в целочисленных полиномах $P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ степени $degP = n$ и высоты

$$H = H(P) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i|.$$

При классификации действительных и комплексных чисел в 1932 году Малеру понадобилось следующее утверждение (известное как гипотеза Малера): при $w > n$ неравенство (1) имеет бесконечное число решений только для "редкого" множества $B \subset \mathbb{R}$ меры Лебега $\mu B = 0$. При $n = 1$ задача Малера уже была решена А.Я. Хинчиным [1]. Проблема Малера была решена полностью белорусским математиком В.Г. Спринджуком [2] и обобщена в форме теоремы Хинчина для полиномов произвольной степени В.И. Берником [3] и В.В. Бересневичем [4]. Вскоре обнаружилось, что наиболее трудным моментом доказательств является случай, когда в неравенствах вида (1) полиномы $P(x)$ приводимы. При этом надо выяснить, как часто в полиномах $P(x)$ с корнем α_1 верно неравенство $|P'(\alpha_1)| < H^{1-v}$. К настоящему времени такая задача решена для $0 < v < 1,5$. Мы расширяем промежуток для v.

Теорема. *Обозначим через $P_n(Q,v)$ множество всех целочисленных полиномов степени не больше n ограниченной высоты и с ограниченным значением производной в корне:*

$$P_n(Q,v) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x],\ degP \leqslant n,\ H(P) \leqslant Q,\ |P'(\alpha_1)| < H(P)^{1-v}\}.$$

Тогда при каждом $v \in [0,2]$ для мощности множества $P_n(Q,v)$ справедлива следующая оценка

$$\#P_n(Q,v) \leqslant Q^{n+1-v+\varepsilon}$$

с произвольными $\varepsilon > 0$ и $Q > Q_0 = Q_0(\varepsilon)$.

Важную роль при доказательстве теоремы играют оценки сверху для количества приводимых полиномов в неравенствах (1), полученные в статье [5].

Литература

1. Khintchine A. *Some theorems on continued fractions, with applications to the theory of Diophantine approximations.* // Math.Annalen. 1924. Vol. 92. P. 115–125.

2. Спринджук В. Г. *Проблема Малера в метрической теории чисел.* Мн.: Наука и техника, 1967.

3. Берник В. И. *О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов* // Acta Arith. 1989. Vol. 89. P. 17–28.

4. Beresnevich V. *On approximation of real numbers by real algebraic numbers.* // Acta Arith. 1999. Vol. 50. No 2. p. 97–112.

5. Берник В. И., Васильев Д. В., Кудин А. С. *О числе целочисленных многочленов заданной степени и ограниченной высоты с малой производной в корне многочлена* // Тр. Ин-та математики. 2014. Т. 22, № 2. С. 3–8.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ СУБМОДУЛЯРНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Т.И. Васильева

Белорусский государственный университет транспорта, Кирова 34, 246653 Гомель, Беларусь,
tivasilyeva@mail.ru

Все рассматриваемые группы конечные. Модулярная подгруппа [1], как модулярный элемент в решетке всех подгрупп группы, является одним из обобщений нормальной подгруппы. Модулярные, как и нормальные подгруппы не обладают свойством транзитивности. Однако этого недостатка лишено понятие субмодулярной подгруппы, введенное в [2]. Подгруппа H называется *субмодулярной* в группе G, если H можно соединить с G цепью подгрупп, в которой каждая предыдущая подгруппа модулярна в следующей. В [2] были изучены свойства таких подгрупп. В [3] были исследованы классы групп с субмодулярными силовскими подгруппами. Р. Шмидт в [4] доказал, что подгруппа M группы G является максимальной модулярной подгруппой в G тогда и только тогда, когда либо M – максимальная нормальная подгруппа в G, либо $G/\mathrm{Core}_G(M)$ неабелева порядка pq для некоторых простых чисел p и q. Здесь $\mathrm{Core}_G(M)$ – пересечение всех сопряженных с M подгрупп из G. В связи с этим в [5] были введены следующие понятия.

Определение 1. *Пусть n – натуральное число. Подгруппу H группы G будем называть n-модулярно вложенной в G, если либо $H \trianglelefteq G$, либо $H \neq \mathrm{Core}_G(H)$, $|G:H| = p$ и $|G/\mathrm{Core}_G(H)| = pq^n$, q^n делит $p-1$ для некоторых простых чисел p и q.*

Определение 2. *Пусть k – фиксированное натуральное число. Подгруппу H группы G будем называть k-субмодулярной в G, если существует цепь подгрупп*

$$H = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \ldots \leqslant H_{m-1} \leqslant H_m = G \qquad (1)$$

такая, что H_{i-1} n-модулярно вложена в H_i для некоторого натурального $n \leqslant k$ и любых $i = 1, \ldots, m$.

Получены свойства k-субмодулярных подгрупп, а также групп с заданными системами k-субмодулярных подгрупп. Приведем некоторые из них.

Теорема 1. *Пусть k – фиксированное натуральное число, G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *В G любая максимальная подгруппа является k-субмодулярной.*

(2) *G сверхразрешима и $Aut_G(H/K)$ есть либо единичная группа, либо циклическая группа порядка q^n для любого дополняемого главного фактора H/K из G для некоторого простого q и натурального числа $n \leqslant k$.*

Если $n = k = 1$ и максимальная подгруппа в G является 1-субмодулярной, то она модулярна в G. Также верно обратное утверждение.

Следствие 1 [1, теорема 5.3.10]. *Каждая максимальная подгруппа группы G модулярна в G тогда и только тогда, когда G сверхразрешима и $Aut_G(H/K)$ есть либо единичная группа, либо циклическая группа простого порядка для каждого дополняемого главного фактора H/K из G.*

Теорема 2. *Пусть k – фиксированное натуральное число, G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *В любой подгруппе A из G всякая максимальная в A подгруппа является k-субмодулярной.*

(2) *G сверхразрешима и $Aut_G(H/K)$ есть либо единичная группа, либо циклическая группа порядка q^n для любого главного фактора H/K из G для некоторого простого q и натурального числа $n \leqslant k$.*

Заметим, что группы из теоремы 1 не всегда являются группами из теоремы 2. Например, пусть $n = k = 1$, группа $P = \langle a,b,c | a^7 = b^7 = c^7 = 1, ab = ba, ac = ca, b^c = ba\rangle$ – неабелева группа порядка 7^3. Пусть $g \in Aut(P)$ с действием $(c^i b^j a^k)^g = c^{i6} b^{j2} a^{k12}$ для любых $i, j, k \in \{0, 1, \ldots, 6\}$. Группа P имеет экспоненту 7 и $|\langle g\rangle| = 6$. В полупрямом произведении $G = P \leftthreetimes \langle g\rangle$ любая максимальная подгруппа 1-субмодулярна. В подгруппе $L = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle g\rangle$ максимальная подгруппа $\langle g\rangle$ не является 1-субмодулярной, так как $\mathrm{Core}_L(\langle g\rangle) = 1$.

Решетка подгрупп группы G называется нижней полумодулярной, если для каждой пары подгрупп A, B из G такой, что A максимальна в $\langle A, B\rangle$, подгруппа $A \cap B$ максимальна в B. Группа G называется LM-*группой* [6, с. 130], если ее решетка подгрупп является нижней полумодулярной. Такие группы были охарактеризованы Ито в [7] (см. также [6]). Для $n = k = 1$ теорема 2 включает

Следствие 2 [6, гл. 4, теорема 4.4]. *Группа G является* LM-*группой тогда и только тогда, когда G сверхразрешима и $Aut_G(H/K)$ есть либо единичная группа, либо циклическая группа простого порядка для каждого главного фактора H/K из G.*

Отметим, что если максимальная подгруппа M группы G является n-модулярно вложенной в G, то в G она является K-$\mathbb{P}$-субнормальной и $\mathbb{P}$-субнормальной в смысле следующих определений из [8] и [9] соответственно. Подгруппа H группы G называется: K-$\mathbb{P}$-*субнормальной* в G, если существует цепь подгрупп (1) такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \ldots, n$; $\mathbb{P}$-*субнормальной* в G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп (1), в которой $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \ldots, n$.

Напомним [10], для непустого класса групп $\mathfrak{F}$ подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной* в G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп (1) такая, что $H_i/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. В [11] через $\mathfrak{U}_k$ обозначен класс всех сверхразрешимых групп экспоненты, свободной от $(k+1)$-ых степеней простых чисел, k – натуральное число, и установлено, что $\mathfrak{U}_k$ – наследственная формация, а также изучены группы с $\mathfrak{U}_k$-субнормальными силовскими подгруппами.

Отметим, если максимальная подгруппа M группы G является k-субмодулярной в G $(n = k)$, то M $\mathfrak{U}_k$-субнормальна в G. Обратное в общем случае неверно. Это следует из приведенного выше примера, где в $L = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle g\rangle$ максимальная подгруппа $\langle g\rangle$ $\mathfrak{U}_1$-субнормальна, так как $L \in \mathfrak{U}_1$.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант № 20211750 "Конвергенция-2025").

Литература

1. Schmidt R. *Subgroup Lattices of Groups*. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.

2. Zimmermann I. *Submodular subgroups in finite groups* // Math. Z. 1989. Vol. 202. P. 545–557.

3. Васильев В. А. *Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами* // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1277–1288.

4. Schmidt R. *Modulare Untergruppen endlicher Gruppen* // J. Ill. Math. 1969. Vol. 13. P. 358–377.

5. Vasilyeva T. I. On k-submodular subgroups of finite groups. arXiv:2406.04704v1 [math.GR] 7 Jun 2024.

6. *Between Nilpotent and Solvable* / H.G. Bray [and others]; edited by M. Weinstein. Passaic: Polugonal Publishing House, 1982.

7. Ito N. *Note on (*LM*)-groups of finite order* // Kodai Math. Sem. Reports. 1951. P. 1–6.

8. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. *О* K-$\mathbb{P}$-*субнормальных подгруппах конечных групп* // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 517–528.

9. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. *О конечных группах сверхразрешимого типа* // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.

10. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M. *Classes of Finite Groups*. Springer-Verlag, 2006.

11. Monakhov V.S., Sokhor I.L. *Finite groups with formational subnormal primapy subgroups of bounded exponent* // Сиб. электрон. матем. изв. 2023. Т. 20, № 2. С. 785–796.

О ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ОБОБЩЁННОЙ ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА-ЛЕМУСА

М.М. Васьковский, М.А. Фирсов, П.Д. Бабаева

Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,
vaskovskii@bsu.by, firsovm23@gmail.com, palinababayeva@gmail.com

Теорема Штейнера-Лемуса, первые упоминания о которой относят к 1840 г., гласит: “Любой треугольник с двумя равными биссектрисами является равнобедренным” [1]. Очевидным следствием данной теоремы является следующий факт: любой треугольник, имеющий три равные биссектрисы, является равносторонним. Авторами настоящей статьи доказано приведенное ниже обобщение теоремы Штейнера-Лемуса (теорема 1).

Пусть n – действительное число. Рассматриваем произвольный треугольник ABC в $\mathbb{R}^2$ со сторонами $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Пусть к сторонам a, b, c проведены так называемые n-линии AA_1, BB_1, CC_1 [2], т.е. каждая n-линия делит соответствующую ей сторону треугольника на отрезки, пропорциональные n-м степеням прилежащих сторон. Например, $BA_1 : A_1C = (AB : AC)^n$. В частности, AA_1 – медиана при $n = 0$, AA_1 – биссектриса при $n = 1$, AA_1 – симедиана при $n = 2$.

Будем говорить, что при заданном $n \in \mathbb{R}$ выполняется *аналог теоремы Штейнера-Лемуса для двух n-линий*, если “Любой треугольник с двумя равными n-линиями является равнобедренным”. Аналогично будем говорить, что при заданном $n \in \mathbb{R}$ выполняется *аналог теоремы Штейнера-Лемуса для трех n-линий*, если “Любой треугольник с тремя равными n-линиями является равносторонним”.

Теорема 1. *Аналог теоремы Штейнера-Лемуса для двух n-линий выполняется тогда и только тогда, когда* $n \in [-1, N_1]$; *аналог теоремы Штейнера-Лемуса для трех n-линий выполняется тогда и только тогда, когда* $n \in [-2, N_0)$; *где*

$$N_0 = 2 \min_{x\in(0,1)} \frac{\ln x}{\ln(8x+4) - \ln(x^2+6x+5)} = 29.143359...,$$