

УДК 539.371

К. В. СУСЛОВ

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ ПЯТИСЛОЙНОГО СИММЕТРИЧНОГО ПО ТОЛЩИНЕ СТЕРЖНЯ

Рассматривается задача об изгибе упругого симметричного по толщине пятислойного стержня. Несущие слои предполагаются тонкими, высокопрочными. Для них принята гипотеза плоских поперечных сечений Бернулли. В сравнительно толстых легких заполнителях поперечные сечения остаются плоскими, но поворачиваются на некоторый дополнительный угол относительно нормали к деформированной срединной поверхности. Дифференциальные уравнения равновесия получены с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа. Численно проанализирована форма представления решения полученной системы уравнений.

Ключевые слова: пятислойный стержень, изгиб, упругость, уравнения равновесия.

Введение. Исследование слоистых конструкций, которые в настоящее время активно применяются в различных сферах современной техники, интенсивно развивается с начала 40-х годов XX века. Подходы к разработке методик решения краевых задач, рассматривающих воздействие внешней среды на тонкостенные элементы конструкций, предложены в монографиях [1–3]. Кинематические гипотезы учитывают, как правило, относительный сдвиг и работу касательных напряжений в заполнителе, тонкость и жесткость несущих слоев.

В статьях [4–7] исследуется динамическое деформирование трехслойных и пятислойных круговых пластин. Геометрические гипотезы соответствуют ломаной линии, заполнители приняты легкими, т. е. не учитывается работа касательных напряжений. Аналитические решения, описывающие собственные и вынужденные колебания, получены в виде разложения искомым перемещений в ряды по системам собственных функций. Приведены численные результаты для частот собственных колебаний.

Публикации [8, 9] посвящены квазистатическому деформированию трехслойных пластин, связанных с упругими основаниями Винклера и Пастернака соответственно. Приведены аналитические решения и результаты численных исследований. Сжимаемость описывает функция, линейная по толщине слоя. В статье [10] исследуется влияние температуры на напряженно-деформированное состояние трехслойного стержня с жестким заполнителем. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем рассмотрено в статье [11]. В работах [12–14] анализируется деформация изгиба симметричной по толщине круговой пятислойной пластины с двумя заполнителями, находящейся под действием непрерывных и локальных нагрузок.

В данной работе представлены методика получения уравнений равновесия симметричного по толщине пятислойного стержня и анализ вида их решения.

Постановка задачи. Декартова система координат привязана к срединной плоскости внутреннего несущего слоя 1 пятислойного стержня (рисунок 1). В тонких несущих слоях 1, 2, 4 выполняются гипотезы Кирхгофа, в соответствии с которыми поперечные сечения остаются плоскими и перпендикулярными деформированной осевой линии после воздействия нагрузки. В сравнительно толстых заполнителях 3, 5 справедлива гипотеза Тимошенко: поперечные сечения после приложения нагрузки остаются плоскими, несжимаемыми по толщине, но поворачиваются на дополнительный угол $\psi(x, t)$. Искомыми функциями являются прогиб стержня $w(x, t)$ и относительный сдвиг $\psi(x, t)$. Поверхностная нагрузка $q(x, t)$ распределена по верхней плоскости стержня.

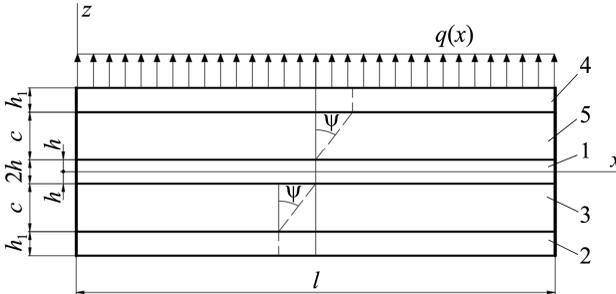


Рисунок 1 – Расчетная схема пятислойной балки

Выражения продольных перемещений $u_x^{(k)}$ ($k = 1, \dots, 5$ – номер слоя) через искомые функции $w(x, t)$, $\psi(x, t)$ получим исходя из принятых гипотез:

$$\begin{aligned}
 u_x^{(4)} &= -zw_{,x} + c\psi, & (c + h \leq z \leq c + h + h_1); \\
 u_x^{(5)} &= -zw_{,x} + (z - h)\psi, & (h \leq z \leq c + h); \\
 u_x^{(1)} &= -zw_{,x}, & (-h \leq z \leq h); \\
 u_x^{(3)} &= -zw_{,x} + (z + h)\psi, & (-h - c \leq z \leq -h); \\
 u_x^{(2)} &= -zw_{,x} - c\psi, & (-h - h_1 - c \leq z \leq -h - c),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где z – координата рассматриваемого волокна (расстояние до срединной поверхности внутреннего несущего слоя); $c\psi$ – величина смещения внешних несущих слоев за счет деформации заполнителей; запятая в нижнем индексе имеет смысл производной по координате x .

Продольные деформации следуют из соотношений Коши [1] и перемещений в слоях стержня (1):

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x^{(4)} &= -zw_{,xx} + c\psi_{,x}; & \epsilon_{xz}^{(4)} &= 0; \\
 \epsilon_x^{(5)} &= -zw_{,xx} + (z - h)\psi_{,x}; & \epsilon_{xz}^{(5)} &= \frac{\psi}{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(1)} &= -zw_{,xx}; \quad \varepsilon_{xz}^{(1)} = 0; \\ \varepsilon_x^{(3)} &= -zw_{,xx} + (z+h)\Psi_{,x}; \quad \varepsilon_{xz}^{(3)} = \frac{\Psi}{2}; \\ \varepsilon_x^{(2)} &= -zw_{,xx} - c\Psi_{,x}; \quad \varepsilon_{xz}^{(2)} = 0.\end{aligned}\quad (2)$$

После определения продольных перемещений и деформаций напряжения в слоях определяются с помощью закона Гука:

$$s_{xx}^{(k)} = 2G_k \vartheta_{xx}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}, \quad s_{xz}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)}, \quad s_{xz}^{(5)} = 2G_5 \vartheta_{xz}^{(5)}, \quad (3)$$

где $s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \sigma^{(k)} \delta_{ij}$ – девиатор тензора напряжений, $\sigma^{(k)} = \frac{1}{3} \sigma_{xx}^{(k)}$; $\vartheta_{ij}^{(k)} = \varepsilon_{ij}^{(k)} - \varepsilon^{(k)} \delta_{ij}$ – девиатор тензора деформаций, $\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3} \varepsilon_{xx}^{(k)}$; δ_{ij} – символы Кронекера; G_k, K_k – модули упругости материалов слоев (сдвига и объемного деформирования).

Для получения системы дифференциальных уравнений, описывающей изгиб рассматриваемого стержня, используем вариационный принцип Лагранжа с добавлением сил инерции:

$$\delta A = \delta W, \quad (4)$$

где δA – виртуальная работа внешней нагрузки, включая силы инерции; δW – вариация работы внутренних силовых факторов,

$$\begin{aligned}\delta A &= \iint_S q \delta w dS = \int_0^l b_0 q \delta w dx; \\ \delta W &= \iint_S \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} (\sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} + \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} \delta_{k3} + \sigma_{xz}^{(5)} \delta \varepsilon_{xz}^{(5)} \delta_{k5}) dz dS.\end{aligned}\quad (5)$$

где b_0 – ширина поперечного сечения; δ – оператор вариации.

Подставим работы (5) в (4) с учетом виртуальных деформаций, следующих из (3). Уравнение (4) должно выполняться при любых вариациях искомым функций, поэтому коэффициенты при этих вариациях равны нулю. Отсюда следуют уравнения равновесия в обобщенных внутренних усилиях:

$$H_{,x} - Q = 0; \quad M_{,xx} + b_0 q = 0, \quad (6)$$

где $H_{,x}, Q, M_{,xx}$ – обобщенные внутренние усилия и моменты:

$$\begin{aligned}H &= (M_x^{(3)} + M_x^{(5)}) + c(N_x^{(4)} - N_x^{(2)}) + h(N_x^{(3)} - N_x^{(5)}); \quad Q^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xz}^{(k)} dz; \\ M_x &= \sum_{k=1}^5 M_x^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz; \quad N_x = \sum_{k=1}^5 N_x^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz.\end{aligned}$$

Используя соотношения закона Гука (3), можно получить выражение для введенных усилий через искомые функции. Их подстановка в уравнения (6) приводит к системе уравнений равновесия для определения искомых функций:

$$\begin{aligned} a_1 \Psi_{,xx} - a_2 w_{,xxx} - a_3 \Psi &= 0; \\ a_2 \Psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} &= -q. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь коэффициенты выражаются через геометрические и упругие характеристики материалов слоев:

$$\begin{aligned} a_1 &= \left[c^2 \left(\frac{2}{3} K_2^+ c + 2K_3^+ h_1 \right) \right]; \\ a_2 &= \left[\frac{1}{3} K_2^+ c^2 (2c + 3h) + K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c) \right]; \quad a_3 = \left[2G^{(2)} c \right]; \\ a_4 &= \left[\frac{2}{3} K_2^+ c (c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \frac{2}{3} K_3^+ h_1 (h_1^2 + 3(h_1 + h + c)(h + c)) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Для исследования разрешимости системы (3) сведем ее к двум отдельным уравнениям относительно искомых функций. Проинтегрируем и умножим на необходимые коэффициенты второе уравнение, чтобы вычитанием из первого получить отдельное уравнение относительно $\psi(x)$:

$$\Psi_{,xx} - \beta^2 \Psi = \gamma \left(\int q dx + C_1 \right), \quad (9)$$

где C_1 – константа интегрирования;

$$\beta^2 = \frac{a_3 a_4}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad \gamma = \frac{a_2}{a_1 a_4 - a_2^2}.$$

После определения относительного сдвига $\psi(x)$ прогиб $w(x)$ следует из второго уравнения системы (6). Покажем, что введенный коэффициент β^2 положителен и не уходит в бесконечность, то есть $a_1 a_4 - a_2^2 \neq 0$.

На рисунках 2–4 представлены **результаты численного исследования** знака β^2 для рассматриваемых стержней ($l = 1$), слои которых выполнены из материалов Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т (кривая 1), титан – фторопласт-4 – титан – фторопласт-4 – титан (кривая 2), Д16-Т – пенопласт – титан – пенопласт – Д16-Т (кривая 3) и титан – пенопласт – титан – пенопласт – титан (кривая 4).

Зависимость параметра β^2 от относительной толщины срединного несущего слоя h при толщинах внешних слоев $h_1 = 0,02$ и заполнителя $c = 0,2$ показана на рисунке 2. При $h = 0$ исследуемый параметр в ноль не обращается и сохраняет положительный знак для всех пакетов балки, причем с увеличением толщины срединного несущего слоя он растет по кубической параболе. Зависимость того же параметра от толщины внешних несущих слоев h_1 при $h = 0,02$; $c = 0,2$ иллюстрирует рисунок 3, а от толщины заполнителя c при $h = h_1 = 0,02$ – рисунок 4.

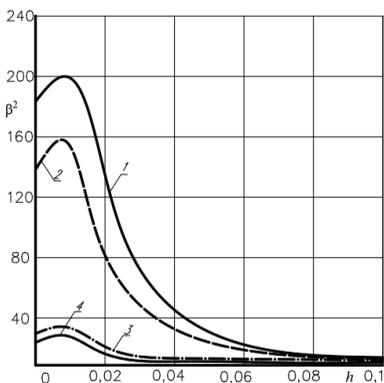


Рисунок 2 – Зависимость β^2 от толщины внутреннего несущего слоя h

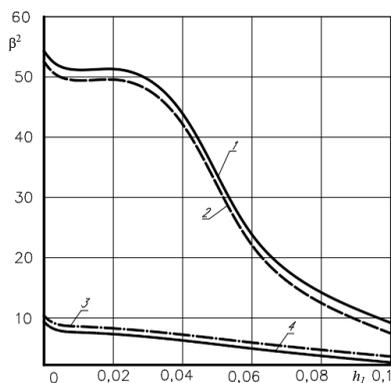


Рисунок 3 – Зависимость β^2 от толщин внешних несущих слоев h_1

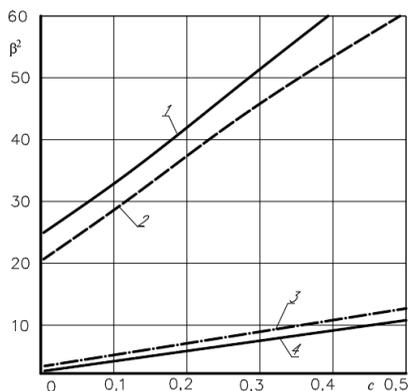


Рисунок 4 – Изменение β^2 при различных толщинах c

Заключение. Полученная система дифференциальных уравнений равновесия и проведенный численный анализ являются основой для дальнейшего решения задачи об изгибе пятислойного стержня, симметричного по толщине, и определения путей практического применения такой конструкции.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.

2 Zhuravkov, M. A. Mechanics of Solid Deformable Body // M. A. Zhuravkov, Y. Lyu, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.

3 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов [и др.]. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.

4 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaia // *Strength of materials*. – 2002. – Vol. 34, no. 5. – P. 474–481.

5 **Лачугина, Е. А.** Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е. А. Лачугина // *Механика. Исследования и инновации*. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.

6 **Лачугина, Е. А.** Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями / Е. А. Лачугина // *Механика. Исследования и инновации*. – 2023. – № 16. – С. 111–116.

7 **Лачугина, Е. А.** Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2023. – Вып. 38. – С. 227–233.

8 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // *Механика композитных материалов*. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120.

9 **Козел, А. Г.** Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич пластины // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2018. – Т. 332, № 6. – С. 25–34.

10 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2013. – Т. 22, № 1. – С. 31–35.

11 **Захарчук, Ю. В.** Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации*. – 2019. – Вып. 12. – С. 66–75.

12 **Салицкий, В. С.** Изгиб защемлённой по контуру круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // *Механика. Исследования и инновации*. – 2022. – Вып. 15. – С. 209–213.

13 **Салицкий, В. С.** Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

14 **Суслов, К. В.** Изгиб пятислойной балки симметричной по толщине / К. В. Суслов // III Республиканский форум молодых ученых учреждений высшего образования : сб. материалов форума, Брест, 21–24 мая 2024 г. – Брест : БрГТУ, 2024. – С. 61–63.

K. V. SUSLOV

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

METHOD OF SOLVING THE PROBLEM OF A FIVE-LAYER SYMMETRICAL THICKNESS ROD EQUILIBRIUM

There is considered the problem of bending of an elastic five-layer rod symmetrical in thickness. The bearing layers are assumed to be thin and highly durable. The hypothesis of Bernoulli's flat cross-sections is adopted for them. In relatively thick lightweight fillers, the cross-sections remain flat, but rotate by some additional angle relative to the normal to the deformed middle surface. Differential equilibrium equations are obtained using the principle of possible Lagrange displacements. The form of representation of the solution of the obtained system of equations is numerically analyzed.

Keywords: five-layer rod, bending, elasticity, equilibrium equations.

Получено 25.10.2024