

УДК 691-419:534.1

Д. В. ЛЕОНЕНКО

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЭНДВИЧ-СТЕРЖНЯ
С ЛЕГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ**

Рассмотрены свободные колебания сэндвич-стержня с жестко защемленными торцами. Деформирование внешних слоев описывается моделью Бернулли, внутреннего слоя – моделью Тимошенко. Материалы слоев несжимаемы. С помощью вариационного принципа Гамильтона – Остроградского получена система дифференциальных уравнений движения, решение которой найдено методом разделения переменных. Проведен численный анализ собственных частот.

Ключевые слова: сэндвич-стержень, свободные колебания, легкий наполнитель.

Введение. Исследование спектра частот является важной задачей при проектировании инженерных конструкций. Данной проблеме в последние десятилетия посвящено значительное число публикаций. В монографии [1] рассматриваются трехслойные пластины и оболочки под действием статических и динамических нагрузок. Статья [2] посвящена собственным колебаниям скрепленного с упругим основанием Винклера стержня со сжимаемым внутренним слоем. Вынужденные колебания аналогичного стержня на двухпараметрическом основании рассмотрены в [3]. В статье [4] методом Бубнова – Галеркина решена задача о колебаниях трехслойного стержня при действии мгновенно нарастающей нагрузки. Проблема вычисления частот собственных колебаний предварительно скрученной многослойной балки с помощью алгоритма Виттрика – Вильямса рассмотрена в работе [5]. В публикациях [6–7] изучается динамическое деформирование слоистых стержней при различной структуре внутреннего слоя. Локальное нагружение трехслойной круговой пластины на упругом основании исследовано в [8]. Работы [9–10] посвящены исследованию колебаний слоистых цилиндрических оболочечных конструкций. В данной работе анализируются свободные колебания симметричного трехслойного стержня.

1 Постановка начально-краевой задачи. Рассматриваются свободные колебания сэндвич-стержня. Перемещения во внешних слоях описываются моделью Бернулли, во внутреннем (заполнителе) – моделью Тимошенко. Напряжениями надавливания слоев друг на друга пренебрегаем.

Вертикальную ось z направим вверх и свяжем с левым торцом стержня. Горизонтальная ось x проходит по его центральной оси (рисунок 1). Задачу будем решать в перемещениях, поэтому в качестве искомого принимаем прогиб стержня $w(x, t)$ и относительный угол сдвига нормали во внутреннем слое $\psi(x, t)$ при деформированном состоянии.

На границах слоев перемещения $u^{(k)}$ вдоль оси x непрерывны и определяются через искомые функции:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= c\psi - zw_{,x} & (c \leq z \leq c+h); \\ u^{(3)} &= z\psi - zw_{,x} & (-c \leq z \leq c); \\ u^{(2)} &= -c\psi - zw_{,x} & (-c-h \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где z – расстояние от рассматриваемой точки до центральной оси стержня; запятые в нижнем индексе здесь и далее обозначают производные по следующим за ними переменным.

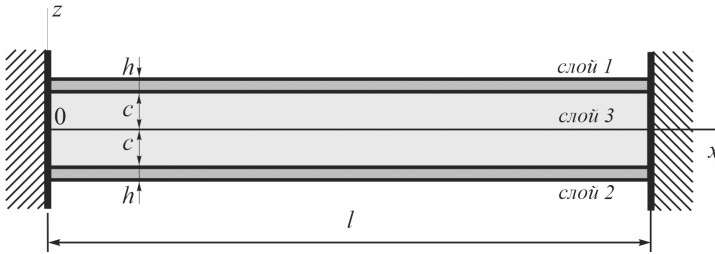


Рисунок 1 – Сэндвич-стержень

Для вычисления напряжений используем закон Гука в девиаторно-сферическом виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)} &= \left(K_b + \frac{4}{3} G_b \right) \varepsilon_{xx}^{(k)} \quad (k = 1, 2); \\ \sigma_{xx}^{(3)} &= \left(K_f + \frac{4}{3} G_f \right) \varepsilon_{xx}^{(3)}; \quad \sigma_{xz}^{(3)} = 2 G_f \varepsilon_{xz}^{(3)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\sigma_{xx}^{(k)}$ – нормальное напряжение в k -м слое; $K_{b(f)}$, $G_{b(f)}$ – модули объемной деформации и сдвига материала несущих слоев (индекс b) и заполнителя (индекс f) соответственно.

В слоях стержня действуют изгибающие моменты $M^{(k)}$ и продольные силы $N^{(k)}$

$$M^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z dz; \quad N^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} dz, \quad (3)$$

где b_0 – ширина поперечного сечения.

Уравнения движения получим, используя вариационный принцип Гамильтона – Остроградского [11],

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (E_k - W) dt = 0; \quad \int_{t_0}^{t_1} (\delta E_k - \delta W) dt = 0,$$

где E_k – кинетическая энергия системы; W – потенциальная энергия деформации.

При определении потенциальной энергии деформации пренебрегаем слагаемыми, обусловленными действием касательных напряжений σ_{xz} . Такой материал заполнителя будем называть легким.

Учет всех сил инерции неоправданно усложняет задачу. Поэтому оставим лишь слагаемое, соответствующее поперечным колебаниям стержня. Используя соотношения для потенциальной и кинетической энергий, после преобразований получаем систему дифференциальных уравнений движения в усилиях (3):

$$c(N^{(1)}_{,x} - N^{(2)}_{,x}) + M^{(3)}_{,x} = 0, \\ M_{,xx} = m_1 \ddot{w}, \quad (4)$$

где M – обобщенный внутренний момент,

$$M = \sum_{k=1}^3 M^{(k)};$$

m_1 – инерционный член,

$$m_1 = 2\rho_b h + 2\rho_f c,$$

ρ – плотность материала слоев.

Начально-краевая задача замыкается присоединением к (4) граничных и начальных условий.

Выразим обобщенные моменты в (3) с помощью соотношений (2) через перемещения, получим систему дифференциальных уравнений движения в перемещениях:

$$b_1 \psi_{,xx} - b_2 w_{,xxx} = 0; \\ b_2 \psi_{,xxx} - b_3 w_{,xxxx} = m_1 \ddot{w}. \quad (5)$$

Коэффициенты системы (5):

$$b_1 = 2c^2 \left(h \left(K_b + \frac{4}{3} G_b \right) + \frac{1}{3} c \left(K_f + \frac{4}{3} G_f \right) \right); \\ b_2 = 2c \left[h \left(c + \frac{1}{2} h_l \right) \left(K_b + \frac{4}{3} G_b \right) + \frac{1}{3} c^2 \left(K_f + \frac{4}{3} G_f \right) \right]; \\ b_3 = 2h \left(c^2 + ch + \frac{1}{3} h^2 \right) \left(K_b + \frac{4}{3} G_b \right) + \frac{2}{3} c^3 \left(K_f + \frac{4}{3} G_f \right).$$

Начальные условия движения сформулируем следующим образом:

$$w(x, 0) = w_0(x); \quad \dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x), \quad (6)$$

где $w_0(x)$, $\dot{w}_0(x)$ – перемещения и скорости точек центральной оси стержня в начальный момент времени ($t = 0$) соответственно.

В случае жесткого защемления торцов стержня на концах ($x = 0, l$) должны выполняться следующие условия:

$$\psi = 0, \quad w = 0, \quad w_r = 0. \quad (7)$$

2 Решение задачи. Решим систему (5) относительно неизвестных $w(x, t)$ и $\psi(x, t)$. В итоге получим дифференциальное уравнение в частных производных для определения прогиба стержня:

$$w_{,xxxx} + f_1 \ddot{w} = 0, \quad (8)$$

где
$$f_1 = \frac{m_1 b_1}{b_1 b_3 - b_2^2} > 0.$$

Численный анализ коэффициента f_1 позволил установить, что для реальных материалов и толщин слоев он положителен.

Решение будем искать в виде

$$w(x, t) = T(t)W(x). \quad (9)$$

Подстановка выражения (9) в уравнение (8) позволяет разделить переменные и получить для них два независимых уравнения:

$$W_{,xxxx} - \lambda^4 W = 0; \quad \ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (10)$$

где ω – частота собственных колебаний, $\lambda^4 = f_1 \omega^2 > 0$.

Первое обыкновенное дифференциальное уравнение для координатной функции в (10) имеет постоянные коэффициенты. Общее решение уравнения [12]:

$$W(x) = C_1 \operatorname{ch}(\lambda x) + C_2 \operatorname{sh}(\lambda x) + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x). \quad (11)$$

Постоянные $C_1, \dots, C_4$ и частотное уравнение для определения ω_n получим из граничных условий. При жестком защемлении обоих торцов стержня (7) они будут нулевыми, поэтому приходим к системе однородных алгебраических уравнений. Приравняв нулю детерминант матрицы коэффициентов системы и раскрыв его, получаем характеристическое уравнение для определения собственных чисел λ , где каждому числу с номером n соответствует свой набор констант.

Подставим значения в (7) с учетом выражения (11) и получим

$$\begin{aligned} C_1 \operatorname{ch}(0) + C_2 \operatorname{sh}(0) + C_3 \cos(0) + C_4 \sin(0) &= 0; \\ C_1 \lambda \operatorname{sh}(0) + C_2 \lambda \operatorname{ch}(0) - C_3 \lambda \sin(0) + C_4 \lambda \cos(0) &= 0; \\ C_1 \operatorname{ch}(\lambda l) + C_2 \operatorname{sh}(\lambda l) + C_3 \cos(\lambda l) + C_4 \sin(\lambda l) &= 0; \\ C_1 \lambda \operatorname{sh}(\lambda l) + C_2 \lambda \operatorname{ch}(\lambda l) - C_3 \lambda \sin(\lambda l) + C_4 \lambda \cos(\lambda l) &= 0. \end{aligned}$$

Приравняв определитель к нулю, получим трансцендентное уравнение для определения собственных чисел λ_n :

$$1 - \operatorname{ch}(\lambda l) \cos(\lambda l) = 0.$$

После определения корней λ_n частоты собственных колебаний вычисляются из выражения

$$\omega_n^2 = \frac{\lambda_n^4}{f_1}.$$

Второе уравнение из (10) имеет следующее решение

$$T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t),$$

где A и B – константы интегрирования, вычисляемые по начальным условиям (6).

3 Численный анализ. Сравним собственные частоты колебаний сэндвич-стержней, получающиеся при учете сжимаемости заполнителя и без него. На рисунке 2 приведены зависимости указанных частот для жестко защемленного по торцам стержня от толщины несущих слоев (a) ($c = 0,09$) и заполнителя (b) ($h = 0,02$): 1 – ω_0 (несжимаемый заполнитель); 2 – ω_1 (несжимаемый заполнитель); 3 – ω_0 (сжимаемый заполнитель); 4 – ω_1 (сжимаемый заполнитель). Пакет набран из материалов Д16Т – фторопласт – Д16Т [1]. Сравнение проводилось с моделью, рассмотренной в [13].

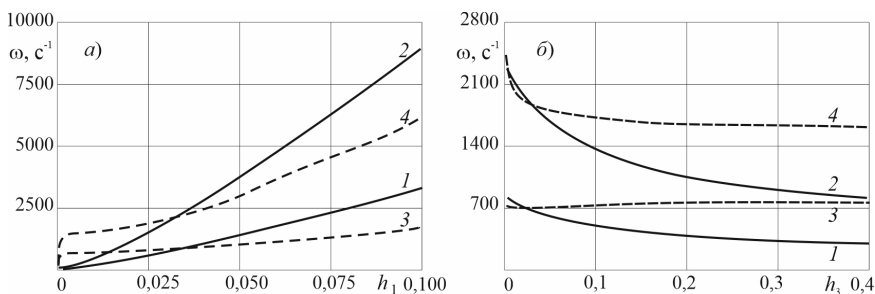


Рисунок 2 – Зависимости частот собственных колебаний от толщины несущих слоев (a) и заполнителя (b)

Для тонкого заполнителя частоты, посчитанные по двум моделям, практически совпадают. При росте толщин слоев различие достигает порядка 200 %. Это может объясняться особенностью построения решения моделей: в случае несжимаемости заполнителя для каждого волнового числа n существует одна частота ω_n ; при сжимаемом заполнителе колебательный процесс для каждого значения параметра n оказывается четырехчастотным, в сравнении участвовала минимальная из четырех частот. Поэтому для более полной картины необходимо в дальнейшем исследовать не только частоты, но и перемещения при свободных колебаниях.

Выводы. В данной работе рассмотрена методика нахождения частот собственных колебаний сэндвич-стержней с несжимаемым легким заполнителем. Получены система дифференциальных уравнений движения и характеристическое уравнение для определения собственных чисел. Проведено сравнение результатов расчетов со случаем, при котором сжимаемость заполнителя учитывается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Старовойтов, Э. И.** Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 344 с.
- 2 Собственные колебания трехслойного стержня на упругом основании / В. Д. Кубенко [и др.] // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42, № 5. – С. 57–63.
- 3 **Леоненко, Д. В.** Импульсные колебания трехслойных стержней на упругом инерционном основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 140–145.
- 4 **Бабажанов, Б. Б.** Колебания трехслойного стержня под действием мгновенно-нарастающей нагрузки / Б. Б. Бабажанов // Вестник науки и образования. – 2020. – № 10-2 (88). – С. 6–12.
- 5 Analysis of bending vibrations of a three-layered pre-twisted sandwich beam with an exact dynamic stiffness matrix / M. B. Hamzehkhani [et al.] // Composites Part C: Open Access. – 2024. – Vol. 14. – Article 100473. – 21 p.
- 6 **Коган, Е. А.** О построении общей теории трехслойных стержней при статическом и динамическом нагружении / Е. А. Коган, Е. А. Скрыпников // Современные тенденции развития науки и образования: теория и практика : сб. материалов 3-й Междунар. науч.-практ. конф., Москва, 20 июня 2019 г. – М. : ВИПО, 2019. – Т. 4. – С. 198–205.
- 7 Vibration characteristics of novel multilayer sandwich beams: Modelling, analysis and experimental validations / M. Li [et al.] // Mechanical Systems and Signal Processing, 2020. – Vol. 142. – Article 106799.
- 8 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // Механика композитных материалов. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120.
- 9 **Khudoynazarov, K.** Longitudinal-radial vibrations of a viscoelastic cylindrical three-layer structure / K. Khudoynazarov // Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering. – 2024. – Vol. 22, no 3. – P. 473–484.
- 10 Vibration frequency analysis of three-layered cylinder shaped shell with effect of FGM central layer thickness / M. Ghamkhar [et al.] // Scientific Reports. – 2009. – Vol. 9. – Article 1566. – 13 p.
- 11 **Новацкий, В.** Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
- 12 **Камке, Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1976. – 576 с.
- 13 **Леоненко, Д. В.** Свободные колебания упругого трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем / Д. В. Леоненко // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2003. – № 3 (18). – С. 28–31.

D. V. LEONENKO

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

FREE VIBRATIONS OF A SANDWICH ROD WITH A LIGHT FILLER

Free vibrations of a sandwich rod with rigidly clamped ends are considered. The deformation of the outer layers is described by the Bernoulli model, and the inner layer by the Timoshenko model. The materials of the layers are incompressible. Using the Hamilton – Ostrogradsky variational principle, a system of motion differential equations is obtained, the solution of the system is found by the variables separation method. A numerical analysis of natural frequencies is carried out.

Keywords: sandwich rod, free vibration, lightweight filler.

Получено 31.10.2024