

УДК 620.178

Е. В. КОДНЯНКО

ЗАО «Солигорский институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством», Солигорск, Беларусь

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КАЧЕНИИ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРА С УПРУГО-ПЛАСТИЧНЫМ ОБОДОМ

Разработана методика решения контактной задачи о качении жесткого цилиндра, имеющего упруго-пластичный обод, по недеформируемой поверхности. Предлагаемая методика основана на теории малых упругопластических деформаций и модели винклера основания для тонкого слоя. Получены расчетные диаграммы «сила – смещение» и эпюры контактного давления. Определен момент сопротивления, обусловленный пластическим деформированием материала обода при качении.

Ключевые слова: контактная задача, модель винклера основания, малые упругопластические деформации, интенсивность тензора деформаций, контактное давление.

Введение. В конструкциях различных машин и механизмов широко используются опоры качения, в которых для снижения износа деталей на поверхности металлических роликов размещают полимерные покрытия. Например, в роликовых опорах шахтного скипа скипо-клетевого ствола [1] используются стальные ролики с полиуретановой обкладкой. Расчетный прогноз силовой нагруженности такого ролика требует решения контактной задачи об установившемся качении по поверхности жесткого тела качения, имеющего относительно тонкий деформируемый обод.

Решению контактных задач для тел с покрытиями посвящено множество научных публикаций [2–4]. Точное решение данной задачи предполагает использование интегрального преобразования Фурье с последующим решением системы интегральных уравнений [2]. Трудоемкость получения и непосредственного применения точного решения обуславливает широкое использование асимптотических приближений [5, 6] и упрощенных моделей упругого основания [7–9] при анализе контактного взаимодействия тел, имеющих покрытия или поверхностные слои из полимерных материалов. Так, в работе [6] описана методика решения задачи о качении жесткого цилиндра с вязкоупругим ободом, основанная на асимптотическом приближении второго порядка по малому параметру, равному отношению толщины обода к полуширине области контакта. Там же показано, что в диапазонах значений исходных параметров, характерных для конструкции роликовой опоры скипа [1], отклонение результатов использования асимптотического приближения от соответствующих расчетных оценок, полученных в рамках модели винклера основания, не превышает 5 %.

Асимптотический подход к решению контактных задач для тел с покрытиями реализуется в рамках линейной теории упругости. Данное обстоятельство

ство препятствует использованию этого подхода для учета физической нелинейности деформирования материала покрытия. Вместе с тем предельная упрощенность модели винклера основания позволяет решать контактные задачи для слоистых тел при произвольной нелинейной зависимости компонент тензора напряжений от компонент тензора деформаций для материалов слоев [9–11]. Однако в известных научных работах рассматривается только внедрение различных инденторов в нелинейно упругие или упруго-пластичные слои и не описывается процесс качения.

В связи с вышесказанным, целью настоящего исследования является обеспечение возможности учета физической нелинейности деформирования материала обода в рамках основанной на модели винклера основания методики решения задачи о качении жесткого цилиндра с тонким деформируемым ободом.

Решение контактной задачи. Как и ранее [7], в качестве упрощенной структурной модели стального ролика с полимерной обкладкой будем рассматривать составной цилиндр радиусом R с длиной образующей l (рисунок 1), который состоит из центрального абсолютно жесткого цилиндра и адгезионно связанного с его боковой поверхностью деформируемого слоя толщиной h .

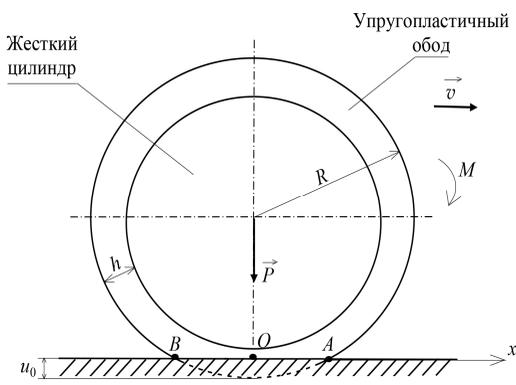


Рисунок 1 – Структурная модель стального ролика с уруго-пластичной обкладкой

Рассматривается состояние свободного качения исследуемого объекта по горизонтальной недеформируемой опорной поверхности. При этом на цилиндр действуют вертикальная сила P и момент M . Значение вертикальной силы считается заданным. Подлежит определению величина момента M , который обеспечивает стационарное качение цилиндра и связан с потерями на циклическое пластическое деформирование материала слоя.

Для решения контактной задачи вводится ось координат x , направленная по опорной поверхности вдоль направления качения (см. рисунок 1). Начало отсчета совпадает с центром области контакта и лежит на линии действия вертикальной силы P . Под ее действием точки внешней поверхности деформируемого слоя, находящиеся в области контакта, смещаются по вертикали относительно соответствующих (с той же координатой x) точек внутренней его поверхности на величину u . При малости ширины области контакта по сравнению с радиусом R смещение u связано с координатой x выражением

$$u = u_0 - \frac{x^2}{2R}, \quad (1)$$

где u_0 – подлежащее определению максимальное относительное смещение точек внешней поверхности слоя, совпадающее с вертикальным смещением центра составного цилиндра.

Деформируемый слой образован изотропным упруго-пластичным материалом. Упругие свойства этого материала характеризуются объемным модулем K и модулем сдвига G . Физическая нелинейность деформирования материала описывается в рамках теории малых упругопластических деформаций [12]. При этом пренебрегаем физической нелинейностью материала при объемном деформировании по сравнению с нелинейностью при сдвиге, то есть примем, что зависимость компоненты σ шарового тензора напряжения от компоненты ε шарового тензора деформаций остается линейной во всем диапазоне изменения данных компонент:

$$\sigma = 3K\varepsilon. \quad (2)$$

Зависимость интенсивности тензора напряжений σ_u от интенсивности тензора деформаций ε_u на стадии нагружения будем описывать билинейной функцией без учета упрочнения при пластическом деформировании:

$$\sigma_u = \begin{cases} 3G\varepsilon_u, & \varepsilon_u < \varepsilon_u^{cr}; \\ 3G\varepsilon_u^{cr}, & \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^{cr}. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь ε_u^{cr} – значение интенсивности тензора деформаций, при котором начинается пластическое деформирование материала.

Разгрузка материала происходит линейно упруго. При использовании для деформируемого слоя модели винклера основания контактное давление p в окрестности некоторой точки области контакта определяется относительным смещением u только соответствующе точки внешней поверхности слоя. Деформируемый слой адгезионно связан с недеформируемым внутренним цилиндром. Поэтому каждый элементарный «стержень» в рассматриваемом основании находится в состоянии одноосной деформации. Ненулевая компонента тензора деформаций соответствует оси, перпендикулярной к оси x , и равна отношению u/h . Компонента шарового тензора ε и интенсивность ε_u связаны с координатой x и максимальным смещением u_0

$$\varepsilon = \frac{1}{3h} \left(u_0 - \frac{x^2}{2R} \right); \quad \varepsilon_u = \frac{2}{3h} \left(u_0 - \frac{x^2}{2R} \right). \quad (4)$$

На стадии линейно упругого деформирования материала слоя контактное давление определяется следующим образом:

$$p = K \frac{1}{h} \left(u_0 - \frac{x^2}{2R} \right) + G \frac{4}{3h} \left(u_0 - \frac{x^2}{2R} \right). \quad (5)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (5) в соответствии с допущением (2) остается неизменным и на стадии пластичного деформирования материала. Второе слагаемое можно сопоставить с зависимостью $\sigma_u(\epsilon_u)$. Тогда с учетом физической нелинейности материала выражение (5) перепишем в виде

$$p = K \frac{1}{h} \left(u_0 - \frac{x^2}{2R} \right) + \frac{2}{3} f_u(u_0, x). \quad (6)$$

На стадии нагружения функция $f_u(u_0, x)$ совпадает с функцией (3) при использовании для интенсивности ϵ_u соотношения из (4). Данная стадия для некоторой точки внешней поверхности деформируемого слоя начинается при значении координаты $x = x_A$ и завершается при $x = x_O$. Эти координаты и соответствующие им значения интенсивности тензора деформаций определяются формулами

$$\epsilon_{uA} = 0 \Rightarrow x_A = \sqrt{2Ru_0}; \quad (7)$$

$$x_O = 0 \Rightarrow \epsilon_{uO} = \epsilon_u^{\max} = \frac{2u_0}{3h}. \quad (8)$$

При $x < 0$ реализуется процесс разгрузки материала слоя. Если на стадии нагружения не было достигнуто состояние пластичности, то диаграммы $\sigma_u(\epsilon_u)$, описывающие процессы нагружения и разгрузки, совпадают. Если $\epsilon_u^{\max} > \epsilon_u^{cr}$, то диаграмма разгрузки представляет собой наклонную линию, параллельную начальному линейному участку диаграммы нагружения ($\sigma_u = 3G\epsilon_u$) и смещенную относительно этого участка вправо по оси ϵ_u на величину $\Delta\epsilon_u = \epsilon_u^{\max} - \epsilon_u^{cr}$. Таким образом, функция $f_u(u_0, x)$ в формуле (6) описывается соотношениями

$$f_u(u_0, x) = \begin{cases} f_u^+(u_0, x), & x > 0; \\ f_u^-(u_0, x), & x \leq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь для краткости записи введены обозначения

$$f_u^+(u_0, x) = \begin{cases} 3G\epsilon_u(u_0, x), & \epsilon_u(u_0, x) < \epsilon_u^{cr}; \\ 3G\epsilon_u^{cr}, & \epsilon_u(u_0, x) \geq \epsilon_u^{cr}; \end{cases}$$

$$f_u^-(u_0, x) = \begin{cases} 3G\epsilon_u(u_0, x), & \epsilon_u^{\max} < \epsilon_u^{cr}; \\ 3G(\epsilon_u(u_0, x) - \epsilon_u^{\max} + \epsilon_u^{cr}), & \epsilon_u^{\max} \geq \epsilon_u^{cr}. \end{cases}$$

Если рассматривается только осадка составного цилиндра под действием силы P , то для всей области контакта $f_u(u_0, x) = f_u^+(u_0, x)$.

Зная $f_u(u_0, x)$, по формуле (6) определим функцию $p(u_0, x)$. Для того чтобы в явном виде получить эпюру контактного давления, требуется определить максимальное относительное смещение u_0 .

Уравнение равновесия рассматриваемого составного цилиндра имеет вид

$$P = L \int_{x_B}^{x_A} p(u_0, x) dx . \quad (10)$$

Координата точки A связана со смещением u_0 равенством (7). В точке B (левая граница области контакта) контактное давление должно быть равно нулю:

$$p(u_0, x_B) = 0 . \quad (11)$$

Соотношения (7), (10), (11) составляют систему трех нелинейных уравнений для определения смещения u_0 и координат x_A , x_B . Если наличие пластических деформаций не учитывается, то данные величины определяются соотношениями

$$u_0^{\text{упр}} = \left(\frac{9Ph}{4(3K + 4G)L\sqrt{2R}} \right)^{2/3} ; \quad x_A^{\text{упр}} = -x_B^{\text{упр}} = \left(\frac{9PRh}{2(3K + 4G)L} \right)^{1/3} . \quad (12)$$

Условием начала пластического деформирования материала обода является равенство $\varepsilon_u^{cr} = \varepsilon_u^{\max}$. Используя равенства (8) и (12), можно определить значение силы P^{cr} , при котором будет выполняться это условие:

$$P^{cr} = \frac{2}{3}(3K + 4G)L\sqrt{3Rh} \left(\varepsilon_u^{cr} \right)^{3/2} .$$

Пример использования методики. Рассмотрим качение составного цилиндра радиуса $R = 125$ мм с длиной образующей $L = 80$ мм, состоящего из стального цилиндрического ролика и полиуретановой обкладки толщиной $h = 5$ мм. Данные значения исходных геометрических параметров соответствуют конструкции роликовой опоры шахтного скипа [1]. Модуль Юнга материала полимерной обкладки (эластичный полиуретан) $E = 1$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,4$ [13]. При этом

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = 1,67 \text{ МПа}; \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 0,36 \text{ МПа} .$$

В соответствии с экспериментальными данными о механических свойствах полимерных материалов, приведенных, в частности, в монографии [14], для значения интенсивности тензора деформаций, при котором в обкладке возникают пластические деформации, примем $\varepsilon_u^{cr} = 0,1$.

На рисунке 2 представлены расчетные эпюры контактного давления, полученные при значении вертикальной силы $P = 1$ кН. Оно выбрано таким образом, чтобы продемонстрировать влияние пластичности материала обкладки. Можно отметить, что учет пластичности приводит к снижению расчетной оценки максимального контактного давления и, следовательно, к увеличению расчетной ширины области контакта.

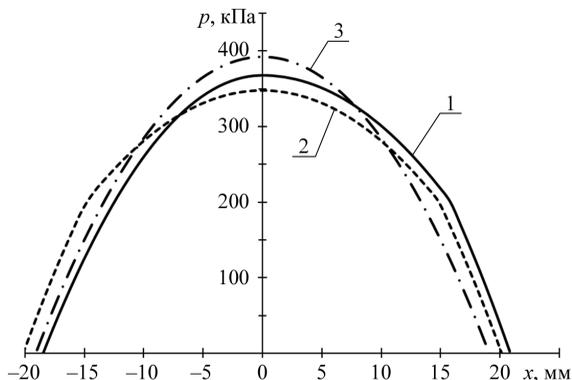


Рисунок 2 – Расчетные эпюры контактного давления: при учете пластичности материала обкладки для катящегося цилиндра – 1 и покоящегося на опорной поверхности – 2; без учета пластичности – 3

При качении цилиндра нарушается симметрия распределения контактного давления. Кроме того, при том же значении силы P , превышающем P^{cr} , максимальное значение контактного давления и вертикальное смещение центра катящегося цилиндра будут выше, чем у покоящегося (рисунок 3).

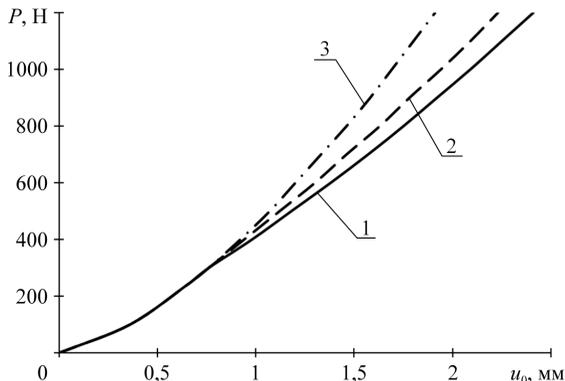


Рисунок 3 – Расчетные диаграммы «сила – смещение»: при учете пластичности материала обкладки для катящегося цилиндра – 1 и покоящегося на опорной поверхности – 2; без учета пластичности – 3

Нарушение симметрии распределения контактного давления при качении составного цилиндра при $P > P^{cr}$ обуславливает наличие момента сопротивления, который определяется соотношением

$$M = L \int_{x_B}^{x_A} p(u_0, x) x dx . \quad (13)$$

На рисунке 4 представлены расчетные зависимости этого момента от значения вертикальной (прижимной) нагрузки P . Можно отметить, что существенное влияние на момент сопротивления оказывает значение коэффициента Пуассона материала обкладки. С увеличением значения ν значение критической силы возрастает, а значение момента сопротивления уменьшается.

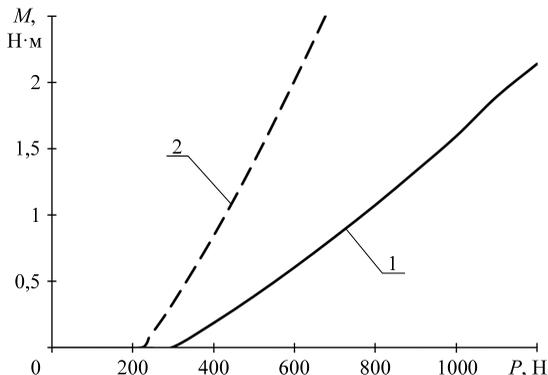


Рисунок 4 – Зависимость момента сопротивления качению от вертикальной нагрузки:
 1 – для полиуретана ($\nu = 0,4$); 2 – для материала с $\nu = 0$ (значения остальных характеристик те же, что и у полиуретана).

Заключение. В результате использования разработанной методики для описания свободного качения жесткого цилиндра с тонким упруго-пластичным ободом было установлено следующее.

Расчетные оценки максимального контактного давления и вертикального смещения оси цилиндра при качении превышают соответствующие значения, определенные для покоящегося цилиндра, приблизительно на 10 %.

Для реализации стационарного качения к цилиндру следует приложить момент, работа которого компенсирует потери механической энергии при циклическом пластическом деформировании материала обода. При прочих равных условиях значение данного момента для материала обода с меньшим коэффициентом Пуассона будет выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Скип шахтный : пат. 11460 Респ. Беларусь : МПК (2006.01) В 66В 17/32 / В. Я. Прушак, В. Я. Щерба, Д. А. Морев. – и 20170053; заявл. 22.02.2017; опубл. 30.08.2017. – 6 с.

2 Александров, В. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 285 с.

3 Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов: Плоские контактные задачи / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск : Наука и техника, 1988. – 245 с.

4 **Fabrikant, V. I.** Solution of contact problems for a transversely isotropic elastic layer bounded to an elastic half-space / V. I. Fabrikant // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. – 2009. – Vol. 223, no. 11. – P. 2487–2499.

5 **Jaffar, M. J.** Asymptotic behaviour of thin elastic layer bonded and unbonded to a rigid foundation / M. J. Jaffar // International Journal of Mechanical Sciences. – 1989. – Vol. 31, is. 3. – P. 229–235.

6 **Коднянко, Е. В.** Асимптотическое решение контактной задачи о стационарном качении жесткого цилиндра с вязкоупругим ободом / Е. В. Коднянко, С. В. Шилько, Д. А. Черноус // Трение и износ. – 2024. – Т. 45, № 5. – С. 375–383.

7 **Коднянко, Е. В.** Использование модели Винклера для анализа качения колеса с деформируемым ободом / Е. В. Коднянко, Д. А. Черноус // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 92–99.

8 **Кравчук, А. С.** Прикладные контактные задачи для обобщенной стержневой модели покрытия / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук. – СПб. : Научное издание, 2019. – 324 с.

9 **Горячева, И. Г.** Контактное взаимодействие упругих тел с тонкими вязкоупругими покрытиями в условиях трения качения и скольжения / И. Г. Горячева, А. П. Горячев, Ф. Садеги // Прикладная математика и механика. – 1995. – Т. 59, № 4. – С. 634–641.

10 Computational modelling based wear resistance analysis of thick composite coatings / K. Holmberg [et al.] // Tribology International. – 2014. – Vol. 72. – P. 13–30.

11 **Солдатенков, И. А.** Нелинейная износостойкая задача для основания Винклера (постоянная область контакта) / И. А. Солдатенков // Трение и износ. – 2006. – Т. 27, № 3. – С. 245–256.

12 **Старовойтов, Э. И.** Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2001. – 344 с.

13 **Райт, П.** Полиуретановые эластомеры / П. Райт, А. Камминг. – М. : Химия, 1973. – 304 с.

14 **Мэнсон, Дж.** Полимерные смеси и композиты / Дж. Мэнсон, Л. Сперлинг. – М. : Химия, 1979. – 340 с.

E. V. KADNIANKA

JSC "Soligorsk Institute of Resources Saving Problems with Pilot Production", Soligorsk, Belarus

THE PROBLEM SOLUTION FOR ROLLING OF A RIGID CYLINDER WITH AN ELASTIC-PLASTIC RIM

A contact problem solving method for the rolling of a rigid cylinder with an elastic-plastic rim on a non-deformable surface is developed. The proposed method is based on the theory of small elastic-plastic deformations and the Winkler foundation model for a thin layer. The calculated force-displacement diagrams and contact pressure diagrams are obtained. The resistance moment at rolling caused by plastic deformation of the rim material is determined.

Keywords: contact problem, Winkler foundation model, small elastic-plastic deformations, strain tensor intensity, contact pressure.

Получено 18.10.2024