вероятностей для двух совместных событий $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$.

Все элементарные исходы данного пространства $\Omega$ равновероятны. Таким образом, для определения вероятностей событий $A$, $B$ и $C$ можем воспользоваться классическим методом определения вероятности. Выпишем исходы, благоприятные интересующим нас событиям:

$B = \{\boldsymbol{14}, 54\}$, $(m=2)$, тогда $P(B) = P\left(A\right) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{2}{6}$;

$C = \{\boldsymbol{14}, 15, 41, 45\}$, $(m=4)$, $P(C) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{4}{6}$,

$B \cap C =$ {полученное случайным образом число будет четное и меньше 50},

$B \cap C = \{\boldsymbol{14}\}$, $(m=1)$, $P(B \cap C) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{6}$.

Тогда вероятность события $A$:

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0{,}833.$$

### *1.3.2 Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей*

Рассмотрим следующий вероятностный эксперимент $E$. Пусть в пространстве $\Omega$ определены случайные события $A, B, C, \ldots$ и их вероятности. Предположим, что в ходе нашего эксперимента $E$ событие $A$ уже произошло. В данном эксперименте появление события $A$ может каким-то образом изменить вероятности появления событий, связанных (зависимых) с ним.

Событие $B$ называется зависимым от события $A$, если появление (или не появление) события $A$ изменяет вероятность появления события $B$. Событие $B$ называется *независимым* от события $A$, если появление (или не появление) события $A$ не изменяет вероятность появления события $B$.

Рассмотрим два произвольных события $A$ и $B$, причем $P(B) \neq 0$.

**Условной вероятностью события *A* при условии *B*** (обозначается $\boldsymbol{P(A|B)}$) называется вероятность события $A$, вычисленная при условии, что событие $B$ произошло. По определению

$$P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B). \quad (4)$$

Вычисление условных вероятностей – это, по существу, переход в новое, урезанное заданным условием $B$ пространство элементарных событий. Вероятности элементарных событий $P(\omega_i)$ $(\omega_i \in B)$ пропорциональны исходным. Для соблюдения условия нормировки в новом пространстве элементарных событий они делятся на $P(B)$.

Аналогично

$$P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A) \quad (5)$$

в случае, если $P(A) \neq 0$.

Формулы (2) и (3) часто записывают в виде

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A) \quad (6)$$

и называют **теоремой умножения вероятностей**.

Для произвольного числа $n$ событий $A_1, A_2, \ldots A_n$ теорема умножения вероятностей имеет вид

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}),$$

то есть вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли.

**Пример 16** Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 20. Какова вероятность того, что он сдаст зачет, если для этого необходимо ответить хотя бы на два вопроса из трех, содержащихся в билете?

Решение. Обозначим события:

$A =$ {студент сдаст зачет};

$B =$ {студент ответит на три вопроса из трех, содержащихся в билете};

$C =$ {студент ответит на два вопроса из трех, содержащихся в билете}.

События $B$ и $C$ несовместны. Событие $A$ произойдет, если произойдет одно из событий $B$ или $C$.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C)$.

Определим вероятности событий $B$ и $C$.

$B$ = {студент ответит на три вопроса из трех, содержащихся в билете};

$B_1$ = {студент ответит на первый вопрос, содержащийся в билете};

$B_2$ = {студент ответит на второй вопрос, содержащийся в билете};

$B_3$ = {студент ответит на третий вопрос, содержащийся в билете}.

Вероятность события $B$ определим по формуле

$$P(B) = P(B_1)\, P(B_2 \,|\, B_1)\, P(B_3 \,|\, B_2 \cap B_1),$$

где $P(B_1) = \dfrac{20}{30}$ (всего 30 вопросов, из которых 20 студент знает);

$P(B_2 \,|\, B_1) = \dfrac{20-1}{30-1} = \dfrac{19}{29}$ (всего осталось 29 вопросов, из них 19 студент знает);

$P(B_3 \,|\, B_2 \cap B_1) = \dfrac{19-1}{29-1} = \dfrac{18}{28}$ (всего осталось 28 вопросов, из них 18 студент знает).

По теореме умножения вероятностей зависимых событий

$$P(B) = P(B_1)\, P(B_2 | B_1)\, P(B_3 | B_2 \cap B_1) = \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{18}{28} = \frac{6840}{24360} = 0{,}281.$$

Вероятность события $C$ определим, используя теорему сложения вероятностей несовместных событий

$$P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3),$$

где $C_1$ = {студент отвечает на первый и второй вопросы, а на третий не отвечает};

$C_2$ = {студент отвечает на первый и третий вопросы, а на второй не отвечает};

$C_3$ = {студент отвечает на второй и третий вопросы, а на первый не отвечает}.

$$P(C_1) = P(B_1)\, P(B_2 | B_1)\, P(\overline{B}_3 \,|\, B_2 \cap B_1) = \frac{20}{30} \cdot \frac{(20-1)}{29} \cdot \frac{10}{28} = \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{10}{28} = \frac{3800}{24360} = 0{,}156.$$



$$P(C_2) = P(B_1)\, P(\overline{B}_2 \,|\, B_1)\, P(B_3 |\, \overline{B}_2 \cap B_1) = \frac{20}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{(20-1)}{28} = \frac{20}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{19}{28} = \frac{3800}{24360} = 0{,}156.$$

$$P(C_3) = P(\overline{B}_1)\, P(B_2 |\, \overline{B}_1)\, P(B_3 | B_2 \cap \overline{B}_1) = \frac{10}{30} \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{(20-1)}{28} = \frac{10}{30} \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{19}{28} = \frac{3800}{24360} = 0{,}156.$$

$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(C_1) + \mathrm{P}(C_2) + \mathrm{P}(C_3) = 0{,}156 + 0{,}156 + 0{,}156 = 0{,}468.$

По теореме сложения вероятностей несовместных событий $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) = 0{,}281 + 0{,}468 = 0{,}749.$

### *1.3.3 Независимые события*

Два события $A$ и $B$ называются независимыми, если

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \qquad (7)$$

Для пояснения естественности такого определения вернемся к теореме умножения вероятностей (6) и установим, в каких ситуациях из нее следует (7). Очевидно, что это может быть тогда, когда условная вероятность $P(A|B)$ равна соответствующей безусловной вероятности события А: $P(A|B) = P(A)$, то есть когда вероятность события $A$ не зависит от того, произошло событие $B$ или нет. (Аналогично, $P(B|A) = P(B)$).

В основе независимости событий лежит их физическая независимость, состоящая в том, что множества факторов, влияющих на исход эксперимента и обусловливающих появление этих событий, не пересекаются или почти не пересекаются.

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если вероятность каждого из этих событий не зависит от появления любого числа остальных событий.

Теорема умножения вероятностей для независимых в совокупности событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ имеет вид

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_n).$$

**Пример 17** В трех урнах находятся шары разного цвета. В первой – два черных, пять белых и три красных, во второй – три черных, три белых и четыре красных, в третьей – один черный, четыре белых и пять красных. Из каждой урны случайным образом вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что среди трех вынутых шаров окажутся:

а) только черные шары;

б) все шары одного цвета.

Решение. Обозначим события:

$A_i$ = {выбран черный шар из $i$-й урны}, $i = 1, 2, 3$;

$B_i$ = {выбран белый шар из $i$-й урны}, $i = 1, 2, 3$;

$C_i$ = {выбран красный шар из $i$-й урны}, $i = 1, 2, 3$;

$D$ = {среди трех вынутых шаров окажутся только черные шары};

$E$ = {среди трех вынутых шаров окажутся шары одного цвета}.

| Количество шаров | Урна | | |
|---|---|---|---|
| | № 1 | № 2 | № 3 |
| | 2 черных, 5 белых, 3 красных | 3 черных, 3 белых, 4 красных | 1 черный, 4 белых, 5 красных |

Согласно условию вероятность события $A_1$ $P(A_1) = \frac{2}{2+5+3} = \frac{2}{10}$, вероятность события $A_2$ – $P(A_2) = \frac{3}{3+3+4} = \frac{3}{10}$, вероятность события $A_3$ – $P(A_3) = \frac{1}{1+4+5} = \frac{1}{10}$.

Так как события $A_i$ ($i = 1, 2, 3$) – независимы, применим теорему умножения вероятностей независимых событий, получим

$$P(D) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{6}{1000} = 0{,}006 .$$

Событие $E$ можно представить в виде $E = A_1A_2A_3 + B_1B_2B_3 + C_1C_2C_3$. События $A_1A_2A_3,\ B_1B_2B_3,\ C_1C_2C_3$ несовместные.

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий и теорему умножения вероятностей независимых событий, получим

$P(E) = P(A_1A_2A_3) + P(B_1B_2B_3) + P(C_1C_2C_3) =$ 0,006 + 0,06 + 0,06 = 0,126,

где $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{6}{1000} = 0{,}006$;

$$P(B_1B_2B_3) = P(B_1)P(B_2)P(B_3) = \frac{5}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{10} = \frac{60}{1000} = 0{,}06;$$

$$P(C_1C_2C_3) = P(C_1)P(C_2)P(C_3) = \frac{3}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{5}{10} = \frac{60}{1000} = 0{,}06 .$$

**Пример 18** При изготовлении изделие проходит три основные независимые операции. Вероятность получения стандартного изделия при первой операции равна 0,9, второй – 0,95, третьей – 0,8. Найти вероятность того, что:

а) изделие окажется стандартным;

б) изделие окажется нестандартным.



Решение. Обозначим события:

$A_i$ = {$i$-ю операцию изделие прошло без брака}, $i = 1, 2, 3$;

$B$ = {изделие окажется стандартным};

$C$ = {изделие окажется нестандартным}.

Согласно условию вероятность события $A_1$ $P(A_1) = 0{,}9$, вероятность события $A_2$ – $P(A_2) = 0{,}95$, вероятность события $A_3$ – $P(A_3) = 0{,}8$.

Тогда вероятности противоположных событий:

$P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$,

$P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Определим все элементарные события данного случайного эксперимента и соответствующие вероятности:

| Элементарные события | События | Вероятности |
|---|---|---|
| $\omega_1$ | $A_1A_2A_3$ | $0{,}9\cdot 0{,}95\cdot 0{,}8 = 0{,}684$ |
| $\omega_2$ | $A_1\overline{A}_2A_3$ | $0{,}9\cdot 0{,}05\cdot 0{,}8 = 0{,}036$ |
| $\omega_3$ | $\overline{A}_1A_2A_3$ | $0{,}1\cdot 0{,}95\cdot 0{,}8 = 0{,}076$ |
| $\omega_4$ | $A_1A_2\overline{A}_3$ | $0{,}9\cdot 0{,}95\cdot 0{,}2 = 0{,}171$ |
| $\omega_5$ | $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ | $0{,}1\cdot 0{,}05\cdot 0{,}8 = 0{,}004$ |
| $\omega_6$ | $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ | $0{,}9\cdot 0{,}05\cdot 0{,}2 = 0{,}009$ |
| $\omega_7$ | $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$ | $0{,}1\cdot 0{,}95\cdot 0{,}2 = 0{,}019$ |
| $\omega_8$ | $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ | $0{,}1\cdot 0{,}05\cdot 0{,}2 = 0{,}001$ |
| Итого | $\Omega$ | 1 |

а) По теореме умножения вероятностей независимых событий $P(B) = P(\omega_1) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}9\cdot 0{,}95\cdot 0{,}8 = 0{,}684$.

б) Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий и теорему умножения вероятностей независимых событий, получим

$$P(C) = P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) + P(\omega_5) + P(\omega_6) + P(\omega_7) + P(\omega_8) =$$

$= P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) +$

$+ P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) =$ 0,036 + 0,076 +

+ 0,171 + 0,004 + 0,009 + 0,019 + 0,001 = 0,316.

События $B$ = {изделие окажется стандартным} и $C$ = {изделие окажется нестандартным} являются противоположными, то есть $P(B) + P(C) = 1$,

$P(C) = 1 - P(B) =$ 1 – 0,684.

## 1.4 Формула полной вероятности. Формула Байеса

Частным случаем применения теорем сложения и умножения вероятностей являются формулы полной вероятности и Байеса. При решении многих практических задач часто встречаются с ситуацией, когда прямое вычисление вероятности события $A$ трудно или невозможно, в то время как вполне доступно определение вероятности этого события при некоторых различных условиях $H_i$.

Сформулируем условия применения формул полной вероятности и Байеса.

Пусть производится испытание, об условиях которого можно сделать $n$ взаимно исключающих предположений: $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ($H_i \cap H_j = \varnothing$, при $i \neq j$), таких, что

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega.$$

Поскольку заранее неизвестно, какое из событий $H_i$ произойдет, эти события называют **гипотезами**. Предполагается, что вероятности гипотез известны и равны соответственно $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$. Так как события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ несовместны и образуют полную группу событий, то $P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1$.

Тогда любое рассматриваемое событие $A$ может произойти только одновременно с осуществлением одной из гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$. То есть $A = A \cap H_1 \cup A \cap H_2 \cup \ldots \cup A \cap H_n$. Поскольку события $A \cap H_1$, $A \cap H_2, \ldots$, $A \cap H_n$ – несовместны, $P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \ldots + P(A \cap H_n)$. Применив теорему умножения вероятностей, можно записать: $P(A \cap H_i) = P(H_i)P(A|H_i)$.

Таким образом, приходим к **формуле полной вероятности**, позволяющей определить «полную» вероятность события $A$ через известные условные вероятности события $A$ при гипотезах $H_i$:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i). \quad (8)$$

Если известно, что в результате опыта произошло событие $A$, то новые, апостериорные (послеопытные) вероятности гипотез можно определить по **формуле Байеса**

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)H(A \mid H_j)} = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(A)}. \quad (9)$$

Эти вероятности, которые интересуют нас после проведения эксперимента, называются *апостериорными вероятностями*. Вероятности гипотез $P(H_i)$, которыми мы должны располагать до проведения эксперимента, называются *априорными вероятностями*.



Таким образом, формула Байеса – это формула пересчета вероятностей гипотез на основании результатов эксперимента. Легко видеть, что сумма апостериорных вероятностей гипотез равна единице.

**Пример 19** Ревизионной комиссии в конце первого квартала предстоит проверка финансово-хозяйственной деятельности фирмы. Специалистами управления случайным образом производится выбор документов за определенный месяц. Вероятность выявления ошибки в случайно выбранном документе в январе $p_1 = 0{,}1$, в феврале – $p_2 = 0{,}2$, в марте – $p_3 = 0{,}15$. Определить вероятность того, что ревизионной комиссией не будет выявлена ошибка в случайно выбранном документе. Ревизионной комиссией не выявлена ошибка в случайно выбранном документе, определить вероятность того, что комиссия выбрала документ, составленный в январе.

Решение. Определим событие $A$ = {ревизионной комиссией не будет выявлена ошибка в случайно выбранном документе}.

Относительно условий рассматриваемого случайного эксперимента, состоящего в проверке документов, можно выдвинуть три несовместные гипотезы:

$H_1$ = {документ составлен в январе}; $H_2$ = {документ составлен в феврале};

$H_3$ = {документ составлен в марте}. Эти гипотезы равновозможны.

Причём $H_1 + H_2 + H_3 = \Omega$.

Учитывая свойство вероятностей гипотез $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$, определим:

$$P(H_1) = \frac{1}{3};\ P(H_2) = \frac{1}{3};\ P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Условные вероятности события $A$ = {ревизионной комиссией не выявлена ошибка в случайно выбранном документе} при осуществлении этих гипотез:

$$P(A \mid H_1) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9;\ P(A \mid H_2) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8,\ P(A \mid H_3) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85.$$

Для определения вероятности события $A$ воспользуемся формулой полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n);$$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0{,}9 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}8 + \frac{1}{3} \cdot 0.85 = 0{,}85.$$

Для определения вероятности того, что комиссия выбрала документ, составленный в январе, при условии, что ревизионной комиссией не будет выявлена ошибка в этом документе, воспользуемся формулой Байеса

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}9}{0{,}85} = 0{,}3529414 \approx 0{,}353.$$

Таким образом, вероятность того, что ревизионной комиссией не будет выявлена ошибка в случайно выбранном документе, равна 0,85, вероятность того, что комиссия выбрала документ, составленный в январе, при условии, что ревизионной комиссией не выявлена ошибка в этом документе, равна 0,353.

**Вопросы для самоконтроля**

1 Сформулируйте теорему сложения вероятностей для двух совместных событий.
2 Сформулируйте теорему сложения вероятностей для двух несовместных событий
3 Что называется условной вероятностью?
4 Сформулируйте теорему умножения вероятностей для двух зависимых событий.
5 Сформулируйте теорему умножения вероятностей для двух независимых событий.
6 Следствием каких теорем являются формулы полной вероятности и Байеса?
7 Какие события называют гипотезами?
8 Сформулируйте формулу полной вероятности.
9 Сформулируйте формулу Байеса.

## 1.5 Последовательности независимых испытаний

### *1.5.1 Формула Бернулли*

Если производится несколько испытаний, таких, что вероятность рассматриваемого события $A$ в каждом из испытаний не зависит от исходов других испытаний, то такие **испытания** называют **независимыми относительно события *A***.

Испытаниями Бернулли называются повторные независимые испытания, в каждом из которых нас интересуют только два исхода (будем называть их «успех» и «неудача»), вероятности которых постоянны в каждом испытании.



Например, при многократном подбрасывании монеты (за успех принимаем выпадение герба, за неудачу – выпадение решки) вероятность успеха $p = \frac{1}{2}$, вероятность неудачи $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. При многократном подбрасывании игральной кости (за успех принимаем выпадение на верхней грани «1», за неудачу – выпадение любого другого числа («2» или «3», или «4», или «5», или «6»)) вероятность успеха $p = \frac{1}{6}$, вероятность неудачи $q = 1 - p = \frac{5}{6}$.

Если производится $n$ независимых испытаний в одинаковых условиях, в каждом из которых с одной и той же вероятностью $p$ может произойти событие $A$, то вероятность $P_n(m)$ того, что в этих $n$ испытаниях событие $A$ произойдет ровно $m$ раз, определяется по формуле Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m = 0, 1, 2, ..., n), \tag{10}$$

где $q = 1 - p$ – вероятность непоявления события $A$ в каждом из испытаний;

$C_n^m$ – число сочетаний из $n$ элементов по $m$,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \text{ где } k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k.$$

Вероятность того, что в серии из $n$ испытаний событие $A$ появится не менее $k$ раз, можно определить по формуле

$$P_n(m \ge k) = \sum_{i=k}^{n} P_n(i) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} P_n(i).$$

Вероятность того, что в серии из $n$ испытаний событие $A$ появится не более $k$ раз, – по формуле

$$P_n(m \le k) = \sum_{i=0}^{k} P_n(i) = 1 - \sum_{i=k+1}^{n} P_n(k).$$

Вероятность того, что в серии из $n$ испытаний событие $A$ появится хотя бы один раз (то есть более 0 раз), можно вычислить по формуле

$$P_n(m > 0) = P_n(m \ge 1) = \sum_{i=1}^{n} P_n(i) = 1 - P_n(0).$$

**Наивероятнейшее число $m_0$** наступлений события $A$ в серии из $n$ испытаний, в каждом из которых оно может наступить с вероятностью $p$, определяется из двойного неравенства

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

*Отметим, что обычно при решении задач формула Бернулли применяется, если число экспериментов невелико ( $n << 50$ ) .*

**Пример 20** Среди швейных изделий, изготавливаемых в цеху, в среднем 4 % не удовлетворяют требованиям стандарта. Найти вероятность того, что среди шести изделий, взятых для контроля, требованиям стандарта не удовлетворяют: а) не более двух; б) два ; в) найти наивероятнейшее число швейных изделий, не удовлетворяющих требованиям стандарта и соответствующую этому числу вероятность.

Решение. Определим события $B$ = {среди шести швейных изделий, взятых для контроля, требованиям стандарта не удовлетворяют два}; $C$ = {среди шести швейных изделий, взятых для контроля, требованиям стандарта не удовлетворяют не более двух, то есть или 0, или 1, или 2}.

Предполагая, что изготовление швейных изделий в цеху осуществляется независимо друг от друга, условие задачи можно рассматривать как серию из $n = 6$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность события $A$ = {изделие не удовлетворяет требованиям стандарта} равна 0,04. То есть $p = 0{,}04$, $q = 0{,}96$.

а) Для определения вероятности события $B$ воспользуемся формулой Бернулли

$$P_6(2) = C_6^2 p^2 q^4 = \frac{6!}{2!\cdot 4!} 0{,}04^2 \cdot 0{,}96^4 = 0{,}0204 .$$

б) Для определения вероятности события $C$ воспользуемся теоремой сложения вероятностей несовместных событий:

$P(C) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) = 0{,}7828 + 0{,}1957 + 0{,}0204 = 0{,}9989;$

$$P_6(0) = C_6^0 p^0 q^6 = \frac{6!}{0!\cdot 6!} 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^6 = 0{,}7828 ;$$

$$P_6(1) = C_6^1 p^1 q^5 = \frac{6!}{1!\cdot 5!} 0{,}04^1 \cdot 0{,}96^5 = 0{,}1957 ;$$

$$P_6(2) = C_6^2 p^2 q^4 = \frac{6!}{2!\cdot 4!} 0{,}04^2 \cdot 0{,}96^4 = 0{,}0204 ;$$

$P(C) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) = 0{,}7828 + 0{,}1957 + 0{,}0204 = 0{,}9989.$

в) Наивероятнейшее число $m_0$ швейных изделий, среди 6 проверяемых, не удовлетворяющих требованиям стандарта, найдем по формуле

$np - q \le m_0 \le np + p$. Отсюда $6 \cdot 0{,}04 - 0{,}96 \le m_0 \le 6 \cdot 0{,}04 + 0{,}04$,

$-0{,}72 \le m_0 \le 0{,}28$. Единственное целое число, удовлетворяющее этому двойному неравенству, $m_0 = 0$. Этому значению $m_0$ соответствует наибольшее значение вероятности $P_6(m_0)$:

$$P_6(0) = C_6^0 p^0 q^6 = \frac{6!}{0!\cdot 6!} 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^6 = 0{,}7828 .$$



### *1.5.2 Локальная и интегральная теоремы Лапласа*

Очевидно, что при больших значениях $n$ пользоваться формулой Бернулли затруднительно, так как придется вычислять значения факториалов больших чисел и возводить в большую степень числа, близкие к нулю $(0 < p < 1)$. В этом случае можно использовать асимптотические формулы Лапласа, дающие тем лучшее приближенное значение $P_n(m)$ и $P_n(k_1 \le m \le k_2)$, чем больше $n$.

**Локальная теорема Лапласа.** Если вероятность $p$ появления события $A$ в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы $(0 < p < 1)$, то вероятность того, что событие $A$ появится в серии из $n$ испытаний ровно $m$ раз приближенно равна (тем точнее, чем больше $n$) значению функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) , \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} .$$

(В приложении А приведена таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ , соответствующих положительным значениям аргумента.)

Функция $\varphi(x)$ является четной функцией, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$, для всех $x \ge 4$ принимается $\varphi(x) = 0$. Таким образом, вероятность того, что событие $A$ появится в $n$ независимых испытаниях ровно $m$ раз, приближенно равна

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) , \tag{11}$$

где $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ .

**Интегральная теорема Лапласа.** Если вероятность $p$ наступления события $A$ в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы $(0 < p < 1)$, то вероятность того, что событие $A$ появится в серии из $n$ испытаний от $k_1$ до $k_2$ раз, приближенно равна

$$P_n(k_1 \le m \le k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) , \tag{12}$$

где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ , $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ .

В приложении Б приведены таблицы значений **функции Лапласа**

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Функция $\Phi(x)$ нечетна, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. При $x > 5$ можно принять $\Phi(x) = 0{,}5$.

**Пример 21** Завод изготавливает конденсаторы. Вероятность выхода из строя за время $T$ одного конденсатора равна 0,2. Найти вероятность того, что из 100 конденсаторов за время $T$ выйдет из строя: а) ровно 10 конденсаторов; б) не менее 20 и не более100 конденсаторов.

Решение. Определим события $B$ = {среди 100 конденсаторов ровно 20 выйдет из строя за время $T$}; $C$ ={среди 100 конденсаторов за время $T$ из строя выйдет не менее 20 и не более100}.

Предполагая, что выход из строя конденсаторов осуществляется независимо друг от друга, условие задачи можно рассматривать как серию из $n = 100$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность события $A$ = {конденсатор выйдет из строя} равна 0,2. То есть $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$.

Так как число испытаний достаточно велико, для вычисления вероятностей событий $B$ и $C$ можно воспользоваться приближёнными формулами Муавра-Лапласа.

а) Определим вероятность события $B$ = {среди 100 конденсаторов ровно 10 выйдет из строя за время Т}.

Для вычисления вероятности события $B$ воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа. В данном случае: $n = 100$; $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$; $m = 10$;

$$P(B) = P_{100}(10) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x).$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{10 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -2{,}5.$$

По таблицам значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ находим

$\varphi(-2{,}5) = 0{,}0175$;

$$P(B) = P_{100}(10) \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot 0{,}0175 = 0{,}004375.$$

б) Для вычисления вероятности события $C$ воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа при $n = 100$; $p = 0{,}2$; $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$; $k_1 = 20$; $k_2 = 100$;

$$P(C) = P_{100}(20 \le m \le 100) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) ;$$



$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 0; \; x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 20.$$

По таблицам значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ находим $\Phi(0) = 0$, $\Phi(20) = 0{,}5$.

Таким образом, $P(C) = P_{100}(20 \le m \le 100) = 0{,}5 - 0 = 0{,}5$.

### *1.5.3 Предельная теорема Пуассона*

Пусть число экспериментов Бернулли велико ($n \to \infty$), а вероятность наступления события $A$ в каждом испытании очень мала ($p \to 0$, $p < 0{,}1$), тогда вероятность того, что событие $A$ появится в серии из $n$ испытаний ровно $m$ раз, приближенно равна

$$P(X = m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \tag{13}$$

($m = 0, 1, 2, \ldots$), где произведение $a = n \cdot p = \mathrm{const}$.

**Пример 22** Предприятие для изучения качества выпускаемой продукции в случайном порядке выбирает 500 изделий. Вероятность того, что изделие окажется бракованным, равна 0,002. Какова вероятность того, что из 500 изделий, выбранных для проверки, окажутся бракованными: а) ровно 5; б) не более 5; в) найдите наиболее вероятное число бракованных изделий среди 500 отобранных.

Решение. Условие задачи можно рассматривать как серию из $n = 500$ независимых испытаний, состоящих в выборе для проверки изделия, в каждом из которых с вероятностью $p = 0{,}002$ может осуществиться событие $A$ = {выбранное для проверки изделие оказалось бракованным}. Вероятность того, что выбранное для проверки изделие оказалось стандартным, $q = 1 - 0{,}002 = 0{,}998$.

В данном случае воспользуемся приближенной формулой Пуассона с параметром $a = np$, так как число испытаний $n = 500$ достаточно велико, а вероятность появления события в каждом испытании $p = 0{,}002$ очень мала ($p < 0{,}1$), то есть в каждом отдельном опыте событие $A$ появляется крайне редко:

$$P(X = m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}; \quad (m = 0, 1, 2, \ldots);$$

$a = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1$.

а) Определим событие $B$ = {из 500 изделий, выбранных для проверки, окажутся бракованными ровно 5}.

$$P(B) = P_{500}(5) \approx \frac{1^5 e^{-1}}{5!} \approx \frac{1}{120} e^{-1} \approx 0{,}0361;$$

б) Определим событие $C$={из 500 изделий, выбранных для проверки, окажутся бракованными не более 5, то есть или 0, или 1, или 2, или 3, или 4, или 5}:

$$P(C) = P_{500}(m \le 5) \approx P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3) + P_{500}(4) + P_{500}(5) \approx$$
$$\approx \frac{1^0 e^{-1}}{0!} + \frac{1^1 e^{-1}}{1!} + \frac{1^2 e^{-1}}{2!} + \frac{1^2 e^{-1}}{3!} + \frac{1^4 e^{-1}}{4!} + \frac{1^5 e^{-1}}{5!} \approx 0{,}99941.$$

в) Определим наиболее вероятное число бракованных изделий среди 500 отобранных:

$$500 \cdot 0{,}002 - 0{,}998 \le m_0 \le 500 \cdot 0{,}002 + 0{,}002, \quad 0{,}002 \le m_0 \le 1{,}002.$$

Наивероятнейшее число $m_0 = 1$.

**Вопросы для самоконтроля**

1 Какие испытания называются независимыми? Приведите примеры.
2 Какие испытания называются испытаниями Бернулли? Приведите примеры.
3 При каких условиях применяется формула Бернулли?
4 Что определяется по формуле Бернулли?
5 При каких условиях применяется предельная теорема Пуассона?
6 При каких условиях применяются предельные теоремы Муавра-Лапласа?
7 Что определяется по локальной теореме Муавра-Лапласа?
8 Что определяется по интегральной теореме Муавра-Лапласа?
9 Какое число называется наивероятнейшим числом наступлений события $A$ в серии из $n$ испытаний?

# 2 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

## 2.1 Дискретные и непрерывные случайные величины

***Случайной величиной*** называют переменную величину, которая в зависимости от исхода испытания принимает значения, зависящие от случая.

Случайные величины принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: $X$, $Y$, $Z$, …, либо буквами греческого алфавита: ξ, η, θ, …, а их значения – строчными буквами латинского алфавита: $x$, $y$, $z$.

*Дискретной* называется случайная величина $X$, которая в результате эксперимента $E$ может принимать только определенные изолированные друг от друга значения. Множество возможных значений дискретных случайных величин является конечным или счетным множеством.

Примеры дискретных случайных величин: число студентов в группе, успешно сдавших экзамен по математике; число клиентов банка, своевременно возвративших кредит; число звонков, поступивших в службу такси в течение часа, и т. д.

Случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый (конечный или бесконечный) промежуток числовой оси, называются **непрерывными**. (В дальнейшем будет дано более точное определение непрерывных случайных величин.) Множество возможных значений непрерывных случайных величин является несчетным множеством.

Примеры непрерывных случайных величин: время безотказной работы оборудования после очередного ремонта; время простоя клиента магазина в очереди; масса израсходованного автомобилем бензина на одном и том же расстоянии; отклонение размера изделия от номинала – являются непрерывными случайными величинами.

## 2.2 Закон распределения случайной величины

Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между значениями $x_1, x_2, x_3, \ldots$ этой величины и их вероятностями $p_1, p_2, p_3, \ldots$

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан таблично или аналитически (то есть с помощью формул).

Очевидно, что для полного описания исследуемого вероятностного эксперимента (то есть для исчерпывающего задания характеризующей его случайной величины) недостаточно задать только пространство элементарных событий Ω. К этому необходимо добавить также:

а) для *дискретной* случайной величины – правило, сопоставляющее каждому возможному значению случайной величины $x_i$ вероятность того, что случайная величина $X$ примет в результате эксперимента это значение:

$$x_i \to P(X = x_i);$$

б) для *непрерывной* случайной величины – правило, позволяющее поставить в соответствие любой измеримой области $\Delta X$ возможных значений случайной величины $X$ вероятность попадания значения случайной величины в эту область:

$$\Delta X \to P(x \in \Delta X).$$

Дадим общее определение: **законом распределения** случайной величины $X$ называется любое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями этой случайной величины и соответствующими им вероятностями.

### *2.2.1 Ряд распределения*

Пусть $X$ – дискретная случайная величина, а $x_1$, $x_2$, $x_3$,… – ее значения. Совокупность всех элементарных событий, на которых $X$ принимает фиксированное значение $x_i$, образует событие $X = x_i$.

Простейшим способом задания закона распределения дискретной случайной величины является **ряд распределения**. Это таблица, в первой строке которой указаны возможные значения случайной величины $x_1, x_2, x_3, \ldots$, а во второй – соответствующие им вероятности $p_1, p_2, p_3,\ldots$, где $p_i = P(X = x_i)$ – вероятность того, что в результате эксперимента случайная величина $X$ примет значение $x_i$:

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | … |

Так как события $(X = x_1)$, $(X = x_2)$, … – несовместны, и их объединение представляет собой все пространство элементарных событий, то сумма вероятностей $p_i$ равна 1:

$$\sum_i P(X = x_i) = \sum_i p_i = 1. \qquad (14)$$

**Графическое изображение ряда распределения** может быть представлено одним из двух способов: в виде столбцовой диаграммы и в виде многоугольника распределения.

**Столбцовая диаграмма** строится следующим образом: для каждого возможного значения случайной величины восстанавливается перпендикуляр к оси абсцисс, на котором откладывается вероятность данного значения.

При построении **многоугольника распределения** по оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины, по оси ординат – соответствующие им вероятности, и полученные соседние точки соединяются отрезками.

**Пример 23** Задают ли законы распределения дискретной случайной величины следующие таблицы?

а)

| $x_i$ | 0 | 1 | 3 | 5 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,1 | 0,1 |

б)

| $x_i$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,3 | 0,1 |



Решение. Первая таблица задает закон распределения дискретной случайной величины, поскольку выполняется равенство (14): $0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}1 + 0{,}1 = 1$.

Вторая таблица не задает закон распределения дискретной случайной величины, так как условие (14) не выполняется: $0{,}1+0{,}3+0{,}5+0{,}3+0{,}1=1{,}3 \neq 1$.

**Пример 24** Дискретная случайная величина имеет закон распределения:

| $x_i$ | 0,1 | 1,2 | 2,3 | 4,5 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | 0,2 | $p_3$ | 0,1 |

Чему равна вероятность $P = p_3$? Построить столбцовую диаграмму и многоугольник распределения.

Решение. Поскольку должно выполняться равенство (14):
$0{,}1+0{,}2+ p_3+0{,}1=1$, то $p_3 = 1 - 0{,}1 - 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}6$.

Столбцовая диаграмма и многоугольник распределения, представляющие ряд распределения этой случайной величины, изображены соответственно на рисунках 6 и 7.

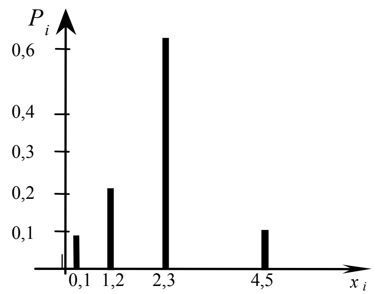



Рисунок 6 – Столбцовая диаграмма

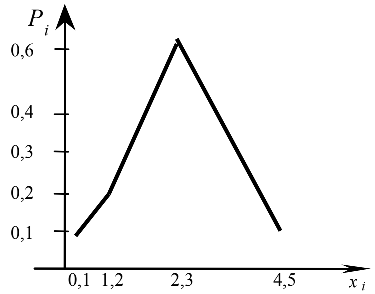



Рисунок 7 – Многоугольник распределения

### *2.2.2 Функция распределения*

Универсальным способом задания закона распределения, пригодным как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин, является функция распределения.

**Функцией распределения случайной величины *X*** называется функция $F(x)$, определяющая для каждого значения $x$ вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение меньшее, чем $x$, то есть

$$F(x) = P(X < x).$$

**Основные свойства функции распределения $F(x)$**:

**1** Так как по определению $F(x)$ равна вероятности события, все возможные значения функции распределения принадлежат отрезку [0; 1]:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

**2** Если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$, то есть $F(x)$ – неубывающая функция своего аргумента.

**3** Вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее полуинтервалу $[a, b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

**4** Если все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[a, b]$, то

$$F(x) = 0, \text{ при } x \le a; \ F(x) = 1, \text{ при } x > b.$$

**Функция распределения дискретных случайных величин** может быть определена по формуле

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i). \qquad (15)$$

Если известен ряд распределения дискретной случайной величины, легко вычислить и построить ее функцию распределения. Продемонстрируем, как это делается на примере 23.

**Пример 25** Вычислить и построить функцию распределения для дискретной случайной величины, закон распределения которой, имеет вид:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0,1 | 1,2 | 2,3 | 4,5 |
| $p_i$ | 0,1 | 0,2 | 0,6 | 0,1 |

Решение. Определим значения функции $F(x) = P(X < x)$ для всех возможных значений $x$:

при $x \in (-\infty; 0{,}1]$ нет ни одного значения случайной величины $X$, меньшего данных значений $x$, то есть нет ни одного слагаемого в сумме (15):

$F(x) = 0$;

при $x \in (0{,}1;\ 1{,}2]$ только одно возможное значение ($X = 0{,}1$) меньше рассматриваемых значений $x$. То есть при $x \in (0{,}1;\ 1{,}2]$ $F(x) = P(X = 0{,}1) = 0{,}1$;

при $x \in (1{,}2;\ 2{,}3]$ два значения ($X = 0{,}1$ и $X = 1{,}2$) меньше данных значений $x$, следовательно, $F(x) = P(X = 0{,}1) + P(X = 1{,}2) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$;

при $x \in (2{,}3; 4{,}5]$ три значения ($X = 0{,}1$, $X = 1{,}2$ и $X = 2{,}3$) меньше данных значений $x$, следовательно,
$F(x) = P(X = 0{,}1) + P(X = 1{,}2) + P(X = 2{,}3) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}6 = 0{,}9$;

при $x \in (4{,}5, \infty)$ все возможные значения случайной величины $X$ будут



меньше данных значений $x$, и $F(x) = P(X = 0{,}1) + P(X = 1{,}2) + P(X = 2{,}3) + P(X = 4{,}5) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}1 = 1$.

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty, 0{,}1]; \\ 0{,}1 & \text{при } x \in (0{,}1, 1{,}2]; \\ 0{,}3 & \text{при } x \in (1{,}2, 2{,}3]; \\ 0{,}9 & \text{при } x \in (2{,}3, 4{,}5]; \\ 1 & \text{при } x \in (4{,}5, \infty). \end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображен на рисунке 8.

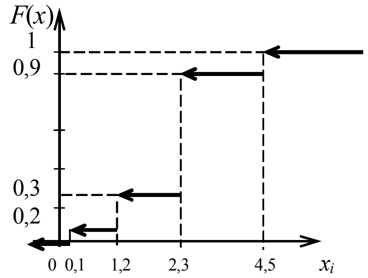



Рисунок 8 – Функция распределения

В общем случае, функция распределения $F(x)$ дискретной случайной величины $X$ есть разрывная ступенчатая функция, непрерывная слева, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям $x_1$, $x_2$, … случайной величины $X$ и равны вероятностям $p_1$, $p_2$, … этих значений.

**Функция распределения непрерывных случайных величин.** Теперь можно дать более точное определение непрерывных случайных величин: случайная величина $X$ называется **непрерывной**, если ее функция распределения $F(x)$ при всех значениях $x$ непрерывна и, кроме того, имеет производную $F'(x)$ всюду, за исключением, может быть, отдельных точек.

Из непрерывности функции $F(x)$ следует, что *вероятность каждого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю*.

Так как вероятность каждого отдельного значения непрерывной случайной величины равна 0, свойство 3 функции распределения для непрерывной случайной величины будет иметь вид

$$P(a \le X < b) = P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

**Пример 26** Вероятности поражения цели для каждого из двух стрелков соответственно равны: 0,7; 0,6. Случайная величина $X$ – число промахов, при условии, что каждый стрелок сделал по одному выстрелу. Составить ряд распределения случайной величины $X$, построить столбцовую диаграмму и функцию распределения.

Решение. Возможные значения данной случайной величины $X$: 0, 1, 2. Условие задачи можно рассматривать как серию из $n = 2$ независимых испытаний. В данном случае для вычисления вероятностей возможных значений случайной величины $X$ можно воспользоваться теоремами сложения вероятностей несовместных событий и умножения вероятностей независимых событий:

Обозначим события:

$A_i$ = {$i$-й стрелок поразил мишень}, $i = 1, 2$.

Согласно условию, вероятность события $A_1$ $P(A_1) = 0{,}7$, вероятность события $A_2$ – $P(A_2) = 0{,}6$ . Тогда вероятности противоположных событий: $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ .

Определим все элементарные события данного случайного эксперимента и соответствующие вероятности:

| Элементарные события | События | Вероятности |
|---|---|---|
| $\omega_1$ | $A_1 A_2$ | $0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42$. |
| $\omega_2$ | $A_1 \overline{A}_2$ | $0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$. |
| $\omega_3$ | $\overline{A}_1 A_2$ | $0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$. |
| $\omega_4$ | $\overline{A}_1 \overline{A}_2$ | $0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$. |
| Итого | $\Omega$ | 1 |

$$P(X = 0) = P(\omega_1) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42;$$

$$P(X = 1) = P(\omega_2) + P(\omega_3) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) =$$
$$= 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}28 + 0{,}18 = 0{,}46;$$

$$P(X = 2) = P(\omega_4) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12;$$

(Проверим, что $\sum_{i=1}^{3} p_i = \sum_{j=0}^{2} P(x = j) = 1$).

Ряд распределения данной случайной величины $X$ имеет вид

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | Итого |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,42 | 0,46 | 0,12 | 1 |



Столбцовая диаграмма, соответствующая этому ряду распределения, приведена на рисунке 9.

Вычислим функцию распределения данной случайной величины:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i):$$

при $x \in (-\infty, 0]$ $F(x) = 0$ ;

при $x \in (0, 1]$ $F(x) = P(X = 0) = 0{,}42$ ;

при $x \in (1, 2]$ $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}42 + 0{,}46 = 0{,}88$ ;

при $x \in (2, +\infty)$;

$$F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}42 + 0{,}46 + 0{,}12 = 1.$$

Итак, функция распределения рассматриваемой случайной величины имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \in (-\infty, 0]; \\ 0{,}42 & \text{при} \quad x \in (0, 1]; \\ 0{,}88 & \text{при} \quad x \in (1, 2]; \\ 1 & \text{при} \quad x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

График функции $F(x)$ приведён на рисунке 10.

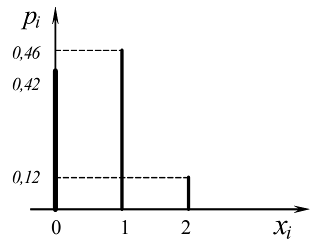



Рисунок 9 – Столбцовая диаграмма

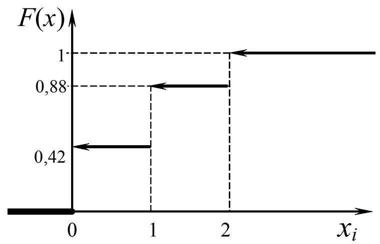



Рисунок 10 – Функция распределения

### *2.2.3 Функция плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины*

**Плотностью распределения вероятностей** непрерывной случайной величины $X$ в точке $x$ называется производная ее функции распределения в этой точке:

$$f(x) = F'(x).$$

По своему смыслу значения функции $f(x)$ пропорциональны вероятности того, что исследуемая случайная величина примет значение где-то в непосредственной близости от точки $x$.

Функция плотности распределения $f(x)$, как и функция распределения $F(x)$, является одной из форм задания закона распределения, но она применима только для непрерывных случайных величин. Функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$ еще называют **дифференциальной функцией распределения**, тогда как функцию распределения $F(x)$ называют, соответственно, **интегральной функцией распределения**.

График функции плотности распределения $f(x)$ называется **кривой распределения**.

Рассмотрим свойства, которыми обладает функция плотности распределения непрерывной случайной величины.

**Свойство 1.** Плотность распределения вероятностей – неотрицательная функция:

$$f(x) \ge 0$$

(*геометрически:* кривая распределения лежит не ниже оси абсцисс).

**Свойство 2.** Вероятность попадания значения случайной величины на участок от $\alpha$ до $\beta$ определяется по формуле

$$P(\alpha \le X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx;$$

(*геометрически:* эта вероятность равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $f(x)$, осью $Ox$ и прямыми $x = \alpha$ и $x = \beta$).

**Свойство 3.** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(*геометрически*: площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс, равна единице).

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[a, b]$, то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1.$$

**Свойство 4.** Функция распределения $F(x)$ может быть найдена по известной функции плотности распределения следующим образом:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\ .$$

**Пример 27** Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \le \sqrt{2}; \\ \frac{1}{2}x^2 - 1, & \sqrt{2} < x \le 2; \\ 1, & 2 < x < \infty. \end{cases}$$

Определить дифференциальную функцию плотности распределения.

Решение. Определим дифференциальную функцию плотности распределения

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \le \sqrt{2}; \\ x, & \sqrt{2} < x \le 2; \\ 0, & 2 < x < \infty. \end{cases}$$

**Пример 28** Является ли плотностью распределения некоторой случайной величины каждая из следующих функций?

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3, \\ \frac{1}{2}, & 3 < x \le 5, \\ 0, & x > 5; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\infty, \\ \frac{x}{1+x^2}, & -\infty < x < +\infty; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \frac{3x^2}{2}, & -1 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

Решение. а) Проверим справедливость свойства 3: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

В данном случае имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{3} 0dx + \int_{3}^{5} \frac{1}{2}dx + \int_{5}^{+\infty} 0dx = \int_{3}^{5} \frac{1}{2}dx = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Функция неотрицательна для всех $x$. То есть заданная функция является функцией плотности распределения некоторой случайной величины.

б) Заданная функция не является плотностью распределения некоторой случайной величины, так как $f(x) < 0$ при $x < 0$.

в) Проверим справедливость свойства 3: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

В данном случае имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^{1} \frac{3x^2}{2}dx + \int_{1}^{+\infty} 0dx = \int_{-1}^{1} \frac{3x^2}{2}dx = \left.\frac{x^3}{2}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Функция неотрицательна для всех $x$. То есть заданная функция является функцией плотности распределения некоторой случайной величины.

**Вопросы для самоконтроля**

1 Что называется случайной величиной?
2 Какие величины называются дискретными? непрерывными?
3 Что называется законом распределения случайной величины?
4 Какими способами может быть задан закон распределения дискретной случайной величины? непрерывной?
5 Что характеризует функция распределения *F(x)* случайной величины?
6 Как определить вероятность попадания значения случайной величины в некоторый интервал с помощью функции распределения?
7 Что характеризует функция плотности распределения случайной величины? Укажите ее вероятностный смысл.
8 Для каких величин определена функция плотности распределения?
9 Может ли функция плотности распределения принимать отрицательные значения?
10 Как связаны между собой функции *F(x)* и *f*(*x*)?
11 Какие случайные величины называются непрерывными?
12 Чему равна площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс?
13 Как определить вероятность попадания значения непрерывной случайной величины в некоторый интервал с помощью функции плотности распределения?

## 2.3 Числовые характеристики случайных величин

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Кроме того, в теории вероятностей широко используются некоторые «типичные значения», которые характеризуют случайную величину суммарно. Эти числа, описывающие некоторые характерные черты распределения, называются **числовыми характеристиками**.

Важнейшей числовой характеристикой положения случайной величины является математическое ожидание.

1 **Математическое ожидание** характеризует среднее значение случайной величины, вокруг которого группируются все ее значения. Термин «математическое ожидание» связан с начальным периодом развития теории вероятностей, когда она развивалась на примерах и задачах азартных игр и игрока интересовал средний выигрыш, то есть среднее значение ожидаемого выигрыша. Для дискретных и непрерывных случайных величин математическое ожидание вычисляется, соответственно, по формулам (17) и (18) (при условии, что ряд в формуле (17) и интеграл в формуле (18) сходятся абсолютно):

$$M[X] = \sum_i x_i p_i \,; \tag{17}$$



$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \,. \tag{18}$$

*В механической интерпретации* математическое ожидание характеризует центр тяжести системы.

**Свойства математического ожидания:**

а) математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной:

$$M[C] = C;$$

б) постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M[CX] = C\,M[X];$$

в) математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин равно алгебраической сумме их математических ожиданий.

Например, для трех случайных величин $X_1$, $X_2$, $X_3$

$$M[X_1 \pm X_2 \pm X_3] = M[X_1] \pm M[X_2] \pm M[X_3];$$

г) если $P(\alpha \le X < \beta) = 1$, то $M[X] \in [\alpha; \beta]$, то есть математическое ожидание произвольной случайной величины $X$ принадлежит интервалу между минимальным и максимальным возможными значениями случайной величины $X$;

д) математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий. Например, для трех независимых случайных величин $X_1$, $X_2$, $X_3$

$$M[X_1 X_2 X_3] = M[X_1]\, M[X_2]\, M[X_3].$$

2 **Модой** дискретной случайной величины $X$ (обозначается $x_{\text{mod}}$) называется ее наиболее вероятное значение, то есть то значение, для которого вероятность $p_i$ достигает максимума. Моду дискретной случайной величины можно определить графически по столбцовой диаграмме, как абсциссу столбца, имеющего наибольшую высоту.

**Модой** непрерывной случайной величины $X$ (обозначается $x_{\text{mod}}$) называется то ее возможное значение, которому соответствует локальный максимум плотности распределения. В частности, если распределение имеет два максимума, то распределение называется двумодальным.

**Замечание** – Рассмотрим функцию $y = f(x)$, областью определения которой является промежуток $(a,b)$. Если можно указать такую $\delta$ – окрестность точки $x_1$, принадлежащую промежутку $(a,b)$, что для всех $x \in O(x_1, \delta)$, $x \neq x_1$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x)$, то $y_1 = f(x_1)$ называют локальным максимумом функции $y = f(x)$. *Максимум функции имеет локальный характер* (это наибольшее значение функции в достаточно малой окрестности соответствующей точки).

3 **Медианой** случайной величины $X$ называется такое ее значение $x_{\text{med}}$, для которого $P(X < x_{\text{med}}) = P(X \geq x_{\text{med}}) = 0{,}5$, то есть одинаково вероятно, примет ли случайная величина значение, большее или меньшее медианы. *Геометрически:* медиана – это координата той точки на оси абсцисс, для которой площади фигур, ограниченных кривой $f(x)$ и осью абсцисс, находящихся слева и справа от неё, одинаковы и равны 0,5. Учитывая определение функции распределения, $F(x_{\text{med}}) = 0{,}5$.

Эта характеристика применяется, как правило, только для непрерывных случайных величин. Для дискретных случайных величин множество значений $x$, удовлетворяющих свойству медианы $F(x_{\text{med}}) = 0{,}5$, либо бесконечно, либо является пустым.

Очевидно, что характеристики положения (математическое ожидание, мода и медиана) имеют такую же размерность, как и сама случайная величина.

4 **Дисперсия** является мерой рассеивания значений случайной величины относительно ее математического ожидания. Для дискретных и непрерывных случайных величин дисперсию можно вычислить соответственно по формулам

$$D[X] = \sum_{i}^{n}(x_i - M[X])^2 p_i = = \sum_{i}^{n} x_i^2 p_i - (M[X])^2; \tag{19}$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M[X])^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M[X])^2. \tag{20}$$

В *механической интерпретации* дисперсия представляет собой момент инерции распределения масс относительно центра масс (математического ожидания). Если говорить о форме кривой плотности распределения, то дисперсия характеризует степень ее «размазанности» по оси $Ox$. Чем больше величина $D[X]$, тем более «размазанным» выглядит соответствующее распределение.

**Свойства дисперсии:**

а) дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D[C] = 0;$$

б) постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D[CX] = C^2 D[X];$$

в) дисперсия алгебраической суммы нескольких независимых случайных величин равна сумме их дисперсий. Например, для трех случайных величин $X_1$, $X_2$ и $X_3$

$$D[X_1 \pm X_2 \pm X_3] = D[X_1] + D[X_2] + D[X_3];$$

г) $D[C \pm X] = D[X]$.



5 Для того чтобы получить характеристику разброса значений случайной величины относительно математического ожидания, имеющую такую же размерность, как и сама случайная величина, используют корень квадратный из дисперсии, взятый с положительным знаком. Полученная величина называется **средним квадратическим отклонением** (или **стандартным отклонением**) и обозначается $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$. Чем больше разброс значений случайной величины X вокруг $M[X]$, тем больше $\sigma[X]$ и $D[X]$.

Как следует из определения, размерность дисперсии равна квадрату размерности случайной величины. Так, если случайная величина имеет размерность «***вагон***», то математическое ожидание, мода и медиана имеют размерность «***вагон***», дисперсия размерность «***вагон***$^2$», а среднее квадратическое отклонение размерность «***вагон***».

Часто используются две безразмерные числовые характеристики, описывающие скошенность и островершинность графика функции плотности распределения вероятностей.

6 **Коэффициент асимметрии** (обозначается $A[X]$) характеризует скошенность распределения случайной величины относительно математического ожидания. Для симметричных относительно математического ожидания распределений $A[X] = 0$. Если в распределении случайной величины преобладают положительные отклонения, то $A[X] > 0$, если отрицательные, то $A[X] < 0$. На рисунке 11 изображены графики функций плотности распределения вероятностей с положительным и отрицательным значениями $A[X]$, а также график симметричного распределения. Значение коэффициента асимметрии для дискретных и непрерывных случайных величин вычисляется, соответственно по формулам

$$A[X] = \frac{\sum_i (x_i - M[X])^3 p_i}{(\sigma[X])^3}; \qquad A[X] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(x - M[X])^3 f(x)dx}{(\sigma[X])^3}.$$

7 **Коэффициент эксцесса** (обозначается $Ex[X]$) характеризует островершинность графика функции плотности распределения вероятностей $f(x)$. Своеобразным началом отсчета при измерении степени островершинности служит нормальное распределение, для которого $Ex[X] = 0$. Как правило, распределения с более высокой и более острой вершиной кривой плотности распределения (или многоугольника распределения) имеют положительное значение коэффициента эксцесса, а с более низкой и пологой – отрицатель-

ное значение. На рисунке 12 приведены графики функции плотности нормального распределения, а также распределений, имеющих положительное и отрицательное значения коэффициента эксцесса.

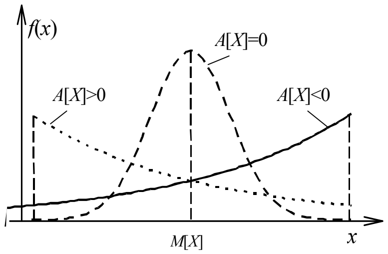



Рисунок 11 – Графики функции плотности нормального распределения при различных $A[X]$

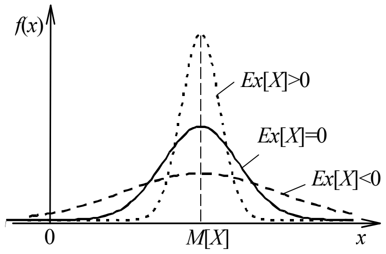



Рисунок 12 – Графики функции плотности нормального распределения при различных $Ex[X]$

Для вычисления значений коэффициента эксцесса дискретных и непрерывных случайных величин используются следующие формулы:

$$Ex[X] = \frac{\sum\limits_i (x_i - M[X])^4 p_i}{(\sigma[X])^4} - 3; \qquad Ex[X] = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^4 f(x)dx}{(\sigma[X])^4} - 3.$$

**Пример 29** На основании данных примера 25 вычислить числовые характеристики случайной величины $X$, а также найти:

$M[3X]$, $M[X/2]$, $M[X \cdot X]$, $M[2X+7]$, $D[3X]$, $D[3X+X]$, $D[5X-X]$.

Решение. Перепишем ряд распределения в виде:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | Итого |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,42 | 0,46 | 0,12 | 1 |
| $x_i \cdot p_i$ | 0 | 0,46 | 0,24 | 0,7 |
| $x_i^2 \cdot p_i$ | 0 | 0,46 | 0,48 | 0,94 |

Вычислим числовые характеристики данной случайной величины.

Математическое ожидание (расчет в таблице)

$M[X] = \sum\limits_{i=1}^{3} x_i p_i = 0{,}7$ [*промахов*],

то есть среднее число промахов при двух выстрелах равно 0,7.

Как следует из ряда распределения, данная случайная величина имеет моду: $x_{\text{mod}} = 1$, то есть наиболее вероятное число промахов при двух выстрелах равно 1.

Дисперсия



$$D[X] = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i - (M[X])^2 = 0{,}94 - 0{,}7^2 = 0{,}45 \ [\textit{промахов}^2].$$

Среднее квадратическое отклонение

$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0{,}45} = 0{,}671$ [*промахов*], то есть среднее квадратическое отклонение числа промахов при двух выстрелах равно 0,671.

Вычислим (считая, что $X$, $3X$, $5X$ – независимые случайные величины):

$$M[3X] = 3M[X] = 3 \cdot 0{,}7 = 2{,}1,$$
$$M[X/2] = \frac{1}{2}M[X] = 0{,}7/2 = 0{,}35,$$
$$M[X \cdot X] = M[X] \cdot M[X] = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49,$$
$$M[2X+7] = 2M[X] + M[7] = 2 \cdot 0{,}7 + 7 = 8{,}4,$$
$$D[3X] = 3^2 D[X] = 9 \cdot 0{,}45 = 4{,}05,$$
$$D[3X+X] = 3^2 D[X] + D[X] = 9 \cdot 0{,}45 + 0{,}45 = 4{,}5,$$
$$D[5X-X] = 5^2 D[X] + D[X] = 25 \cdot 0{,}45 + 0{,}45 = 11{,}7.$$

**Вопросы для самоконтроля**

1 Как определяется математическое ожидание дискретной случайной величины?

2 Как определяется математическое ожидание непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$?

3 Как определяется математическое ожидание непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат интервалу $(-\infty, +\infty)$?

4 Каковы свойства математического ожидания случайной величины ?

5 Как определяется дисперсия дискретной случайной величины?

6 Как определяется дисперсия непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$?

7 Как определяется дисперсия непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат интервалу $(-\infty, +\infty)$?

8 Что такое среднее квадратическое отклонение?

## 2.4 Некоторые наиболее важные для практики распределения случайных величин

### *2.4.1 Биномиальное распределение*

Говорят, что дискретная случайная величина $X$ распределена по **биномиальному закону**, если возможные значения этой случайной величины 0, 1, 2,…, $n$, а вероятность каждого из значений определяется по формуле Бернулли

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{21}$$

где $0 \le p \le 1$; $q = 1 - p$; $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Постоянные $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{n}$, входящие в формулу (21), называются параметрами биномиального распределения.

На практике биномиальное распределения возникает при следующих условиях: пусть производится серия из $n$ независимых испытаний, в каждом из которых событие $A$ может осуществиться с вероятностью $p$. Тогда случайная величина $X$, определяющая число появлений события $A$ в серии из $n$ испытаний, распределена по биномиальному закону.

Закон называется «биномиальным» потому, что правую часть равенства (21) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + C_n^2 p^{n-2} q^2 + \ldots + C_n^1 p q^{n-1} + C_n^0 q^n. \qquad (22)$$

Ряд распределения случайной величины $X$, распределенной по биномиальному закону, имеет вид:

| $x_i$ | 0 | 1 | … | $k$ | … | $n-1$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $q^n$ | $npq^{n-1}$ | … | $C_n^k p^k q^{n-k}$ | … | $np^{n-1}q$ | $p^n$ |

Для случайной величины, распределенной по биномиальному закону,

$$M[X] = np,\ D[X] = npq,\ \sigma[X] = \sqrt{npq}\,. \qquad (23)$$

**Пример 30** По каналу связи передается 5 сообщений. Каждое сообщение с вероятностью 0,1 независимо от других искажается. Случайная величина $X$ – число искаженных сообщений. Построить ряд распределения этой случайной величины, вычислить ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непосредственно по ряду распределения и сравнить со значениями, которые получаются при использовании формул (23). Найти вероятность того, что будет искажено не более одного сообщения.

Решение. Условие задачи соответствует проведению $n=5$ независимых испытаний, в каждом из которых с вероятностью $p=0{,}1$ может осуществиться событие $A$ = {искажение передаваемого сигнала}. Случайная величина $X$, обозначающая число искаженных сообщений, распределена по биномиальному закону. Возможные значения этой случайной величины: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Вероятности возможных значений случайной величины определяются по формуле Бернулли:

$$P(X=0) = C_5^0 p^0 q^5 = 1\cdot 1\cdot 0{,}9^5 = 0{,}59049;\ P(X=1) = C_5^1 p^1 q^4 = 5\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^4 = 0{,}32805;$$

$$P(X=2) = C_5^2 p^2 q^3 = 10\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^3 = 0{,}0729;\ P(X=3) = C_5^3 p^3 q^2 = 10\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9^2 = 0{,}0081;$$

$$P(X=4) = C_5^4 p^4 q^1 = 5\cdot 0{,}1^4\cdot 0{,}9^1 = 0{,}00045;\ P(X=5) = C_5^5 p^5 q^0 = 1\cdot 0{,}1^5\cdot 1 = 0{,}00001.$$



Ряд распределения имеет вид:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Итого |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,59049 | 0,32805 | 0,0729 | 0,0081 | 0,00045 | 0,00001 | 1 |
| $x_i\cdot p_i$ | 0 | 0,32805 | 0,1458 | 0,0243 | 0,0018 | 0,00005 | 0,5 |
| $x_i^2\cdot p_i$ | 0 | 0,32805 | 0,2916 | 0,0729 | 0,0072 | 0,00025 | 0,7 |

Убедимся, что $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$.

Вычислим числовые характеристики данной случайной величины:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 0{,}5\ [\textit{сообщений}];$$

$$D[X] = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i - (M[X])^2 = 0{,}7 - 0{,}5^2 = 0{,}45\ [\textit{сообщений}^{\,2}];$$

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0{,}45} = 0{,}671\ [\textit{сообщений}];$$

$x_{mod} = 0$ [*сообщений*].

Вычислим числовые характеристики этой случайной величины по формулам (23):

$M[X] = np = 5\cdot 0{,}1 = 0{,}5;\ D[X] = npq = 5\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9 = 0{,}45.$

Как и следовало ожидать, получены точно такие же значения.

Вероятность того, что будет искажено не более одного сообщения,

$P(X\le 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}59049 + 0{,}32805 = 0{,}91854.$

### *2.4.2 Геометрическое распределение*

На практике ***геометрическое*** распределение возникает при следующих условиях: пусть производится серия независимых опытов, в каждом из которых может произойти событие $A$ с одной и той же вероятностью $p$. Опыты продолжаются до первого появления события $A$. Тогда случайная величина $X$, определяющая ***число неудач, предшествующих успеху***, распределена по геометрическому закону.

Возможные значения этой случайной величины: 0, 1, 2, …, $n$, …, а вероятность каждого из этих значений определяется по формуле

$$P(X=m) = q^m p\,, \qquad (24)$$

где $0\le p\le 1$; $q = 1-p$; $m = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ .

Геометрическое распределение зависит от параметра $\boldsymbol{p}$.

**Замечание** – Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему, умноженному на одно и то же, не равное нулю, число, называемое знаменателем геометрической прогрессии $q$,

$$a_2 = a_1 q\,,\ a_3 = a_2 q = a_1 q^2\,,\ \ldots,\ a_{n+1} = a_1 q^n\,.$$

Сумма бесконечно убывающей ($q < 1$) геометрической прогрессии $S = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Условие $\sum\limits_i P(X = x_i) = \sum\limits_i p_i = 1$ выполняется, так как принимая во внимание условие сходимости геометрического ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty} q^m a$, ($|q| < 1$) и формулу $S = \dfrac{a}{1-q}$ для его суммы, получаем $\sum\limits_{m=0}^{\infty} q^m p = \dfrac{p}{1-q} = \dfrac{p}{p} = 1.$

Ряд распределения случайной величины $X$, имеющей геометрический закон:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | … | m | … | $n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $p$ | $q^1 p$ | $q^2 p$ | … | $q^m p$ | … | $q^n p$ | … |

Для случайной величины, распределенной по геометрическому закону,

$$M[X] = \frac{1}{1-p}\,,\ D[X] = \frac{1-p}{p^2}\,,\ \sigma[X] = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}\,,\ \mathrm{mod}[X] = 0.$$

**Пример 31** Вероятность изготовления нестандартного изделия при некотором технологическом процессе равна 0,06. Контролер берет из партии изделие и сразу проверяет его качество. Если оно оказывается нестандартным, то дальнейшие испытания прекращаются, а партия задерживается. Если же изделие оказывается стандартным, то контролер проверяет следующее изделие и т. д. Записать закон распределения случайной величины $X$ – ***числа стандартных изделий***, проверенных до выявления брака.

Решение. Условие задачи соответствует проведению независимых испытаний, в каждом из которых с вероятностью $p = 0{,}06$ может осуществиться событие $A$ = {обнаружено нестандартное изделие}. В этом случае ***неудача*** – обнаружение стандартного изделия, ***успех*** – обнаружение нестандартного изделия. Случайная величина $X$ – число стандартных изделий, проверенных до выявления брака, распределена по геометрическому закону. Возможные значения этой случайной величины: 0, 1, 2, 3, …, $m$, …. По условию $p = 0{,}06$, $q = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.



Вероятности значений определяются по формуле (24):

$P(X = 0) = q^0 p = 0{,}94^0 \cdot 0{,}06 = 0{,}06$ (то есть нестандартное изделие будет обнаружено сразу же при проверке первого изделия, при этом число стандартных изделий, ***проверенных до появления брака***, будет равно 0);

$P(X = 1) = q^1 p = 0{,}94 \cdot 0{,}06 = 0{,}0564$ (то есть нестандартное изделие будет обнаружено при проверке второго изделия, при этом число стандартных изделий, ***проверенных до появления брака***, будет равно 1);

$P(X = 2) = q^2 p = 0{,}94^2 \cdot 0{,}06 = 0{,}053016$ (то есть нестандартное изделие будет обнаружено при проверке третьего изделия, при этом число стандартных изделий, ***проверенных до появления брака***, будет равно 2) и т. д.

Закон распределения можно записать в виде $P(X = m) = 0{,}94^m \cdot 0{,}06$, или в виде ряда распределения случайной величины $X$:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | … | $m$ | … | $n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,06 | 0,0564 | 0,053016 | … | $0{,}94^m \cdot 0{,}06$ | … | $0{,}94^n \cdot 0{,}06$ | … |

В литературе встречается и иное определение геометрического распределения: случайная величина $X$ распределена по **геометрическому закону**, если эта величина дискретна и определяет число независимых испытаний Бернулли, предшествующих первому появлению успеха. Возможные значения этой случайной величины 1, 2, …, $n$, …, а вероятность каждого из значений определяется по формуле

$$P(X = m) = q^{m-1} p\,, \tag{25}$$

где $0 \le p \le 1$; $q = 1 - p$; $m = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ .

В этом примере случайная величина $X$ определяет ***число произведенных опытов, предшествующих успеху.***

Ряд распределения случайной величины $X$, распределенной по геометрическому закону, имеет вид:

| $x_i$ | 1 | 2 | … | $m$ | … | $n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $p$ | $q^1 p$ | … | $q^{m-1} p$ | … | $q^{n-1} p$ | … |

Для случайной величины, распределенной по геометрическому закону,

$$M[X] = \frac{1}{p}\,,\ D[X] = \frac{1-p}{p^2}\,,\ \sigma[X] = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}\,,\ \mathrm{mod}[X] = 1\,.$$

**Пример 32** На основании данных примера 31 записать закон распределения случайной величины $X$ – ***числа проверенных изделий*** до выявления брака.

Решение. Условие задачи соответствует проведению независимых испытаний, в каждом из которых с вероятностью $p = 0{,}06$ может осуществиться событие $A$ = {обнаружено нестандартное изделие}. В этом случае ***неудача*** – обнаружение стандартного изделия, ***успех*** – обнаружение нестандартного изделия. Случайная величина $X$ – число проверенных изделий до выявления брака, распределена по геометрическому закону. Возможные значения этой случайной величины: 1, 2, 3, …, $m$,…. По условию $p$ = 0,06, $q$ = 0,94.

Вероятности возможных значений определяются по формуле (25):

$P(X=1) = p = 0{,}06$ (то есть нестандартное изделие будет обнаружено сразу же ***при проверке первого*** изделия и партию задержат);

$P(X=2) = q^1 p = 0{,}94 \cdot 0{,}06 = 0{,}0564$ (то есть нестандартное изделие будет обнаружено ***при проверке второго*** изделия, при этом число стандартных изделий, проверенных до появления брака, будет равно 1);

$P(X=3) = q^2 p = 0{,}94^2 \cdot 0{,}06 = 0{,}053016$ (то есть нестандартное изделие будет обнаружено ***при проверке третьего*** изделия, при этом число стандартных изделий, проверенных до появления брака, будет равно 2) и т. д.

Закон распределения рассмотренной случайной величины можно записать в виде $P(X=m) = 0{,}94^{m-1} \cdot 0{,}06$, или в виде ряда распределения случайной величины $X$:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | … | $m$ | … | $n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,06 | 0,0564 | 0,053016 | … | $0{,}94^{m-1} \cdot 0{,}06$ | … | $0{,}94^{n-1} \cdot 0{,}06$ | … |

**Пример 33** Производится подбрасывание игрального кубика до первого выпадения шести очков. Какова вероятность того, что первое выпадение шестерки произойдет при втором подбрасывании игрального кубика?

Решение. Условие задачи соответствует проведению независимых испытаний, в каждом из которых с вероятностью $p = 1/6$ может осуществиться событие $A$ = {выпадение шести очков}. В этом случае ***неудача*** – выпадение любого числа от 1 до 5, ***успех*** – выпадение шести очков. Случайная величина $X$ – число подбрасываний игрального кубика до выпадения шестерки, распределена по геометрическому закону. Возможные значения этой случайной величины: 1, 2, 3, …, $m$,…. Вероятность успеха $p$ = 1/6, вероятность неудачи $q$ = (1 – 1/6) = 5/6.

Вероятности появления шестерки при втором подбрасывании кубика определим по формуле (25):

$P(X=2) = q^1 p = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36} = 0{,}13888$ (то есть шестерка появится при ***втором подбрасывании кубика***, при этом при первом подбрасывании появится любое число от 1 до 5).



Закон распределения рассмотренной случайной величины можно записать в виде $P(X=m) = \frac{5^{m-1}}{6} \cdot \frac{1}{6}$.

### *2.4.3 Распределение Пуассона*

Говорят, что дискретная случайная величина $X$ распределена по **закону Пуассона**, если ее возможные значения: 0, 1, 2, …, $m$,… (счетное множество значений), а соответствующие им вероятности задаются формулой

$$P(X = m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a} \tag{26}$$

$(m = 0, 1, 2, \ldots)$.

Таблица значений вероятности для различных значений $m$ и $a$ приведена в приложении В.

Таким образом, ряд распределения случайной величины $X$, распределенной по закону Пуассона, имеет вид:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | … | $k$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $e^{-a}$ | $ae^{-a}$ | $(a^2e^{-a})/2!$ | … | $(a^ke^{-a})/k!$ | … |

Закон распределения Пуассона зависит от одного параметра: ***a***. Доказано, что для случайной величины, распределенной по закону Пуассона,

$$M[X] = a,\ D[X] = a,\ \sigma[X] = \sqrt{a}.$$

Рассмотрим условия, при которых возникает распределение Пуассона.

1 Распределение Пуассона с параметром $a = np$ можно приближенно применять вместо биномиального распределения, когда ***число испытаний n достаточно велико***, а ***вероятность появления события*** в каждом испытании ***p очень мала*** ($p < 0{,}1$), то есть в каждом отдельном опыте событие $A$ появляется крайне редко. Отсюда происходит использующееся еще иногда для закона Пуассона название «закон редких событий».

2 По закону Пуассона распределена случайная величина, описывающая число событий простейшего потока, произошедших в течение промежутка времени $t$.

**Простейший поток событий.** *Потоком событий* называется последовательность однородных событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени.

*Интенсивностью потока* $\lambda$ называется среднее число событий, происходящих за единицу времени.

Если $\lambda = \text{const}$, то поток называется *стационарным*. Это свойство означает, что вероятность наступления того или иного числа событий в течение отрезка времени длиной $t$ не зависит от расположения на оси времени этого отрезка, а зависит только от его длины.

Поток называется *ординарным*, если вероятность попадания на малый участок $\Delta t$ двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания на него одного события. Грубо говоря, это означает, что события возникают поодиночке, а не группами по два, по три и т. д.

Поток событий называется *потоком без последействия*, если вероятность попадания того или иного числа событий на какой-то отрезок времени не зависит от того, сколько событий попало на любой другой непересекающийся с ним участок, то есть предыстория потока не сказывается на вероятности появления событий в ближайшем будущем. Эта независимость физически сводится к тому, что события появляются на оси времени в силу случайных причин, индивидуальных для каждого из них.

Поток, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия, называется *простейшим*.

Доказано, что для простейшего потока число событий, попадающих на каждый отрезок времени длиной $t$, распределено по закону Пуассона с параметром $a = \lambda t$, где $\lambda$ – интенсивность потока.

**Пример 34** Коммутатор учреждения обеспечивает соединение 400 абонентов по внутренней связи, для каждого из которых вероятность того, что он позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение часа: а) 5 абонентов позвонят на коммутатор; б) не более 4 абонентов позвонят на коммутатор; в) более 4 абонентов позвонят на коммутатор.

Решение. Случайная величина $X$, определяющая число абонентов, позвонивших на коммутатор в течение часа, может принимать значения 0, 1, 2, …, 400. Определим событие $B$ = {в течение часа 5 абонентов позвонят на коммутатор}.

Так как число испытаний велико, а вероятность наступления события $A$ = {в течение часа абонент позвонит на коммутатор} очень мала ($p = 0{,}01 < 0{,}1$), то в этом случае можно воспользоваться приближенной формулой Пуассона

$$P(A) = P(X = 5) \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0{,}1563.$$

$a = np = 400 \cdot 0{,}01 = 4$.

Определим событие $C$ = {в течение часа не более 4 абонентов позвонят на коммутатор, то есть или 0, или 1, или 2, или 3, или 4}.

Воспользуемся приближенной формулой Пуассона и теоремой сложения вероятностей несовместных событий:



$$P(C) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4) = \frac{4^0}{0!}e^{-4} +$$

$$+\frac{4^1}{1!}e^{-4} + \frac{4^2}{2!}e^{-4} + \frac{4^3}{3!}e^{-4} + \frac{4^4}{4!}e^{-4} \approx 0{,}0183 + 0{,}0733 + 0{,}1465 + 0{,}1954 +$$

$$+ 0{,}1954 = 0{,}6289.$$

Определим событие $D$ ={в течение часа более 4 абонентов позвонят на коммутатор, то есть или 5, или 6, или 7, или 8, …}.

События $C$ и $D$ – противоположные, то есть $C + D = \Omega$, $P(C)+P(D) = 1$, $P(D) = 1 – P(C) = 1 – 0{,}6289 = 0{,}3711$.

**Пример 35** К абоненту АТС в среднем поступает 1,5 вызова в час. Поток вызовов можно считать простейшим. Для этого промежутка времени найти вероятность того, что: а) в течение часа поступит хотя бы один вызов; б) в течение трех часов произойдет не менее четырех вызовов.

Решение. а) Случайная величина $X_1$, определяющая число вызовов, поступивших в течение часа, может принимать значения 0, 1, 2, 3,… и, согласно условию, распределена по закону Пуассона с параметром $a = \lambda t = 1{,}5$ (так как интенсивность потока $\lambda = 1{,}5$; $t = 1$[*час*]). Обозначим событие: $A$= {в течение часа поступит хотя бы один вызов}. Тогда

$P(A) = P(X_1 \geq 1) = 1 - P(X_1 = 0) = 1 - (a^0 e^{-a})/0! = 1 - e^{-1{,}5} = 1 - 0{,}22313 = 0{,}77687$.

б) Для определения вероятности события $B$ = {в течение трех часов поступит не менее четырех вызовов} введем в рассмотрение случайную величину $X_2$, определяющую число вызовов, поступивших в течение трех часов. Эта случайная величина распределена по закону Пуассона с параметром $a = \lambda t = 1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$:

$$P(B) = P(X_2 \geq 4) = 1 - P(X_2 < 4) =$$

$$= 1 - (P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1) + P(X_2 = 2) + P(X_2 = 3)) =$$

$$= 1 - \left(\frac{4{,}5^0 e^{-4{,}5}}{0!} + \frac{4{,}5^1 e^{-4{,}5}}{1!} + \frac{4{,}5^2 e^{-4{,}5}}{2!} + \frac{4{,}5^3 e^{-4{,}5}}{3!}\right) = 1 - 0{,}3423 = 0{,}6577.$$

### *2.4.4 Равномерный закон распределения*

Непрерывная случайная величина, которая принимает значения, только принадлежащие отрезку $[a, b]$ с постоянной плотностью распределения, называется **распределенной по равномерному закону**.

Функция плотности распределения вероятностей определяется соотношением

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<a;\\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a\le x\le b;\\ 0 & \text{при } x>b.\end{cases}$$

Найдем функцию распределения данной случайной величины:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0 & \text{при } x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a\le x\le b;\\ 1 & \text{при } x>b.\end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рисунках 13 и 14.

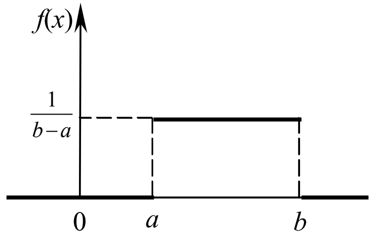



Рисунок 13 – График функции $f(x)$ равномерного распределения

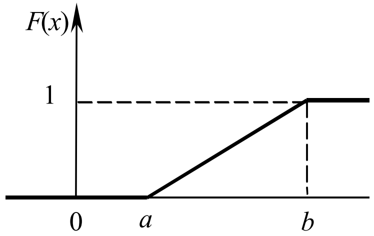



Рисунок 14 – График функции $F(x)$ равномерного распределения

Математическое ожидание случайной величины $X$, распределенной по равномерному закону на участке $[a, b]$, как следует из механической интерпретации (центр массы), равно абсциссе середины участка: $M[X]=(a+b)/2$. Этот же результат можно получить и вычисляя интеграл:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{b^2}{2(b-a)}-\frac{a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}.$$

Дисперсию случайной величины $X$ также можно найти, исходя из механической интерпретации (момент инерции распределения относительно центра массы): $D[X]=(b-a)^2/12$. Тот же результат можно получить, вычисляя интеграл:

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-(M[X])^2=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Среднее квадратическое отклонение равномерно распределенной случайной величины



$$\sigma[X]=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Моды равномерное распределение не имеет; его медиана из соображений симметрии равна $(a+b)/2$. Из тех же соображений симметрии коэффициент асимметрии $A[X]=0$. Коэффициент эксцесса случайной величины $X$ равен –1,2: $Ex[X]=-1{,}2$; как и следовало ожидать, он отрицателен.

Примером случайной величины, которая имеет равномерный закон распределения, является время ожидания регулярных событий, например, время ожидания поезда в метрополитене, время ожидания автобуса определенного маршрута на остановке.

Рассмотрим несколько примеров случайных величин, имеющих равномерное распределение. При проведении измерений некоторой величины с помощью прибора с крупными делениями ошибки округления распределены по равномерному закону. Очевидно, что равномерное распределение имеют и ошибки, возникающие от округления данных при расчетах.

**Пример 36** Поезда метрополитена идут с интервалом в 4 минуты. Пассажир приходит на платформу поезда в произвольный момент времени. Найти вероятность того, что он будет ожидать прихода поезда не более одной минуты. Найти среднее время ожидания поезда пассажиром, вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания поезда пассажиром.

Решение. Рассмотрим случайную величину $X$ – время ожидания пассажиром поезда. Все возможные значения данной случайной величины принадлежат отрезку [0; 4], и, согласно условию, все эти значения равновозможны. Следовательно, случайная величина распределена по равномерному закону с параметрами $a = 0$ и $b = 4$. Функция плотности распределения вероятностей данной случайной величины:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\in(-\infty;0);\\ \dfrac{1}{4} & \text{при } x\in[0;4];\\ 0 & \text{при } x\in(4;\infty).\end{cases}$$

Найдем вероятность того, что пассажир будет ожидать поезд не более одной минуты:

$$P(0\le X\le 1)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}.$$

На рисунке 15 штриховкой выделена фигура, площадь которой равна вероятности $P(0\le X\le 1)=0{,}25$.

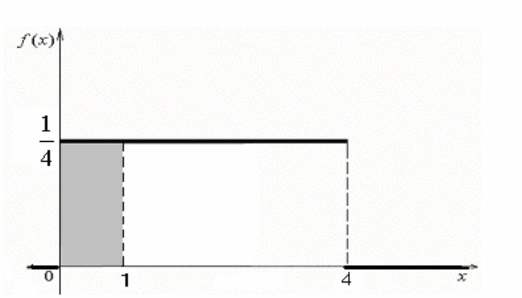



Рисунок 15 – График плотности распределения вероятностей случайной величины $X$ – времени ожидания пассажиром поезда

Среднее время ожидания прихода поезда пассажиром

$$M[X]=(a+b)/2=(0+4)/2=2{,}0 \text{ [мин]}.$$

Дисперсия

$$D[X]=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(4-0)^2}{12}=1{,}333[\text{мин}^2].$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma[X]=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}=\frac{4-0}{2\sqrt{3}}=1{,}155 \text{ [мин]}.$$

### *2.4.5 Показательное (экспоненциальное) распределение*

Непрерывная случайная величина, которая принимает только неотрицательные значения с плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0\end{cases}$$

называется распределенной по показательному закону с параметром $\lambda$ ($\lambda>0$).

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{0}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=-\lambda\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}=1,$$

то приведенное определение корректно.

Функция распределения показательно распределенной случайной величины $X$



$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ при значениях параметра $\lambda$, равных 1 и 2, приведены на рисунках 16 и 17.

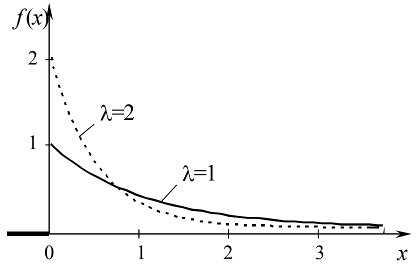



Рисунок 16 – Графики функции $f(x)$ показательного распределения

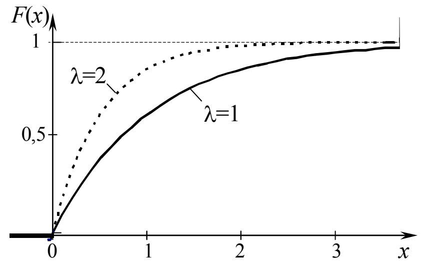



Рисунок 17 – Графики функции $F(x)$ показательного распределения

Несложно доказать, что для случайной величины $X$, распределенной по показательному закону,

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda},$$

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-(M[X])^2=\int_{0}^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2},$$

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\frac{1}{\lambda},\quad x_{\text{mod}}=0,\quad x_{\text{med}}=\frac{1}{\lambda}\ln 2.$$

Коэффициент асимметрии $A[X]=2$.

Коэффициент эксцесса случайной величины, распределенной по показательному закону, положителен и равен 6: $Ex[X]=6$.

В природе и технике существует множество явлений, которые могут быть, по крайней мере, приближенно, описаны показательным законом распределения. Так, в общем случае, результаты измерений временных показателей хорошо аппроксимируются экспоненциальным распределением. В качестве примеров можно привести измерение продолжительности телефонных переговоров, продолжительность пользования Интернетом, период работы оборудования до отказа, а также различные виды «задач обслуживания» (например, измерение времени безотказной работы оборудования, времени ремонта и т. п.).

**Пример 37** Время безотказной работы радиоэлектронного оборудования является случайной величиной, распределенной по показательному закону. Определить вероятность безотказной работы оборудования более десяти часов, если среднее время безотказной работы по статистическим данным составляет 200 часов.

Решение. Согласно условию, математическое ожидание случайной величины $X$, обозначающей время безотказной работы оборудования, равно 200. Учитывая, что для случайной величины, распределенной по показательному закону, $M[X] = 1/\lambda$, определяем значение параметра $\lambda = 1/M[X] = 1/200 = 0{,}005$. Функция плотности распределения данной случайной величины $X$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 0{,}005e^{-0{,}005x} & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

Определим вероятность безотказной работы оборудования более десяти часов эксплуатации:

$$P(X \ge 10) = \int_{10}^{\infty} f(x)dx = \int_{10}^{\infty} 0{,}005e^{-0{,}005x}dx = -e^{-0{,}005x}\Big|_{10}^{\infty} = 0 + e^{-0{,}05} = 0{,}95123 \cdot$$

**Пример 38** Случайная величина $X$ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 3$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и вероятность того, что случайная величина $X$ примет значения меньше 2. Построить график плотности распределения случайной величины X.

Решение. Согласно условию $\lambda = 3$ . Учитывая, что для случайной величины, распределенной по показательному закону, $M[X] = 1/\lambda$, определяем $M[X] = 1/3 = 0{,}333$. Дисперсия $D[X] = \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{9} = 0{,}111$.

Функция плотности распределения данной случайной величины $X$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 3e^{-3x} & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

Определим вероятность того, что величина примет значения меньше 2:

$$P(0 \le X < 2) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 3e^{-3x}dx = -e^{-3x}\Big|_0^2 = -e^{-6} + 1 = 1 - 0{,}0025 = 0{,}9975.$$

На рисунке 18 штриховкой выделена фигура, площадь которой равна вероятности $P(0 \le X \le 2) = 0{,}9975$.



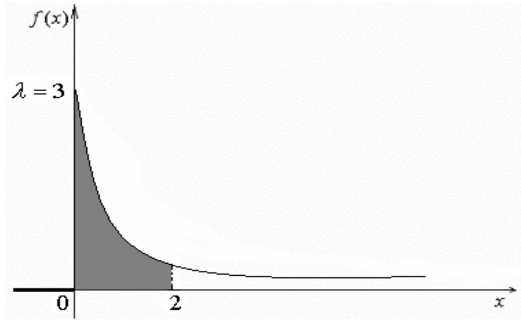



Рисунок 18 – График плотности распределения вероятностей показательного закона

### *2.4.6 Нормальный закон распределения*

Нормальное распределение (иногда называемое законом Гаусса) играет исключительно важную роль в теории вероятностей и математической статистике и занимает среди других законов распределения особое положение. Это объясняется целым рядом причин:

1 Многие случайные величины имеют нормальное или близкое к нормальному распределение.

2 Нормальное распределение хорошо подходит в качестве аппроксимации других распределений (например, биномиального).

3 Нормальное распределение обладает рядом математических свойств, во многом обеспечивших его широкое применение в теории вероятностей и математической статистике.

**Случайная величина** ***X*** **называется распределенной по нормальному закону**, если ее плотность распределения вероятностей задается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\sigma > 0$ и $m$ – параметры распределения.

Так как $f(x) > 0$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} \sqrt{2}\sigma dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1,$$

то приведенное выше определение корректно. (При проведении преобразований была сделана подстановка $x - m = \sigma\sqrt{2}t$ , и в результате получили интеграл Пуассона, который равен $\sqrt{\pi}$ .)

**Основные свойства нормального распределения**:

1 Нормальное распределение полностью определяется двумя параметрами: $m$ и $\sigma$. Вероятностный смысл этих параметров таков: $m$ – *математическое ожидание*, $\sigma$ – *среднее квадратическое отклонение* рассматриваемой случайной величины. То есть для нормального распределения:

$$M[X]=m;\ D[X]=\sigma^2;\ \sigma[X]=\sigma.$$

2 Кривая нормального распределения имеет колоколообразную форму, симметричную относительно прямой $x=m$, и при $x\to-\infty$ и $x\to\infty$ эта кривая асимптотически приближается к оси абсцисс.

Общий вид графика функции плотности распределения вероятностей $f(x)$ для произвольных значений параметров $m$ и $\sigma$ изображен на рисунке 19.

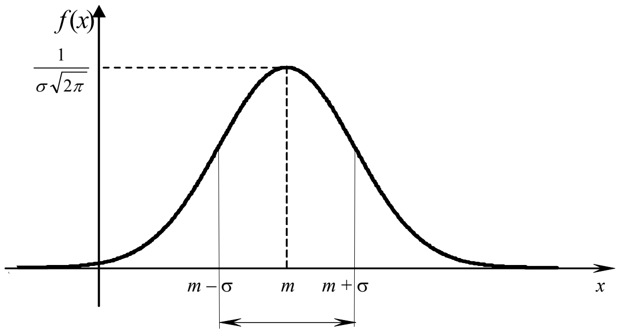



Рисунок 19 – График функции $f(x)$ нормально распределенной случайной величины

3 Как видно из графика функции $f(x)$, для нормально распределенной случайной величины вероятность получения значений, значительно удаленных от среднего значения $m$, быстро уменьшается с ростом величины отклонения.

4 *Медиана* и *мода* случайной величины, распределенной по нормальному закону, совпадают и равны математическому ожиданию $m$, $x_{\text{mod}} = x_{\text{med}} = M[X]=m$.

5 *Коэффициенты асимметрии и эксцесса* нормально распределенной случайной величины равны нулю: $A[X]=0$; $Ex[X]=0$.

Тот факт, что случайная величина $X$ распределена по нормальному закону с параметрами $m$ и $\sigma$, символически записывается $X\sim N(m;\ \sigma)$. Этой случайной величине соответствует следующая функция распределения вероятностей



$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,dt\ .$$

График функции распределения $F(x)$ изображен на рисунке 20.

На рисунках 21 и 22 изображены графики функции $f(x)$, соответствующие различным значениям параметров $m$ и $\sigma$.

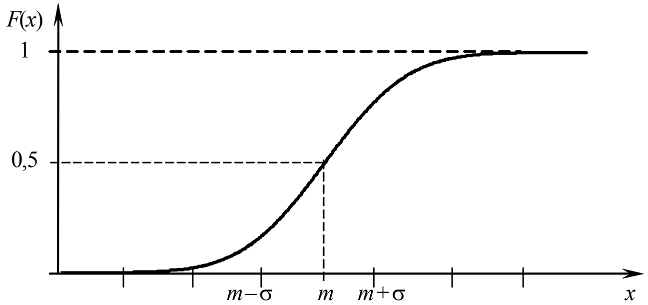



Рисунок 20 – График функции распределения $F(x)$ нормально распределенной случайной величины

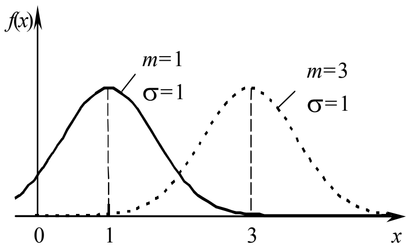



Рисунок 21 – График функции $f(x)$ нормально распределенной случайной величины

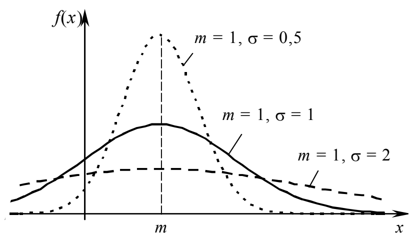



Рисунок 22 – График функции $f(x)$ нормально распределенной случайной величины

**Нормированное (стандартизованное) нормальное распределение**

*Нормированным* (или *стандартизованным*) нормальным распределением называется нормальное распределение с параметрами $m=0$ и $\sigma=1$.

Известно, что если случайная величина $X$ распределена нормально с параметрами $m$ и $\sigma$, то величина $Z=(X-m)/\sigma$ также распределена нормально, но с параметрами $m=0$, $\sigma=1$ (то есть $Z\sim N(0;\ 1)$). Нормирование распределения ведет просто к перенесению начала координат в центр распределения, то есть к «центрированию», и к масштабированию оси абсцисс в долях $\sigma$.

Функция плотности распределения вероятностей стандартного распределения

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

В приложении А приведены значения этой функции для неотрицательных значений аргумента, график функции $\varphi(x)$ изображен на рисунке 23.

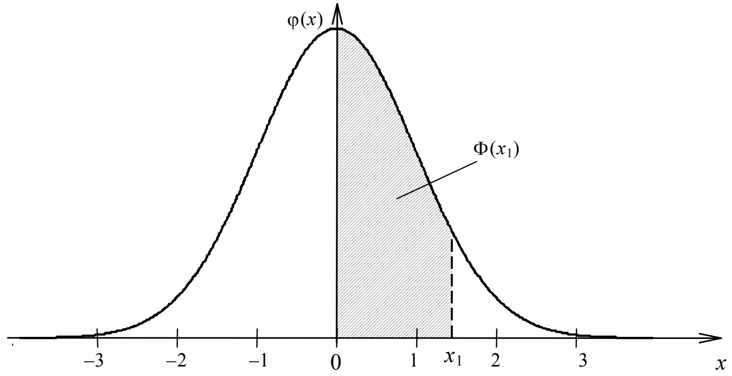



Рисунок 23 – График функции $\varphi(x)$

Вычислим для нормально распределенной случайной величины $X$ вероятность попадания на участок от $\alpha$ до $\beta$:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Сделав в интеграле замену переменной $t=(x-a)/\sigma$ (то есть «нормируя» случайную величину) и, соответственно, изменяя пределы интегрирования, получим

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-m}{\sigma}}^{\frac{\beta-m}{\sigma}}e^{-t^2/2}dt.$$

Как известно, неопределенный интеграл $\int e^{-t^2/2}dt$ не выражается через элементарные функции, но его можно выразить через специальную функцию

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt, \qquad (27)$$



называемую **функцией Лапласа** (или «**интегралом вероятностей**»), для которой составлены таблицы значений. В геометрической интерпретации $\Phi(x)$ равна площади фигуры под кривой $\varphi(x)$, опирающейся на отрезок $[0; x]$. На рисунке 23 это фигура выделена штриховкой.

В приложении Б приведены значения функции Лапласа для положительных значений $x$. Функция $\Phi(x)$ – нечетная, то есть $\Phi(-x)=-\Phi(x)$; при $x>5$ можно принять $\Phi(x)=0{,}5$.

С помощью функции Лапласа вероятность попадания нормально распределенной случайной величины $X$ на участок от $\alpha$ до $\beta$ выражается формулой

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right). \qquad (28)$$

Формула для расчета вероятности отклонения нормально распределенной случайной величины $X$ от своего математического ожидания на величину $\Delta$ имеет вид:

$$P(|X-m|<\Delta)=2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right). \qquad (29)$$

Примеры случайных величин, распределенных по нормальному закону.

Известно, что нормально распределенные случайные величины широко распространены на практике. Нормальное распределение возникает в тех случаях, когда складывается большое число независимых (или слабо зависимых) случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

причем эти величины сравнимы по порядку своего влияния на рассеивание суммы. Тогда, каковы бы ни были законы распределения отдельных величин $X_i$, закон распределения их суммы $X$ будет близок к нормальному, причем тем ближе, чем больше число слагаемых $n$. На практике наиболее часто встречаются именно такие случайные величины.

Результаты измерения длины, массы, времени, ошибки измерения и многие другие случайные величины имеют нормальное или близкое к нормальному распределение.

Рассмотрим **пример.** Пусть производятся измерения некоторой физической величины. Любое измерение дает лишь приближенное значение измеряемой величины, так как на результат испытания оказывают влияние очень многие, не зависящие друг от друга случайные факторы: температурные колебания в помещении, воздействия окружающей среды, неточность измерительной шкалы, смена контрольного персонала и т. д.

В зависимости от источников появления ошибок различают *систематические* и *случайные* ошибки.

К *систематическим ошибкам* относятся, например, односторонние отклонения, вызванные, скажем, изменением настройки измерительного прибора или сменой контрольного персонала. Эти ошибки можно устранить путем систематического изучения причины их возникновения.

*Случайные ошибки* вызваны влиянием множества различных неконтролируемых причин: температурных колебаний, влажности, вибраций в окружающей среде и т. п. Каждый из этих факторов порождает ничтожную «частную ошибку». Но поскольку число этих факторов очень велико, совокупное их действие порождает уже заметную «суммарную ошибку». Полностью исключить воздействие этих факторов невозможно, так как нельзя заранее предусмотреть степень их влияния на результат конкретного измерения. Подобные случайные ошибки вызывают при измерениях отклонения в обе стороны от истинного значения.

Рассматривая общую ошибку как сумму очень большого числа взаимно независимых частных ошибок, мы вправе заключить, что суммарная ошибка имеет распределение, близкое к нормальному. Опыт подтверждает справедливость такого заключения.

**Пример 39** Случайная величина $X$ распределена по нормальному закону с параметрами $M[X]=m$, $\sigma[X]=\sigma$. Найти вероятность того, что случайная величина $X$ будет принимать значения, удаленные от математического ожидания не более чем на: а) σ, б) 2σ, в) 3σ.

Р е ш е н и е. Для вычисления искомых вероятностей воспользуемся формулой (28):

а) $P(m-\sigma < X < m+\sigma) = \Phi\left(\frac{m+\sigma-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-\sigma-m}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) =$

$= 0{,}34134 - (-0{,}4134) = 0{,}68268.$

Произведем расчет, используя формулу (29):

$$P(|X-m| < \Delta = \sigma) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(1) = 0{,}68268,$$

где $\Delta = \sigma$ – величина отклонения случайной величины $X$ от ее математического ожидания.

На рисунке 24 под графиком кривой нормального распределения указаны площади фигур, ограниченных кривой $f(x)$ и осью абсцисс, которые равны вероятностям попадания значения случайной величины на указанные отрезки. График функции распределения $F(x)$ изображен на рисунке 25.



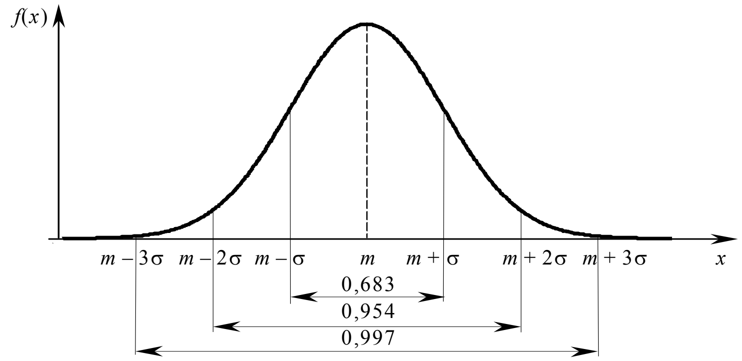



Рисунок 24 – Вероятность того, что случайная величина $X$ будет принимать значения, удаленные от математического ожидания не более чем на: а) σ, б) 2σ, в) 3σ

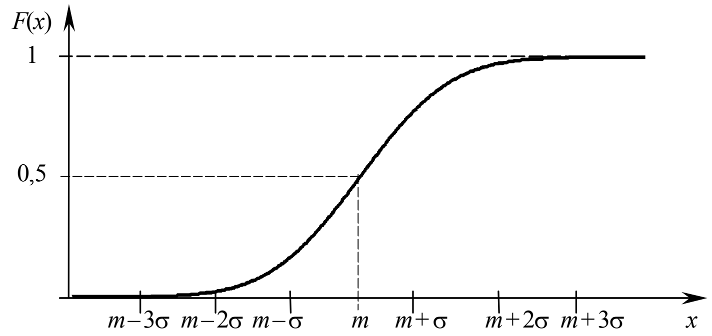



Рисунок 25 – График функции распределения $F(x)$ нормально распределенной случайной величины

б) $P(m-2\sigma < X < m+2\sigma) = \Phi\left(\frac{m+2\sigma-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-2\sigma-m}{\sigma}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) =$

$= 0{,}47725 - (-0{,}47725) = 0{,}9645.$

в) $P(m-3\sigma < X < m+3\sigma) = \Phi\left(\frac{m+3\sigma-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-3\sigma-m}{\sigma}\right) = \Phi(3) - \Phi(-3) =$

$= 0{,}49865 + 0{,}49865 = 0{,}9972.$

**Пример 40** Случайное отклонение изменения курса акций некоторой компании относительно их текущего курса является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 5 у.е. Систематические отклонения изменения курса акций от номинальной стоимости отсутствуют. Какова вероятность того, что в определенный день курс акции отклонится от номинала не более чем на 2 у. е.? Какова вероятность того, что в определенный день курс акции отклонится от номинала более чем на 2 у. е.?

Решение. Рассмотрим случайную величину $X$ – отклонение изменения курса акций некоторой компании относительно их текущего курса. Согласно условию, $M[X]=0$ [у. е.], $\sigma[X]=5$ [у. е.]. Найдем вероятность события $A=${в определенный день курс акции отклонится от номинала не более чем на 2 у. е.}:

$$P(A)=P(|X|\le 2)=2\Phi\left(\frac{2}{5}\right)=2\Phi(0{,}4)=2\cdot 0{,}15542=0{,}31084\approx 0{,}311.$$

Найдем вероятность события $B=$ {в определенный день курс акции отклонится от номинала более чем на 2 у. е.}:

$$P(B)=1-P(A)=1-0{,}31084\approx 0{,}689.$$

На рисунке 26 штриховкой выделена фигура, площадь которой равна вероятности события $B$.

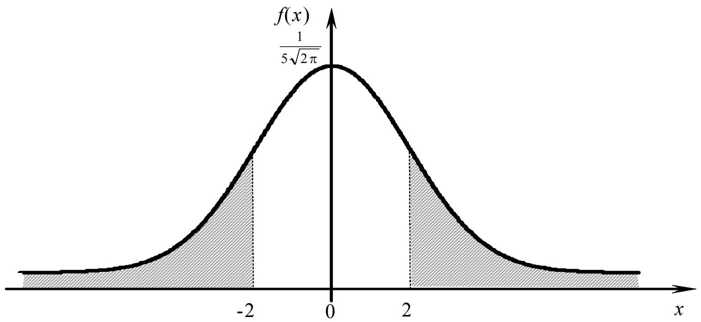



Рисунок 26 – График плотности распределения вероятностей нормального закона

**Вопросы для самоконтроля**

1 Какими параметрами определяется биномиальный закон распределения?
2 Какими параметрами определяется геометрический закон распределения?
3 Какими параметрами определяется закон Пуассона?
4 Приведите примеры случайных величин, распределенных по равномерному закону.
5 Какими параметрами определяется показательный закон распределения?
6 Какими параметрами определяется нормальный закон?
7 Как определяется вероятность попадания значения случайной величины, распределенной нормально, в некоторый интервал?
8 Чему равны мода, медиана, математическое ожидание случайной величины, распределенной по нормальному закону?



## ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**Задача 1** Эксперимент состоит в том, что внутри прямоугольника $\Omega$, изображённого на рисунке 27, случайным образом выбирается точка. События $A$, $B$ и $C$ состоят, соответственно, в попадании выбранной точки внутрь кругов $A$, $B$ и $C$. Изобразить области, попадание в которые соответствует осуществлению событий:

а) $A+B+C$;

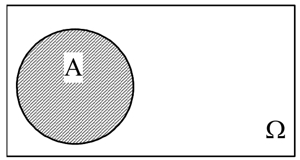
б) $(A-B)+C$;

в) $\overline{AB+C}$;

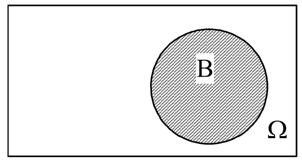
г) $A\overline{B}+C$.

Решение. Области, попадание в которые соответствует осуществлению указанных событий, приведены на следующих рисунках:

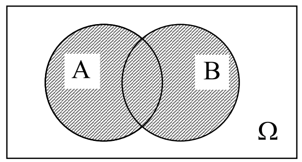
а) $A+B+C$



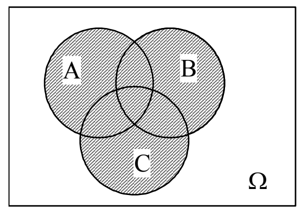

$A$




$B$

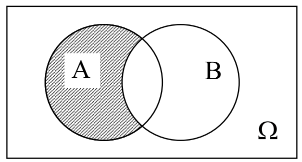



$A+B=A\cup B$

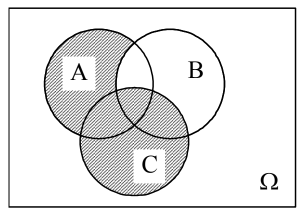



$A+B+C=A\cup B\cup C$

б) $(A-B)+C$

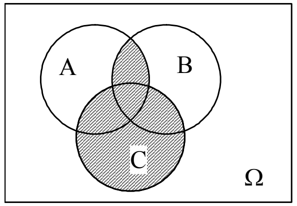



$A-B=A\setminus B$

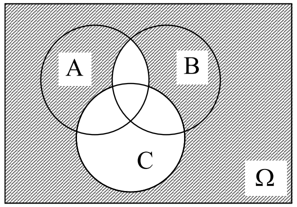



$(A-B)+C=(A\setminus B)\cup C$

Рисунок 27 (начало) – Диаграммы Эйлера-Венна для событий в) $\overline{AB+C}$

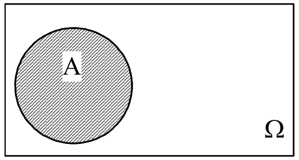



$AB+C = A\cap B\cup C$

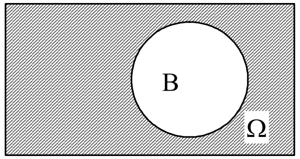



$\overline{AB+C} = \overline{A\cap B\cup C}$

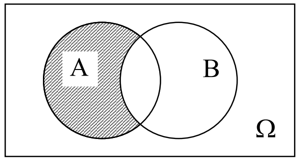
г) $A\overline{B}+C$



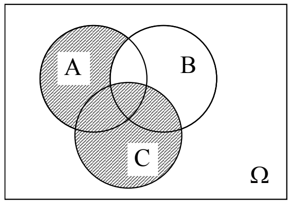

$A$




$\overline{B}$




$A\overline{B} = A\cap\overline{B}$




$A\overline{B}+C = A\cap\overline{B}\cup C$

Рисунок 27 (окончание)

**Задача 2** При наборе телефонного номера абонент набирает 2 последние цифры наугад. Найти вероятность того, что номер будет набран правильно с первой попытки, если:

а) абонент помнит, что цифры разные и нечетные;

б) абонент помнит, что цифры нечетные.

Решение. а) Элементарными исходами рассматриваемого эксперимента являются возможные варианты последовательного набора двух цифр из пяти. Так как в условии указано, что цифры нечетные и разные, то выбирать будем две цифры из 1, 3, 5, 7, 9.

Пространство элементарных исходов рассматриваемого эксперимента:

$\Omega = \{(1, 3),\ (1, 5),\ (1, 7),\ (1, 9),\ (3, 1),\ (3, 5),\ (3, 7),\ (3, 9),\ (5, 1),\ (5, 3),\ (5, 7), (5, 9), (7, 1), (7, 3), (7, 5), (7, 9), (9, 1), (9, 3), (9, 5), (9, 7)\}$.

В данном случае пространство элементарных исходов состоит из 20 элементов: $n = 20$.



Поскольку цифры набираются случайным образом, все элементарные исходы равновозможны, то для вычисления вероятности интересующего нас события можно воспользоваться классическим методом определения вероятностей.

Число исходов, благоприятных событию $A$, равно 1, т. к. при наборе только одной комбинации цифр номер будет набран правильно: $m = 1$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

б) Элементарными исходами рассматриваемого эксперимента являются возможные варианты последовательного набора двух цифр из пяти. Так как в условии указано, что цифры нечетные, то выбирать будем две цифры из 1, 3, 5, 7, 9, с учетом того, что цифры могут повторяться.

Пространство элементарных исходов рассматриваемого эксперимента:

$\Omega = \{(1, 1),\ (1, 3),\ (1, 5),\ (1, 7),\ (1, 9),\ (3, 1),\ (3, 3),\ (3, 5),\ (3, 7),\ (3, 9), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (5, 7), (5, 9), (7, 1), (7, 3), (7, 5), (7, 7), (7, 9), (9, 1), (9, 3), (9, 5), (9, 7), (9, 9)\}$.

В данном случае пространство элементарных исходов состоит из 25 элементов: $n = 25$.

Поскольку цифры набираются случайным образом, все элементарные исходы равновозможны, и для вычисления вероятности интересующего нас события можно воспользоваться классическим методом определения вероятностей.

Событие $B$ = {номер набран правильно с первой попытки}.

Число исходов, благоприятных событию $B$, равно 1, т. к. при наборе только одной комбинации цифр номер будет набран правильно: $m = 1$.

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{25} = 0{,}04\ .$$

Ответ: а) вероятность того, что номер набран правильно с первой попытки, равна 0,05; б) вероятность того, что номер набран правильно с первой попытки, равна 0,04.

**Задача 3** Предприятие объявляет конкурс на замещение 3 вакантных должностей. Из 10 человек, подавших свои документы на конкурс, – 6 женщин. Случайным образом отобраны 3 человека. Какая вероятность того, что среди отобранных окажутся:

а) все 3 женщины;

б) только одна женщина?

Решение. Обозначим события:

$A$ = {из трех, случайным образом отобранных человек, – все три женщины};

$B$ = {из трех, случайным образом отобранных человек, – одна женщина и двое мужчин}.

Найдем вероятности событий двумя способами:

1) пользуясь формулами комбинаторики;

2) пользуясь теоремами сложения и умножения вероятностей.

1а) Определим вероятность события $A$ = {из трех, случайным образом отобранных человек, – все три женщины}.

Определим число способов выбора 3 человек из 10 – выборка неупорядоченная без возвращения.

Число способов определим по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},\ C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120.$$

Определим число способов выбора 3 женщин из 6 женщин, подавших свои документы на конкурс: $C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$.

Вероятность события $A$ $P(A) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = 0{,}167$.

1б) Обозначим события:

$A$ = {из трех, случайным образом отобранных человек, – все три женщины};

$A_1$ = {первый, случайным образом отобранный кандидат, – женщина}.

$P(A_1) = \frac{6}{10}$ (всего 10 кандидатов, из них 6 женщин).

Событие $A_2$ = {второй, случайным образом отобранный кандидат, – женщина}.

$P(A_2 / A_1) = \frac{6-1}{10-1} = \frac{5}{9}$ {всего осталось 9 кандидатов, из них 5 женщин}.

Событие $A_3$ = {третий, случайным образом отобранный кандидат, – женщина}.

$P(A_3 / A_2 \cap A_1) = \frac{5-1}{9-1} = \frac{4}{8}$ {всего осталось 8 кандидатов, из них 4 женщины}.

По теореме умножения вероятностей зависимых событий

$$P(A) = P(A_1)\,P(A_2/ A_1)\,P(A_3/ A_2 \cap A_1) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8} = \frac{120}{720} = 0{,}167.$$

2а) $B$ = {из трех, случайным образом отобранных человек – одна женщина и двое мужчин}.



Определим число способов выбора 3 человек из 10 по формуле

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120.$$

Определим число способов выбора одной женщины из 6 женщин, подавших свои документы на конкурс: $C_6^1 = \frac{6!}{1!(6-1)!} = 6$.

Определим число способов выбора двух мужчин из (10 – 6) = 4 мужчин, подавших свои документы на конкурс: $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$.

Вероятность события $B$ $P(B) = \frac{C_6^1 \cdot C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{6\cdot 6}{120} = 0{,}3$.

2б) Обозначим события:

$B$ = {из трех, случайным образом отобранных человек, – одна женщина и двое мужчин};

$C_1$ = {первый, случайным образом отобранный кандидат, – женщина, второй – мужчина, третий – мужчина};

$C_2$ = {первый, случайным образом отобранный кандидат, – мужчина, второй – женщина, третий – мужчина};

$C_3$ = {первый, случайным образом отобранный кандидат, – мужчина, второй – мужчина, третий – женщина}.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий

$P(B) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3)$.

Вероятность события $C_1$ определим по формуле

$P(C_1) = P(B_1)\,P(B_2 / B_1)\,P(B_3/ B_2 \cap B_1)$.

Событие $B_1$ = {первый, случайным образом отобранный кандидат, – женщина}.

Вероятность события $P(B_1) = \frac{6}{10}$ (всего 10 кандидатов, из них 6 женщин).

Событие $B_2$ = {второй, случайным образом отобранный кандидат, – мужчина}.

Вероятность события $P(B_2 / B_1) = \frac{4}{10-1} = \frac{4}{9}$ (всего осталось 9 кандидатов, из них 4 мужчин).

Событие $B_3$ = {третий, случайным образом отобранный кандидат, – мужчина, при условии, что первый и второй кандидаты (женщина и мужчина) уже отобраны}.

Вероятность события $P(B_3 / B_2 \cap B_1) = \dfrac{4-1}{9-1} = \dfrac{3}{8}$ (всего осталось 8 кандидатов, из них 3 мужчин).

По теореме умножения вероятностей зависимых событий

$P(C_1) = P(B_1)\,P(B_2 / B_1)\,P(B_3 / B_2 \cap B_1) = \dfrac{6}{10}\cdot\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{3}{8} = \dfrac{72}{720} = 0{,}1$.

Вероятность события $C_2$ определим по формуле

$P(C_2) = P(B_1)\,P(\overline{B}_2 / B_1)\,P(B_3/ \overline{B}_2 \cap B_1)$.

Событие $B_1$ = {первый, случайным образом отобранный кандидат, – мужчина}.

Вероятность события $P(B_1) = \dfrac{4}{10}$ (всего 10 кандидатов, из них 4 мужчин).

Событие $\overline{B}_2$ = {второй, случайным образом отобранный кандидат, – женщина}.

Вероятность события $P(\overline{B}_2 / B_1) = \dfrac{6}{10-1} = \dfrac{6}{9}$ (всего осталось 9 кандидатов, из них 6 женщин).

Событие $B_3$ = {третий, случайным образом отобранный кандидат, – мужчина}.

Вероятность события $P(B_3 / \overline{B}_2 \cap B_1) = \dfrac{4-1}{9-1} = \dfrac{3}{8}$ (всего осталось 8 кандидатов, из них 3 мужчин).

По теореме умножения вероятностей зависимых событий

$P(C_2) = P(B_1)\,P(\overline{B}_2 / B_1)\,P(B_3/ \overline{B}_2 \cap B_1) = \dfrac{4}{10}\cdot\dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{3}{8} = \dfrac{72}{720} = 0{,}1$.

Вероятность события $C_3$ определим по формуле

$P(C_3) = P(B_1)\,P(B_2 / B_1)\,P(\overline{B}_3 / B_2 \cap B_1)$.

Событие $B_1$ = {первый, случайным образом отобранный кандидат, – мужчина}.

Вероятность события $P(B_1) = \dfrac{4}{10}$ (всего 10 кандидатов, из них 4 мужчины).

Событие $B_2$ = {второй, случайным образом отобранный кандидат, – мужчина}.

Вероятность события $P(B_2 / B_1) = \dfrac{3}{10-1} = \dfrac{3}{9}$ (всего осталось 9 кандидатов, из них 3 мужчин).

Событие $B_3$ = {третий, случайным образом отобранный кандидат, – женщина}.



Вероятность события $P(\overline{B}_3 / B_2 \cap B_1) = \dfrac{6}{9-1} = \dfrac{6}{8}$ (всего осталось 8 кандидатов, из них 6 женщин).

По теореме умножения вероятностей зависимых событий

$P(C_3) = P(B_1)\,P(B_2 / B_1)\,P(\overline{B}_3 / B_2 \cap B_1) = \dfrac{4}{10}\cdot\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{6}{8} = \dfrac{72}{720} = 0{,}1$.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий

$P(B) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}1 \cdot 3 = 0{,}3$.

Ответ: а) вероятность того, что из трех, случайным образом отобранных человек, – все три женщины, равна 0,167;

б) вероятность того, что из трех, случайным образом отобранных человек, – одна женщина и двое мужчин, равна 0,3.

**Задача 4** Два клиента зашли в магазин. Вероятность того, что первый клиент пожелает сделать покупку, равна 0,7, для второго клиента эта вероятность равна 0,5. Найти вероятность того, что захотят сделать покупку:

а) оба клиента ;

б) только один клиент;

в) хотя бы один клиент.

Решение. Обозначим события:

$A_i$ = {$i$-й клиент пожелает сделать покупку}, $i = 1, 2$;

$B$ = {оба клиента пожелают сделать покупку};

$C$ = {только один клиент из двух пожелает сделать покупку};

$D$ = {хотя бы один клиент из двух пожелает сделать покупку}.

Согласно условию, вероятность события $A_1$ $P(A_1) = 0{,}7$, вероятность события $A_2$ $P(A_2) = 0{,}5$ .

Тогда вероятности противоположных событий: $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ .

Определим все элементарные события данного случайного эксперимента и соответствующие вероятности:

| Элементарное событие | Событие | Вероятность |
|---|---|---|
| $\omega_1$ | $A_1 A_2$ | $0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}35$ |
| $\omega_2$ | $A_1 \overline{A}_2$ | $0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}35$ |
| $\omega_3$ | $\overline{A}_1 A_2$ | $0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$ |
| $\omega_4$ | $\overline{A}_1 \overline{A}_2$ | $0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$ |
| Итого | $\Omega$ | 1 |

Событие $B$ можно представить в виде $B = A_1 A_2$.

Полагая, что события $A_i$ ($i = 1, 2$) – независимы, и применяя теорему умножения вероятностей независимых событий, получим

$$P(B) = P(\omega_1) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}35\,.$$

Событие $C$ можно представить в виде $C = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$.

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий и теорему умножения вероятностей независимых событий, получим

$$P(C) = P(\omega_2) + P(\omega_3) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 =$$
$$= 0{,}35 + 0{,}15 = 0{,}50.$$

Событие $D$ можно представить в виде $D = A_1A_2 + A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$ или в виде $D = \Omega - \overline{A}_1\overline{A}_2 = \Omega - \overline{D}$,

где $\overline{D}$ – событие, противоположное событию $D$: $\overline{D}$ = {оба клиента не пожелают сделать покупку}.

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий и теорему умножения вероятностей независимых событий, получим

$$P(D) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) = P(A_1)P(A_2) + P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) =$$
$$= 0{,}7 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}35 + 0{,}35 + 0{,}15 = 0{,}85\,,$$

или $P(D) = 1 - P(\overline{D})$, где $P(\overline{D}) = P(\omega_4) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15.$

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85.$$

Ответ: а) вероятность того, что захотят сделать покупку оба клиента, равна 0,35; вероятность того, что покупку пожелает сделать только один клиент из двух, равна 0,50; вероятность того, что покупку пожелает сделать хотя бы один клиент, равна 0,85.

**Задача 5** Сотрудники отдела маркетинга полагают, что в ближайшее время ожидается рост спроса на продукцию фирмы. Вероятность этого они оценивают в 30 %. При росте спроса на продукцию, вероятность расширения фирмы в ближайшее время составит 0,4, если спрос на продукцию не возрастет, то вероятность расширения фирмы составит 0,2. Определить вероятность расширения фирмы в ближайшее время. Фирма расширилась, какова вероятность того, что спрос на продукцию возрос?

Решение. 1 Определим событие $A$ = {в ближайшее время произойдет расширение фирмы}.

2 Относительно условий рассматриваемого случайного эксперимента, состоящего в том, что в ближайшее время произойдет расширение фирмы, можно выдвинуть две несовместные гипотезы:

$H_1$ = {спрос на продукцию фирмы возрастет};

$H_2$ = {спрос на продукцию фирмы не возрастет}.



Причём $H_1 + H_2 = \Omega$.

Учитывая свойство вероятностей гипотез $P(H_1) + P(H_2) = 1$, определим:

$$P(H_1) = \frac{30}{100} = 0{,}3; \quad P(H_2) = \frac{100-30}{100} = \frac{70}{100} = 0{,}7.$$

3 Условные вероятности события $A$ = {в ближайшее время произойдет расширение фирмы} при осуществлении этих гипотез известны и равны:

$$P(A\,|\,H_1) = 0{,}4; \; P(A\,|\,H_2) = 0{,}2.$$

Для определения вероятности события $A$ воспользуемся формулой полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A\,|\,H_1) + P(H_2) \cdot P(A\,|\,H_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 =$$
$$= 0{,}12 + 0{,}14 = 0{,}26.$$

Для определения вероятности того, что спрос на продукцию возрос при условии, что фирма расширилась, воспользуемся формулой Байеса

$$P(H_i\,|\,A) = \frac{P(H_iA)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A\,|\,H_i)}{P(A)}\,,$$

$$P(H_1\,|\,A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A\,|\,H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}4}{0{,}26} = 0{,}4615 \approx 0{,}462.$$

Ответ: вероятность того, что в ближайшее время произошло расширение фирмы, равна 0,26; вероятность того, что спрос на продукцию возрос при условии, что фирма расширилась, равна 0,462.

**Задача 6** В городе 8 коммерческих банков, работающих независимо друг от друга. У каждого банка риск банкротства в течение года составляет 5 %. Определить вероятность того, что в течение года обанкротится:

а) один коммерческий банк;

б) хотя бы один коммерческий банк;

в) не менее двух коммерческих банков.

Решение. Условие задачи можно рассматривать как серию из $n = 8$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события $A$ = {коммерческий банк обанкротится в течение года} одинакова и равна:

$$p = \frac{5}{100} = 0{,}05; \; q = 1 - p = 1 - 0{,}05 = 0{,}95.$$

а) Для вычисления вероятности события $B$ = {в течение года обанкротится один коммерческий банк из восьми} воспользуемся формулой Бернулли

$P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$, где $0 \le p \le 1$; $q=1-p$; $m=0, 1, 2, \ldots, n$.

$$P(B)=P_8(1)=C_8^1 p^1 q^7=\frac{8!}{1!\cdot 7!}\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95^7 \approx 0{,}279335 \approx 0{,}279.$$

б) При вычислении вероятности события $C=$ {в течение года обанкротится хотя бы один коммерческий банк из восьми} удобно перейти к рассмотрению события $\overline{C}$ = {в течение года не обанкротится ни один коммерческий банк}:

$$P(C)=P_8(m>0)=P_8(m\ge 1)=1-P(\overline{C})=1-P_8(0).$$

Применяя формулу Бернулли, вычисляем:

$$P_8(0)=C_0^8\cdot 0{,}05^0\cdot 0{,}95^8=0{,}95^8\approx 0{,}6634;$$

$$P(C)=P_8(m>0)=1-P(\overline{C})=1-0{,}6634=0{,}3366.$$

в) При вычислении вероятности события $D=$ {в течение года обанкротится не менее двух коммерческих банков} удобно перейти к рассмотрению события $\overline{D}$ = {в течение года обанкротится менее двух коммерческих банков}:

$$P(D)=P_8(m\ge 2)=1-P_8(m<2)=1-P(\overline{D})=1-(P_8(0)+P_8(1)).$$

Применяя формулу Бернулли, вычисляем:

$$P_8(0)=C_8^0\cdot 0{,}05^0\cdot 0{,}95^8=0{,}95^8\approx 0{,}6634;$$

$$P_8(1)=C_8^1 p^1 q^7=\frac{8!}{1!\cdot 7!}\cdot 0{,}05^1\cdot 0{,}95^7\approx 0{,}279.$$

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-(P_8(0)+P_8(1))=1-0{,}6634-0{,}279=0{,}0576.$$

Ответ: вероятность того, что в течение года обанкротится:
а) один коммерческий банк, равна 0,279;
б) хотя бы один коммерческий банк, равна 0,3366;
в) не менее двух коммерческих банков, равна 0,0576.

**Задача 7** Предприятие для изучения потребительских предпочтений на товар в случайном порядке рассылает анкеты по $n$ адресам (почтовый опрос). Вероятность того, что заполненные потребителями анкеты «возвратятся» на предприятие, составляет $p$ %. Определить:

а) какова вероятность того, что из $n$ разосланных анкет «возвратятся» не более $k$ анкет;

б) найдите наиболее вероятное число анкет, «возвратившихся» на предприятие, и соответствующую этому значению вероятность.

Рассмотрим решение задачи для двух вариантов:



| Вариант | $n$ | $p$, % | $k$ |
|---|---|---|---|
| Первый | 100 | 40 | 40 |
| Второй | 200 | 5 | 2 |

Решение. Первый вариант.

а) Условие задачи можно рассматривать как серию из $n=100$ независимых испытаний, состоящих в рассылке анкет, в каждом из которых с вероятностью $p=\frac{40}{100}=0{,}4$ может осуществиться событие $A=$ {посланная анкета «возвратится» на предприятие}. Вероятность того, что посланная анкета «не возвратится» на предприятие, равна $q=1-0{,}4=0{,}6$.

Определим наиболее вероятное число анкет, «возвратившихся» на предприятие по формуле

$$np-q\le m_0\le np+p.$$

$$100\cdot 0{,}4-0{,}6\le m_0\le 100\cdot 0{,}4+0{,}4,$$

$$39{,}4\le m_0\le 40{,}4.$$

Наивероятнейшее число $m_0=40$.

Так как число испытаний достаточно велико для вычисления вероятностей событий $B$ = {из 100 разосланных анкет менее 40 «возвратились» на предприятие} и $C$ = {из 100 разосланных анкет ровно 40 «возвратились» на предприятие } можно воспользоваться приближёнными формулами Муавра-Лапласа:

1) Для вычисления вероятности события $B$ воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа при $n=100$; $p=0{,}4$; $q=1-0{,}4=0{,}6$; $k_1=0$; $k_2=40$:

$$P(B)=P_{100}(0\le m\le 40)\approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1);$$

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{0-100\cdot 0{,}4}{\sqrt{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}\approx -8{,}165;$$

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{40-100\cdot 0{,}4}{\sqrt{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}=0.$$

По таблицам значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ находим $\Phi(-8{,}165)=$ $=-0{,}5$, $\Phi(0)=0{,}0$.

Таким образом,

$$P(B)=P_{100}(0\le m\le 40)=0-(-0{,}5)=0{,}5.$$

2) Для вычисления вероятности события $C$ воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа. В данном случае $n=100$; $p=0{,}4$; $q=0{,}6$; $m=40$:

$$P(C) = P_{100}(40) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x).$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 100 \cdot 0{,}4}{\sqrt{100 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} = 0.$$

По таблицам значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ находим $\varphi(0) = 0{,}3989$.

$$P(B) = P_{100}(40) \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} \cdot 0{,}3989 = 0{,}0814.$$

Ответ: а) вероятность того, что из 100 разосланных анкет не более 40 «возвратятся» на предприятие, равна 0,5; б) наиболее вероятное число разосланных анкет, «возвратившихся» на предприятие, составит 40, соответствующая этому числу вероятность 0,0814.

Решение. Второй вариант.

б) Условие задачи можно рассматривать как серию из $n = 200$ независимых испытаний, состоящих в рассылке анкет, в каждом из которых с вероятностью $p = \frac{5}{100} = 0{,}05$ может осуществиться событие $A$ = {посланная анкета «возвратится» на предприятие}. Вероятность того, что посланная анкета «не возвратится» на предприятие, равна $q = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

Определим наиболее вероятное число анкет, «возвратившихся» на предприятие, по формуле

$$np - q \le m_0 \le np + p,$$
$$200 \cdot 0{,}05 - 0{,}95 \le m_0 \le 200 \cdot 0{,}05 + 0{,}95,$$
$$9{,}05 \le m_0 \le 10{,}05.$$

Наивероятнейшее число $m_0 = 10$.

В данном случае для вычисления вероятностей воспользуемся приближенной формулой Пуассона с параметром $a = np$, так как число испытаний $n = 200$ достаточно велико, а вероятность появления события в каждом испытании $p = 0{,}05$ очень мала ($p < 0{,}1$), то есть в каждом отдельном опыте событие $A$ появляется крайне редко:

$$P(X = m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}; \ (m = 0, 1, 2, ...).$$

Таблица значений функции $P(X = m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ приведена в приложении В.

$a = np = 200 \cdot 0{,}05 = 10$.



1) Определим событие $B$ = {не более двух анкет «возвратятся» на предприятие, то есть или 0, или 1, или 2}.

Вероятность события $B$

$$P(B) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) \approx \frac{10^0 e^{-10}}{0!} + \frac{10^1 e^{-10}}{1!} + \frac{10^2 e^{-10}}{2!} \approx 61 e^{-10} = 0{,}0028.$$

2) Определим событие $C$ = {10 анкет «возвратятся» на предприятие}.

Вероятность события $C$

$$P(C) = P_{200}(10) \approx \frac{10^{10} e^{-10}}{10!} \approx 0{,}12511.$$

Ответ: а) вероятность того, что из 200 разосланных анкет не более 2 «возвратятся» на предприятие, равна 0,002769; б) наиболее вероятное число разосланных анкет, «возвратившихся» на предприятие, составит 10, соответствующая этому числу вероятность 0,12511.

**Задача 8а** Для определённой в условии задачи дискретной случайной величины:

а) построить ряд распределения и столбцовую диаграмму;

б) найти функцию распределения и построить её график;

в) вычислить числовые характеристики: математическое ожидание, моду, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Студент пришел на экзамен, зная ответы на 3/4 вопросов по каждому из трёх разделов программы. Случайная величина $X$ – число вопросов, на которые он сможет ответить при условии, что экзаменационный билет содержит по одному вопросу из каждого раздела.

Решение. а) Возможные значения данной случайной величины $X$: 0, 1, 2, 3. Условие задачи можно рассматривать как серию из $n = 3$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность события $A$ = {студент сумеет ответить на поставленный вопрос} равна 3/4. В данном случае для вычисления вероятностей возможных значений случайной величины $X$ воспользуемся формулой Бернулли:

$$P(X = 0) = P_3(0) = C_3^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64};$$

$$P(X = 1) = P_3(1) = C_3^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64};$$

$$P(X = 2) = P_3(2) = C_3^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64};$$

$$P(X = 3) = P_3(3) = C_3^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}.$$

(Проверим, что $\sum\limits_{i=1}^{4} p_i = \sum\limits_{j=0}^{3} P(x=j) = 1$.)

Ряд распределения данной случайной величины *X*:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | Итого |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{9}{64}$ | $\frac{27}{64}$ | $\frac{27}{64}$ | 1 |
| $x_i \cdot p_i$ | 0 | $\frac{9}{64}$ | $\frac{54}{64}$ | $\frac{81}{64}$ | $\frac{144}{64}$ |
| $x_i^2 \cdot p_i$ | 0 | $\frac{9}{64}$ | $\frac{108}{64}$ | $\frac{243}{64}$ | $\frac{360}{64}$ |

Столбцовая диаграмма, соответствующая этому ряду распределения, приведена на рисунке 28.

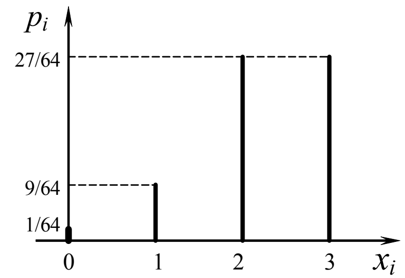



Рисунок 28 – Столбцовая диаграмма

б) Вычислим функцию распределения данной случайной величины:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i):$$

при $x \in (-\infty, 0]$ $F(x) = 0$;

при $x \in (0, 1]$ $F(x) = P(X=0) = \frac{1}{64}$;

при $x \in (1, 2]$ $F(x) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{64} + \frac{9}{64} = \frac{10}{64}$;

при $x \in (2, 3]$ $F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$;

при $x \in (3, +\infty)$ $F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$

$= \frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{27}{64} + \frac{27}{64} = 1.$



Итак, функция распределения рассматриваемой случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty, 0]; \\ \frac{1}{64} & \text{при } x \in (0, 1]; \\ \frac{10}{64} & \text{при } x \in (1, 2]; \\ \frac{37}{64} & \text{при } x \in (2, 3]; \\ 1 & \text{при } x \in (3, +\infty). \end{cases}$$

График функции *F*(*x*) приведён на рисунке 29.

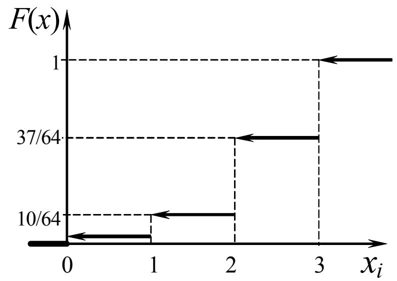



Рисунок 29 – Функция распределения

в) Вычислим числовые характеристики данной случайной величины.

Математическое ожидание

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{64} + 1 \cdot \frac{9}{64} + 2 \cdot \frac{27}{64} + 3 \cdot \frac{27}{64} = \frac{144}{64} = 2{,}25 \text{ [вопросов]},$$

то есть среднее число вопросов, на которые студент сможет дать ответ, равно 2,25.

Как следует из ряда распределения, данная случайная величина имеет две моды: $x_{\text{mod}} = 2$, $x_{\text{mod}} = 3$, то есть наиболее вероятное число вопросов, на которые студент сможет дать ответ, равно 2 и 3.

Дисперсия

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (M[X])^2 = 0 \cdot \frac{1}{64} + 1 \cdot \frac{9}{64} + 4 \cdot \frac{27}{64} + 9 \cdot \frac{27}{64} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{360}{64} - 2{,}25^2 = 0{,}5625 \text{ [вопросов}^2\text{]}.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0{,}5625} = 0{,}75$ [вопросов], то есть среднее квадратическое отклонение числа вопросов, на которые студент сможет дать ответ, равно 0,75.

**Задача 8б** Три клиента зашли в магазин. Вероятности совершения покупки для каждого из трех клиентов соответственно равны: 0,7; 0,6; 0,8. Случайная величина $X$ – число клиентов, которые совершат покупку в магазине.

Решение. а) Возможные значения данной случайной величины $X$: 0, 1, 2, 3. Условие задачи можно рассматривать как серию из $n = 3$ независимых испытаний. В данном случае для вычисления вероятностей возможных значений случайной величины $X$ можно воспользоваться теоремами сложения вероятностей несовместных событий и умножения вероятностей независимых событий:

Обозначим события:

$A_i = \{i$-й клиент совершит покупку$\}$, $i = 1, 2, 3$.

Согласно условию вероятность события $A_1$ $P(A_1) = 0{,}7$, вероятность события $A_2$ $P(A_2) = 0{,}6$, вероятность события $A_3$ $P(A_3) = 0{,}8$. Тогда вероятности противоположных событий: $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$, $P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Определим все элементарные события данного случайного эксперимента и соответствующие вероятности:

| События | Элементарные события | Вероятности |
|---|---|---|
| $A_1A_2A_3$ | $\omega_1$ | $0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}336$ |
| $A_1\overline{A}_2A_3$ | $\omega_2$ | $0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}224$ |
| $\overline{A}_1A_2A_3$ | $\omega_3$ | $0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}144$ |
| $A_1A_2\overline{A}_3$ | $\omega_4$ | $0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}084$ |
| $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ | $\omega_5$ | $0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}096$ |
| $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ | $\omega_6$ | $0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}056$ |
| $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$ | $\omega_7$ | $0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}036$ |
| $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ | $\omega_8$ | $0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}024$ |
| Итого | $\Omega$ | 1 |

$P(X=0) = P(\omega_8) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}024;$

$P(X=1) = P(\omega_5) + P(\omega_6) + P(\omega_7) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) + P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}096 + 0{,}056 + 0{,}036 = 0{,}188;$



$P(X=2) = P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}224 + 0{,}144 + 0{,}084 = 0{,}452;$

$P(X=3) = P(\omega_1) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}336.$

(Проверим, что $\sum_{i=1}^{4} p_i = \sum_{j=0}^{3} P(x=j) = 1$).

Ряд распределения данной случайной величины $X$:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | Итого |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,024 | 0,188 | 0,452 | 0,336 | 1 |
| $x_i \cdot p_i$ | 0 | 0,188 | 0,904 | 1,008 | 2,1 |
| $x_i^2 \cdot p_i$ | 0 | 0,188 | 1,808 | 3,024 | 5,02 |

Столбцовая диаграмма, соответствующая этому ряду распределения, приведена на рисунке 30.

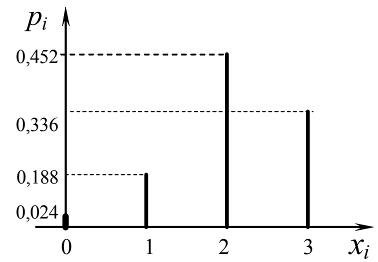



Рисунок 30 – Столбцовая диаграмма

б) Вычислим функцию распределения данной случайной величины:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i):$$

при $x \in (-\infty, 0]$ $F(x) = 0$;

при $x \in (0, 1]$ $F(x) = P(X = 0) = 0{,}024$;

при $x \in (1, 2]$ $F(x) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}024 + 0{,}188 = 0{,}212$;

при $x \in (2, 3]$ $F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0{,}024 + 0{,}188 + 0{,}452 = 0{,}664$;

при $x \in (3, +\infty)$ $F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0{,}024 + 0{,}188 + 0{,}452 + 0{,}336 = 1$.

Итак, функция распределения рассматриваемой случайной величины

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\in(-\infty,0];\\ 0{,}024 & \text{при} \quad x\in(0,1];\\ 0{,}212 & \text{при} \quad x\in(1,2];\\ 0{,}664 & \text{при} \quad x\in(2,3];\\ 1 & \text{при} \quad x\in(3,+\infty).\end{cases}$$

График функции $F(x)$ приведён на рисунке 31.

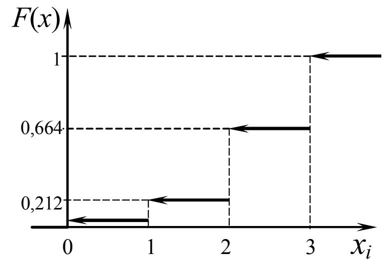



Рисунок 31 – Функция распределения

в) Вычислим числовые характеристики данной случайной величины.

Математическое ожидание

$M[X]=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=2{,}1$ [клиентов], то есть среднее число клиентов, которые совершат покупку в магазине, равно 2,1.

Как следует из ряда распределения, данная случайная величина имеет моду $x_{\text{mod}}=2$ [клиентов], (для $x_i = 2$ вероятность принимает максимальное значение $p_i = 0{,}452$), то есть наиболее вероятное число клиентов, которые совершат покупку в магазине, равно 2.

Дисперсия $D[X]=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i-(M[X])^2=5{,}02-2{,}1^2=0{,}61$ [клиентов$^2$].

Среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sqrt{0{,}61}=0{,}781$ [клиентов], то есть среднее квадратическое отклонение числа клиентов, которые совершат покупку в магазине, равно 0,671.

**Задача 9** Закон распределения непрерывной случайной величины задан функцией плотности распределения вероятностей $f(x)$. Требуется:

а) определить значение параметра $c$;

б) построить график функции плотности распределения вероятностей;



в) найти функцию распределения данной случайной величины и построить её график;

г) вычислить числовые характеристики данной случайной величины: математическое ожидание, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратичное отклонение;

д) найти вероятность того, что данная случайная величина примет значение, принадлежащее отрезку $[a; b]$:

$$f(x)=\begin{cases}cx^3 & \text{при} \quad x\in[0,1]; \\ 0 & \text{при} \quad x\notin[0,1];\end{cases} \qquad a=0, \quad b=0{,}5.$$

Решение. а) Для определения неизвестного параметра $c$ воспользуемся соотношением

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1.$$

В данном случае имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{1}cx^3dx+\int_{1}^{+\infty}0dx=\int_{0}^{1}cx^3dx=\left.\frac{cx^4}{4}\right|_0^1=\frac{c}{4}-0=1.$$

Отсюда $c = 4$.

Таким образом, функция плотности распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x<0;\\ 4x^3 & 0\le x\le 1;\\ 0 & 1<x<\infty.\end{cases}$$

б) График функции $f(x)$ изображён на рисунке 32.

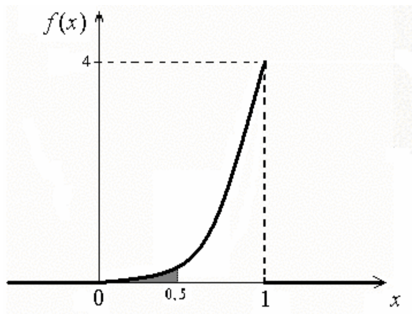



Рисунок 32 – График плотности распределения $f(x)$

в) Вычислим функцию распределения данной случайной величины:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,,$$

при $x\in(-\infty,\,0]$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0$;

при $x\in(0,\,1]$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{x}4t^3dt=\left.\frac{4t^4}{4}\right|_0^x=x^4-0=x^4$;

при $x\in(1,+\infty)$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{1}4t^3dt+\int_{1}^{x}0dt=\left.t^4\right|_0^1=1$.

Итак, $F(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x\le 0;\\ x^4 & 0<x\le 1;\\ 1 & 1<x<\infty.\end{cases}$

График функции $F(x)$ приведён на рисунке 33.

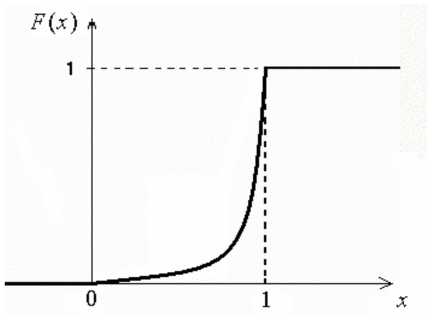



Рисунок 33 – График функции распределения $F(x)$

г) Вычислим числовые характеристики данной случайной величины.
Математическое ожидание

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot 0dx+\int_{0}^{1}x\cdot 4x^3dx+\int_{1}^{+\infty}x\cdot 0dx=\left.\frac{4x^5}{5}\right|_0^1=0{,}8-0=0{,}8.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-(M[X])^2,$$



$$D[X]=\int_{-\infty}^{0}x^2\cdot 0dx+\int_{0}^{1}x^2\cdot 4x^3dx+\int_{1}^{+\infty}x^2\cdot 0dx-(0{,}8)^2=4\cdot\left.\frac{x^6}{6}\right|_0^1-0{,}8^2=$$

$$=0{,}6666-0{,}64=0{,}0266.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sqrt{0{,}0266}\approx 0{,}163$.

Мода данной случайной величины, как следует из графика функции $f(x)$, равна 1.

Для определения медианы воспользуемся соотношением

$$\int_{-\infty}^{x_{\text{med}}}f(x)dx=\int_{-\infty}^{x_{\text{med}}}f(x)dx=\frac{1}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{x_{\text{med}}}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0)dx+\int_{0}^{x_{\text{med}}}4x^3dx=\left.x^4\right|_0^{x_{\text{med}}}=x^4_{\text{med}}=0{,}5,$$

$$x_{\text{med}}=\sqrt[4]{0{,}5}\approx\pm 0{,}841.$$

По условию плотность распределения случайной величины не равна 0 в интервале $[0,1]$, поэтому $x_{\text{med}}=0{,}841$.

Медиану также можно определить из соотношения $F(x_{\text{med}})=0{,}5$.

Решая уравнение $x^4_{\text{med}}=0{,}5$, получим $x_{\text{med}}=\sqrt[4]{0{,}5}\approx\pm 0{,}841$.

По условию плотность распределения случайной величины равна 0 в интервале $[0,1]$, поэтому $x_{\text{med}}=0{,}841$.

д) Для вычисления вероятности того, что случайная величина $X$ примет значение, принадлежащее отрезку [0; 0,5], можно воспользоваться, например, соотношением $P(\alpha\le X\le\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$,

$$P(0\le X\le 0{,}5)=\int_{0}^{0{,}5}4x^3dx=\left.x^4\right|_0^{0{,}5}=0{,}0625-0=0{,}0625.$$

На рисунке 32 штриховкой выделена фигура, площадь которой равна вероятности $P(0\le X\le 0{,}5)=0{,}0625$.

**Задача 10а** Поток заявок, поступающих на телефонную станцию, представляет собой простейший поток событий. Известно, что в течение некоторого промежутка времени среднее число вызовов, поступающих за один час, равно 240. Для этого промежутка времени найти вероятность того, что за одну минуту поступит не менее 2 вызовов.

Решение. Поскольку поток заявок можно считать простейшим, случайная величина $X_1$, определяющая число вызовов, поступивших в течение минуты, может принимать значения 0, 1, 2, 3,… и, согласно условию, распределена по закону Пуассона с параметром $a = \lambda t = 240 \cdot \frac{1}{60} = 4$ (так как интенсивность потока $\lambda = 240$; $t = \frac{1}{60}$ [час]). Вероятность каждого из возможных значений случайной величины $X_1$ определяется по формуле

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

Обозначим событие: $A$ = {в течение минуты поступит не менее 2 вызовов}. Тогда

$$P(A) = P(X_1 \geq 2) = 1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 1) = 1 - \frac{a^0}{0!} e^{-a} - \frac{a^1}{1!} e^{-a} \approx 1 -$$

$$- \frac{4^0}{0!} e^{-4} - \frac{4^1}{1!} e^{-4} \approx 1 - 0{,}0183 - 0{,}0733 = 0{,}9084.$$

Ответ. Вероятность того, что за одну минуту поступит не менее 2 вызовов, равна 0,9084.

**Задача 10б** Поток отказов оборудования в течение рабочей смены удовлетворяет требованиям простейшего потока событий. Найти вероятность того, что в течение смены произойдёт не более двух отказов оборудования, если известно, что вероятность хотя бы одного отказа в течение рабочей смены равна 0,9.

Решение. Поскольку поток отказов можно считать простейшим, случайная величина $X$, определяющая число отказов оборудования в течение смены, распределена по закону Пуассона. Возможные значения данной случайной величины: 0, 1, 2, …, $m$, …, а вероятность каждого из значений определяется по формуле $P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$, где $a$ – интенсивность потока отказов.

Согласно условию вероятность события $A$ = {в течение смены произойдёт хотя бы один сбой}: $P(A) = 0{,}9$. Из соотношения

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{a^0}{0!} e^{-a} = 1 - e^{-a} \approx 0{,}9$$

определим неизвестный параметр $a = -\ln 0{,}1 = 2{,}3$.

Теперь можно вычислить вероятность события $B$ = {в течение смены произойдёт не более двух отказов оборудования}:



$$P(B) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= \frac{a^0}{0!} e^{-a} + \frac{a^1}{1!} e^{-a} + \frac{a^2}{2!} e^{-a} = e^{-2{,}3} + 2{,}3 \cdot e^{-2{,}3} + 2{,}645 \cdot e^{-2{,}3} \approx 0{,}41.$$

Ответ: вероятность того, что в течение рабочей смены произойдёт не более двух отказов оборудования, равна 0,41.

**Задача 10в** Троллейбусы данного маршрута идут с интервалом в 15 мин. Пассажир подходит к троллейбусной остановке в некоторый момент времени. Определите среднее время ожидания пассажиром троллейбуса, дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени ожидания пассажиром троллейбуса. Какова вероятность появления пассажира не позднее чем за 5 мин до отхода следующего троллейбуса?

Решение. Рассмотрим случайную величину $X$ – время ожидания пассажиром троллейбуса. Все возможные значения данной случайной величины принадлежат отрезку [0; 15], и, согласно условию, все эти значения равновозможны. Следовательно, случайная величина распределена по равномерному закону с параметрами $a = 0$ и $b = 15$. Функция плотности распределения вероятностей (рисунок 34) данной случайной величины:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty;\, 0); \\ 1/15 & \text{при } x \in [0;\, 15]; \\ 0 & \text{при } x \in (15;\, \infty). \end{cases}$$

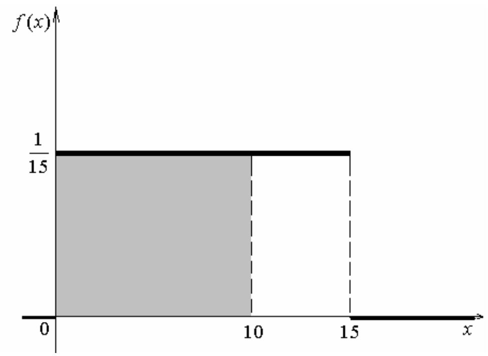



Рисунок 34 – График плотности распределения вероятностей равномерного закона

Математическое ожидание случайной величины $X$, распределенной по равномерному закону на участке [$a$, $b$], можно определить по формуле

$$M[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{0+15}{2} = 7{,}5 \text{ [мин]},$$

то есть среднее время ожидания пассажиром троллейбуса равно 7,5 мин.

Дисперсию случайной величины $X$ определим по формуле

$$D[X] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(15-0)^2}{12} = 18{,}75 .$$

Среднее квадратическое отклонение равномерно распределенной случайной величины

$$\sigma[X] = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \frac{15-0}{2\sqrt{3}} = 4{,}330 \text{ [мин]}.$$

Найдем вероятность появления пассажира не позднее, чем за 5 мин до отхода следующего троллейбуса:

$$P(0 \le X \le 10) = \int_0^{10} f(x)dx = \int_0^{10} \frac{1}{15} dx = \frac{10-0}{15} = 0{,}666.$$

На рисунке 34 штриховкой выделена фигура, площадь которой равна вероятности $P(0 \le X \le 10) = 0{,}666.$

**Задача 10г** Время пользования Интернетом в вечернее время распределено по показательному закону с математическим ожиданием, равным 0,9 часа. Найти вероятность того, что пользователь будет находиться в Интернете менее 1 часа. Найти среднее квадратическое отклонение времени пользования Интернетом.

Решение. Согласно условию математическое ожидание случайной величины $X$, обозначающей время пользования Интернетом, равно 0,9 часа. Учитывая, что для случайной величины, распределенной по показательному закону, $M[X] = 1/\lambda$, определяем значение параметра $\lambda = 1/M[X] = 1/0{,}9 = 1{,}111$. Функция плотности распределения данной случайной величины $X$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ 1{,}111e^{-1{,}111x}, & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

Определим вероятность того, что пользователь будет находиться в Интернете менее 1 часа:

$$P(0 \le X < 1) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 1{,}111e^{-1{,}111x} dx = -e^{-1{,}111x}\Big|_0^1 = -e^{-1{,}111} + 1 =$$

$$= 1 - 0{,}3292 = 0{,}6708 .$$

Для случайной величины $X$, распределенной по показательному закону,

$$D[X] = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{1{,}111^2} = 0{,}9001 \text{ ; } \sigma[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1{,}111} = 0{,}9000.$$

На рисунке 35 штриховкой выделена фигура, площадь которой равна вероятности $P(0 \le X < 1) = 0{,}6708.$



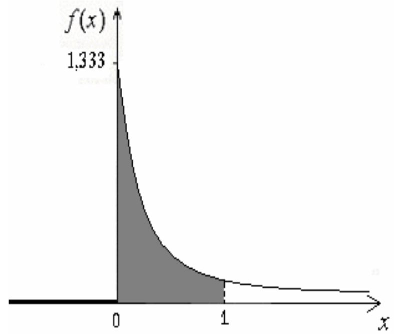



Рисунок 35 – График плотности распределения вероятностей показательного закона

**Задача 11** Фирма, занимающаяся продажей товаров по каталогу, ежемесячно получает по почте заказы. Стоимость этих заказов есть нормально распределенная случайная величина со средним квадратическим отклонением, равным 260 у. е., математическим ожиданием, равным 2000 у. е. Определить вероятность того, что:

а) стоимость заказов за месяц превысит 2300 у. е.;

б) стоимость заказов за месяц отклонится от математического ожидания меньше чем на 200 у. е.;

в) стоимость заказов за месяц отклонится от математического ожидания больше чем на 200 у. е.

Решение. Согласно условию случайная величина $X$, определяющая стоимость заказов, поступающих по почте, распределена по нормальному закону, причём $M[X] = m = 2000$ у. е., $\sigma = 260$ у. е.

а) Определим вероятность того, что стоимость заказов за месяц превысит 2300 у. е.

Используем соотношение

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right), \text{ где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

В данном случае

$$P(2300 \le X \le +\infty) = \Phi\left(\frac{+\infty - 2000}{260}\right) - \Phi\left(\frac{2300 - 2000}{260}\right) = \Phi(+\infty) - \Phi(1{,}154) =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}3749 = 0{,}1251 .$$

Учитывая, что $\Phi(+\infty) = 0{,}5$ , по таблицам значений функции $\Phi(x)$ определяем, что $\Phi(1{,}154) = 0{,}3749$, получим $P(2300 \le X \le +\infty) = 0{,}1251$ .

На рисунке 36 штриховкой выделена фигура, площадь которой равна вероятности того, что стоимость заказов за месяц превысит 2300 у. е.

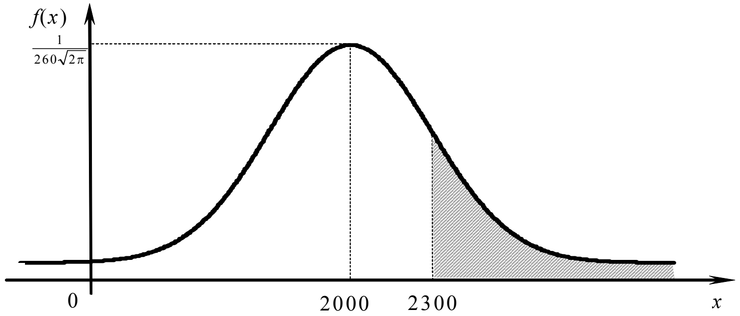



Рисунок 36 – График плотности распределения вероятностей нормального закона

б) Определим вероятность того, что стоимость заказов за месяц отклонится от математического ожидания меньше чем на 200 у. е., то есть

$$P(|X-2000|<200)=P(2000-200<X<2000+200)=\Phi\left(\frac{2200-2000}{260}\right)-$$

$$-\Phi\left(\frac{1800-2000}{260}\right)=\Phi(0{,}769)-\Phi(-0{,}769)=2\Phi(0{,}769)=2\cdot 0{,}2794=0{,}5588.$$

Учитывая, что $\Phi(0{,}769)=0{,}2794$ и нечетность функции $\Phi(x)$, получим $P(|X-2000|<200)=0{,}5588.$

На рисунке 37 штриховкой выделена фигура, площадь которой равна вероятности того, что стоимость заказов за месяц отклонится от математического ожидания меньше чем на 200 у. е.

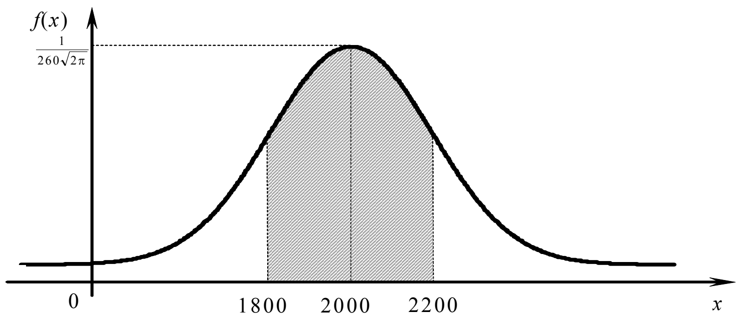



Рисунок 37 – График плотности распределения вероятностей нормального закона



Эту задачу легче решить, используя формулу расчета вероятности отклонения нормально распределенной случайной величины $X$ от своего математического ожидания:

$P(|X-m|<\Delta)=2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)$, где $\Delta$ – величина отклонения случайной величины $X$ от ее математического ожидания.

По условию $\Delta = 200$, $M[X] = m = 2000$ у. е., $\sigma = 260$ у. е.

$$P(|X-2000|<200)=2\Phi\left(\frac{200}{260}\right)=2\Phi(0{,}769)=0{,}5588.$$

в) Определим вероятность того, что число заказов за месяц отклонится от математического ожидания больше чем на 200 у. е., то есть $P(|X-2000|>200)$.

Это вероятность события, противоположного по отношения к событию, – стоимость заказов за месяц отклонится от математического ожидания меньше чем на 200 у. е., следовательно,

$$P(|X-2000|>200)=1-P(|X-2000|<200)=1-2\Phi\left(\frac{200}{260}\right)=1-0{,}5588=0{,}4412.$$

На рисунке 38 штриховкой выделена фигура, площадь которой равна вероятности того, что стоимость заказов за месяц отклонится от математического ожидания более чем на 200 у. е.

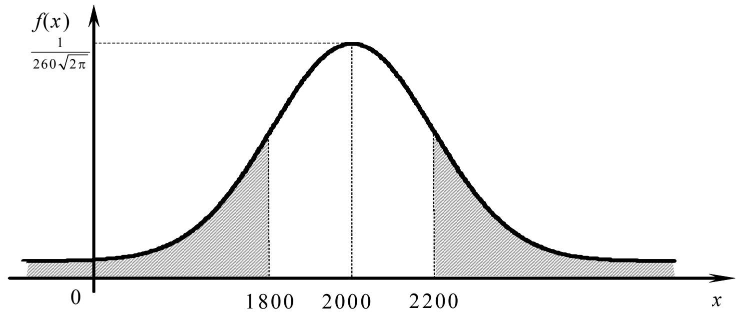



Рисунок 38 – График плотности распределения вероятностей нормального закона

Ответ: вероятность того, что:

а) стоимость заказов за месяц превысит 2300 у. е., равна 0,1251;

б) стоимость заказов за месяц отклонится от математического ожидания меньше чем на 200 у. е., равна 0,5588;

в) стоимость заказов за месяц отклонится от математического ожидания больше чем на 200 у. е., равна 0,4412.

## ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Номера задач, которые необходимо выполнить, определяются с помощью таблицы 2. В первом столбце указан номер варианта контрольной работы, который соответствует двум последним цифрам шифра студента. В последующих столбцах приведены номера задач, которые следует выбрать из 11 разделов.

Контрольная работа № 1 – задачи из первых 7 разделов, контрольная работа № 2 – задачи из 8–11 разделов.

*Таблица 2* – **Варианты заданий**

| **Номер варианта** | **Номер раздела** | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **01** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| **02** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| **03** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| **04** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| **05** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| **06** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| **07** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| **08** | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| **09** | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| **10** | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| **11** | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| **12** | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| **13** | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| **14** | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| **15** | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| **16** | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| **17** | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| **18** | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| **19** | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| **20** | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| **21** | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 1 |
| **22** | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 1 | 2 |
| **23** | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 1 | 2 | 3 |
| **24** | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **25** | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **26** | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |



*Продолжение таблицы 2*

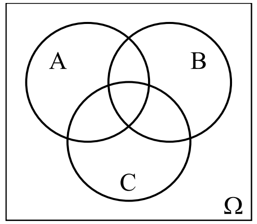
| **Номер варианта** | **Номер раздела** | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **27** | 27 | 28 | 29 | 30 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **28** | 28 | 29 | 30 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| **29** | 29 | 30 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **30** | 30 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **31** | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 11 |
| **32** | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 12 |
| **33** | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 11 | 13 |
| **34** | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 12 | 14 |
| **35** | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 11 | 13 | 15 |
| **36** | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 12 | 14 | 16 |
| **37** | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| **38** | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| **39** | 19 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| **40** | 20 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| **41** | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 2 | 5 | 8 | 21 |
| **42** | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 3 | 6 | 9 | 22 |
| **43** | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 1 | 4 | 7 | 10 | 23 |
| **44** | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 2 | 5 | 8 | 11 | 24 |
| **45** | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 3 | 6 | 9 | 12 | 25 |
| **46** | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 26 |
| **47** | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 27 |
| **48** | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 28 |
| **49** | 9 | 12 | 15 | 18 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 29 |
| **50** | 10 | 13 | 16 | 19 | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 30 |
| **51** | 11 | 14 | 17 | 20 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 1 |
| **52** | 12 | 15 | 18 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 2 |
| **53** | 13 | 16 | 19 | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 3 |
| **54** | 14 | 17 | 20 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 1 | 4 |
| **55** | 15 | 18 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 2 | 5 |
| **56** | 16 | 19 | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 3 | 6 |
| **57** | 17 | 20 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 1 | 4 | 7 |
| **58** | 18 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 2 | 5 | 8 |
| **59** | 19 | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 3 | 6 | 9 |
| **60** | 20 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 1 | 4 | 7 | 10 |
| **61** | 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 11 |
| **62** | 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 12 |
| **63** | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 13 |

*Окончание таблицы 2*

| Номер варианта | Номер раздела | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| **64** | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 14 |
| **65** | 5 | 9 | 13 | 17 | 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 15 |
| **66** | 6 | 10 | 14 | 18 | 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | 16 |
| **67** | 7 | 11 | 15 | 19 | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | 17 |
| **68** | 8 | 12 | 16 | 20 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 18 |
| **69** | 9 | 13 | 17 | 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 1 | 25 | 19 |
| **70** | 10 | 14 | 18 | 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 2 | 26 | 20 |
| **71** | 11 | 15 | 19 | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 3 | 27 | 21 |
| **72** | 12 | 16 | 20 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 4 | 28 | 22 |
| **73** | 13 | 17 | 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 1 | 5 | 29 | 23 |
| **74** | 14 | 18 | 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 2 | 6 | 30 | 24 |
| **75** | 15 | 19 | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 3 | 7 | 11 | 25 |
| **76** | 16 | 20 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 4 | 8 | 12 | 26 |
| **77** | 17 | 21 | 5 | 9 | 13 | 17 | 1 | 5 | 9 | 13 | 27 |
| **78** | 18 | 22 | 6 | 10 | 14 | 18 | 2 | 6 | 10 | 14 | 28 |
| **79** | 19 | 23 | 7 | 11 | 15 | 19 | 3 | 7 | 11 | 15 | 29 |
| **80** | 20 | 24 | 8 | 12 | 16 | 20 | 4 | 8 | 12 | 16 | 30 |
| **81** | 1 | 26 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 1 |
| **82** | 2 | 27 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 2 |
| **83** | 3 | 28 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 3 |
| **84** | 4 | 29 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 4 |
| **85** | 5 | 30 | 15 | 20 | 5 | 10 | 15 | 20 | 5 | 10 | 5 |
| **86** | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 6 |
| **87** | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 7 |
| **88** | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 8 |
| **89** | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 10 |
| **90** | 10 | 15 | 20 | 5 | 10 | 15 | 20 | 5 | 10 | 15 | 11 |
| **91** | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 12 |
| **92** | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 13 |
| **93** | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 14 |
| **94** | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 15 |
| **95** | 15 | 20 | 5 | 10 | 15 | 20 | 5 | 10 | 15 | 20 | 16 |
| **96** | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 6 | 11 | 16 | 1 | 17 |
| **97** | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 7 | 12 | 17 | 2 | 18 |
| **98** | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 8 | 13 | 18 | 3 | 19 |
| **99** | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 9 | 14 | 19 | 4 | 20 |
| **100** | 30 | 25 | 30 | 15 | 30 | 25 | 30 | 15 | 30 | 25 | 21 |



**Задание 1**




Эксперимент состоит в том, что внутри прямоугольника Ω, изображенного на рисунке, случайным образом выбирается точка. События $A$, $B$ и $C$ состоят, соответственно, в попадании выбранной точки внутрь кругов $A$, $B$ и $C$. Изобразить области, попадание в которые соответствует осуществлению следующих событий:

**1.1.** $AB - C,\ \overline{A(B + C)},\ \overline{A} + B + \overline{C},\ A(B + C).$

**1.2.** $AB + C,\ \overline{(A + B)C},\ (A + B)\overline{C},\ AB\overline{C}.$

**1.3.** $\overline{A} + \overline{BC},\ \overline{ABC},\ B(\overline{A} - C),\ B(\overline{A} + C).$

**1.4.** $(B + A)C,\ \overline{(A + B)}C,\ (A - B)\overline{C},\ (C + A) - \overline{B}.$

**1.5.** $(A - \overline{B})C,\ (A - B)\overline{C},\ \overline{(A + B - C)},\ \overline{A}\,\overline{(B - C)}.$

**1.6.** $(A - C) + B,\ \overline{A} - BC,\ C(A + \overline{B}),\ \overline{C}(A + B).$

**1.7.** $(C - A) + B,\ \overline{AB} - C,\ (A - B)\overline{C},\ (\overline{A} - \overline{B})C.$

**1.8.** $AB - C,\ (\overline{A} + \overline{B}) - C,\ \overline{(A + B)} - C,\ A\overline{BC}.$

**1.9.** $A(B - C),\ (\overline{A} - \overline{B}) + C,\ (\overline{A + B})C,\ (\overline{A} + \overline{B})C.$

**1.10.** $C - AB,\ (\overline{B - C})A,\ (B + C)\overline{A},\ (\overline{A} - \overline{B}) - C.$

**1.11.** $A - (B + C),\ (\overline{A + B + C}),\ \overline{C}(\overline{A} + B),\ \overline{C}(A - B).$

**1.12.** $A + (B - C),\ (\overline{A + C})\overline{B},\ \overline{(A - C)B},\ A + \overline{B} + C.$

**1.13.** $AB - C,\ C + (\overline{A - B}),\ C(\overline{A + B}),\ (A - \overline{B}) + C.$

**1.14.** $(C - A) + B,\ A - (\overline{B + C}),\ A - \overline{B} + \overline{C},\ (A - B)\overline{C}.$

**1.15.** $B - (C + A),\ AB\overline{C},\ C - (\overline{A + B}),\ C + (\overline{A - B}).$

**1.16.** $(A - B) + C,\ (\overline{A - C})B,\ \overline{B}(A + C),\ \overline{AB} - \overline{C}.$

**1.17.** $(A - B) - C,\ (C - B)\overline{A},\ \overline{(C + B)}A,\ AB + \overline{C}.$

**1.18.** $A + BC,\ \overline{AB} - C,\ \overline{A}(B + C),\ \overline{AB}C.$

**1.19.** $AC - B,\ \overline{AC} + B,\ \overline{A} + \overline{B} + C,\ (A - C)\overline{B}.$

**1.20.** $A - (B + C),\ (A + C) - B, (\overline{A} - \overline{B}) + C,\ C\overline{(A - B)}.$

**1.21.** $C - \overline{A}B,\ (\overline{B - C})\overline{A},\ (\overline{B} + C)A,\ (\overline{A} - \overline{B}) - \overline{C}.$

**1.22.** $A - (B + C),\ (\overline{A + B + \overline{C}}),\ C(\overline{A} + B),\ \overline{C}(A - \overline{B}).$

**1.23.** $(\overline{A}+B)-C,\ (\overline{A+C})B,\ A+(B-\overline{C}),\ \overline{A}+\overline{B}+C.$

**1.24.** $AB-C,\ \overline{C}+(\overline{A-B}),\ C(\overline{A+B}),\ A-(B-C).$

**1.25.** $(B-A)+C,\ \overline{A}-(\overline{B+C}),\ (\overline{A}-\overline{B})+\overline{C},\ (\overline{A}-B)\overline{C}.$

**1.26.** $\overline{B}-(C+A),\ A\overline{B}C,\ C-(\overline{A+B}),\ C+(\overline{A-B}).$

**1.27.** $(A-\overline{B})+C,\ (\overline{A-C})\overline{B},\ \overline{B}(\overline{A}+C),\ AB-\overline{C}.$

**1.28.** $(A-\overline{B})-C,\ (\overline{C}-B)\overline{A},\ \overline{(C+B)}A,\ A\overline{B}+\overline{C}.$

**1.29.** $A+\overline{B}C,\ A\overline{B}-C,\ \overline{A}(\overline{B}+C),\ \overline{AB}C.$

**1.30.** $AC-\overline{B},\ AC+B,\ \overline{A}+B+C,\ (\overline{A}-C)\overline{B}.$

**Задание 2**

Для вычисления вероятностей событий воспользоваться классическим методом определения вероятностей.

**2.1–2.5.** Бросают две игральные кости. Вычислить вероятность того, что:

а) сумма очков на верхних гранях превысит $k$;

б) на обеих костях выпадет разное число очков;

в) произведение очков поделится на $k$.

| № варианта | $k$ |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 4 |
| 3 | 5 |
| 4 | 6 |
| 5 | 2 |

**2.6–2.10.** Из трех карточек с цифрами $k_1$, $k_2$, $k_3$ произвольным образом выбирают $n$ и укладывают на стол в порядке их появления. Предполагая, что все возможные исходы данного опыта равновероятны, найти вероятность того, что полученное таким образом число будет:

а) четное;

б) нечетное;

в) кратно 2.

| № варианта | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 3 | 1 | 2 | 2 |
| 7 | 3 | 4 | 5 | 3 |
| 8 | 1 | 2 | 4 | 2 |
| 9 | 2 | 3 | 5 | 3 |
| 10 | 7 | 6 | 1 | 2 |



**2.11–2.15.** При наборе телефонного номера абонент набирает $n$ последние цифры наугад. Найти вероятность того, что номер будет набран правильно с первой попытки, если абонент помнит, что цифры разные и номер состоит из $k_i$, $(i=\overline{1,n})$ цифр.

| № варианта | $n$ | $k_i$, $(i=\overline{1,n})$ |
|---|---|---|
| 11 | 3 | $k_1=1,\ k_2=2,\ k_3=3$ |
| 12 | 4 | $k_1=1,\ k_2=3,\ k_3=8,\ k_4=5$ |
| 13 | 3 | $k_1=7,\ k_2=3,\ k_3=5$ |
| 14 | 3 | $k_1=4,\ k_2=3,\ k_3=8$ |
| 15 | 4 | $k_1=3,\ k_2=5,\ k_3=6,\ k_4=7$ |

**2.16–2.20.** Слово составлено из карточек, на которых написана одна буква. Карточки смешивают и вынимают все по одной без возвращения. Найти вероятность того, что карточки с буквами вынимаются в порядке расположения букв заданного слова.

| № варианта | Слово |
|---|---|
| 16 | Мел |
| 17 | Пол |
| 18 | Час |
| 19 | Сто |
| 20 | Дело |

**2.21–2.25.** Подбрасываются $n$ монет. Какова вероятность того, что:

а) хотя бы одна монета упадет кверху гербом;

б) герб выпадет только на $k$ монетах?

| № варианта | $k$ | $n$ |
|---|---|---|
| 21 | 1 | 2 |
| 22 | 2 | 3 |
| 23 | 1 | 4 |
| 24 | 2 | 4 |
| 25 | 1 | 3 |

**2.26–2.30.** Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от $k_1$ до $k_2$. Найти вероятность того, что номер первого, наудачу извлеченного жетона, будет:

а) нечетным;

б) меньше $n$.

| № варианта | $n$ | $k_1$, $k_2$ |
|---|---|---|
| 26 | 15 | $k_1 = 1$, $k_2 = 20$ |
| 27 | 16 | $k_1 = 10$, $k_2 = 25$ |
| 28 | 50 | $k_1 = 1$, $k_2 = 100$ |
| 29 | 30 | $k_1 = 1$, $k_2 = 50$ |
| 30 | 70 | $k_1 = 50$, $k_2 = 100$ |

**Задание 3**

Найти вероятности событий двумя способами, используя:

а) формулы комбинаторики;

б) теоремы сложения вероятностей несовместных событий и умножения вероятностей зависимых событий.

Результаты сравнить.

**3.1–3.5.** Из $N$ сбербанков области $M$ расположены за границей города. Для исследования эффективности работы случайным образом отобраны $n$ сбербанков. Какая вероятность того, что среди отобранных окажутся за границей города:

а) все $n$ сбербанков;

б) хотя бы один сбербанк;

в) $m$ сбербанков.

| № варианта | $N$ | $M$ | $n$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 10 | 3 | 2 |
| 2 | 10 | 5 | 2 | 1 |
| 3 | 15 | 9 | 2 | 1 |
| 4 | 17 | 11 | 3 | 2 |
| 5 | 16 | 11 | 3 | 2 |

**3.6–3.10.** Предприятие объявляет конкурс на замещение $n$ вакантных должностей. Из $N$ человек, подавших свои документы на конкурс, – $M$ женщин. Случайным образом отобраны $n$ человек. Какая вероятность того, что среди отобранных окажутся :

а) все $n$ мужчин;

б) $m$ женщин.

| № варианта | $N$ | $M$ | $n$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 3 | 3 | 2 |
| 7 | 6 | 4 | 2 | 1 |
| 8 | 8 | 3 | 3 | 1 |
| 9 | 9 | 4 | 3 | 2 |
| 10 | 10 | 5 | 3 | 1 |



**3.11–3.15.** Из $N$ предприятий области $M$ занимаются производством оргтехники. Случайным образом для участия в выставке выбираются $n$ предприятий. Какая вероятность того, что среди отобранных предприятий производством оргтехники занимаются:

а) только $m$ предприятий;

б) хотя бы одно предприятие.

| № варианта | $N$ | $M$ | $n$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 15 | 4 | 3 | 1 |
| 12 | 20 | 5 | 3 | 1 |
| 13 | 25 | 6 | 4 | 3 |
| 14 | 20 | 5 | 4 | 3 |
| 15 | 30 | 6 | 3 | 2 |

**3.16–3.20.** В магазине имеется $N$ автомобилей определенной марки. Среди них – $M_1$ – черного цвета, $M_2$ – серого цвета. Представители фирмы обратились в магазин с предложением о продаже им $n$ автомобилей этой марки, безразлично какого цвета. Какая вероятность того, что среди проданных автомобилей:

а) все автомобили черного цвета;

б) все автомобили одного цвета;

в) $m$ автомобилей черного цвета.

| № варианта | $N$ | $M_1$ | $M_2$ | $n$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 10 | 4 | 6 | 3 | 2 |
| 17 | 11 | 6 | 5 | 3 | 2 |
| 18 | 12 | 6 | 6 | 2 | 1 |
| 19 | 13 | 6 | 7 | 4 | 1 |
| 20 | 14 | 7 | 7 | 3 | 2 |

**3.21–3.25.** Среди $N$ лотерейных билетов $M$ выигрышных. Игрок наудачу покупает $n$ билетов. Какая вероятность того, что среди купленных билетов окажутся:

а) хотя бы один выигрышный;

б) $m$ выигрышных.

| № варианта | $N$ | $M$ | $n$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 100 | 5 | 3 | 2 |
| 22 | 200 | 8 | 4 | 4 |
| 23 | 300 | 15 | 3 | 2 |
| 24 | 150 | 6 | 2 | 0 |
| 25 | 140 | 5 | 3 | 2 |

**3.26–3.30.** Предприятие выпускает однородную продукцию. Партия содержит $N$ изделий, из которых $M$ стандартных. По условиям контракта, партия будет принята, если при проверке $n$ случайным образом отобранных изделий будет обнаружено не более $m$ бракованных. Какая вероятность того, что партия:

а) будет принята;

б) не будет принята.

| № варианта | $N$ | $M$ | $n$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|
| 26 | 100 | 96 | 3 | 1 |
| 27 | 160 | 157 | 4 | 1 |
| 28 | 300 | 298 | 3 | 1 |
| 29 | 50 | 48 | 2 | 0 |
| 30 | 180 | 175 | 3 | 0 |

**Задание 4**

Найти вероятности событий, пользуясь теоремами сложения вероятностей несовместных событий и умножения вероятностей независимых событий.

**4.1–4.5.** Три клиента зашли в магазин. Вероятность того, что первый клиент захочет сделать покупку, равняется $p_1$, для второго клиента – $p_2$, третьего – $p_3$. Найти вероятность того, что захотят сделать покупку:

а) все три клиента;

б) хотя бы один клиент;

в) только один клиент.

| № варианта | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,8 | 0,6 | 0,7 |
| 2 | 0,3 | 0,2 | 0,5 |
| 3 | 0,7 | 0,8 | 0,6 |
| 4 | 0,6 | 0,7 | 0,9 |
| 5 | 0,7 | 0,8 | 0,75 |

**4.6–4.10.** Для корректировки бизнес-плана предприятия директор собрал совещание, на котором присутствовали три независимых группы его разработчиков: маркетологи, экономисты, технологи. Вероятность того, что группа маркетологов «отстоит» свой первичный вариант разработанного бизнес-плана, равняется $p_1$, для группы экономистов эта вероятность равна $p_2$, группы технологов – $p_3$. Бизнес-план будет скорректирован, если хотя бы одна из групп разработчиков не «отстоит» своих позиций. Найти вероятность того, что:



а) бизнес-план будет скорректирован;

б) бизнес-план не будет скорректирован;

в) только экономисты «отстоят» свои позиции.

| № варианта | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|
| 6 | 0,8 | 0,7 | 0,7 |
| 7 | 0,45 | 0,3 | 0,5 |
| 8 | 0,8 | 0,85 | 0,7 |
| 9 | 0,7 | 0,75 | 0,95 |
| 10 | 0,8 | 0,8 | 0,7 |

**4.11–4.15.** В отделении банка четыре клиента получили кредиты на строительство жилья независимо друг от друга. Вероятность того, что первый клиент выплатит кредит в установленные договором кредитования сроки, равняется $p_1$, для второго клиента эта вероятность равна $p_2$, третьего – $p_3$, четвертого – $p_4$. Найти вероятность того, что:

а) все клиенты выплатят кредит в установленные договором кредитования сроки;

б) только три клиента выплатят кредит в установленные договором кредитования сроки.

| № варианта | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 0,5 | 0,7 | 0,7 | 0,8 |
| 12 | 0,6 | 0,7 | 0,6 | 0,9 |
| 13 | 0,85 | 0,7 | 0,9 | 0,5 |
| 14 | 0,55 | 0,6 | 0,9 | 0,4 |
| 15 | 0,7 | 0,8 | 0,85 | 0,9 |

**4.16–4.20.** Каждый из пяти частных предпринимателей независимо друг от друга закупает партию продукции и реализует ее на рынке города. Вероятность того, что $i$-й частный предприниматель реализует всю закупленную партию продукции в течение времени $T$, равняется $p_i$. Найти вероятность того, что:

а) все частные предприниматели реализуют закупленную продукцию за время $T$;

б) только $k$ частных предпринимателя реализуют закупленную продукцию за время $T$;

в) хотя бы один частный предприниматель реализует закупленную продукцию за время $T$.

| № варианта | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 0,6 | 0,8 | 0,6 | 0,4 | 0,3 | 4 |
| 17 | 0,3 | 0,45 | 0,65 | 0,3 | 0,2 | 4 |
| 18 | 0,8 | 0,65 | 0,45 | 0,6 | 0,6 | 1 |
| 19 | 0,6 | 0,4 | 0,5 | 0,45 | 0,5 | 1 |
| 20 | 0,7 | 0,5 | 0,8 | 0,7 | 0,4 | 1 |

**4.21–4.25.** Торговый агент контактирует с $n$ потенциальными покупателями в день. Вероятность того, что в определенный день торговый агент совершит хотя бы одну продажу из $n$, равна $P$. Определить вероятность $p$ того, что потенциальный покупатель совершит покупку в определенный день. Определить вероятность того, что в определенный день торговый агент совершит:

а) только $k$ продаж из $n$;

б) все $n$ продаж.

| № варианта | $n$ | $P$ | $k$ |
|---|---|---|---|
| 21 | 4 | 0,9999 | 1 |
| 22 | 5 | 0,99968 | 4 |
| 23 | 6 | 0,999271 | 1 |
| 24 | 4 | 0,9744 | 3 |
| 25 | 3 | 0,973 | 2 |

**4.26–4.30.** Для того чтобы проверить точность своей финансовой деятельности, компания регулярно пользуется услугами аудиторов для проверки бухгалтерских документов. Служащие компании при обработке входящих документов допускают примерно $k$ % ошибок. Аудитор случайно отбирает $n$ входящих документов. Найти вероятность того, что среди этих документов аудитором:

а) будет выявлено $n$ ошибок;

б) не будет выявлено ошибок;

в) будет выявлена хотя бы одна ошибка.

| № варианта | $n$ | $k$, % |
|---|---|---|
| 26 | 8 | 3 |
| 27 | 6 | 5 |
| 28 | 6 | 4 |
| 29 | 5 | 3 |
| 30 | 6 | 4 |



**Задание 5**

**5.1–5.5.** Ревизионной комиссии в середине года предстоит проверка финансово-хозяйственной деятельности фирмы. Специалистами управления случайным образом производится выбор документов за определенный месяц. Вероятность выявления ошибки в выбранном документе в $i$-м месяце равна $p_i$, ($p_1 = p_2 = p_3$, $p_4$, $p_5 = p_6$). Определить вероятность того, что ревизионной комиссией будет выявлена ошибка в случайно выбранном документе. Ревизионной комиссией выявлена ошибка, определить вероятность того, что комиссия выбрала документ, составленный в $i$-м месяце.

| № варианта | $p_1 = p_2 = p_3$ | $p_4$ | $p_5 = p_6$ | $i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,1 | 0,2 | 0,05 | 1 |
| 2 | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 4 |
| 3 | 0,1 | 0,08 | 0,1 | 1 |
| 4 | 0,2 | 0,1 | 0,09 | 3 |
| 5 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 5 |

**5.6–5.10.** Туристическая компания разыгрывает приз – бесплатная путевка на отдых. Представитель туристической компании имеет 3 списка с фамилиями претендентов на приз. В 1-м списке – фамилии $k_1$ женщин и $m_1$ мужчин. Во 2-м списке оказались $k_2$ женщины и $m_2$ мужчин, в 3-м списке – $k_3$ женщины и $m_3$ мужчин. Представитель наудачу выбирает список с фамилиями, из которого в случайном порядке выбирается фамилия победителя. Определить вероятность того, что выиграла женщина. Выбранным претендентом оказалась женщина, какова вероятность того, что ее фамилия находилась в $i$-м списке.

| № варианта | $k_1$, $m_1$ | $k_2$, $m_2$ | $k_3$, $m_3$ | $i$ |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 5, 6 | 4, 7 | 3, 7 | 2 |
| 7 | 4, 3 | 3, 4 | 5, 2 | 3 |
| 8 | 3, 7 | 5, 5 | 4, 6 | 3 |
| 9 | 4, 8 | 8, 2 | 9, 3 | 2 |
| 10 | 8, 5 | 5, 6 | 4, 7 | 1 |

**5.11–5.15.** Страховая компания делит застрахованных по классам риска: первый класс – малый риск, второй класс – средний риск, третий класс – большой риск. Среди всех клиентов $k_1$% – первого класса, $k_2$% – второго класса, $k_3$% – третьего класса. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса равняется $p_1$, второго класса – $p_2$, третьего класса – $p_3$. Какая вероятность того, что случайно выбранный клиент получит страховое вознаграждение. Клиент получил вознаграждение, какова вероятность того, что он относится к $i$-му классу риска.

| № варианта | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | % | | | | | | |
| 11 | 50 | 40 | 10 | 0,02 | 0,01 | 0,04 | 1 |
| 12 | 40 | 30 | 30 | 0,02 | 0,01 | 0,08 | 2 |
| 13 | 10 | 60 | 30 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 3 |
| 14 | 10 | 20 | 70 | 0,01 | 0,07 | 0,08 | 1 |
| 15 | 30 | 40 | 30 | 0,02 | 0,06 | 0,09 | 2 |

**5.16–5.20.** Сотрудники отдела маркетинга полагают, что в ближайшее время ожидается рост спроса на продукцию фирмы. Вероятность этого они оценивают в $p$. При росте спроса на продукцию, вероятность расширения фирмы в ближайшее время составит $p_1$, если спрос на продукцию не возрастет, то вероятность расширения фирмы составит $p_2$. Определить вероятность расширения фирмы в ближайшее время. Фирма расширилась, какова вероятность того, что спрос на продукцию возрос?

| № варианта | $p$ | $p_1$ | $p_2$ |
|---|---|---|---|
| 16 | 0,3 | 0,6 | 0,10 |
| 17 | 0,1 | 0,5 | 0,05 |
| 18 | 0,2 | 0,7 | 0,09 |
| 19 | 0,3 | 0,4 | 0,10 |
| 20 | 0,4 | 0,6 | 0,15 |

**5.21–5.25.** Экспортно-импортная фирма собирается заключить контракт на поставку сельскохозяйственного оборудования в одну из зарубежных стран. Если основной конкурент фирмы не станет одновременно претендовать на заключение контракта, то вероятность получения контракта оценивается в $p_1$, в противном случае – $p_2$. По оценкам экспертов компании вероятность того, что конкурент выдвинет свои предложения по заключению контракта, равна $p_3$. Чему равна вероятность заключения контракта? Контракт на поставку сельскохозяйственного оборудования в одну из развивающихся стран заключен. Какова вероятность того, что конкурент выдвинул предложения по заключению контракта?



| № варианта | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|
| 21 | 0,4 | 0,2 | 0,4 |
| 22 | 0,65 | 0,4 | 0,6 |
| 23 | 0,35 | 0,15 | 0,8 |
| 24 | 0,50 | 0,2 | 0,7 |
| 25 | 0,45 | 0,2 | 0,5 |

**5.26–5.30.** В канцелярии работают 3 секретаря, которые обрабатывают по $k_1$%, $k_2$%, $k_3$% исходящих документов за одно и то же время. Вероятности неверной адресации документов секретарями соответственно равны: $p_1$, $p_2$, $p_3$. Найти вероятность того, что наугад выбранный исходящий из канцелярии документ будет неверно адресован. Найти вероятность того, что документ, оказавшийся неверно адресованным, отправлен $i$-м секретарем.

| № варианта | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | % | | | | | | |
| 26 | 30 | 40 | 30 | 0,03 | 0,01 | 0,03 | 1 |
| 27 | 50 | 30 | 20 | 0,02 | 0,02 | 0,04 | 2 |
| 28 | 20 | 50 | 30 | 0,02 | 0,03 | 0,02 | 3 |
| 29 | 20 | 40 | 40 | 0,02 | 0,01 | 0,02 | 1 |
| 30 | 50 | 40 | 10 | 0,01 | 0,01 | 0,03 | 2 |

**Задание 6**

**6.1–6.5.** Вероятность возвращения клиентом банковского кредита в установленный договором срок равна $p$. Определить вероятность того, что из $n$ выданных кредитов будут возвращены в установленный договором срок:

а) $k$ кредитов;

б) менее $k$ кредитов;

в) по крайней мере один кредит.

| № варианта | $n$ | $p$ | $k$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 0,6 | 5 |
| 2 | 8 | 0,75 | 4 |
| 3 | 5 | 0,8 | 2 |
| 4 | 10 | 0,65 | 5 |
| 5 | 7 | 0,55 | 4 |

**6.6–6.10.** В ходе аудиторской проверки строительной компании аудитор случайным образом отбирает $n$ документов. Вероятность того, что каждый документ содержит ошибки, в среднем равна $p$ %. Найти вероятность того, что:

а) менее $k$ документов содержат ошибки;

б) хотя бы один документ содержит ошибки;

в) более $k$ документов содержат ошибки.

| № варианта | $n$ | $p$, % | $k$ |
|---|---|---|---|
| 6 | 8 | 3 | 2 |
| 7 | 6 | 2 | 3 |
| 8 | 9 | 4 | 2 |
| 9 | 10 | 6 | 4 |
| 10 | 15 | 5 | 3 |

**6.11–6.15.** Тестовое задание состоит из $n$ вопросов, предусматривающих ответы «да» или «нет». Предположим, тестируемый не знает ответ ни на один из вопросов и выбирает ответы наугад. Требуется:

а) определить вероятность того, что он даст не менее $k$ правильных ответов, необходимых для сдачи теста;

б) найти наиболее вероятное число правильных ответов, которые даст тестируемый, и вероятность получения этого наиболее вероятного числа ответов.

| № варианта | $n$ | $k$ |
|---|---|---|
| 11 | 7 | 4 |
| 12 | 10 | 7 |
| 13 | 11 | 8 |
| 14 | 10 | 6 |
| 15 | 8 | 5 |

**6.16–6.20.** В городе $n$ коммерческих банков, работающих независимо друг от друга. У каждого банка риск банкротства в течение года составляет $p$%. Определить вероятность того, что в течение года обанкротится:

а) менее $k$ банков;

б) хотя бы один банк;

в) не менее $k$ банков.

| № варианта | $n$ | $p$, % | $k$ |
|---|---|---|---|
| 16 | 10 | 10 | 3 |
| 17 | 8 | 7 | 5 |
| 18 | 6 | 7 | 3 |
| 19 | 7 | 12 | 4 |
| 20 | 9 | 5 | 2 |



**6.21–6.25.** Записи страховой компании показали, что $p$% держателей страховых полисов старше 50 лет потребовали возмещения страховых сумм. В случайном порядке было отобрано $n$ человек старше 50 лет, имеющих полисы. Требуется:

а) определить вероятность того, что из $n$ человек потребуют возмещения страховых сумм более $k$ человек;

б) определить вероятность того, что из $n$ человек потребует возмещения страховых сумм хотя бы один человек;

в) найти наиболее вероятное число держателей страховых полисов, которые потребуют возмещение страховых сумм, и вероятность, соответствующую этому числу.

| № варианта | $n$ | $p$, % | $k$ |
|---|---|---|---|
| 21 | 10 | 10 | 3 |
| 22 | 12 | 15 | 2 |
| 23 | 10 | 15 | 4 |
| 24 | 8 | 20 | 5 |
| 25 | 7 | 15 | 1 |

**6.26–6.30.** Телевизионный канал рекламирует новый вид автомобилей. Вероятность того, что телезритель увидит эту рекламу, оценивается в $p$%. Требуется:

а) определить вероятность того, что из $n$ телезрителей, отобранных в случайном порядке, рекламу увидят ровно $k$ человек;

б) определить вероятность того, что из $n$ телезрителей, отобранных в случайном порядке, рекламу увидят более $k$ человек;

в) найти наиболее вероятное число телезрителей, увидевших рекламу автомобилей.

| № варианта | $n$ | $p$, % | $k$ |
|---|---|---|---|
| 26 | 10 | 20 | 5 |
| 27 | 12 | 15 | 2 |
| 28 | 9 | 35 | 3 |
| 29 | 10 | 25 | 2 |
| 30 | 7 | 15 | 4 |

**Задание 7**

**7.1–7.5.** Вероятность того, что малое предприятие региона обанкротится за время $T$, равна $p$. Определить вероятность того, что из $n$ малых предприятий региона, работающих независимо друг от друга, за время $T$ приостановят свою деятельность:

а) ровно $k$ предприятий;

б) от $k_1$ до $k_2$ предприятий.

| № варианта | $n$ | $p$ | $k$ | $k_1$ | $k_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 150 | 0,3 | 40 | 40 | 80 |
| 2 | 130 | 0,2 | 30 | 60 | 90 |
| 3 | 80 | 0,1 | 20 | 50 | 70 |
| 4 | 150 | 0,4 | 50 | 0 | 100 |
| 5 | 90 | 0,15 | 70 | 10 | 50 |

**7.6–7.10.** Предприятие для изучения потребительских предпочтений на товар в случайном порядке рассылает анкеты по $n$ адресам (почтовый опрос). Вероятность того, что заполненные потребителями анкеты «возвратятся» на предприятие, составляет $p$. Требуется:

а) определить вероятность того, что из $n$ разосланных анкет «возвратятся» менее $k$ анкет;

б) найти наиболее вероятное число анкет, «возвратившихся» на предприятие и соответствующую этому значению вероятность.

| № варианта | $n$ | $p$ | $k$ |
|---|---|---|---|
| 6 | 1000 | 0,004 | 4 |
| 7 | 200 | 0,05 | 2 |
| 8 | 200 | 0,06 | 3 |
| 9 | 400 | 0,02 | 5 |
| 10 | 1000 | 0,003 | 2 |

**7.11–7.15.** Вероятность возвращения клиентом банковского кредита в установленный договором срок равна $p$. Определить вероятность того, что из $n$ выданных кредитов, будут возвращены в установленный договором срок:

а) ровно $k$ кредитов;

б) от $k_1$ до $k_2$ кредитов.

| № варианта | $n$ | $p$ | $k$ | $k_1$ | $k_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 120 | 0,6 | 80 | 80 | 120 |
| 12 | 80 | 0,7 | 60 | 60 | 80 |
| 13 | 90 | 0,8 | 55 | 50 | 90 |
| 14 | 100 | 0,5 | 60 | 50 | 100 |
| 15 | 200 | 0,4 | 50 | 45 | 200 |

**7.16–7.20.** Вероятность того, что выпускник экономического факультета «откроет свое дело», равна $p$. Определить вероятность того, что из $n$ выпускников экономического факультета свое дело откроют:



а) менее $k$ выпускников;

б) не менее $k$ выпускников

в) хотя бы один выпускник.

| № варианта | $n$ | $p$ | $k$ |
|---|---|---|---|
| 16 | 100 | 0,03 | 4 |
| 17 | 200 | 0,01 | 5 |
| 18 | 130 | 0,02 | 3 |
| 19 | 150 | 0,02 | 2 |
| 20 | 200 | 0,04 | 3 |

**7.21–7.25.** В банк поступает выручка из магазинов. Среди всей поступающей денежной массы в среднем $p$% купюр достоинством 20 тыс. р. Какова вероятность того, что из случайно отобранных $n$ купюр:

а) ровно $k$ купюр достоинством 20 тыс. р.;

б) от $k_1$ до $k_2$ купюр достоинством 20 тыс. р.

| № варианта | $n$ | $p$, % | $k$ | $k_1$ | $k_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 600 | 13 | 70 | 60 | 400 |
| 22 | 500 | 14 | 10 | 0 | 400 |
| 23 | 400 | 14 | 60 | 100 | 300 |
| 24 | 700 | 15 | 100 | 20 | 120 |
| 25 | 300 | 20 | 70 | 0 | 150 |

**7.26–7.30.** В выставке фирм, реализующих компьютерную технику и комплектующие для нее, участвуют $n$ представителей фирм. Вероятность того, что в определенный день представителем фирмы будет заключен контракт на продажу продукции, равна $p$. Определить вероятность того, что из $n$ представителей фирм в определенный день заключат контракты:

а) более $k$ представителей;

б) ровно $k$ представителей.

| № варианта | $n$ | $p$ | $k$ |
|---|---|---|---|
| 26 | 70 | 0,15 | 50 |
| 27 | 90 | 0,35 | 60 |
| 28 | 110 | 0,45 | 70 |
| 29 | 95 | 0,25 | 20 |
| 30 | 105 | 0,30 | 30 |

**Задание 8**

Для определенной в условии задачи дискретной случайной величины:

1) построить ряд распределения и столбцовую диаграмму;

2) найти функцию распределения и построить ее график;

3) вычислить числовые характеристики: математическое ожидание, моду, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

**8.1–8.5.** Вероятность того, что банк предоставит кредит каждому из клиентов, равна $p$. $n$ клиентов собираются обратиться в один из банков города с просьбой предоставить кредит. Случайная величина $X$ – число клиентов, получивших кредит.

| № варианта | $n$ | $p$ |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 0,4 |
| 2 | 4 | 0,6 |
| 3 | 5 | 0,8 |
| 4 | 4 | 0,7 |
| 5 | 6 | 0,6 |

**8.6–8.10.** Имея в запасе $n$ патронов, стрелок производит выстрелы в мишень до первого попадания, или пока не израсходует все патроны. Вероятность попадания при каждом выстреле равна $p$. Случайная величина $X$ – число выстрелов, произведенных в мишень.

| № варианта | $n$ | $p$ |
|---|---|---|
| 6 | 3 | 0,8 |
| 7 | 4 | 0,6 |
| 8 | 5 | 0,8 |
| 9 | 4 | 0,75 |
| 10 | 6 | 0,6 |

**8.11–8.15.** Производится $n$ выстрелов по мишени. Вероятность попадания при первом выстреле равна $p$, и после каждого произведенного выстрела она уменьшается на 0,1. Случайная величина $X$ – число попаданий в мишень.

| № варианта | $n$ | $p$ |
|---|---|---|
| 11 | 3 | 0,7 |
| 12 | 4 | 0,6 |
| 13 | 4 | 0,8 |
| 14 | 4 | 0,7 |
| 15 | 3 | 0,4 |



**8.16–8.20.** Вероятность возвращения кредита в установленный договором срок для каждого клиента равна $p_i$. Случайная величина $X$ – число кредитов, возвращенных в срок тремя клиентами.

| № варианта | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ |
|---|---|---|---|
| 16 | 0,8 | 0,6 | 0,8 |
| 17 | 0,8 | 0,6 | 0,6 |
| 18 | 0,7 | 0,8 | 0,7 |
| 19 | 0,50 | 0,6 | 0,8 |
| 20 | 0,5 | 0,8 | 0,6 |

**8.21–8.25.** Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна $p$. Случайная величина $X$ – число выигрышных билетов среди $n$ купленных.

| № варианта | $n$ | $p$ |
|---|---|---|
| 21 | 3 | 0,06 |
| 22 | 4 | 0,05 |
| 23 | 3 | 0,08 |
| 24 | 5 | 0,1 |
| 25 | 3 | 0,04 |

**8.26–8.30.** Имеются $n$ ключей, из которых только один подходит к замку. Наудачу выбирается ключ и делается попытка открыть им дверь, если ключ не подходит, то этот ключ в последующих опробованиях не участвует. Случайная величина $X$ – число проб при открывании замка.

| № варианта | $n$ |
|---|---|
| 26 | 6 |
| 27 | 5 |
| 28 | 7 |
| 29 | 4 |
| 30 | 8 |

**Задание 9**

Закон распределения непрерывной случайной величины задан функцией плотности распределения вероятностей $f(x)$. Требуется:

1) определить значение параметра $C$;

2) построить график функции плотности распределения вероятностей;

3) найти функцию распределения данной случайной величины и построить ее график;

4) вычислить числовые характеристики данной случайной величины: математическое ожидание, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратическое отклонение;

5) найти вероятность того, что данная случайная величина примет значение, принадлежащее отрезку $[a; b]$.

**9.1.** $f(x)=\begin{cases} C(x+1), & x\in[-1;2]; \\ 0, & x\notin[-1;2]; \end{cases}$ $a=1{,}5;\ b=2.$

**9.2.** $f(x)=\begin{cases} Cx, & x\in[0;3]; \\ 0, & x\notin[0;3]; \end{cases}$ $a=2;\ b=2{,}5.$

**9.3.** $f(x)=\begin{cases} C(x-4), & x\in[0;3]; \\ 0, & x\notin[0;3]; \end{cases}$ $a=1;\ b=2.$

**9.4.** $f(x)=\begin{cases} C(x-3)\,| & x\in[3;5]; \\ 0, & x\notin[3;5]; \end{cases}$ $a=4;\ b=5.$

**9.5.** $f(x)=\begin{cases} Cx^2, & x\in[-3;0]; \\ 0, & x\notin[-3;0]; \end{cases}$ $a=-2;\ b=-0.$

**9.6.** $f(x)=\begin{cases} C, & x\in[4;7]; \\ 0, & x\notin[4;7]; \end{cases}$ $a=5;\ b=7.$

**9.7.** $f(x)=\begin{cases} Cx^3, & x\in[0;4]; \\ 0, & x\notin[0;4]; \end{cases}$ $a=0;\ b=2{,}5.$

**9.8.** $f(x)=\begin{cases} C(x^2-x), & x\in[1;3]; \\ 0, & x\notin[1;3]; \end{cases}$ $a=0;\ b=2.$

**9.9.** $f(x)=\begin{cases} C(x-1), & x\in[1;4]; \\ 0, & x\notin[1;4]; \end{cases}$ $a=4;\ b=10.$

**9.10.** $f(x)=\begin{cases} C(x+2), & x\in[-2;2]; \\ 0, & x\notin[-2;2]; \end{cases}$ $a=0;\ b=2.$

**9.11.** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{C}{x^4}, & x\in[1;5]; \\ 0, & x\notin[1;5]; \end{cases}$ $a=2;\ b=4.$

**9.12.** $f(x)=\begin{cases} Cx^2, & x\in[-1;1]; \\ 0, & x\notin[-1;1]; \end{cases}$ $a=-1;\ b=1{,}5.$

**9.13.** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{C}{x^4}, & x\in[1;\infty); \\ 0, & x\notin[1;\infty); \end{cases}$ $a=1;\ b=3.$

**9.14.** $f(x)=\begin{cases} C(10x+1), & x\in[0;1]; \\ 0, & x\notin[0;1]; \end{cases}$ $a=0{,}5;\ b=1.$



**9.15.** $f(x)=\begin{cases} C(3x-1), & x\in[1;3]; \\ 0, & x\notin[1;3]; \end{cases}$ $a=2;\ b=3.$

**9.16.** $f(x)=\begin{cases} C(1+2x) & x\in[0;5]; \\ 0, & x\notin[0;5]; \end{cases}$ $a=1;\ b=4.$

**9.17.** $f(x)=\begin{cases} C(x^2+x), & x\in[0;2]; \\ 0, & x\notin[0;2]; \end{cases}$ $a=1;\ b=2.$

**9.18.** $f(x)=\begin{cases} Cx^3, & x\in[1;2]; \\ 0, & x\notin[1;2]; \end{cases}$ $a=0;\ b=1{,}5.$

**9.19.** $f(x)=\begin{cases} C(x+3), & x\in[-3;0]; \\ 0, & x\notin[-3;0]; \end{cases}$ $a=-1;\ b=0{,}75.$

**9.20.** $f(x)=\begin{cases} C(1-x^4), & x\in[-1;1]; \\ 0, & x\notin[-1;1]; \end{cases}$ $a=-0{,}75;\ b=0{,}75.$

**9.21.** $f(x)=\begin{cases} C(x-2), & x\in[2;6]; \\ 0, & x\notin[2;6]; \end{cases}$ $a=3;\ b=4.$

**9.22.** $f(x)=\begin{cases} C(x+3) & x\in[-3;2]; \\ 0, & x\notin[-3;2]; \end{cases}$ $a=0; b=1.$

**9.23.** $f(x)=\begin{cases} C(x-1), & x\in[1;3]; \\ 0, & x\notin[1;3]; \end{cases}$ $a=0;\ b=2.$

**9.24.** $f(x)=\begin{cases} C, & x\in[3;7]; \\ 0, & x\notin[3;7]; \end{cases}$ $a=6;\ b=9.$

**9.25.** $f(x)=\begin{cases} C(x+2), & x\in[-2;3]; \\ 0, & x\notin[-2;3]; \end{cases}$ $a=-1{,}5;\ b=1{,}5.$

**9.26.** $f(x)=\begin{cases} C(x^2-x), & x\in[1;3]; \\ 0, & x\notin[1;3]; \end{cases}$ $a=1;\ b=2.$

**9.27.** $f(x)=\begin{cases} C(x-4), & x\in[-4;4]; \\ 0, & x\notin[-4;4]; \end{cases}$ $a=2;\ b=5.$

**9.28.** $f(x)=\begin{cases} C(2x+1), & x\in[0;1]; \\ 0, & x\notin[0;1]; \end{cases}$ $a=0;\ b=0{,}5.$

**9.29.** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{C}{x^4}, & x\in[1;5]; \\ 0, & x\notin[1;5]; \end{cases}$ $a=2{,}5;\ b=3.$

**9.30.** $f(x)=\begin{cases} Cx^2, & x\in[-1;1]; \\ 0, & x\notin[-1;1]; \end{cases}$ $a=0;\ b=2{,}5.$

**Задание 10**

**10.1–10.5.** Поток заявок, поступающих на станцию технического обслуживания автомобилей, представляет собой простейший поток событий. Известно, что в течение некоторого промежутка времени среднее число заявок, поступающих за одни сутки (24 часа), равно $n$. Для этого промежутка времени найти вероятность того, что за один час поступит:

а) не менее $k$ заявок;

б) более $k$ заявок.

| № варианта | $n$ | $k$ |
|---|---|---|
| 1 | 12 | 2 |
| 2 | 12 | 3 |
| 3 | 24 | 3 |
| 4 | 24 | 2 |
| 5 | 36 | 4 |

**10.6–10.10.** Поток заявок, поступающих на телефонную станцию, представляет собой простейший поток событий. Известно, что в течение некоторого промежутка времени среднее число вызовов, поступающих за один час, равно $n$. Для этого промежутка времени найти вероятность того, что за одну минуту поступит не менее $k$ вызовов.

| № варианта | $n$ | $k$ |
|---|---|---|
| 6 | 360 | 2 |
| 7 | 240 | 3 |
| 8 | 180 | 3 |
| 9 | 360 | 4 |
| 10 | 240 | 2 |

**10.11–10.15.** Все значения равномерно распределенной случайной величины $X$ принадлежат отрезку $[a;b]$. Найти математическое ожидание, дисперсию и вероятность попадания значения случайной величины $X$ в отрезок $[\alpha;\beta]$. Построить график плотности распределения случайной величины $X$.

| № варианта | $[a;b]$ | $[\alpha;\beta]$ |
|---|---|---|
| 11 | $[10;25]$ | $[8;24]$ |
| 12 | $[-100;100]$ | $[0;200]$ |
| 13 | $[50;250]$ | $[100;200]$ |
| 14 | $[30;40]$ | $[25;35]$ |
| 15 | $[2;5]$ | $[3;6]$ |



**10.16–10.20.** Троллейбусы данного маршрута идут с интервалом в $n$ мин. Пассажир подходит к троллейбусной остановке в случайный момент времени. Какова вероятность появления пассажира не позднее чем за 2 мин до отхода следующего троллейбуса?

| № варианта | $n$ |
|---|---|
| 16 | 6 |
| 17 | 10 |
| 18 | 12 |
| 19 | 5 |
| 20 | 8 |

**10.21–10.25.** Случайная величина $X$ – время безотказной работы воздушного фильтра автомобиля, распределена по показательному закону с математическим ожиданием $M[X]$, (число лет). Определить дисперсию и вероятность того, что случайная величина $X$ примет значения в интервале $[\alpha;\beta]$. Построить график плотности распределения случайной величины $X$.

| № варианта | $M[X]$, (число лет) | $[\alpha;\beta]$ |
|---|---|---|
| 21 | 1 | $[0;1,1]$ |
| 22 | 1,2 | $[0,6;1,2]$ |
| 23 | 1,1 | $[1,1;2]$ |
| 24 | 0,8 | $[0,5;1,2]$ |
| 25 | 0,9 | $[0,3;1,3]$ |

**10.26–10.30.** Время пользования Интернетом в вечернее время распределено по показательному закону с математическим ожиданием, равным $M[X]$, часов. Найти вероятность того, что пользователь будет находиться в Интернете более $\alpha$ часов. Найти среднее квадратическое отклонение времени пользования Интернетом. Построить график плотности распределения случайной величины $X$.

| № варианта | $M[X]$, ч | $\alpha$ |
|---|---|---|
| 26 | 0,6 | 0,3 |
| 27 | 0,8 | 0,1 |
| 28 | 0,9 | 0,5 |
| 29 | 1,0 | 0,6 |
| 30 | 0,75 | 0,2 |

**Задание 11**

**11.1–11.5.** Цена акции некоторой компании в течение года – нормально распределенная случайная величина со средним квадратическим отклонением, равным $\sigma$ у. е., и математическим ожиданием, равным $M[X]$ у. е. Построить график плотности распределения случайной величины *X*. Определить вероятность того, что в случайно выбранный день этого периода:

а) цена за акцию превысит $\alpha$ у. е.;

б) цена за акцию отклонится от математического ожидания меньше чем на $\Delta$ у. е.

| № варианта | $M[X]$, у. е. | $\sigma$, у. е. | $\alpha$ | $\Delta$, у. е. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 48 | 3 | 49 | 2 |
| 2 | 50 | 4 | 48 | 3 |
| 3 | 65 | 2 | 62 | 4 |
| 4 | 120 | 5 | 121 | 5 |
| 5 | 100 | 4 | 100 | 5 |

**11.6–11.10.** Еженедельный выпуск продукции на заводе – нормально распределенная случайная величина со средним квадратическим отклонением, равным $\sigma$ у. е., и математическим ожиданием, равным $M[X]$ у. е. Построить график плотности распределения случайной величины *X*. Требуется:

а) определить вероятность того, что еженедельный выпуск продукции завода будет находиться в интервале $[\alpha;\beta]$ у. е.;

б) установить границы, в которых с вероятностью 0,954 будет находиться еженедельный выпуск продукции завода.

| № варианта | $M[X]$, у. е. | $\sigma$, у. е. | $[\alpha;\beta]$ |
|---|---|---|---|
| 6 | 130000 | 1000 | $[125000;130500]$ |
| 7 | 150000 | 2500 | $[149000;152000]$ |
| 8 | 1000 | 150 | $[850;1200]$ |
| 9 | 1250 | 250 | $[1000;1200]$ |
| 10 | 1520 | 320 | $[1500;1650]$ |

**11.11–11.15.** Измерительный прибор имеет систематическую ошибку, равную $a$ м, и среднее квадратическое отклонение случайной ошибки – $\sigma$ м. (Предполагается, что возникающие ошибки распределены по нормальному закону.) Какова вероятность того, что ошибка измерения:

а) не превзойдет по абсолютной величине $\Delta$ м?

б) не превысит $\alpha$ м.

| № варианта | $a$ | $\sigma$ | $\alpha$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|
| | м | | | |
| 11 | 2 | 3 | 10 | 3 |
| 12 | 5 | 4 | 6 | 5 |
| 13 | 6 | 2 | 7 | 4 |
| 14 | 3 | 5 | 5 | 2 |
| 15 | 1 | 4 | 3 | 3 |



**11.16–11.20.** Процент за пользование кредитом в банках города – случайная величина, которая распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным $M[X]$ %, и средним квадратическим отклонением, равным $\sigma$ %. Построить график плотности распределения случайной величины *X*. Найти вероятность того, что процент за пользование кредитом не превзойдет $\alpha$ %.

| № варианта | $M[X]$ | $\sigma$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|
| | % | | |
| 16 | 16 | 1 | 18 |
| 17 | 17 | 1,2 | 17,9 |
| 18 | 20 | 0,8 | 19,5 |
| 19 | 22 | 0,9 | 24 |
| 20 | 18 | 0,75 | 19,6 |

**11.20–11.25.** В некотором регионе рост мужчины – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием $M[X]$ см и дисперсией $D[X]$ см$^2$. Найти вероятность того, что наудачу выбранный мужчина имеет рост от $\alpha$ до $\beta$ см. Определить вероятность того, что $n$ наудачу выбранных мужчины имеют рост от $\alpha$ до $\beta$ см.

| № варианта | $M[X]$, см | $D[X]$, см$^2$ | $[\alpha;\beta]$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 180 | 9 | $[178; 181]$ | 2 |
| 22 | 182 | 8 | $[179; 183]$ | 3 |
| 23 | 179 | 16 | $[176; 179]$ | 3 |
| 24 | 178 | 4 | $[180; 182]$ | 4 |
| 25 | 181 | 9 | $[176; 178]$ | 2 |

**11.26–11.30.** Считается, что изделие – высшего качества, если отклонение его размеров от номинальных не превосходит по абсолютной величине $\Delta$ мм. Случайные отклонения размера изделия от номинального подчиняются нормальному закону со средним квадратичным отклонением, равным $\sigma$ мм. Систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число изделий высшего качества среди 100 изготовленных.

| № варианта | $\sigma$ | $\Delta$ |
|---|---|---|
| | мм | |
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 3 |
| 5 | 5 | 4 |

## *ПРИЛОЖЕНИЕ А*

(*справочное*)

**Таблица значений функции плотности стандартного нормального распределения**

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

| $x$ | Сотые доли $x$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0,0 | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0,1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0,4 | 3683 | 3668 | 3653 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1,1 | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1,2 | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1,7 | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1,8 | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1,9 | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2,0 | 0,0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2,2 | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2,4 | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2,5 | 0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2,6 | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2,9 | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3,1 | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| 3,2 | 0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3,3 | 0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |
| 3,4 | 0012 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| 3,5 | 0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| 3,6 | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| 3,7 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 |
| 3,8 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 |
| 3,9 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 |
| ∞ | 0 | | | | | | | | | |



## *ПРИЛОЖЕНИЕ Б*

(*справочное*)

**Таблица значений функции Лапласа**

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

| $x$ | Сотые доли $x$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0,0 | 0,0000 | 0040 | 0080 | 0120 | 0160 | 0199 | 0239 | 0279 | 0319 | 0359 |
| 0,1 | 0,0398 | 0438 | 0478 | 0517 | 0557 | 0596 | 0636 | 0675 | 0714 | 0753 |
| 0,2 | 0,0793 | 0832 | 0871 | 0910 | 0948 | 0987 | 1026 | 1064 | 1103 | 1141 |
| 0,3 | 0,1179 | 1217 | 1255 | 1293 | 1331 | 1368 | 1406 | 1443 | 1480 | 1517 |
| 0,4 | 0,1554 | 1591 | 1628 | 1664 | 1700 | 1736 | 1772 | 1808 | 1844 | 1879 |
| 0,5 | 0,1915 | 1950 | 1985 | 2019 | 2054 | 2088 | 2123 | 2157 | 2190 | 2224 |
| 0,6 | 0,2257 | 2291 | 2324 | 2357 | 2389 | 2422 | 2454 | 2486 | 2517 | 2549 |
| 0,7 | 2580 | 2611 | 2642 | 2673 | 2704 | 2734 | 2764 | 2794 | 2823 | 2852 |
| 0,8 | 2881 | 2910 | 2939 | 2967 | 2995 | 3023 | 3051 | 3078 | 3106 | 3133 |
| 0,9 | 3159 | 3186 | 3212 | 3238 | 3264 | 3289 | 3315 | 3340 | 3365 | 3389 |
| 1,0 | 0,3413 | 3438 | 3461 | 3485 | 3508 | 3531 | 3554 | 3577 | 3599 | 3621 |
| 1,1 | 3643 | 3665 | 3686 | 3708 | 3729 | 3749 | 3770 | 3790 | 3810 | 3830 |
| 1,2 | 3849 | 3869 | 3888 | 3907 | 3925 | 3944 | 3962 | 3980 | 3997 | 4015 |
| 1,3 | 4032 | 4049 | 4066 | 4082 | 4099 | 4115 | 4131 | 4147 | 4162 | 4177 |
| 1,4 | 4192 | 4207 | 4222 | 4236 | 4251 | 4265 | 4279 | 4292 | 4306 | 4319 |
| 1,5 | 4332 | 4345 | 4357 | 4370 | 4382 | 4394 | 4406 | 4418 | 4429 | 4441 |
| 1,6 | 4452 | 4463 | 4474 | 4484 | 4495 | 4505 | 4515 | 4525 | 4535 | 4545 |
| 1,7 | 4554 | 4564 | 4573 | 4582 | 4591 | 4599 | 4608 | 4616 | 4625 | 4633 |
| 1,8 | 4641 | 4649 | 4656 | 4664 | 4671 | 4678 | 4686 | 4693 | 4699 | 4706 |
| 1,9 | 4713 | 4719 | 4726 | 4732 | 4738 | 4744 | 4750 | 4756 | 4761 | 4767 |
| 2,0 | 0,4772 | 4778 | 4783 | 4788 | 4793 | 4798 | 4803 | 4808 | 4812 | 4817 |
| 2,1 | 4821 | 4826 | 4830 | 4834 | 4838 | 4842 | 4846 | 4850 | 4854 | 4857 |
| 2,2 | 4861 | 4864 | 4868 | 4871 | 4875 | 4878 | 4881 | 4884 | 4887 | 4890 |
| 2,3 | 4893 | 4896 | 4898 | 4901 | 4904 | 4906 | 4909 | 4911 | 4913 | 4916 |
| 2,4 | 4918 | 4920 | 4922 | 4925 | 4927 | 4929 | 4931 | 4932 | 4934 | 4936 |
| 2,5 | 4938 | 4940 | 4941 | 4943 | 4945 | 4946 | 4948 | 4949 | 4951 | 4952 |
| 2,6 | 4953 | 4955 | 4956 | 4957 | 4959 | 4960 | 4961 | 4962 | 4963 | 4964 |
| 2,7 | 4965 | 4966 | 4967 | 4968 | 4969 | 4970 | 4971 | 4972 | 4973 | 4974 |
| 2,8 | 4974 | 4975 | 4976 | 4977 | 4977 | 4978 | 4979 | 4979 | 4980 | 4981 |
| 2,9 | 4981 | 4982 | 4982 | 4983 | 4984 | 4984 | 4985 | 4985 | 4986 | 4986 |
| 3,0 | 0,49865 | | | | | | | | | |
| 3,1 | 0,49903 | | | | | | | | | |
| 3,2 | 0,49931 | | | | | | | | | |
| 3,3 | 0,49952 | | | | | | | | | |
| 3,4 | 0,49966 | | | | | | | | | |
| 3,6 | 0,499841 | | | | | | | | | |
| 3,8 | 0,499928 | | | | | | | | | |
| 4,0 | 0,499968 | | | | | | | | | |
| 4,5 | 0,499997 | | | | | | | | | |
| 5,0 | 0,4999997 | | | | | | | | | |
| ∞ | 0,5 | | | | | | | | | |

*ПРИЛОЖЕНИЕ В*
(*справочное*)
**Таблица значений**

$$P(X = m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}$$

| m | a | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
| 0 | 0,90484 | 0,81873 | 0,740818 | 0,67032 | 0,60653 | 0,5488 |
| 1 | 0,09048 | 0,16375 | 0,222245 | 0,26813 | 0,30327 | 0,3293 |
| 2 | 0,00452 | 0,01637 | 0,033337 | 0,05363 | 0,07582 | 0,0988 |
| 3 | 0,00015 | 0,00109 | 0,003334 | 0,00715 | 0,01264 | 0,0198 |
| 4 | 3,8E–06 | 5,5E–05 | 0,00025 | 0,00072 | 0,00158 | 0,003 |
| 5 | 7,5E–08 | 2,2E–06 | 1,5E–05 | 5,7E–05 | 0,00016 | 0,0004 |
| 6 | 1,3E–09 | 7,3E–08 | 7,5E–07 | 3,8E–06 | 1,3E–05 | 4E–05 |
| 7 | 1,8E–11 | 2,1E–09 | 3,21E–08 | 2,2E–07 | 9,4E–07 | 3E–06 |
| 8 | 2,2E–13 | 5,2E–11 | 1,21E–09 | 1,1E–08 | 5,9E–08 | 2E–07 |
| 9 | 2,5E–15 | 1,2E–12 | 4,02E–11 | 4,8E–10 | 3,3E–09 | 2E–08 |
| 10 | 2,5E–17 | 2,3E–14 | 1,21E–12 | 1,9E–11 | 1,6E–10 | 9E–10 |
| m | a | | | | | |
| | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0,49659 | 0,44933 | 0,40657 | 0,36788 | 0,1353 | 0,04979 |
| 1 | 0,34761 | 0,35946 | 0,36591 | 0,36788 | 0,2707 | 0,14936 |
| 2 | 0,12166 | 0,14379 | 0,16466 | 0,18394 | 0,2707 | 0,22404 |
| 3 | 0,02839 | 0,03834 | 0,0494 | 0,06131 | 0,1804 | 0,22404 |
| 4 | 0,00497 | 0,00767 | 0,01111 | 0,01533 | 0,0902 | 0,16803 |
| 5 | 0,0007 | 0,00123 | 0,002 | 0,00307 | 0,0361 | 0,10082 |
| 6 | 8,1E–05 | 0,00016 | 0,0003 | 0,00051 | 0,012 | 0,05041 |
| 7 | 8,1E–06 | 1,9E–05 | 3,9E–05 | 7,3E–05 | 0,0034 | 0,0216 |
| 8 | 7,1E–07 | 1,9E–06 | 4,3E–06 | 9,1E–06 | 0,0009 | 0,0081 |
| 9 | 5,5E–08 | 1,7E–07 | 4,3E–07 | 1E–06 | 0,0002 | 0,0027 |
| 10 | 3,9E–09 | 1,3E–08 | 3,9E–08 | 1E–07 | 4E–05 | 0,00081 |





| m | a | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0 | 0,0183 | 0,0067 | 0,00248 | 0,00091 | 0,0003 | 0,00012 | 4,54E–05 |
| 1 | 0,0733 | 0,0337 | 0,01487 | 0,00638 | 0,0027 | 0,00111 | 0,000454 |
| 2 | 0,1465 | 0,0842 | 0,04462 | 0,02234 | 0,0107 | 0,005 | 0,00227 |
| 3 | 0,1954 | 0,1404 | 0,08924 | 0,05213 | 0,0286 | 0,01499 | 0,007567 |
| 4 | 0,1954 | 0,1755 | 0,13385 | 0,09123 | 0,0573 | 0,03374 | 0,018917 |
| 5 | 0,1563 | 0,1755 | 0,16062 | 0,12772 | 0,0916 | 0,06073 | 0,037833 |
| 6 | 0,1042 | 0,1462 | 0,16062 | 0,149 | 0,1221 | 0,09109 | 0,063055 |
| 7 | 0,0595 | 0,1044 | 0,13768 | 0,149 | 0,1396 | 0,11712 | 0,090079 |
| 8 | 0,0298 | 0,0653 | 0,10326 | 0,13038 | 0,1396 | 0,13176 | 0,112599 |
| 9 | 0,0132 | 0,0363 | 0,06884 | 0,1014 | 0,1241 | 0,13176 | 0,12511 |
| 10 | 0,0053 | 0,0181 | 0,0413 | 0,07098 | 0,0993 | 0,11858 | 0,12511 |
| 11 | 0,0019 | 0,0082 | 0,02253 | 0,04517 | 0,0722 | 0,09702 | 0,113736 |
| 12 | 0,0006 | 0,0034 | 0,01126 | 0,02635 | 0,0481 | 0,07277 | 0,09478 |
| 13 | 0,0002 | 0,0013 | 0,0052 | 0,01419 | 0,0296 | 0,05038 | 0,072908 |
| 14 | 6E-05 | 0,0005 | 0,00223 | 0,00709 | 0,0169 | 0,03238 | 0,052077 |
| 15 | 2E-05 | 0,0002 | 0,00089 | 0,00331 | 0,009 | 0,01943 | 0,034718 |

*Примечание* – $6\text{E} - 05 = 6 \cdot 10^{-5} = \frac{6}{10^5} = 0{,}00006.$

*ПРИЛОЖЕНИЕ Г*
(*справочное*)
**Рабочая программа по дисциплине**
**«Теория вероятностей и математическая статистика»**

## 1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЁ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

### 1.1 Цель преподавания дисциплины

Курс «Теория вероятностей и математическая статистика» преподаётся в соответствии с принципом непрерывной математической подготовки студентов технических вузов. Кроме того, применение вычислительной техники при выполнении лабораторных работ по математической статистике способствует непрерывному использованию студентами компьютеров и пакетов прикладных программ.

Цель преподавания дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» студентам гуманитарно-экономического факультета:

а) обеспечить студентов знаниями, необходимыми для изучения многих специальных дисциплин; подготовить их к работе над дипломными проектами, которые в большинстве своём содержат разделы по обработке статистических данных или прогнозирование поведения случайных экономических процессов;

б) сформировать у студентов вероятностное мышление, поскольку в практической деятельности каждый из них столкнётся с массовыми случайными явлениями, необходимостью принятия управленческих решений в условиях неопределённости и риска.

### 1.2 Задачи изучения дисциплины

Задачи изучения дисциплины заключаются в том, чтобы научиться:

а) строить вероятностно-статистические модели случайных процессов и явлений;

б) собирать статистические данные;

в) выполнять анализ статистических данных;

г) охарактеризовывать изучаемое явление, объект, процесс на основе анализа статистических данных;

д) прогнозировать поведение исследуемого явления, объекта, процесса;

е) использовать вычислительную технику для обработки статистических данных.

## 2 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 2.1 Случайные события и их вероятности

2.1.1 Предмет и задачи теории вероятностей. Исторический очерк. Вероятностный эксперимент. Пространство элементарных событий. Операции



над событиями: инверсия, сумма, произведение, разность событий.

2.1.2 Относительная частота. Понятие вероятности. Аксиомы теории вероятностей.

2.1.3 Методы непосредственного вычисления вероятностей. Классический метод. Элементы комбинаторики.

2.1.4 Свойства вероятностей. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность. Независимость событий.

2.1.5 Формула полной вероятности. Формула Байеса. Байесовский подход к анализу экономических систем с учётом поступления дополнительной информации.

2.1.6 Последовательность независимых испытаний. Испытания Бернулли. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Теоремы Пуассона, Муавра-Лапласа. Наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли.

### 2.2 Одномерные случайные величины

2.2.1 Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения случайной величины. Способы задания закона распределения дискретных случайных величин: ряд распределения, столбцовая диаграмма, многоугольник распределения, аналитическое выражение.

2.2.2 Функция распределения случайных величин и её свойства. Дискретные случайные величины. Распределения дискретных случайных величин (биномиальное, геометрическое, Пуассоновское).

2.2.3 Непрерывные случайные величины. Функция плотности распределения вероятностей и ее свойства. Распределения непрерывных случайных величин (нормальное, равномерное, показательное).

2.2.4 Числовые характеристики одномерной случайной величины. Характеристики положения и их свойства. Характеристики рассеяния и их свойства. Моменты случайных величин. Примеры использования числовых характеристик случайных величин в качестве показателей функционирования экономических систем.

### 2.3 Многомерные случайные величины

2.3.1 Определение многомерной случайной величины. Понятие о моделях распределения многомерных случайных величин. Многомерные дискретные, непрерывные и смешанные величины. Числовые характеристики многомерных случайных величин. Зависимые и независимые случайные величины.

### 2.4 Основные понятия математической статистики

2.4.1 Предмет и задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Статистический ряд. Статистическое распределение случайной величины. Эмпирическая функция распределения. Графическое изображение статистических рядов. Распределения, используемые в статистике: $\chi^2$, Стьюдента, Фишера.

**2.5 Элементы теории статистического оценивания**

2.5.1 Постановка задачи оценки неизвестных параметров распределения случайных величин. Точечные и интервальные оценки параметров распределения. Свойства точечных оценок. Доверительный интервал и доверительная вероятность. Построение доверительного интервала для математического ожидания случайной величины, имеющей нормальный закон распределения (с известным и неизвестным среднеквадратическими отклонениями). Построение доверительного интервала для среднеквадратического отклонения случайной величины, имеющей нормальный закон распределения.

**2.6 Статистическая проверка параметрических гипотез**

2.6.1 Основные определения статистической проверки гипотез. Статистический критерий значимости проверки гипотез. Ошибки, допускаемые при статистической проверке гипотез. Уровень значимости статистического критерия. Проверка гипотез о математическом ожидании случайной величины, имеющей нормальное распределение (с известным и неизвестным среднеквадратическим отклонением).

**2.7 Статистическая проверка непараметрических гипотез**

2.7.1 Основные понятия. Критерии согласия и однородности. Критерий согласия Пирсона ($\chi^2$) и Колмогорова ($\lambda$). Проверка гипотезы о виде закона распределения случайной величины. Методические указания к применению критериев согласия. Примеры обработки результатов эксперимента.

**2.8 Элементы регрессионного и корреляционного анализа**

2.8.1 Основные понятия регрессионного и корреляционного анализа. Построение выборочного уравнения регрессии методом наименьших квадратов. Коэффициентов корреляции. Коэффициент детерминации. Проверка значимости коэффициентов корреляции и детерминации. Числовой пример одномерного линейного регрессионного анализа. Анализ соответствия математической модели (уравнения регрессии) экспериментальным данным.

**2.9 Элементы дисперсионного анализа**

2.9.1 Предмет дисперсионного анализа. Однофакторный дисперсионный анализ.



## 3 КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Основные цели выполнения контрольной работы:
– активизация самостоятельной работы студентов;
– изучение студентами литературы по дисциплине;
– получение практических навыков решения задач по теории вероятностей.

Студенты выполняют две контрольные работы на темы: «Случайные события. Вероятности случайных событий» и «Одномерные случайные величины. Законы распределения».

Контрольная работа № 1 проводится с целью проверки усвоения тем по вычислению вероятностей случайных событий; контрольная работа № 2 – с целью проверки усвоения тем по законам распределения дискретных и непрерывных случайных величин.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей : учеб. для вузов / Е. С. Вентцель. – 5-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 1998. – 576 с.

2 **Герасимович, А. И.** Математическая статистика / А. И. Герасимович. – Минск : Выш. шк., 1983. – 275 с.

3 **Гмурман, В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1998. – 479 с.

4 **Гмурман, В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1998. – 400 с.

5 **Малинковский, Ю. В.** Теория вероятностей и математическая статистика : в 2 ч. / Ю. В. Малинковский. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – Ч. 1. : Теория вероятностей : учеб. пособие. – 355 с.

6 **Сазонова, Е. Л.** Теория вероятностей : в 2 ч. / Е. Л. Сазонова; под ред. В. С. Серёгиной. – Гомель : БелГУТ, 2000. – Ч. 1. Теория вероятностей : пособие для студентов ФБО. – 95 с.



## О Г Л А В Л Е Н И Е

Учебное издание

**Прищепова** Тамара Викторовна

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие
для студентов экономических специальностей
факультета безотрывного обучения

Редактор Т. М. Ризевская
Технический редактор В. Н. Кучерова

Подписано в печать 18.03.2008 г. Формат $60 \times 84\ ^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 8,14. Уч.-изд. л. 7,99. Тираж 400 экз.
Зак. № Изд. № 107.

Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный университет транспорта:
ЛИ № 02330/0133394 от 19.07.2007 г.
ЛП № 02330/0148780 от 30.04.2004 г.
246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34.