Силовски определяемые классы конечных групп и их приложения[1]

Васильев А.Ф.
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Беларусь
formation56@ mail.ru

Васильева Т.И.
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь
tivasilyeva@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Знание свойств вложения в группу силовских подгрупп позволяет во многих случаях получить описание самой группы. Например, хорошо известно, что группа тогда и только тогда нильпотентна, когда ее силовские подгруппы нормальны (субнормальны) в ней. Глауберман в [1] показал, что группа, в которой любая силовская подгруппа абнормальна, является примарной группой.

Возникла естественная проблема нахождения на языке вложений силовских подгрупп аналогичных характеризаций других известных классов (всех сверхразрешимых, метанильпотентных, φ-дисперсивных групп, всех групп с нильпотентным коммутантом и др.). В [3, 4] был предложен функторный метод построения и исследования классов групп, в частности, формаций.

Напомним [2], что для класса групп $\mathfrak{X}$ отображение, ставящее в соответствие каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ некоторое непустое множенство $\theta(G)$ ее подгрупп и удовлетворяющее условию $(\theta(G))^\alpha = \theta(G^\alpha)$ для любого изоморфизма α группы G, называется подгрупповым функтором в $\mathfrak{X}$ или подгрупповым $\mathfrak{X}$-функтором. Если $\mathfrak{X}$ — класс всех групп, то символ $\mathfrak{X}$ опускается.

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой наследственный гомоморф, θ — подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор. Рассмотрим класс групп [4]: $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta) = (G \in \mathfrak{X} \mid 1 \in \theta(G)$ и $P \in \theta(G)$ для любой силовской подгруппы P из $G)$.

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой наследственный гомоморф. Подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор θ назовем:*

1) L_*-функтором, если из $G \in \mathfrak{X}$, $A \in \theta(G)$ и $B \in \theta(G)$ следует, что $A \cap B \in \theta(G)$;

2) почти L_*-функтором, если из $G \in \mathfrak{X}$, $H \leq G$, $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$ и $HN_i \in \theta(G)$ следует, что $(HN_1 \cap HN_2) \in \theta(G)$.

Подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор θ называется функтором в смысле Скибы, если для группы $G \in \mathfrak{X}$ и $N \trianglelefteq G$ имеют место утверждения: a) из $H \in \theta(G)$ всегда следует $HN/N \in \theta(G/N)$; b) из $H/N \in \theta(G/N)$ всегда следует $H \in \theta(G)$.

Предложение. *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственная формация и θ — подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор в смысле Скибы. Если θ — почти L_*-функтор в $\mathfrak{X}$, то $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ — формация, если θ — L_*-функтор в $\mathfrak{X}$, то $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ — наследственная формация.*

Данное предложение приводит к задаче классификации (почти) L_*-функторов среди подгрупповых функторов в смысле Скибы.

В дальнейшем все рассматриваемые функторы являются подгрупповыми функторами в смысле Скибы. Функтор s_n, выделяющий в произвольной группе G множество всех ее субнормальных подгрупп, — важнейший пример подгруппового L_*-функтора. Для непустой наследственной формации $\mathfrak{F}$ обобщениями s_n являются функторы $s_{n\mathfrak{F}}$, $s_{n\mathrm{K}-\mathfrak{F}}$ [5], выделяющие в произвольной группе G множество всех ее $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, K-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп соответственно. Отметим, что $s_{n\mathfrak{F}}$ и $s_{n\mathrm{K}-\mathfrak{F}}$ являются L_*-функторами. Свойства и приложения формации $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ для таких функторов изучались в работах [4, 6, 7, 7].

[1]Исследование выполнено при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант № 20211750 «Конвергенция-2025»).

Подгруппа H группы G называется: $\mathbb{P}$-субнормальной в G [8], если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_{n-1} \leq H_n = G, \tag{1}$$

в которой $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \ldots, n$; K-$\mathbb{P}$-субнормальной в G [9], если существует цепь подгрупп (1) такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \ldots, n$.

Данные примеры вложения подгруппы в группу дают нам примеры подгрупповых почти L_*-функторов, не являющихся L_*-функторами. В работах [8, 9, 12] были изучены свойства классов и найдены их приложения в случаях, когда силовские подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны (K-$\mathbb{P}$-субнормальны).

Приведем новый пример почти L_*-функтора [13].

Определение 2. *Пусть t — фиксированное натуральное число. Подгруппу H группы G будем называть* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальной в G, если существует цепь подгрупп (1) такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $|H_i : H_{i-1}|$ является некоторым простым числом p и $p-1$ не делится на $(t+1)$-ые степени простых чисел для любого $i = 1, \ldots, n$.*

Обозначим через $s_{n\mathrm{K}-\mathbb{P}_t}$ функтор, выделяющий в произвольной группе G множество всех ее K-$\mathbb{P}_t$-субнормальных подгрупп.

Доказано, что $s_{n\mathrm{K}-\mathbb{P}_t}$ — почти L_*-функтор. В общем случае он не является L_*-функтором.

Теорема. *Класс всех групп, в которых всякая силовская подгруппа является* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальной, образует наследственную насыщенную формацию, которая локально определяется формационной функцией F такой, что $F(p) = (G \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1))$, если $p-1$ не делится на $(t+1)$-ые степени простых чисел; $F(p) = \mathfrak{N}_p$, если $p-1$ делится на $(t+1)$-ю степень некоторого простого числа.*

Список литературы

[1] G. Glauberman. Global and local properties of finite groups. Finite simple groups. London; New York: Acad. Press, 1971. 1–64.

[2] С. Ф. Каморников, М. В. Селькин. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003.

[3] А. Ф. Васильев, С. Ф. Каморников. О функторном методе изучения решеток подгрупп конечных групп. *Сиб. мат. журн.*, **42**: 1 (2001), 30–40.

[4] А. Ф. Васильев, И. Н. Халимончик. О решетках подгрупп субнормального типа в конечных группах. *Тр. Ин-та матем.*, **21**: 1 (2013), 25–34.

[5] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. Classes of finite groups. Dordrecht: Springer, 2006.

[6] В. А. Васильев. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами. *Сиб. мат. журн.*, **56**: 6 (2015), 1277–1288.

[7] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, А. С. Вегера. Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп. *Сиб. мат. журн.*, **57**: 2 (2016), 259–275.

[8] V. I. Murashka. Finite groups with given sets of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups. *Asian-Eur. J. Math.*, **13**: 4 (2020), 2050073.

[9] V. S. Monakhov, I. L. Sokhor. Finite groups with formational subnormal primapy subgroups of bounded exponent. *Сиб. электрон. матем. изв.*, **20**: 2 (2023), 785–796.

[10] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов. О конечных группах сверхразрешимого типа. *Сиб. мат. журн.*, **51**: 6 (2010), 1270–1281.

[11] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов. О K-$\mathbb{P}$-субнормальных подгруппах конечных групп. *Мат. заметки*, **95**: 4 (2014), 517–528.

[12] V. Monakhov, V. Kniahina. On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups. *Internat. J. of Group Theory*, **2**: 4 (2013), 21–29.

[13] A. F. Vasil'ev, T. I. Vasil'eva. On K-$\mathbb{P}_t$-subnormal subgroups of finite groups and related formations. arXiv:2405.11652v1 [math.GR] 19 May 2024.