

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ЧАСТИЧНО РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С ТРАНЗИТИВНЫМ ОТНОШЕНИЕМ π -КВАЗИНОРМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПОДГРУПП

И. М. Дергачева, Е. А. Задорожнюк, И. П. Шабалина

Белорусский государственный университет транспорта

e-mail: irina.dergacheva.76@mail.ru

Поступила 18.12.2023

На протяжении всей статьи все группы конечны. Говорят, что подгруппа A группы G π -квазинормальна в G , если A 1π -субнормальна и модулярна в G . Доказано, что если группа G π_0 -разрешима и π -квазинормальность является транзитивным отношением в G , где $\pi_0 = \pi(D)$ и D – π -специальный корадикал группы G , то D – абелева холлова подгруппа нечетного порядка в G .

1. Введение. На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу; $\mathcal{L}(G)$ – решетка всех подгрупп группы G , $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел; $\pi = \{p_1, \dots, p_t\} \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Группа G называется π -специальной [1–3], если

$$G = O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G) \times O_{\pi'}(G).$$

Пересечение всех таких нормальных подгрупп N группы G , для которых факторгруппа G/N является π -специальной, называется π -специальным корадикалом G .

Подгруппа A группы G называется 1π -субнормальной в G [4–6], если A $\mathfrak{F}$ -субнормальна в смысле Кегеля [7] или K - $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G [8], где $\mathfrak{F}$ – класс всех π' -групп, т. е. в G имеется цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G,$$

такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i/(A_{i-1})_{A_i} - \pi'$ -группа для всех $i = 1, \dots, n$.

Подгруппа A группы G называется модулярной в G , если M – модулярный элемент (в смысле Куроша [9, с. 43]) решетки $\mathcal{L}(G)$, т. е. (i) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$ и (ii) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$.

Подгруппа A группы G называется квазинормальной (Оре) или перестановочной (Стоунхьюэр) в G , если A перестановочна с каждой подгруппой H группы G , т. е. $AH = HA$. Каждая квазинормальная подгруппа, очевидно, модулярна в группе. Кроме того, общеизвестен следующий интересный факт.

Теорема А (Шмидт [9, теорема 5.1.1]). Подгруппа A группы G квазинормальна в G тогда и только тогда, когда A субнормальна и модулярна в G .

Теорема А позволяет определить следующий π -аналог квазинормальности.

Определение 1.1. Мы говорим, что подгруппа A группы G π -квазинормальна в G , если A 1π -субнормальна и модулярна в G .

Понятно, что подгруппа A квазинормальна в G тогда и только тогда, когда A π -квазинормальна в G , где π – множество всех простых групп.

В данной работе, обобщая соответствующий результат работы Цахера [10] о разрешимых PT -группах, мы доказываем следующий факт.

Теорема В. Пусть D – π -специальный корадикал группы G и G является π_0 -разрешимой группой, где $\pi_0 = \pi(D)$. Если π -квазинормальность является транзитивным

отношением в G , то D – абелева холлова подгруппа в G , имеющая нечетный порядок, и каждый главный фактор группы G ниже D является циклическим.

2. Некоторые предварительные результаты. Мы используем $\mathfrak{G}_{1\pi}$ для обозначения класса всех π -специальных групп.

Первая лемма может быть доказана прямой проверкой.

Лемма 2.1. *Класс $\mathfrak{G}_{1\pi}$ замкнут относительно взятия прямых произведений, гомоморфных образов и подгрупп. Более того, если E является нормальной подгруппой в G и $E/(E \cap \Phi(G))$ является π -специальной группой, то E является π -специальной.*

Ввиду леммы 2.1 и предложения 2.2.8 в [8] имеет место следующая

Лемма 2.2. *Если N – нормальная подгруппа в G , тогда*

$$(G/N)^{\mathfrak{G}_{1\pi}} = G^{\mathfrak{G}_{1\pi}}N/N.$$

Лемма 2.3 (см. лемму 2.6 в [11]). *Пусть A , K и N – подгруппы G . Предположим, что A 1π -субнормальна в G , а N нормальна в G . Тогда:*

- (1) $A \cap K$ 1π -субнормальна в K ;
- (2) если $N \leq K$ и K/N 1π -субнормальна в G/N , то K является σ -субнормальной в G ;
- (3) если $K \leq E \leq G$, где K 1π -субнормальна в E , тогда KN/N 1π -субнормальна в NE/N .

Все утверждения следующей леммы вытекают из соответствующих утверждений леммы 2.3 и общих свойств модулярных подгрупп [9, с. 201].

Лемма 2.4. *Пусть A , B и N – подгруппы группы G , где A π -квазинормальна, а N нормальна в G . Тогда:*

- (1) подгруппа $A \cap B$ π -квазинормальна в B ;
- (2) подгруппа AN/N π -квазинормальна в G/N ;
- (3) если $N \leq B$ и B/N π -квазинормальна в G/N , то B π -квазинормальна в G .

Говорят, что подгруппа A группы G является π -субквазинормальной в G , если существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$$

такая, что A_{i-1} π -квазинормальна в A_i для всех $i = 1, \dots, n$.

Понятно, что π -квазинормальность является транзитивным отношением в G тогда и только тогда, когда каждая π -субквазинормальная подгруппа G является π -квазинормальной в G .

Следующая лемма является следствием леммы 2.4 данной работы и лемм 1 и 4 работы [12].

Лемма 2.5. *Пусть A , B и N – подгруппы группы G , где A π -субквазинормальна в G , а N нормальна в G . Тогда:*

- (1) $A \cap B$ является π -субквазинормальным в B ;
- (2) AN/N π -субквазинормальна в G/N ;
- (3) если $N \leq K$ и подгруппа K/N является π -субквазинормальным в G/N , то K π -субквазинормальна в G .

Лемма 2.6 (см. лемма 1.2.16 в [13]). *Если A – квазинормальная p -подгруппа G , то $O^p(G) \leq N_G(A)$.*

3. Доказательство теоремы В. Предположим, что теорема неверна, и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда $D \neq 1$.

(1) Если R – неединичная нормальная подгруппа группы G , то заключение теоремы выполняется для G/R .

Если H/R – π -субквазинормальная подгруппа группы G/R , то H π -субквазинормальна в G по лемме 2.5(3). Поэтому H π -квазинормальна в G по условию теоремы и, значит, H/R

является π -квазинормальной в G/R по лемме 2.4(2). Следовательно, π -квазинормальность является транзитивным отношением в G/R . Поэтому имеет место (1) по выбору G .

(2) Если E – собственная π -субквазинормальная подгруппа группы G , то $E^{\mathfrak{G}_{1\pi}} \leq D$ и заключение теоремы выполняется для E .

Каждая π -субквазинормальная подгруппа H группы E π -субквазинормальна в G , поэтому по условию H π -квазинормальна в G , а значит, H π -квазинормальна в E по лемме 2.4(1). Следовательно, гипотеза верна для E , поэтому заключение теоремы выполняется для E в силу выбора G . Кроме того, поскольку $G/D \in \mathfrak{G}_{1\pi}$ и $\mathfrak{G}_{1\pi}$ – наследственный класс по лемме 2.1, то

$$E/(E \cap D) \simeq ED/D \in \mathfrak{G}_{1\pi}$$

и поэтому $E/(E \cap D) \in \mathfrak{G}_{1\pi}$. Следовательно, $E^{\mathfrak{G}_{1\pi}} \leq E \cap D \leq D$.

(3) подгруппа D нильпотентна и каждый главный фактор H/K группы G ниже D является циклическим.

Предположим, что это утверждение неверно, и пусть R – минимальная нормальная подгруппа G . Прежде покажем, что $R \leq D$. В силу леммы 2.2 и утверждения (1), $RD/R = (G/R)^{\mathfrak{G}_{1\pi}}$ – абелева группа и каждый главный фактор $(H/R)/(K/R)$ группы G/R ниже RD/R является циклическим. Предположим, что $R \cap D = 1$. Тогда

$$D \simeq D/1 = D/(D \cap R) \simeq RD/R$$

нильпотентна. Ввиду G -изоморфизма $D \simeq RD/R$. Каждый главный фактор группы G ниже D является циклическим. Таким образом, $R \leq D$ и поэтому каждый главный фактор группы G/R между DR/R и R/R является циклическим.

Поскольку $G \pi(D)$ -разрешима, R является p -группой для некоторого простого числа p . Пусть V – максимальная подгруппа в R . Тогда $V_G = 1$ и V π -субквазинормальна в G . Поэтому V π -квазинормальна в G . Допустим, что $V \neq 1$. Тогда $R = V^G$ – группа порядка p согласно [9, теорема 5.2.3], противоречие. Следовательно, $V = 1$ и поэтому $|R| = p$. Таким образом, каждый главный фактор группы G ниже D является циклическим ввиду теоремы Жордана–Гельдера для главных рядов.

Покажем, что D нильпотентна. Предположим, что G имеет минимальную нормальную подгруппу $N \neq R$. Тогда $N \leq D$ и $D \simeq D/(N \cap R)$ нильпотентна. Предположим теперь, что R – единственная минимальная нормальная подгруппа G . Тогда, ввиду леммы 2.2, имеет место $R \not\leq \Phi(G)$ поскольку $D \neq 1$ и поэтому $R = C_G(R) = O_p(G) = F(G)$ согласно [14, гл. А, 13.8(b) и 15.2]. Но $|R| = p$. Значит, $G/R = G/C_G(R)$ циклическая группа и, следовательно, G сверхразрешима. Но тогда

$$D = G^{\mathfrak{G}_{1\pi}} \leq G' \leq F(G)$$

и поэтому D нильпотентна. Отсюда имеем (3).

(4) Каждая подгруппа группы $F(G)$ является квазинормальной в G , а каждая подгруппа группы D нормальная в D (это следует из утверждения (3), леммы 1.6 и теоремы А, поскольку каждая субнормальная подгруппа является π -субквазинормальной в группе).

(5) D – холлова подгруппа группы G . Следовательно, D имеет дополнение M в G .

Предположим, что это неверно, и пусть P – силовская p -подгруппа группы D и G_p – силовская p -подгруппа группы G такие, что $1 < P < G_p$, $G_p \leq H$, где либо $H = G_p$ и $p \in \pi$, либо H – холлова π' -подгруппа в G .

(а) $D = P$ – минимальная нормальная подгруппа в G . Следовательно, H нормальна в G и $|D| = p$, поэтому $G_p \leq C_G(D)$.

Пусть R – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в D . Тогда R является q -группой для некоторого простого числа q ввиду (3). Более того, ввиду леммы 2.2, $D/R = (G/R)^{\mathfrak{G}_{1\pi}}$ является холловой подгруппой группы G/R по утверждению (1) и тогда H/D нормальна в G/D поскольку G/D π -специальна согласно лемме 2.1. Значит, H нормальна в G .

Предположим, что $PR/R \neq 1$. Тогда $PR/R \in \text{Syl}_p(G/R)$. Если $q \neq p$, то $P \in \text{Syl}_p(G)$. Это противоречит тому, что $P < G_p$. Следовательно, $q = p$, поэтому $R \leq P$ и значит, $P/R \in \text{Syl}_p(G/R)$ и мы снова получаем, что $P \in \text{Syl}_p(G)$. Это противоречие показывает, что $PR/R = 1$, откуда следует, что $R = P$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в D . Поскольку D нильпотентна по утверждению (3), то p' -дополнение S группы D является характеристической подгруппой в D , а значит, нормальной в G . Следовательно, $S = 1$, откуда следует, что $R = D = P$. Наконец, ввиду (3), $|D| = p$ и поэтому $D \leq Z(G_p)$. Следовательно, $G_p \leq C_G(D)$.

(b) $D \not\leq \Phi(G)$. Следовательно, для некоторой максимальной подгруппы M группы G имеет место равенство $G = D \rtimes M$.

Это следует из утверждения (a) и леммы 2.2, так как G не π -специальна.

(c) Если в G имеется минимальная нормальная подгруппа $L \neq D$, то $G_p = D \times L$ – нормальная абелева подгруппа в G . Следовательно, $O_{p'}(G) = 1$.

Действительно, $DL/L \simeq D$ – холлова подгруппа группы G/L по утверждениям (1) и (a). Следовательно, $G_p L/L = DL/L$, поэтому $G_p = D \times (L \cap G_p)$. Но $D < G_p$ и поэтому $L \cap G_p \neq 1$, что влечет $L \cap G_p = L$ поскольку G p -разрешима по условию. Таким образом, $G_p = D \times L$ и $O_{p'}(G) = 1$.

(d) $V = C_G(D) \cap M$ – нормальная подгруппа в G и $C_G(D) = D \times V \leq H$.

Ввиду утверждений (a) и (b), $C_G(D) = D \times V$, где $V = C_G(D) \cap M$ – нормальная подгруппа в G . Более того, $V \simeq DV/D$ π -специальна по лемме 2.1. Таким образом, $V = O_\pi(V) \times O_{\pi'}(V)$.

Пусть W – холловская π' -подгруппа в V . Тогда подгруппа W характеристична в V и поэтому она нормальна в G . Предположим, что $p \in \pi$. Тогда $W \leq O_{p'}(G) = 1$ и поэтому V – p -группа. Следовательно, $C_G(D) \leq G_p = H$. Пусть теперь $p \in \pi'$ и пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в V . Тогда L – p -группа ввиду (c). Значит, $V = O_{\pi'}(V) \leq H$ и поэтому $C_G(D) = D \times V \leq H$.

(e) В G имеется минимальная нормальная подгруппа L , где $D \neq L \leq M$. Следовательно, $G_p = D \times L$ – нормальная абелева p -подгруппа в G .

Предположим, что D является единственной минимальной нормальной подгруппой в G . Тогда $D = C_G(D)$ согласно [15, гл. А, 15.2], поскольку $D \not\leq \Phi(G)$ согласно (b). Однако $D < G_p \leq C_G(G)$ согласно (a). Это противоречие показывает, что в G имеется минимальная нормальная подгруппа $N \neq D$. Значит, $G_p = D \times N$ – нормальная элементарная абелева подгруппа в G ввиду (c). Но тогда $G_p \cap DM = D(G_p \cap M)$, где $G_p \cap M$ – неединичная нормальная подгруппа в G и поэтому для некоторой минимальной нормальной подгруппы L группы G имеет место $D \neq L \leq M$ и $G_p = D \times L$ – нормальная абелева p -подгруппа в G .

(f) Каждая подгруппа группы G_p является нормальной в G . Таким образом, $|D| = |L| = p$.

Пусть $A \leq G_p$. Тогда A квазинормальна в G ввиду (4), поэтому ввиду (e) имеем $G = G_p O^p(G) \leq N_G(A)$ согласно лемме 2.6.

(g) Заключительное противоречие для (5).

Ввиду (d), $C_G(D) \leq H$, где $H = G_p$, если $p \in \pi$ и H – холлова π' -подгруппа в G , если $p \in \pi'$.

Согласно (е) и (f), $G_p = D \times L$, где $|D| = |L| = p$ и L – минимальная нормальная подгруппа G , содержащаяся в M , и каждая подгруппа G_p нормальна в G .

Пусть $D = \langle a \rangle$, $L = \langle b \rangle$ и $N = \langle ab \rangle$. Тогда $L \neq N \neq D$, поэтому в силу G -изоморфизмов

$$G_p/N = DN/N \simeq D \simeq L \simeq LN/N = G_p/N$$

мы получаем, что $C_G(D) = C_G(L) = C_G(G_p)$ и $G/C_G(D) = G/C_G(L) = G/C_G(G_p)$.

Прежде предположим, что $p \in \pi$. Тогда $C_G(L) \leq G_p$. С другой стороны, $L \leq M$, где $M \simeq G/D$ π -специальна, и поэтому

$$M = O_{p_1}(M) \times \cdots \times O_{p_n}(M) \times O_{\pi'}(M),$$

где $p_1, \dots, p_n \in \pi$ и

$$O_{\pi'}(M) \leq C_G(L) \leq G_p \leq O_{\pi}(M).$$

Это показывает, что $O_{\pi'}(M) = 1$ и поэтому M – нильпотентная π -группа. Следовательно, M и G – p -группы.

Полученное противоречие показывает, что $p \in \pi'$ и поэтому $C_G(D) \leq H$, где H – холлова π' -подгруппа в G . Но

$$O_{p_1}(M) \times \cdots \times O_{p_n}(M) \leq C_G(D)$$

и поэтому

$$O_{p_1}(M) \times \cdots \times O_{p_n}(M) = 1.$$

Следовательно, M , и поэтому G , являются π' -группами. Следовательно, G π -специальна. Полученное противоречие завершает доказательство (5).

(6) Если p – простое число и $(p-1, |G|) = 1$, тогда $(p, |D|) = 1$. Следовательно наименьшее простое число в $\pi(G)$ принадлежит $\pi(|G:D|)$. В частности, $|D|$ нечетно, а значит, D абелева.

Предположим, что p делит $|D|$. Тогда D имеет максимальную подгруппу E такую, что $|D:E| = p$ и E нормальна в G ввиду утверждений (3) и (5). Отсюда следует, что $C_G(D/E) = G$, поскольку $(p-1, |G|) = 1$, т. е. $D/M \leq Z(G/M)$. Но G/D нильпотентна. Следовательно, G/M нильпотентна и, значит, $D \leq M < D$, противоречие. Следовательно, наименьшее простое число в $\pi(G)$ принадлежит $\pi(|G:D|)$. В частности, $|D|$ нечетно, и поэтому D абелева, поскольку ввиду (4) D является дедекиндовой группой.

Из утверждений (3), (5) и (6) следует, что заключение теоремы выполняется для G . Но это противоречит выбору G . Это заключительное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Литература

1. Chunikhin S. A. Subgroups of finite groups. Minsk: Nauka i Tehnika. 1964.
2. Skiba A. N. On some results in the theory of finite partially soluble groups // Commun. Math. Stat. 2016. Vol. 4, N 3. P. 281–309.
3. Skiba A. N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups // J. Algebra. 2018. Vol. 495. P. 114–129.
4. Haiyan Li, A.-Ming Liu, Safonova I. N., Skiba A. N. Characterizations of some classes of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups // Communications in Algebra. DOI: 10.1080/00927872.2023.2235006.
5. Zhang X.-F., Guo W., Safonova I. N., Skiba A. N. A Robinson description of finite $P\sigma T$ -groups // J. Algebra. 2023. Vol. 631. P. 218–235.
6. A.-Ming Liu, Chen M., Safonova I. N., Skiba A. N. Finite groups with modular σ -subnormal subgroups // J. Group Theory. 2023. <https://doi.org/10.1515/jgth-2023-0064>.

7. Kegel O. H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den subnormalteilerverband each enthalten // Arch. Math. 1978. Vol. 30, N 3. P. 225–228.
8. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. Classes of Finite groups. Dordrecht: Springer, 2006.
9. Schmidt R. Subgroup lattices of groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1994.
10. Zacher G. I gruppi risolubili finiti in cui i sottogruppi di composizione coincidono con i sottogruppi quasi-normali // Atti della Accademia Nazionale dei Lincei Rend. cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 1964. Vol. 8, N 37. P. 150–154.
11. Skiba A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. Vol. 436, N 8. P. 1–16.
12. Zimmermann I. Submodular subgroups of finite groups // Math. Z. 1989. Vol. 202, N 2. P. 545–557.
13. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. Products of Finite Groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2010.
14. Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.
15. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1967.

I. M. Dergacheva, E. A. Zadorozhnyuk, I. P. Shabalina

**Finite partially soluble groups with transitive
 π -quasinormality relation for subgroups**

Summary

Throughout the article, all groups are finite. We say that a subgroup A of G is π -quasinormal in G , if A is 1π -subnormal and modular in G . We prove that if the group G is π_0 -solvable, where $\pi_0 = \pi(D)$ and D is the π -special residual of G , and π -quasi-normality is a transitive relation in G , then D is an abelian Hall subgroup of odd order in G .