МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Прикладная математика»

В. С. СЕРЁГИНА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Пособие

Гомель 2004

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Прикладная математика»

В. С. СЕРЁГИНА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Пособие

Одобрено методическими комиссиям
гуманитарно-экономического факультета
и факультета безотрывного обучения

Гомель 2004

УДК 336 (075.8)
ББК 65.261
С 325

Р е ц е н з е н т – канд. экон. наук, профессор кафедры «Бухгалтерский учет, анализ и аудит» **В. Г. Гизатуллина** (БелГУТ).

Серёгина В. С.

С 325 Математические модели финансовых вычислений: Пособие. – Гомель: БелГУТ, 2004. – 122 с.

В пособии излагаются основные методы финансовых расчётов, составляющих предмет финансовой математики. Для понимания этих методов достаточно иметь знания в объёме математики старших классов средней школы. Пособие снабжено большим количеством примеров, иллюстрирующих теоретические положения, что позволит читателю овладеть техникой финансовых расчётов.

Предназначено для студентов и аспирантов гуманитарно-экономического факультета, может быть использовано в практической работе специалистами финансовых служб предприятий.

УДК 336 (075.8)
ББК 65.261

© В. С. Серёгина, 2004.

ВВЕДЕНИЕ

Становление рыночных отношений в нашей стране сопровождается необходимостью овладевать новыми знаниями и навыками. К их числу относятся и финансовые вычисления.

Задачи финансового обслуживания, решение которых основано на количественных методах, можно разделить на две основные группы:

1) оценка финансового состояния субъектов финансового рынка и оценка уровня риска в их взаимоотношениях на финансовом рынке;

2) выбор условий финансовой сделки между субъектами финансового рынка и расчёт параметров сделки.

В пособии излагаются методы решений второй группы задач финансового обслуживания, причём внимание в основном уделяется практической стороне финансовых операций. Обсуждаются финансовые сделки, результатом которых становятся разовые платежи, а также потоки платежей. Количественный анализ этих двух видов платежей охватывает почти всё многообразие финансовых сделок. Завершается пособие рассмотрением некоторых практических задач, которые можно решить методами количественного финансового анализа. При этом мы ограничимся только детерминированными постановками. Хотя понятно, что в реальной действительности исходные данные в значительной мере случайны (отдача инвестиций, процентные ставки, курсы валют, ценных бумаг и т.д.). Кроме того, некоторых сведений может просто и не быть. При такой информации говорят, что анализ и разработка финансовых моделей проводятся в условиях риска и неопределённости. Для учёта подобных условий детерминированного подхода уже недостаточно и приходится прибегать к вероятностным методам.

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1 Временна́я ценность денег

Важной составляющей финансового анализа является учёт фактора времени. В его основе лежат принципы неравноценности денег в разные календарные сроки. Очевидно, что 10 000 руб., полученных через пять лет, не равноценны этой же сумме, поступившей сегодня.

Неравноценность двух одинаковых по абсолютной величине сумм обусловлена рядом причин. Во-первых, имеющиеся сегодня деньги могут быть инвестированы и принести доход в будущем, который, в свою очередь, может быть реинвестирован и т.д. Во-вторых, существуют риски, связанные с неопределённостью будущего. Деньги «в кармане» могут быть израсходованы сиюминутно. Сберегательные же деньги подвержены инфляции даже в странах с устойчивой экономикой. А в периоды финансовой нестабильности влияние фактора времени усиливается многократно. В случае, когда деньги дают в долг, риск невозврата зависит от успешности кредитуемого мероприятия, которое может завершиться и полным крахом, а следовательно, невозвратом долга. Важным следствием принципа временно́й неравноценности денег является неправомерность суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени.

Для разрешения проблемы «деньги – время» разработаны удобные модели и алгоритмы, позволяющие ориентироваться в истинной цене будущих доходов с позиции текущего момента и сравнивать разновременные денежные суммы.

1.2 Показатели кредитной операции

Простейшим видом финансовой сделки является однократное предоставление в долг некоторой суммы денег.

В такой финансовой сделке участвуют две стороны: владелец капитала (кредитор) и заёмщик капитала (дебитор). Примерами таких сделок служат операции кредитования, выдачи денежных ссуд, помещения денег на сберегательный счёт, инвестирование денег в проекты, учёт векселей, покупка акций, облигаций и т.д. Очевидно, что владелец капитала рассчитывает на получение дохода от такой сделки. Размер ожидаемого дохода зависит от трёх факторов:

- величины капитала, предоставляемого в кредит;

- срока, на который предоставлен кредит;
- величины ссудного процента или процентной ставки.

В дальнейшем при описании рассматриваемой финансовой сделки мы будем использовать следующие обозначения:

0 – **момент заключения** финансовой сделки;

τ – **срок долга** (число дней между датой предоставления денег в долг и датой погашения долга). Если срок долга будет выражаться в годах, будем обозначать его – t;

$S(0)$ – **сумма первоначального долга** (сумма денег, выданная в долг в момент 0);

$S(\tau)$ или $S(t)$ – **сумма погашаемого долга** или наращенная сумма долга (сумма денег, которая должна быть возвращена в конце срока долга);

i_τ – **процентная ставка**, приуроченная к рассматриваемому промежутку времени;

d_τ – **учётная ставка**, приуроченная к рассматриваемому промежутку времени.

Эти показатели при решении задач, связанных с разовыми платежами, являются либо заданными, либо неизвестными (таблица 1.1).

Таблица 1.1

Задача	Показатель			
	$S(\tau)$	$S(0)$	$i(d)$	τ
Определение суммы погашаемого долга (прямая задача)	?	+	+	+
Определение суммы первоначального долга (обратная задача)	+	?	+	+
Определение процентной ставки	+	+	?	+
Определение срока пользования долгом	+	+	+	?

1.3 Проценты и процентная ставка

Рассмотрим задачу определения суммы погашаемого долга. В этом случае графическое изображение движения денежного потока имеет вид (рисунок 1.1).

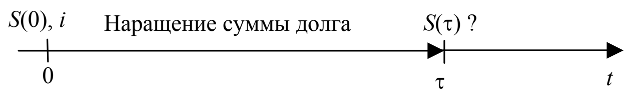

Рисунок 1.1

Результативность рассматриваемой финансовой сделки может быть охарактеризована двояко: либо с помощью абсолютного показателя – дохода кредитора

$$I(\tau) = S(\tau) - S(0),$$

который называется **процентными деньгами или процентами**, либо с помощью расчёта относительного показателя – **процентной ставки** $\boldsymbol{i_\tau}$. Процентная ставка i_τ характеризует доходность (эффективность) кредитной сделки. Она показывает, какая доля от суммы кредита, выданного на срок τ, будет возвращена владельцу капитала в виде дохода. Процентная ставка i_τ рассчитывается как отношение дохода, полученного за период τ к величине капитала, предоставляемого в кредит:

$$i_\tau = \frac{I(\tau)}{S(0)} = \frac{S(\tau) - S(0)}{S(0)}. \qquad (1.1)$$

Как правило, в финансовых расчётах используется процентная ставка, приуроченная к одному году. В этом случае говорят о годовой процентной ставке i, которая вычисляется по формуле

$$i = i_1 = \frac{I(t)}{S(0)t} = \frac{S(t) - S(0)}{S(0)t}, \qquad (1.2)$$

где t – срок ссуды в годах (очевидно соотношение: $t = \tau / 365$). Величина t определяет число периодов (лет) начисления процентов по годовой процентной ставке i. Заметим, что процентная ставка i имеет единицу измерения (1/год) или (1/ед. времени) в общем случае.

На практике доходность – величина непостоянная, зависящая от общего состояния экономики, вида сделки, её валюты, срока кредита, особенностей заёмщика и кредитора, истории их предыдущих отношений. В общем случае процентная ставка i может рассматриваться как сумма четырёх основных компонент:

$$i = r + f + e + g(t),$$

где r – компенсация кредитору за отказ использовать предоставленную сумму в других целях в течение времени t;

f – компенсация кредитору за риск неполучения процентов или всей суммы долга вообще при наступлении срока возврата долга;

e – компенсация кредитору за возможное изменение в уровне цен, т.е. инфляционная добавка;

$g(t)$ – компенсация, зависящая от срока ссуды t, тем большая, чем длительнее этот срок.

Однако размеры всех перечисленных составляющих, а следовательно, и величина i объективно зависят от состояния рынка ссудного капитала: от предложений ссудного капитала и от спроса на ссудный капитал. На рисунке 1.2 изображены кривая DD спроса на ссудный капитал и кривая PP предложения ссудного капитала в зависимости от величины процентной ставки i.

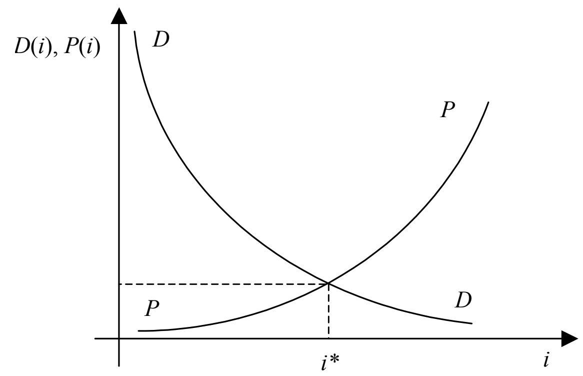

Рисунок 1.2

Очевидно величина i^* определяет цену равновесия объёмов спроса и предложения капиталов и является равновесной процентной ставкой.

По мере начисления процентов их либо выплачивают, либо присоединяют к сумме долга. Сумма долга вместе с процентами, начисленными за время t, называется **наращенной суммой долга**:

$$S(t) = S(0) + I(t). \qquad (1.3)$$

Формулу (1.3) иллюстрирует рисунок 1.3.

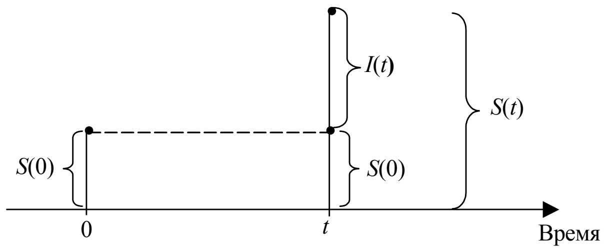

Рисунок 1.3

Различают следующие методы начисления процентов:
- по простым процентам;
- сложным процентам;
- силе роста (непрерывные проценты).

Процентные ставки в зависимости от их величины на каждом периоде начисления бывают:
- фиксированные;
- плавающие.

Пример 1.1 Банк приобрёл у фирмы вексель, по которому через год должен получить 70,0 тыс. руб. (номинальная стоимость векселя). В момент приобретения цена векселя составила 60,0 тыс. руб. Определить доходность этой сделки.

По условию $S(0) = 60{,}0$ тыс. руб. $S(t) = 70{,}0$ тыс. руб., $t = 1$ год. Доход банка составит $I(1) = 70{,}0 - 60{,}0 = 10{,}0$ тыс. руб. Следовательно, доходность сделки

$$i = \frac{10{,}0}{60{,}0 \cdot 1} = 0{,}17 \text{ (17 \% годовых).}$$

Пример 1.2 Коммерческий банк приобрёл на 2,0 млн руб. государственных облигаций со сроком погашения через шесть месяцев. По истечении указанного срока банк рассчитывает получить по облигациям 2,175 млн руб.

Определить доходность финансовой операции.

По условию задачи $S(0) = 2{,}0$ млн руб., $S(t) = 2{,}175$ млн руб., $t = 0{,}5$ года. Отсюда:

$$I(0{,}5) = 2{,}175 - 2{,}0 = 175{,}0 \text{ тыс. руб.}$$

$$i_{0,5} = \frac{175000}{2000000} = 0{,}087;$$

$$i = \frac{175000}{2000000 \cdot 0{,}5} = 0{,}175.$$

То есть полугодовая процентная ставка равна 0,087 (8,7 %), годовая – 0,175 (17,5 %).

1.4 Дисконт и учётная ставка

Рассмотрим «обратную задачу» (см. таблицу 1.1), т.е. задачу определения суммы первоначального долга при заданных величинах погашенного долга и остальных показателей.

Такая задача может возникнуть, например, при разработке условий контракта или, когда проценты с суммы $S(\tau)$ удерживаются непосредственно при выдаче ссуды, при учёте векселей в банке.

Как и раньше доход (или процентные деньги), который является результатом предоставления денег в долг на время τ, определяется формулой

$$D(\tau) = S(\tau) - S(0).$$

Однако величина дохода в этом случае называется **дисконтом, или учётом,** и обозначается $D(\tau)$.Величина дисконта зависит не только от величины погашаемого долга $S(\tau)$ и срока долга τ, но и от ставки d_τ, которую называют **учётной ставкой:**

$$d_\tau = \frac{D(\tau)}{S(\tau)} = \frac{S(\tau) - S(0)}{S(\tau)}. \tag{1.4}$$

В формуле (1.4) учётная ставка относится к периоду τ. Как правило, в финансовых расчётах используется годовая учётная ставка d. Процесс уменьшения суммы погашаемого долга в связи с удержанием дисконта называют **дисконтированием, или учётом** погашаемого долга, а найденную дисконтированием величину первоначального долга – **современной** или **приведённой** величиной погашаемого долга.

В общем случае операцию дисконтирования можно выполнять по отношению к произвольному моменту времени τ_1 (рисунок 1.4). Тогда дисконтированная сумма называется современной или приведённой к этому моменту времени денежной суммой.

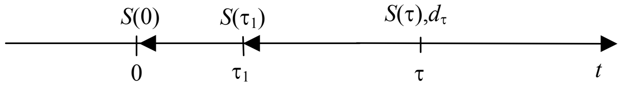

Рисунок 1.4

Рассматривая совместно формулы (1.1) и (1.4), можно показать справедливость следующих равенств:

$$i_\tau = \frac{d_\tau}{1-d_\tau}\,;\; d_\tau = \frac{i_\tau}{1+i_\tau}\,. \tag{1.5}$$

Из (1.1) и (1.4) следует также, что всегда $0 < d_\tau < 1$ и $i_\tau > 0$. Случай, когда $i_\tau = 0$ и $d_\tau = 0$ не рассматривается, так как в этом случае $S(\tau) = S(0)$ и финансовой сделки как таковой нет.

Как соотносятся между собой ставки i_τ и d_τ? Очевидно, что всегда $d_\tau < i_\tau$, но поскольку $d_\tau < 1$, то $d_\tau < \min(i_\tau,1)$.

Степень расхождения между i_τ и d_τ зависит от уровня процентных ставок i_τ. Так, если $i_\tau = 7$ %, то из (1.5) следует $d_\tau = 7/(100 + 7) =$ $= 6{,}54$ %, т.е. расхождение между i_τ и d_τ невелико; если $i_\tau = 70$ %, то $d_\tau = 41{,}18$ %, т.е. ставки существенно различаются по величине.

Кроме введённых показателей часто используют величину, называемую **дисконт-фактором,**

$$v_\tau = 1 - d_\tau = \frac{1}{1+i_\tau} = \frac{S(0)}{S(\tau)}. \tag{1.6}$$

Дисконт-фактор показывает, какую часть сумма S (0) составляет в сумме $S(\tau)$. Из (1.6) следует, что $0 < v < 1$ и между тремя показателями справедливо соотношение $d_\tau = v_\tau i_\tau$.

Пример 1.3 Кредит выдан на срок $t = 1$ год в сумме $S(0) =$ 1,0 млн руб. с условием возврата $S(1) = 2{,}0$ млн руб. Определить процентную и учётную ставки.

По формулам (1.1) и (1.4) найдём

$$i_1 = 1\ (100\ \%);\quad d_1 = 0{,}5\ (50\ \%).$$

Пример 1.4 Кредит выдан на срок $t = 1$ год с условием возврата $S(1) = 3{,}0$ млн руб. и учётной ставкой $d_1 = 20$ %. Определить начальную сумму, полученную дебитором.

Дисконт фактор $v_1 = 80$ %, из (1.6) следует

$$S(0) = v_1 S(1) = 0{,}8 \cdot 3{,}0 = 2{,}4 \text{ млн руб.}$$

1.5 Арифметическая и геометрическая прогрессии

Основой для финансовых расчётов и анализа финансовых операций являются такие понятия, как арифметическая и геометрическая прогрессии.

Арифметическая прогрессия – это числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему, сложенному с одним и тем же числом, называемым разностью арифметической прогрессии d, т.е $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, \ldots, a_n = a_1 + (n-1)d, \ldots$. Если $d > 0$, то арифметическая прогрессия называется возрастающей, если $d < 0$ – убывающей.

Характеристическим свойством арифметической прогрессии является тот факт, что каждый её член, начиная со второго, равен среднему арифметическому ее соседних членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\; n \ge 2\,.$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n\,. \tag{1.7}$$

Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему, умноженному на одно и то же, не равное нулю, число, называемое знаменателем геометрической прогрессии q,

$$a_2 = a_1 q\,,\; a_3 = a_2 q = a_1 q^2\,,\; \ldots,\; a_{n+1} = a_1 q^n\,.$$

Характеристическим свойством геометрической прогрессии является тот факт, что

$$a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}, \quad n \ge 2 .$$

Сумма первых n членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1} . \qquad (1.8)$$

Сумма бесконечно убывающей ($q < 1$) геометрической прогрессии

$$S = \frac{a_1}{1-q} .$$

Пример 1.5 Фирма приобрела машину за 1700 у.е. Ежегодно ценность машины уменьшается на 150 у.е. Остаточная стоимость машины – 200 у.е. Каков срок использования машины?

Согласно условию стоимость машины после каждого года использования задаётся значениями:

$$a_1 = 1550;\ a_2 = 1400, \ldots;\ a_n = 200 .$$

Это арифметическая прогрессия со знаменателем $d = -150$. На основании равенства (1.7) можно записать

$$\frac{1550 + 200}{2} n = \frac{2 \cdot 1550 - 150(n-1)}{2} n .$$

Отсюда найдём $n = 10$, т.е. срок использования машины равен десяти годам.

Пример 1.6 Затраты на бурение скважины сформировались так: 15 у.е. за первый метр с увеличением на 1 % за каждый последующий метр. Найти затраты на бурение, если скважина пробурена на глубину 600 метров.

В соответствии с условием задачи затраты на бурение каждого метра представляют собой геометрическую прогрессию с $a_1 = 15$, $q = 1{,}01$ и $n = 600$. Затраты на бурение скважины можно вычислить

по формуле (1.8)

$$S_{600} = \frac{15(1{,}01^{600} - 1)}{1{,}01 - 1} = 585875{,}1 \text{ у.е.}$$

2 ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ

2.1 Наращение по простой процентной ставке

Рассмотрим кредитную операцию с такими параметрами:

0 – момент заключения договора;

t – срок ссуды (в годах);

i – годовая процентная ставка;

$S(0)$ – первоначальная сумма долга (д.е.).

В этом контракте предусматривается начисление процентов в конце каждого года после получения ссуды, т.е. базовый интервал – один год и процентная ставка устанавливается в виде годовой ставки.

Схема начисления простых процентов предполагает, что проценты начисляются на одну и ту же величину в течение всего срока ссуды. Следовательно, дебитор ежегодно платит за пользование капиталом $S(0)$ величину

$$I_n(1) = S(0)i , \ n = 1, 2, ..., t .$$

Отсюда наращенная за t лет сумма долга для заёмщика составит:

$$S(t) = S(0) + \underbrace{S(0)i + S(0)i + \ldots S(0)i}_{t \text{ раз}} = S(0) + S(0)it ,$$

$$S(t) = S(0)(1 + it) . \qquad (2.1)$$

Формула (2.1) называется **формулой наращения по простым процентам**. Величина $(1 + it)$ называется **множителем наращения** простых процентов по процентной ставке i за t лет.

График роста суммы долга по простым процентам представлен на рисунке 2.1.

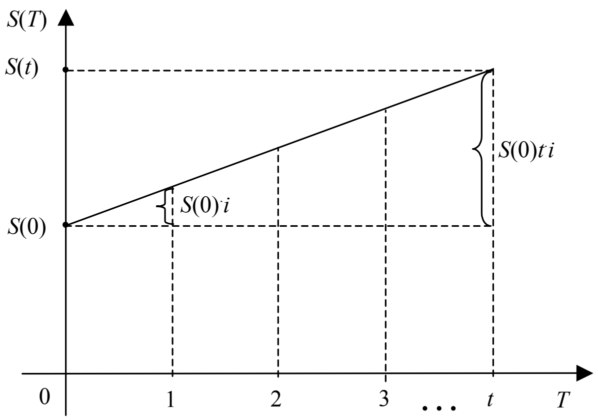

Рисунок 2.1

Обычно к наращению по простым процентам прибегают при выдаче краткосрочных ссуд (на срок до одного года) или в случаях, когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются кредитору, а также при сберегательных вкладах с ежемесячной выплатой процентов и т.д.

При краткосрочных кредитных операциях срок τ инвестирования удобно измерять в днях, а продолжительность года K принимать либо $360 = 12 \cdot 30$ дням, либо фактическому числу дней в году. В первом случае простые проценты называют **обыкновенными**, во втором – **точными.** Теперь формулу (2.1) можно записать в виде

$$S(\tau) = S(0)\left(1 + i\frac{\tau}{K}\right),$$

где K = 360, 365 или 366 дней.

При подсчёте числа дней срока инвестирования τ также возможны два варианта. Первый вариант: подсчитывается точное число дней срока долга. При этом день выдачи и день возврата ссуды считают за один день. Во втором варианте подсчитывается точное число месяцев в сроке ссуды и добавляют число оставшихся дней. При этом длительность каждого полного месяца полагают равной 30 дням. Таким образом, всего имеется четыре схемы расчёта простых процентов, которые представлены в таблице (2.1).

Таблица 2.1

Способ определения числа дней τ в сроке долга	Временная база применения процентной ставки K	
	число дней в году	
	точное 365 (366)	условное 360 (12 месяцев по 30 дней)
Точный – порядковый номер последнего дня срока минус порядковый номер 1-го дня срока долга τ	**Точные проценты** $S(\tau) = S(0)\left(1 + \frac{i\tau}{365}\right)$ или $S(\tau) = S(0)\left(1 + \frac{i\tau}{366}\right)$	**Обыкновенные (банковские) проценты** с точным числом дней τ $S(\tau) = S(0)\left(1 + \frac{i\tau}{360}\right)$
Приближённый – число дней в полных месяцах по 30 дней плюс число дней неполных месяцев в сроке долга $\tau_{пр}$	Не используется	**Обыкновенные (банковские) проценты** с приближённым числом дней $\tau_{пр}$ $S(\tau) = S(0)\left(1 + \frac{i\tau_{пр}}{360}\right)$

Пример 2.1 Банк выдал администрации города ссуду в размере 4,0 млн руб. сроком на 2 года по ставке простых процентов, равной 25 % годовых. Определить доход банка и наращенную сумму долга к концу срока ссуды.

По условию $S(0)$ = 4,0 млн руб.; $i = 0{,}25$; t = 2 года.

Наращенная сумма долга по (2.1)

$$S(2) = 4{,}0(1 + 2 \cdot 0{,}25) = 6{,}0 \text{ млн руб.}$$

Доход банка

$$I(2) = 6{,}0 - 4{,}0 = 2{,}0 \text{ млн руб.}$$

Пример 2.2 Банк выдал кредит 18 января в размере 500,0 тыс. руб. Срок возврата кредита – 3-е марта. Процентная ставка установлена 20 % годовых. Год невисокосный.

Наращенную сумму долга, подлежащую возврату, рассчитаем тремя способами, но сначала определим число дней ссуды.

Точное число дней ссуды:

С 18.01. по 31.01 – 14.
Февраль – 28.
Март – 3.

Итого – 45 дней,
$\tau = 45 - 1 = 44$ дня.

Приближённое число дней ссуды:
Январь – 13.
Февраль – 30.
Март – 3.
Итого – 46 дней.
$\tau_{пр} = 46 - 1 = 45$ дней.

Возможные варианты расчёта наращенной суммы:

1) точные проценты, точное число дней ссуды,

$$S(\tau) = 500(1 + \frac{44}{365} \cdot 0{,}2) = 512{,}05 \text{ тыс. руб.};$$

2) обыкновенные проценты, точное число дней ссуды,

$$S(\tau) = 500(1 + \frac{44}{360} \cdot 0{,}2) = 512{,}22 \text{ тыс. руб.};$$

3) обыкновенные проценты, приближённое число дней ссуды,

$$S(\tau) = 500(1 + \frac{45}{360} \cdot 0{,}2) = 512{,}5 \text{ тыс. руб.}$$

Из примера ясно, что кредиторам предпочтительнее третий вариант начисления процентов.

2.2 Переменные ставки простых процентов

Финансовое соглашение может предусматривать не только постоянную процентную ставку на весь период, но и устанавливать изменяющуюся во времени (переменную) ставку. Например, наличие инфляции вынуждает периодически изменять процентную ставку. В частности в соглашении может быть оговорена так называемая **плавающая процентная ставка**, когда фиксируется не сама ставка, а

изменяющаяся во времени её база и **маржа** – величина надбавки к базе. Величина маржи в течение срока сделки может быть постоянной и переменной.

Пусть за период договора $(0, t)$ изменения годовой ставки происходили $m - 1$ раз в моменты

$$t_1 < t_2 < ... < t_{m-2} < t_{m-1},$$

и значения процентных ставок на интервалах времени $(t_0 = 0, t_1), (t_1, t_2), ..., (t_{m-1}, t_m = t)$ соответственно равны $i_0, i_1, \ldots, i_{m-1}$ (рисунок 2.2).

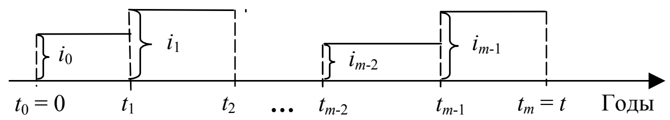

Рисунок 2.2

Если начальная сумма $S(0)$ помещена под простые проценты при указанных выше переменных годовых ставках, то при отсутствии промежуточных операций наращенная сумма долга

$$S(t) = S(0)\left[1 + \sum_{k=0}^{m-1}(t_{k+1} - t_k)i_k\right]. \tag{2.2}$$

Пример 2.3 Банк предлагает вкладчикам следующие условия по срочному годовому депозиту: первое полугодие процентная ставка – 20 % годовых, каждый следующий квартал ставка возрастает на 2,5 % (проценты простые). Определить наращенную за год сумму вклада, если вкладчик поместил в банк 400,0 тыс. руб.

По формуле (2.2) получим:

$$S(1) = 400(1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}25 \cdot 0{,}225 + 0{,}25 \cdot 0{,}25) = 487{,}5 \text{ тыс. руб.}$$

2.3 Реинвестирование под простые проценты

На практике иногда прибегают к начислению процентов на уже наращенные в предыдущем периоде суммы, т.е. наращенная к определённому моменту сумма вкладывается вновь под новый простой процент. Эта операция называется **реинвестированием,** или **капитализацией** процентного дохода.

Если условия договора соответствуют рисунку 2.2, то при начальной сумме $S(0)$ наращенная на интервале $(0, t)$ сумма составит

$$S(t) = S(0)\prod_{k=0}^{m-1}\left[1 + (t_{k+1} - t_k)i_k\right].$$

Пример 2.4 Клиент поместил в банке 500,0 тыс. руб. Какова будет наращенная за 3 месяца сумма вклада, если за первый месяц начисляются простые проценты в размере 20 % годовых, а каждый последующий месяц процентная ставка возрастает на 5 % с одновременной капитализацией процентного дохода?

$$S(t) = 500\left(1 + \frac{30}{360}\cdot 0{,}2\right)\left(1 + \frac{30}{360}\cdot 0{,}25\right)\left(1 + \frac{30}{360}\cdot 0{,}3\right) = 531{,}89 \text{ тыс. руб.}$$

2.4 Дисконтирование по простым процентам

Мы уже упоминали в первой главе о том, что при заключении финансовых соглашений часто приходится решать задачу, обратную вычислению наращенной суммы: по заданной величине погашаемого долга $S(t)$ требуется определить величину долга на любой более ранний момент времени.

В таких случаях прибегают к операции дисконтирования или учёта заданной величины погашаемого долга.

В зависимости от вида используемой процентной ставки и базы для её начисления различают два вида дисконтирования (учёта): математическое и банковское.

Математическое дисконтирование позволяет определить, какую первоначальную сумму $S(0)$ необходимо инвестировать в момент 0 по простой процентной ставке i, чтобы через время t получить сумму $S(t)$. Ответ на этот вопрос получим, если решим уравнение (2.1) относительно величины $S(0)$:

$$S(0) = \frac{S(t)}{1 + it} = S(t)(1 + it)^{-1}. \qquad (2.3)$$

Величина $S(0)$ называется **современным, приведённым** или **текущим значением** будущей суммы $S(t)$.

Величина $(1 + it)^{-1}$ называется **дисконтным** или **учетным множителем**.

Разность $S(t) - S(0)$ называют **дисконтом** суммы $S(t)$ и обозначают $D(t)$.

Банковское дисконтирование (учёт) представляет собой решение той же задачи, которую решали с помощью математического учёта, но в этом случае применяется учётная ставка d и базой для её начисления является величина $S(t)$.

Если d – годовая учётная ставка, то величина дисконта каждый год принимает значение $D(1) = S(t)d$. То есть за год до выплаты суммы $S(t)$ необходимо инвестировать сумму

$$S(t-1) = S(t) - D(1) = S(t) - S(t)d = S(t)(1-d),$$

за два года – сумму

$$S(t-2) = S(t) - S(t)d - S(t)d = S(t)(1-2d) \text{ и т.д.}$$

Таким образом, величина суммы, которую необходимо инвестировать за t лет до окончания срока инвестирования для того, чтобы в конце срока вклада получить сумму $S(t)$, находится по формуле

$$S(0) = S(t)(1 - td). \qquad (2.4)$$

Величина $(1 - td)$ является дисконтным множителем. Величина дисконта $D(t) = S(t) - S(0) = S(t) - S(t)(1 - td) = S(t)td$.

Мы видим, что два вида ставок применяются для решения сходных задач. Так мы можем выполнить операции наращения первоначального долга $S(0)$ и дисконтирования суммы $S(t)$ в зависимости от заданной ставки по одной из формул:

$$S(t) = S(0)(1 + it); \qquad (2.5а)$$

$$S(t) = S(0)(1 - td)^{-1}; \qquad (2.5б)$$

$$S(0) = S(t)(1 + it)^{-1}; \qquad (2.6а)$$

$$S(0) = S(t)(1 - td). \qquad (2.6б)$$

Выбор конкретного вида процентной ставки (i или d) заметно влияет на финансовые итоги как операции наращения, так и операции дисконтирования. Для иллюстрации сказанного приведём на рисунке 2.3 и рисунке 2.4 графики множителей наращения (МН) и дисконтных множителей (ДМ) при $i = d$.

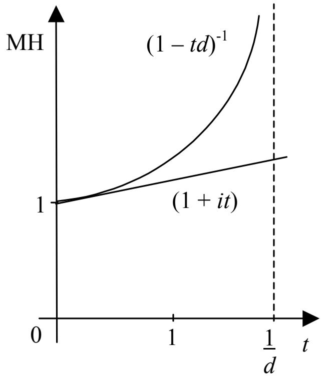

Рисунок 2.3

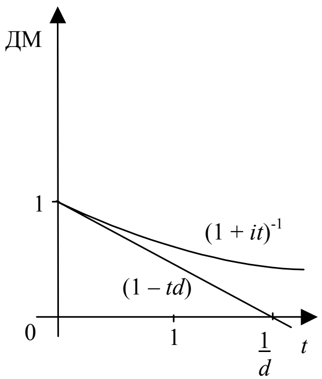

Рисунок 2.4

Анализируя графики, приходим к выводу, что для инвестора предпочтительнее использовать учётную ставку и для операции наращения и для операции дисконтирования, но при этом надо быть очень внимательным: обратите внимание на момент времени $1/d$ на рисунке 2.3 и рисунке 2.4.

Если приходится пересматривать финансовые соглашения, то иногда возникает необходимость в некоторый промежуточный момент t_1 срока договора найти наращенную или дисконтированную сумму (рисунок 2.5).

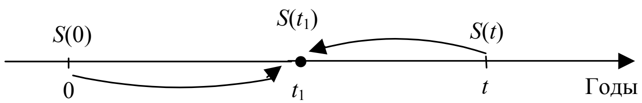

Рисунок 2.5

В этом случае в момент t_1 наращенная сумма первоначального долга $S(0)$ составит:

$$S(t_1) = S(0)(1 + it_1)\,; \tag{2.7а}$$

$$S(t_1) = S(0)(1 - dt_1)^{-1}\,, \tag{2.7б}$$

а современная стоимость суммы $S(t)$ в момент t_1

$$S(t_1) = S(t)(1 + i(t - t_1))^{-1}\,; \tag{2.8а}$$

$$S(t_1) = S(t)(1 - d(t - t_1))\,. \tag{2.8б}$$

Пример 2.5 Через один год владелец векселя, выданного коммерческим банком, должен получить по нему 220000 д.е. Какая сумма была внесена в банк в момент приобретения векселя, если доходность векселя должна составлять 10 % годовых?

По формуле (2.3) найдём стоимость векселя в момент $t = 0$.

$$S(0) = \frac{220}{1 + 0{,}1 \cdot 1} = 200 \text{ тыс. д.е.}$$

Пример 2.6 Владелец векселя номинальной стоимостью 220 тыс. д.е. и сроком обращения 1 год учёл его в банке за 90 дней до даты погашения. Процентная ставка – 12 % годовых. Определить сумму, полученную владельцем векселя, и доход банка.

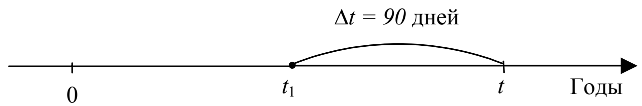

Рисунок 2.6

$S(t_1) = \dfrac{220}{1 + \dfrac{90}{360} \cdot 0{,}12} = 213{,}39$ тыс. руб. – это сумма, полученная владельцем векселя.

Доход банка составил

$$D = 220 - 213{,}39 = 6{,}41 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 2.7 Вексель номинальной стоимостью 500 тыс. руб. был учтён в банке за 90 дней до срока погашения по годовой учетной ставке 16 %. Определить стоимость векселя в момент t_1 (см. Рисунок 2.6).

$$S(t_1) = 500(1 - \frac{90}{360} \cdot 0{,}16) = 480{,}0 \text{ тыс. руб.}$$

Дисконт составил 500,0 – 480,0 = 20 тыс. руб.

Если в этом примере выполнить дисконтирование по процентной ставке $i = 16$ %, то

$$S(t_1) = \frac{500}{1 + 0{,}16 \cdot \frac{90}{360}} = 480{,}77 \text{ тыс. руб.}$$

а дисконт

$$D(t_1) = 500{,}0 - 480{,}77 = 19{,}23 \text{ тыс. руб.}$$

Как видно, использование учётной ставки и процентной ставки даёт разные результаты.

Пример 2.8 Фирма планирует получение кредита в сумме 1,0 млн руб. Банк предоставляет кредит под 20 % годовых. На какой срок фирма может взять кредит с тем, чтобы подлежащая возврату сумма не превысила 1,4 млн руб.?

По условию $S(0)$ = 1,0 млн руб., $S(t)$ = 1,4 млн руб., i = 0,20. Требуется найти t.

Из формулы (2.1) находим

$$t = \frac{S(t) - S(0)}{S(0)i} = \frac{1{,}4 - 1}{1 \cdot 0{,}2} = \frac{0{,}4}{0{,}2} = 2 \text{ года.}$$

Пример 2.9 Фирма получила ссуду в банке в размере 800 тыс. руб. сроком на полгода. Сумма погашения составляет 900 тыс. руб. Найти процентную ставку, применённую банком.

По условию $S(0)$ = 800,0 тыс. руб., $S(t)$ = 900,0 тыс. руб., t = 0,5 года.

Из (2.1) следует

$$i = \frac{S(t) - S(0)}{S(0)t} = \frac{900{,}0 - 800{,}0}{800{,}0 \cdot 0{,}5} = \frac{100}{400} = 0{,}25 \text{ (25 \%).}$$

Пример 2.10 Фирме необходим кредит в сумме 500,0 тыс. руб. Банк согласен на выдачу кредита при условии, что он будет возвращён через 270 дней в размере 600 тыс. руб. При расчёте использовалась учётная ставка. Определить её уровень.

По условию $S(0)$ = 500,0 тыс. руб., $S(t)$ = 600,0 тыс. руб., $t = \frac{270}{360}$ года.

Из формулы (2.4) найдём

$$d = \frac{S(t) - S(0)}{tS(t)} = \frac{600{,}0 - 500{,}0}{\frac{270}{360} \cdot 600} = 0{,}22 \text{ (22 \%).}$$

3 СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

3.1 Наращение по сложной процентной ставке

В финансовой практике часто используются сложные проценты. Основное отличие сложных процентов от простых заключается в том, что база для начисления процентов меняется от одного расчётного периода к другому. Сумма начисленных в каждом периоде процентов добавляется к капиталу предыдущего периода, а начисление процентов в последующем периоде производится на наращенную величину первоначального капитала. Присоединение начисленных процентов к их базовой сумме называется **капитализацией процентов.**

Установим формулу наращения при условии, что проценты капитализируются один раз в году. Пусть $S(0)$ – начальная сумма капитала, i – годовая процентная ставка, t – число лет наращения, при этом никаких промежуточных платежей не производится. Тогда в конце первого года проценты равны $S(0)i$, а наращенная сумма составит:

$$S(1) = S(0) + S(0)i = S(0)(1 + i) .$$

К концу второго года наращенная сумма будет:

$$S(2) = S(0)(1 + i) + S(0)(1 + i)i = S(0)(1 + i)(1 + i) \text{, т.е.}$$

$$S(2) = S(0)(1 + i)^2 \text{ и т.д.}$$

В конце года t наращенная сумма составит:

$$S(t) = S(0)(1 + i)^t . \tag{3.1}$$

Величину

$$\frac{S(t)}{S(0)} = (1 + i)^t \tag{3.2}$$

называют **коэффициентом наращения**. Этот коэффициент равен наращенному значению для 1 д.е. в момент t, если она была инвестирована в момент 0.

Как и в случае начисления простых процентов финансовое соглашение может предусматривать переменные процентные ставки и при наращении по сложным процентам.

Пусть в моменты $t_0, t_1, ..., t_{m-1}$ устанавливаются процентные ставки $i_0, i_1, ..., i_{m-1}$ (рисунок 3.1).

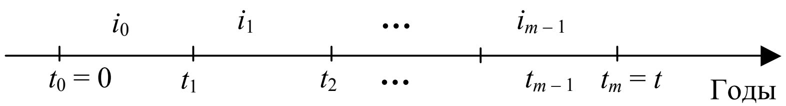

Рисунок 3.1

Тогда при использовании схемы сложных процентов, наращенная сумма за время $t_m - t_0$ определяется по формуле

$$S(t) = S(0)\prod_{k=0}^{m-1}(1 + i_k)^{t_{k+1} - t_k}. \tag{3.3}$$

В формуле (3.3) $t_{k+1} - t_k$, $k = 0, 1, \ldots, m - 1$ измеряется в годах, если ставки i_k – годовые. Однако формулы (3.1) и (3.3) можно применять и при других периодах начисления. Необходимо только следить за соответствием длины периода и процентной ставки.

Пример 3.1 Вкладчик внёс в банк 5000 д.е. под 12 % годовых (проценты сложные). Определить наращенную через 2 года сумму.

По формуле (3.1) получим

$$S(2) = 5000(1 + 0{,}12)^2 = 5000 \cdot 1{,}2544 = 6272 \text{ у.е.}$$

Пример 3.2 Администрация города получила кредит в банке на сумму 6,0 млн д.е. сроком на 5 лет. Процентная ставка по кредиту определена в 10,5 % для 1-го года, для 2-го года предусматривается надбавка к процентной ставке в размере 1,5 %, для 3-года и последующих лет – в размере 0,75 %. Определить сумму долга по истечении 5 лет.

По формуле (3.3)

$$S(5) = 6{,}0(1 + 0{,}105)^1(1 + 0{,}12)(1 + 0{,}1275)^3 = 10{,}643 \text{ млн д.е.}$$

3.2 Сравнение результатов наращения по простым и сложным процентам

При проведении финансовых операций чрезвычайно важно знать, как соотносятся величины наращенных сумм при начислении по схеме простых процентов и по схеме сложных процентов.

Всё зависит от величины t. Сравним множители наращения по простым и сложным процентам

$$(1 + it) \text{ и } (1 + i)^t.$$

Очевидно, что при $t = 1$ эти множители совпадают и равны $1 + i$. Можно доказать, что при любом i справедливы неравенства:

$$1 + it > (1 + i)^t, \ 0 < t < 1;$$

$$1 + it < (1 + i)^t, \ t > 1.$$

Таким образом, в случае ежегодного начисления процентов для кредитора:

1) более выгодной является схема простых процентов, если срок ссуды меньше одного года;

2) более выгодной является схема сложных процентов, если срок ссуды превышает один год;

3) обе схемы дают одинаковые результаты, если срок ссуды равен одному году.

Графически $S^{\text{пр}}(t) = S(0)(1 + it)$ и $S^{\text{сл}}(t) = S(0)(1 + i)^t$ можно представить следующим образом (рисунок 3.2).

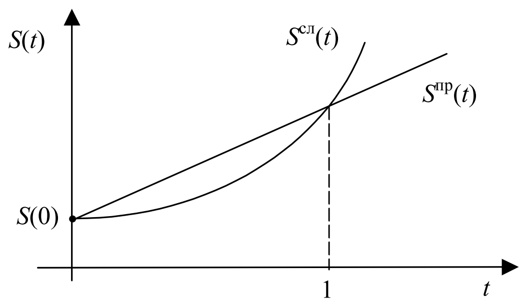

Рисунок 3.2

Пример 3.3 Рассчитать наращенную сумму с исходной суммы в 1,0 д.е. при размещении её в банке на условиях начисления простых и сложных процентов, если:

а) годовая ставка i = 20 %;

б) периоды наращения 30 дней, 90 дней, 1 год, 5 лет, 10 лет, 100 лет.

Вычислим требуемые суммы, пользуясь формулами (2.1) и (3.1). Результаты расчётов, выраженные в д.е., сведём в таблицу (3.1).

$$S^{\text{пр}}(t=1/12)=1\left(1+0{,}2\cdot\frac{1}{12}\right)=1{,}0167 \text{ д.е.};$$

$$S^{\text{сл}}(t=1/12)=1(1+0{,}2)^{1/12}=1{,}0153 \text{ д.е.}$$

Таблица 3.1

Схема начисления	Срок кредита					
	30 дней t = 1/12	90 дней t = 1/4	1 год t = 1	5 лет t = 5	10 лет t = 10	100 лет t = 100
Простые проценты	1,0167	1,05	1,20	2,0	3,0	21
Сложные проценты	1,0153	1,0466	1,20	2,4889	6,1917	82817909

Анализируя результаты расчётов, мы видим, что если i = 20 % годовых, то при использовании простых процентов за 5 лет происходит удвоение исходной суммы, а при использовании сложных процентов исходная сумма за 5 лет увеличивается почти в 2,5 раза.

Найдём в общем виде время t, необходимое для увеличения первоначальной суммы $S(0)$ в N раз, при начислении простых и сложных процентов.

Очевидно для простых процентов

$$S(t)=S(0)N\ ;\ S(t)=S(0)(1+it)\ ;\ S(0)N=S(0)(1+it)\ .$$

Отсюда

$$t=\frac{N-1}{i}. \tag{3.4}$$

Для сложных процентов

$$S(t)=S(0)N\ ;\ S(t)=S(0)(1+i)^t\ ;\ S(0)N=S(0)(1+i)^t\ .$$

Отсюда

$$\ln N = t\ln(1+i)\ ,$$

$$t=\frac{\ln N}{\ln(1+i)}\ . \tag{3.5}$$

Полагая N = 2 в формулах (3.4) и (3.5), получим время, необходимое для удвоения первоначального капитала:

$$t=\frac{1}{i} \text{ (для простых процентов);}$$

$$t=\frac{\ln 2}{\ln(1+i)} \text{ (для сложных процентов).}$$

3.3 Произвольная длина интервала наращения

Формула (3.1) была получена при предположении, что срок кредитной операции t выражен в годах. Нередко финансовая сделка заключается на период, выраженный дробным числом. В таких случаях начисление процентов может выполняться двумя методами:

а) методом сложных процентов по формуле (3.1)

$$S(t)=S(0)(1+i)^{a+b}\ ; \tag{3.6}$$

б) смешанным методом

$$S(t)=S(0)(1+i)^a(1+bi)\ , \tag{3.7}$$

где $t=a+b$ – срок сделки;

a – целое число лет (целое число периодов);

b – дробная часть года (дробная часть периода).

При выборе метода следует иметь в виду, что множитель наращения по смешанному методу оказывается несколько больше, чем по формуле сложных процентов.

Пример 3.4 Клиент внёс в банк 2,5 тыс. руб. под 9,5 % годовых (проценты сложные). Через два года и 270 дней он изъял вклад. Определить полученную клиентом сумму.

По методу сложных процентов (формула (3.6)):

$$S(t) = 2{,}5(1+0{,}095)^{2+\frac{270}{365}} = 3{,}2057 \text{ тыс. руб.}$$

По смешанному методу (3.7):

$$S(t) = 2{,}5(1+0{,}095)^2\left(1+\frac{270}{365}\cdot 0{,}095\right) = 3{,}2082 \text{ тыс. руб.}$$

3.4 Наращение процентов *m* раз в году

В контрактах на получение кредитов, в депозитных договорах условиями часто предусматривается капитализация процентов несколько раз в году – по полугодиям, кварталам, ежемесячно и даже ежедневно. В таких случаях для расчёта наращенной суммы можно использовать формулу наращения (3.1), в которой величина t будет означать общее число периодов капитализации процентов, а ставка i – процентную ставку за соответствующий период. Например, если кредит выдан на 2 года с поквартальным начислением процентов по ставке (квартальной) $i = 5$ %, то множитель наращения будет равен $(1+0{,}05)^{4\cdot 2} = 1{,}4775$.

Однако в финансовых соглашениях, как правило, указывается годовая процентная ставка и одновременно вычисляется количество периодов начисления. С этих позиций преобразуем формулу (3.1).

Итак, пусть заданы m – количество начислений в году и годовая процентная ставка, которую обозначим i_m (при помощи индекса m указываем, сколько раз в течение года происходит наращение). В этом случае длительность периода капитализации процентов равна $\frac{1}{m}$ года.

Годовая процентная ставка i_m называется **номинальной**, а сложные проценты начисляются по процентной ставке i_m/m за период $1/m$. В этих обозначениях формула (3.1) примет вид

$$S(t) = S(0)\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{tm}. \tag{3.8}$$

Для упрощения записи в дальнейшем индекс m у номинальной

процентной ставки будем опускать и писать просто i, помня о том, что проценты начисляются m раз в году.

Пример 3.5 На первоначальный капитал 1,0 д.е. начисляются проценты по сложной годовой процентной ставке $i = 12$ %. Найти наращенную сумму при начислении процентов: а) 1 раз в году; б) 4 раза в году; в) 12 раз в году.

Применяя формулу (3.8), получим:

а) $S(1) = 1{,}0(1+0{,}12)^1 = 1{,}12$ д.е.;

б) $S(1) = 1{,}0\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{1\cdot 4} = 1{,}1255$ д.е.;

в) $S(1) = 1{,}0\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{1\cdot 12} = 1{,}1268$ д.е.

Анализируя результаты рассмотренного примера, можно сделать практические выводы:

1) при начислении сложных процентов 12 % годовых не эквивалентны 1 % в месяц;

2) чем чаще будет начисление по схеме сложных процентов, тем больше наращенная сумма.

Для простых процентов такие выводы не имеют место. В формуле (2.1) уменьшим период начисления в m раз, тогда процентная ставка – i/m:

$$S(t) = S(0)\left(1+\frac{i}{m}tm\right) = S(0)(1+it),$$

т.е. наращение простыми процентами ежегодно по ставке 12 % годовых даёт тот же результат, что и, например, ежемесячное начисление по ставке 1 % в месяц.

Из (3.8) можно получить формулы: для вычисления срока t кредитной операции и номинальной процентной ставки i_m:

$$t = \frac{\ln\frac{S(t)}{S(0)}}{m\ln\left(1+\frac{i_m}{m}\right)}; \tag{3.9}$$

$$i_m = m\left(\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)^{\frac{1}{mt}} - 1\right). \qquad (3.10)$$

Пример 3.6 На сумму 600,00 д.е. ежеквартально по ставке 12 % годовых начисляются сложные проценты в течение 14 месяцев. Определить величину наращенной суммы.

Общее число периодов начисления процентов $14/3 = 4{,}667$, т.е. срок контракта содержит 4 полных периода начисления процентов и 0,667 – дробную часть одного периода начисления процентов.

По формуле (3.6) получим

$$S(t) = 600\left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^{4{,}667} = 688{,}75 \text{ д.е.}$$

По формуле (3.7) наращенная сумма

$$S(t) = 600\left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^{4}\left(1 + 0{,}667\cdot\frac{0{,}12}{4}\right) = 688{,}81 \text{ д.е.}$$

3.5 Эффективная годовая процентная ставка

Различными видами финансовых контрактов могут предусматриваться различные схемы начисления процентов. Для сравнения доходов от использования той или иной схемы начисления процентов применяется **эффективная процентная ставка**, начисление сложных процентов за год по которой даёт то же соотношение между $S(0)$ и $S(t)$, что и при любой другой схеме начисления процентов.

Обозначим эффективную ставку через $i_{эф}$. Следовательно, при начальном капитале $S(0)$ и $t = 1$ год:

$$S(0)(1 + i_{эф}) = S(0)\left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^{1\cdot m}. \qquad (3.11)$$

Отсюда

$$i_{эф} = \left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^{m} - 1. \qquad (3.12)$$

Если в контракте указаны эффективная годовая процентная ставка $i_{эф}$ и число начислений m сложных процентов, то из (3.11) можно найти номинальную ставку:

$$i_m = m\left((1 + i_{эф})^{\frac{1}{m}} - 1\right). \qquad (3.13)$$

Две номинальные годовые ставки называются **эквивалентами**, если соответствующие им годовые эффективные ставки совпадают:

$$1 + i_{эф} = \left(1 + \frac{i_{m1}}{m1}\right)^{m1} = \left(1 + \frac{i_{m2}}{m2}\right)^{m2}. \qquad (3.14)$$

В общем случае, когда условия начисления процентов меняются (например, изменяется процентная ставка в течение срока t контракта, используются схемы начисления по сложным и по простым процентам за время t и т.д.), найти эффективную ставку можно следующим образом. Если $S(0)$ первоначальная сумма, $S(t)$ – наращенная (каким либо образом) сумма за время t, то

$$S(t) = S(0)(1 + i_{эф})^{t}$$

и поэтому

$$i_{эф} = \left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)^{\frac{1}{t}} - 1. \qquad (3.15)$$

Пример 3.7 Предприниматель может получить ссуду:

а) либо на условиях ежемесячного начисления процентов из расчёта 26 % годовых;

б) либо на условиях полугодового начисления процентов из расчёта 27 % годовых. Какой процент более предпочтителен?

По формуле (3.12):

$$\text{а) } i_{эф} = \left(1 + \frac{0{,}26}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}2933;$$

$$б)\ i_{эф} = \left(1 + \frac{0{,}27}{2}\right)^2 - 1 = 0{,}2882.$$

Таким образом, вариант б более предпочтительный для предпринимателя.

Пример 3.8 Определить номинальную ставку, если эффективная ставка равна 18 % и сложные проценты начисляются ежемесячно.

По (3.13) получим

$$i_{12} = 12\left((1 + 0{,}18)^{1/12} - 1\right) = 0{,}1667.$$

То есть ежегодное начисление сложных процентов по ставке 18 % годовых дают тот же результат, что и ежемесячное начисление сложных процентов по ставке 16,67 %.

Пример 3.9 В долг на два с половиной года предоставлена сумма в 30 д.е. с условием возврата 40 д.е. Найти эффективную ставку в этой сделке.

По формуле (3.15)

$$i_{эф} = \left(\frac{40}{30}\right)^{\frac{1}{2,5}} - 1 = 0{,}12196\ \ (12{,}2\ \%).$$

3.6 Дисконтирование по сложной процентной ставке

Если по заданной величине погашаемого долга требуется определить величину долга на любой более ранний момент времени, чем время погашения долга, то прибегают, как мы уже знаем, к операции дисконтирования или учёта.

При дисконтировании сложными процентами, как и при дисконтировании простыми процентами, в зависимости от вида используемых процентных ставок (i или d) и базы их начисления различают два вида дисконтирования (учета): математическое и банковское.

Математический учет представляет собой определение первоначальной суммы $S(0)$, которую необходимо дать в долг, чтобы при начислении на эту сумму сложных процентов по процентной ставке i получить сумму $S(t)$. Из формулы (3.1)

$$S(0) = S(t)/(1+i)^t = S(t)(1+i)^{-t} = S(t)v^t. \qquad (3.16)$$

Величина $v^t = (1+i)^{-t}$ называется **дисконтным,** или **учётным множителем.** Величина дисконта за предоставление денег в долг в этом случае определяется из выражения

$$D(t) = S(t) - S(0) = S(t)(1 - v^t). \qquad (3.17)$$

При начислении сложных процентов m раз в году в течение t лет по номинальной процентной ставке i_m современная величина суммы $S(t)$ вычисляется:

$$S(0) = \frac{S(t)}{\left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^{mt}} = S(t)\left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^{-mt} = S(t)v^{mt}. \qquad (3.18)$$

Величина $S(t)$, дисконтируемая на момент t_1, $0 < t_1 < t$, вычисляется по формуле

$$S(t_1) = S(t)(1+i)^{-(t-t_1)}. \qquad (3.19)$$

Банковский учёт представляет собой решение той же задачи, которая решена с помощью математического учёта. Однако при банковском учёте используется сложная учётная ставка d:

$$S(0) = S(t)(1-d)^t; \qquad (3.20)$$

$$S(t_1) = S(t)(1-d)^{t-t_1},\ 0 < t_1 < t. \qquad (3.20а)$$

При этом величина дисконта за предоставление денег в долг определяется по формуле

$$D(t) = S(t) - S(0) = S(t)\left(1 - (1-d)^t\right).$$

Если дисконтирование суммы долга производится m раз в году по **номинальной учётной ставке d_m**, то можно доказать, что

$$S(0) = S(t)\left(1 - \frac{d_m}{m}\right)^{mt}. \qquad (3.21)$$

Эквивалентный финансовый результат даёт **эффективная учётная ставка $d_{эф}$**, величина которой находится из равенства финансовых результатов, вычисленных по формулам (3.20) и (3.21):

$$S(t)(1-d)^t = S(t)\left(1-\frac{d_m}{m}\right)^{mt}.$$

Отсюда

$$d = \left(1-\left(1-\frac{d_m}{m}\right)^m\right) = d_{эф}. \qquad (3.22)$$

Формулы (3.16) и (3.18), а также (3.20) и (3.21) связывают между собой современные $S(0)$ и будущие $S(t)$ значения денег. Если не учитывать инфляцию и другие факторы риска, то эти суммы в определённом смысле эквивалентны: платёж суммы $S(0)$ сегодня при фиксированной процентной ставке равноценен платежу суммы $S(t)$ через t лет.

Если срок t, за который осуществляется дисконтирование, не является целым числом, то возможны следующие методы определения стоимости учтённого за t лет капитала:

$$1)\ S(0) = S(t)(1-d)^{a+b}; \qquad (3.23)$$

$$2)\ S(0) = S(t)(1-d)^a(1-db), \qquad (3.24)$$

где $t = a+b$, a – целое число лет; b – дробная часть года.

Сравним между собой дисконтирование по простой и по сложной учётной ставке, полагая, что обе учётные ставки имеют одно и то же значение d. Сравним множители дисконтирования $(1-dt)$ и $(1-d)^t$.

Можно доказать (при $d < \frac{1}{t}$):

$1 - td = (1-d)^t$, если $t = 1$;

$1 - td > (1-d)^t$, если $0 < t < 1$;

$1 - td < (1-d)^t$, если $t > 1$.

Соотношения $S^{сл}(0) = S(t)(1-d)^t$ и $S^{пр}(0) = S(t)(1-td)$ графически выглядят, как показано на рисунке 3.3.

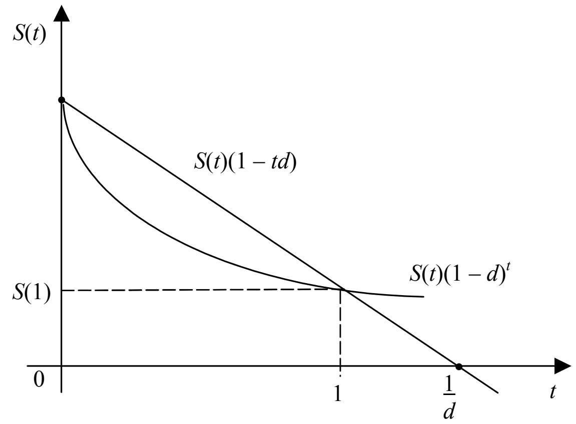

Рисунок 3.3

Пример 3.10 Долговое обязательство на выплату 20 д.е. со сроком погашения через четыре года учтено за два года до срока с дисконтом по сложной учётной ставке 8 % (годовой). Найти величину дисконта.

По условию нас интересует величина $S(2)$ (рисунок 3.4).

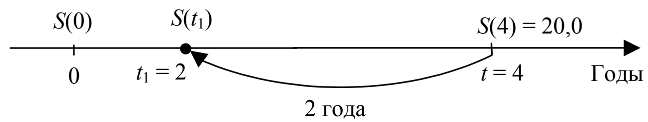

Рисунок 3.4

Пользуясь формулой (3.20 а), получим:

$$S(t_1) = 20{,}0(1-0{,}08)^{4-2} = 16{,}928 \text{ д.е.}$$

$$D = 20 - 16{,}928 = 3{,}072 \text{ д.е.}$$

Пример 3.11 Долговое обязательство на выплату 20 д.е. со сроком погашения через 4 года учтено за 27 месяцев до срока с дисконтом по сложной учётной ставке 8 % годовых (рисунок 3.5).

Найти величину дисконта.

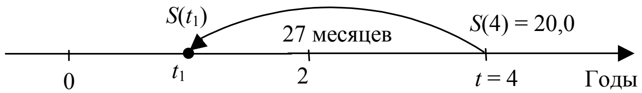

Рисунок 3.5

По условию (t_1, t) = 27 месяцев = $2\frac{1}{4}$ года.

По формуле (3.23) получим:

$$S(t_1) = 20,0(1-0,08)^{2,25} = 16,579 \text{ д.е.}$$

$$D = 20 - 16,579 = 3,421 \text{ д.е.}$$

По формуле (3.24):

$$S(t_1) = 20,0(1-0,08)^2(1-0,25\cdot 0,08) = 16,589 \text{ д.е.}$$

$$D = 20 - 16,589 = 3,411 \text{ д.е.}$$

Пример 3.12 Долговое обязательство на выплату 3,0 д.е. со сроком погашения через пять лет учтено за два года до срока (рисунок 3.6). Определить полученную сумму, если производилось:

а) полугодовое; б) поквартальное дисконтирование по номинальной учётной ставке 12 %.

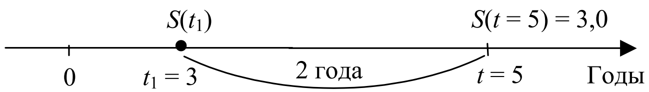

Рисунок 3.6

а) Так как $m = 2$, $t - t_1 = 2$ года, $d_m = 0,12$, $S(t = 5) = 3,0$ д.е., то по формуле (3.21) получим:

$$S(t_1) = 3,0\left(1-\frac{0,12}{2}\right)^{2\cdot 2} = 2,342 \text{ д.е.}$$

б) Так как $m = 4$, $t - t_1 = 2$ года, $d_m = 0,12$, $S(t = 5) = 3,0$ д.е., то по формуле (3.21):

$$S(t_1) = 3,0\left(1-\frac{0,12}{4}\right)^{2\cdot 4} = 2,351 \text{ д.е.}$$

Пример 3.13 За долговое обязательство в 300 д.е. банком было выплачено 200 д.е. (рисунок 3.7). За какое время до срока погашения было учтено это обязательство, если банком использовалась годовая сложная учётная ставка 8 %?

По условию

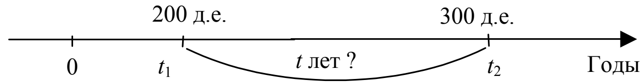

Рисунок 3.7

Нам требуется найти величину t из формулы (3.20 а)

$$\frac{S(t_1)}{S(t_2)} = (1-d)^t \;\Rightarrow\; t = \frac{\ln\big(S(t_1)/S(t_2)\big)}{\ln(1-d)}.$$

Следовательно,

$$t = \frac{\ln(200/300)}{\ln(1-0,08)} = 4,863 \text{ года.}$$

3.7 Наращение по учётной ставке

Мы уже отмечали, что при заданных величинах суммы первоначального долга $S(0)$, продолжительности срока пользования долгом t и учётной ставки d можно определить величину суммы долга $S(t)$.

Если начисление сложных процентов осуществляют один раз в году, то решая уравнение (3.20) относительно $S(t)$, получим

$$S(t) = \frac{S(0)}{(1-d)^t} = S(0)(1-d)^{-t}. \tag{3.25}$$

Формула (3.25) – это формула наращенной суммы при начислении сложных процентов по учётной ставке d.

Если начисление сложных процентов осуществляется m раз в году, то разрешая (3.21) относительно $S(t)$, получим

$$S(t) = \frac{S(0)}{\left(1-\frac{d_m}{m}\right)^{mt}} = S(0)\left(1-\frac{d_m}{m}\right)^{-mt}. \tag{3.26}$$

Формула (3.26) – это формула наращенной суммы при начислении сложных процентов m раз в году по номинальной учётной ставке d_m.

Если допустить, что $i = d$, то наращение по учётной ставке (3.23) происходит быстрее (что выгодно для кредитора), чем наращение по процентной ставке (3.1) (что выгодно для заёмщика).

Графически это иллюстрирует рисунок 3.8.

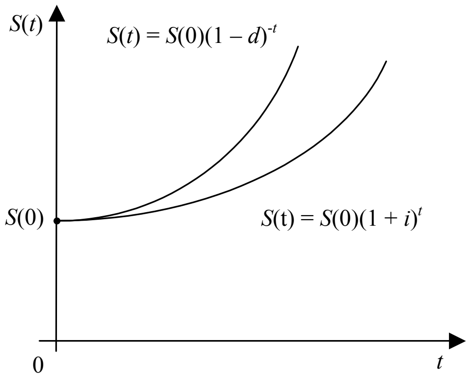

Рисунок 3.8

Пример 3.14 По условиям финансового контракта на депозит в 400 д.е., положенный в банк на 3 года, начисляются проценты по сложной учётной ставке 9 % годовых. Определить наращенную сумму, если начисление процентов производится:

а) ежегодно; б) по полугодиям.

По условию $S(0) = 400$ д.е., $t = 3$ года, $d = 0,09$.

Следовательно,

а) $S(t) = \dfrac{400}{(1-0{,}09)^3} = 530{,}8$ д.е.

б) $S(t) = \dfrac{400}{\left(1-\dfrac{0{,}09}{2}\right)^{2\cdot 3}} = 527{,}28$ д.е.

4 НЕПРЕРЫВНОЕ НАРАЩЕНИЕ И ДИСКОНТИРОВАНИЕ

4.1 Модель непрерывного начисления процентов

В банковской практике – особенно при электронных методах производства и регистрации финансовых операций – проценты могут начисляться за 1 сутки или за несколько часов. Например, коммерческий банк, находящийся в Москве, может одолжить определённую сумму денег банку, находящемуся во Владивостоке, на 12 часов – с 20 часов сегодняшнего дня до 8 часов следующего дня по московскому времени. За счёт разницы во времени владивостокский банк может добавить эти деньги к своему фонду краткосрочных ссуд, а затем вернуть долг с определённым процентом (или долями процента) к началу работы московского банка. Очевидно, что в этом случае возникает задача начисления процентов за очень малые промежутки времени, т.е. речь идёт о непрерывном начислении процентов и их непрерывной капитализации.

При анализе инвестиций также возникает задача непрерывного начисления процентов, поскольку многие производственные и экономические процессы непрерывны по своей природе и такой же должна быть соответствующая им финансовая модель.

Непрерывное наращение процентов производится с помощью особого вида процентной ставки, именуемой силой роста. Обозначается **сила роста** через δ. Сила роста характеризует прирост суммы долга за бесконечно малый промежуток времени и может быть как постоянной, так и изменяющейся во времени величиной.

4.2 Постоянная сила роста

При дискретном начислении процентов m раз в году по номинальной ставке i_m наращенная сумма вычисляется по формуле

$$S(t) = S(0)\left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^{mt}.$$

Чем больше m, тем меньше временные промежутки между периодами начисления процентов (они стремятся к нулю). Если $m \to \infty$, то

$$S(t)=\lim_{m\to\infty}\left[S(0)\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{mt}\right]=S(0)\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{mt}\right].$$

В записанном выражении

$$\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m}\right]=e^{i_m},$$

следовательно,

$$S(t)=S(0)e^{i_m t}.$$

Величина $e^{i_m t}$ – множитель наращения при непрерывной капитализации процентов. Если использовать обозначение силы роста (ставку непрерывных процентов) δ, то получим

$$S(t)=S(0)e^{\delta t}. \tag{4.1}$$

Дискретные и непрерывные ставки функционально связаны друг с другом и из равенства множителей наращения следует:

$$(1+i)^t=e^{\delta t} \Rightarrow e^{\delta}=1+i,$$

значит

$$\delta=\ln(1+i), \tag{4.2}$$

$$i=e^{\delta}-1. \tag{4.3}$$

Пример 4.1 На первоначальный капитал в сумме 500 д.е. начисляются сложные проценты – 8 % годовых в течение 4 лет. Определить наращенную сумму, если начисление процентов производится непрерывно.

По формуле (4.2) находим

$$\delta=\ln(1+i)=\ln(1{,}08)=0{,}0769611.$$

Далее по (4.1)

$$S(4)=500e^{0{,}0769611\cdot 4}=680{,}245 \text{ д.е.}$$

4.3 Переменная сила роста

В этом разделе мы рассмотрим модель процесса непрерывного наращения денежных сумм с изменяющейся процентной ставкой.

В настоящее время в мире действует много электронных бирж, связанных в единую мировую систему с несколькими центрами, – в Нью-Йорке, Лондоне, Франкфурте и Токио. По существу, финансовые операции производятся круглые сутки. Даже за минуту на электронной бирже происходят колебания курсов валют, акций, облигаций и т.д., а иногда происходят скачки курса. Всё это оказывает влияние и на процентные ставки по обыкновенным вкладам и депозитам, которые также изменяются, хотя и не так часто, как валютный курс.

Если сила роста задаётся некоторой непрерывной функцией времени, т.е. $\delta(t)=f(t)$, то формула для наращенной суммы долга принимает вид

$$S(t)=S(0)\exp\left(\int_0^t \delta(x)dx\right). \tag{4.4}$$

Рассмотрим некоторые варианты изменения силы роста во времени.

1 Пусть в следующих друг за другом интервалах времени $t_1, t_2,\ldots, t_k$ ($t = t_1 + t_2 +\ldots+ t_k$) сила роста изменяется дискретно и равна соответственно $\delta_1, \delta_2,\ldots, \delta_k$. Тогда за период t_1 первоначальная сумма $S(0)$ возрастает до величины

$$S_1=S(0)e^{\delta_1 t_1},$$

за следующий период t_2 наращенная сумма

$$S(2)=\left(S(0)e^{\delta_1 t_1}\right)e^{\delta_2 t_2}=S(0)e^{\delta_1 t_1+\delta_2 t_2} \text{ и т.д.}$$

По истечении срока ссуды наращенная сумма составит:

$$S(t)=S(0)\exp\left(\sum_{i=1}^{k}\delta_i t_i\right).$$

Очевидно, что средняя величина силы роста в интервале времени $(0, t)$

$$\bar{\delta} = \frac{\sum_i \delta_i t_i}{\sum_i t_i} = \frac{\sum_i \delta_i t_i}{t} \Rightarrow \bar{\delta} t = \sum_i \delta_i t_i,$$

следовательно,

$$S(t) = S(0)\exp\left(\sum_i \delta_i t_i\right) = S(0)e^{\bar{\delta} t}. \qquad (4.5)$$

2 Сила роста непрерывно изменяется на интервале времени $(0, t)$ и описывается линейным уравнением

$$\delta(t) = \delta(0) + at,$$

где $\delta(0)$ – начальная величина силы роста для $t = 0$;

a – годовой прирост (снижение), т.е. может быть положительной или отрицательной величиной.

Найдём степень множителя наращения в формуле (4.4):

$$\int_0^t \delta(x)dx = \int_0^t (\delta(0) + ax)dx = \delta(0)t + \frac{at^2}{2}.$$

Следовательно, множитель наращения

$$e^{\delta(0)t + \frac{at^2}{2}} = \exp\left(\delta(0)t + at^2/2\right).$$

3 Сила роста изменяется в геометрической прогрессии

$$\delta(t) = \delta(0)a^t,\ a > 0,\ a \neq 1,$$

где $\delta(0)$ – начальная величина силы роста при $t = 0$;

a – годовой коэффициент роста (темп роста).

Вычислим степень множителя наращения

$$\int_0^t \delta(x)dx = \int_0^t \delta(0)a^x dx = \frac{\delta(0)}{\ln a}\left(a^t - 1\right), \qquad (4.6)$$

отсюда,

$$S(t) = S(0)\exp\left((\delta(0)/\ln a)(a^t - 1)\right). \qquad (4.6а)$$

Пример 4.2 На вклад в 2000 д.е. начисляются непрерывные проценты. Найти наращенную сумму за 7 лет, если сила роста изменяется следующим образом: в первые два года – 8 %, в следующие три года – 10 % и в каждый оставшийся год увеличивается на 0,5 %.

По условию $S(0) = 2000$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, $t_3 = 1$, $t_4 = 1$, $\delta_1 = 0{,}8$, $\delta_2 = 0{,}1$, $\delta_3 = 0{,}105$, $\delta_4 = 0{,}11$.

По формуле (4.5)

$$S(7) = 2\exp\left(0{,}08 \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 3 + 0{,}105 \cdot 1 + 0{,}11 \cdot 1\right) = 3{,}928 \text{ тыс. д.е.}$$

Такую же наращенную за 7 лет сумму получим при силе роста

$$\bar{\delta} = \frac{0{,}08 \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 3 + 0{,}105 \cdot 1 + 0{,}11 \cdot 1}{7} = 0{,}09643 \ (9{,}643\ \%).$$

Пример 4.3 Определить множитель наращения при непрерывном начислении процентов в течение 5 лет, если начальная сила роста равнялась 10 %, а ежегодный прирост –3 %.

По условию $\delta(0) = 0{,}1$; $a = 0{,}03$; $t = 5$.

Множитель наращения

$$A(0,t) = \exp\left(\delta(0)t + \frac{at^2}{2}\right) = \exp\left(0{,}1 \cdot 5 + \frac{0{,}03 \cdot 5^2}{2}\right) = 2{,}399.$$

Если величина a характеризует не рост, а ежегодное уменьшение силы роста, тогда множитель наращения

$$A(0,t) = \exp\left(0{,}1 \cdot 5 - \frac{0{,}03 \cdot 5^2}{2}\right) = 1{,}13315.$$

Пример 4.4 Определить множитель наращения за 4 года, если сила роста изменяется непрерывным образом в 1 % и начальное значение силы роста составляет 9 %.

В данном случае $\delta_0 = 0{,}09$; за год ставка увеличивается в a = 1,01 раза, t = 4.

По формуле (4.6) найдём:

$$A(0,t) = \exp\left(0{,}09\left(1{,}01^4 - 1\right)/\ln 1{,}01\right) = 1{,}4438 .$$

Пример 4.5 Определить срок, необходимый для увеличения первоначальной суммы в 3 раза при начислении по изменяющейся с постоянным темпом роста ставке непрерывных процентов, начальная ставка δ(0) = 0,15; годовой темп её роста a = 1,05.

По условию $S(t) = 3S(0)$. Из формулы (4.6 а) найдём t:

$$3S(0) = S(0)e^{\frac{\delta(0)}{\ln a}\left(a^t - 1\right)} \Rightarrow \ln 3 = \frac{\delta(0)}{\ln a}\left(a^t - 1\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\ln 3 \cdot \ln a}{\delta(0)} + 1 = a^t \Rightarrow t = \frac{\ln\left[\frac{\ln 3 \cdot \ln a}{\delta(0)} + 1\right]}{\ln a} .$$

Следовательно,

$$t = \frac{\ln\left[\frac{\ln 3 \cdot \ln 1{,}05}{0{,}15} + 1\right]}{\ln 1{,}05} = 6{,}26 \text{ года.}$$

Пример 4.6 Определить начальное значение силы роста, если за 4 года первоначальная сумма увеличилась на 150 %, а годовой темп роста ставки составлял 20 %.

По условию задачи a = 1,2; t = 4; $S(4) = S(0) + 1{,}5S(0) = 2{,}5S(0)$.

Из (4.6 а) найдём $\delta(0)$.

$$\frac{S(t)}{S(0)} = \exp\left(\frac{\delta(0)\left(a^t - 1\right)}{\ln a}\right) \Rightarrow \ln\frac{S(t)}{S(0)} = \frac{\delta(0)\left(a^t - 1\right)}{\ln a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta(0) = \frac{\ln\frac{S(t)}{S(0)}\ln a}{a^t - 1} .$$

Следовательно,

$$\delta(0) = \frac{\ln 2{,}5 \cdot \ln 1{,}2}{1{,}2^4 - 1} = 0{,}1556 \ (15{,}56\ \%) .$$

4.4 Непрерывное дисконтирование

При непрерывном дисконтировании суммы долга $S(t)$ сложными процентами учётную ставку обозначают через γ и называют **силой дисконта**.

Формулу для вычисления приведенной величины долга при непрерывном дисконтировании суммы $S(t)$ по постоянной силе роста можно получить, решив (4.1) относительно $S(0)$ (математическое дисконтирование):

$$S(0) = S(t)e^{-\delta t} . \qquad (4.7)$$

Если производится операция дисконтирования по сложной номинальной годовой учётной ставке d_m m раз в год и $m \to \infty$, то из формулы (3.21) получим

$$S(0) = \lim_{m\to\infty}\left[S(t)\left(1 - \frac{d_m}{m}\right)^{mt}\right] = S(t)\lim_{m\to\infty}\left[\left(1 - \frac{d_m}{m}\right)^{mt}\right] =$$

$$= S(t)\lim_{m\to\infty}\left[\left(1 - \frac{d_m}{m}\right)^{-\frac{m}{d_m}}\right]^{-td_m} = S(t)e^{-d_m t} .$$

Значит, учитывая принятые обозначения, можно записать

$$S(0) = S(t)e^{-\gamma t} . \qquad (4.8)$$

Таким образом, дисконтирование с помощью постоянной силы дисконта γ приводит к тому же результату, что и с помощью постоянной силы роста δ. Это связано с тем, что и та и другая процентные ставки применяются на бесконечно малых промежутках времени.

Формула приведённой на момент 0 величины долга при переменной величине силы роста $\delta(x) = f(x), 0 < x < t,$ имеет вид

$$S(0) = S(t)\exp\left(-\int_0^t \delta(x)dx\right).$$

Пример 4.7 Какую сумму необходимо поместить на счёт в банке, чтобы через 3 года получить 5000 д.е., если происходит непрерывное наращение процентов по ставке δ = 10 %.

Используем формулу (4.7):

$$S(0) = 5000e^{-0,1\cdot 3} = 3704,01 \text{ д.е.}$$

5 НАРАЩЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ. НАЛОГИ И ИНФЛЯЦИЯ

5.1 Налог на полученные проценты

Налогообложение играет большую роль в экономике любой страны. В развитых странах со стабильной экономикой налоги обеспечивают большую часть государственных доходов. В частности, облагаются налогом и проценты, получаемые в результате кредитной операции, что, естественно, уменьшает наращенную сумму.

Пусть в результате выполнения кредитного договора владелец капитала должен получить наращенную сумму $S(t) = S(0) + I(t)$. Допустим, что ставка налога на проценты равна g. Обозначим через $S_{\text{Н}}(t)$ наращенную сумму с учётом выплаты налога, тогда при начислении простых процентов находим:

$$S_{\text{Н}}(t) = S(t) - I(t)g = S(t) - (S(t) - S(0))g = S(t)(1-g) + S(0)g =$$

$$= S(0)(1+it)(1-g) + S(0)g = S(0)(1+it(1-g)). \qquad (5.1)$$

Следовательно, вместо ставки i фактически применяется меньшая ставка $(1-g)i$.

Если на сумму $S(0)$ за период времени t начислялись простые проценты по годовой учётной ставке d, то при ставке налога на проценты, равной g, необходимо выплатить государству величину

$$G(t) = I(t)g = S(0)tig,$$

учитывая, что из $S(t) = S(0)(1-td)^{-1}$ и $S(t) = S(0)(1+it)$ следует

$$i = \frac{d}{1-td},$$

тогда

$$G(t) = S(0)t\frac{dg}{1-td}.$$

Значит

$$S_{\text{Н}}(t) = S(t) - I(t)g = \frac{S(0)}{1-td} - \frac{S(0)tdg}{1-td} = \frac{S(0)}{1-td}(1-tdg). \qquad (5.2)$$

При начислении налога на сложные проценты получим:

$$S_{\text{Н}}(t) = S(t) - I(t)g = S(t) - \big(S(t) - S(0)\big)g = S(t)(1-g) + S(0)g =$$

$$= S(0)(1+i)^t(1-g) + S(0)g = S(0)\Big((1+i)^t(1-g) + g\Big). \qquad (5.3)$$

Поскольку начисление сложных процентов производится, как правило, в долгосрочных контрактах, то можно начислять налог, например, в конце каждого года. Пусть контракт заключен на t лет, налог за k-й год обозначим через G_k, $k = 1, 2,..., t$ и вычислим:

$$G_1 = I_1 g = \big(S(1) - S(0)\big)g = \Big(S(0)(1+i)^1 - S(0)\Big)g =$$

$$= S(0)\Big((1+i)^1 - (1+i)^0\Big)g;$$

$$G_2 = I_2 g = \big(S(2) - S(1)\big)g = \Big(S(0)(1+i)^2 - S(0)(1+i)^1\Big)g =$$

$$= S(0)\Big((1+i)^2 - (1+i)^1\Big)g = S(0)(1+i)\Big((1+i)^1 - (1+i)^0\Big) =$$

$$= G_1(1+i); \ldots$$

$$G_k = I_k g = \big(S(k) - S(k-1)\big)g = \Big(S(0)(1+i)^k - S(0)(1+i)^{k-1}\Big)g =$$

$$= S(0)\Big((1+i)^k - (1+i)^{k-1}\Big)g = S(0)(1+i)\Big((1+i)^{k-1} - (1+i)^{k-2}\Big) =$$

$$= G_{k-1}(1+i).$$

В общем, для $1 \le k \le t$ имеем

$$G_t = I_t g = S(0)\left((1+i)^t - (1+i)^{t-1}\right)g = G_{t-1}(1+i). \qquad (5.4)$$

Найдем сумму налога $G(t)$ за весь период t:

$$G(t) = G_1 + G_2 + ... + G_k + ... + G_t = S(0)g\Big((1+i)^1 - (1+i)^0 +$$

$$+ (1+i)^2 - (1+i)^1 + (1+i)^3 - (1+i)^2 + ... + (1+i)^t - (1+i)^{t-1}\Big) =$$

$$= S(0)g\left((1+i)^t - 1\right).$$

Наращенная сумма с учетом налога

$$S_{\text{Н}}(t) = S(t) - G(t) = S(t) - S(0)g\left((1+i)^t - 1\right) = S(0)(1+i)^t -$$

$$- S(0)g\left((1+i)^t - 1\right) = S(0)\left((1+i)^t(1-g) + g\right),$$

что совпадает с (5.3).

Пусть на начальный капитал $S(0)$ начисляются сложные проценты t лет по годовой номинальной ставке i_m (т.е. проценты начисляются m раз в год).

Величина наращенной за t лет суммы

$$S(t) = S(0)\left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^{mt} = S(0)a^t,$$

где $a = \left(1 + \dfrac{i_m}{m}\right)^m$.

Если ставка налога равна g и налог начисляется на все полученные проценты, то сумма налога

$$G(t) = \left(S(t) - S(0)\right)g = S(0)\left(a^t - 1\right)g, \qquad (5.5)$$

следовательно, после уплаты налога наращенная сумма

$$S_{\text{Н}}(t) = S(t) - G(t) = S(t) - S(0)\left(a^t - 1\right)g = S(0)\left(a^t(1-g) + g\right). \quad (5.6)$$

Очевидно, при $m = 1$ формулы (5.6) и (5.3) совпадают.
При начислении налога по истечении каждого года получим:

$$G_1 = \left(S(1) - S(0)\right)g = \left(S(0)a - S(0)\right)g = S(0)(a-1)g;$$

$$G_2 = \left(S(2) - S(1)\right)g = S(0)a(a-1)g = G_1 a;$$

$$G_3 = \left(S(3) - S(2)\right)g = S(0)a^2(a-1)g = G_2 a.$$

В общем случае

$$G_k = \left(S(k) - S(k-1)\right)g = S(0)a^{k-1}(a-1)g = G_{k-1}a, \qquad (5.7)$$

$$2 \le k \le t.$$

Можно показать, что

$$G_1 + G_2 + ... + G_t = G(t),$$

т.е. суммарный размер налога за t лет совпадает по величине с (5.5).

Примечание. Здесь очень важно заметить, что формулы для начисления ежегодных налогов предполагают, что налоги выплачиваются из отличных от вклада денежных средств. Если же налог за каждый год выплачивается из наращенной суммы, то формулы (5.4) и (5.7) для начисления ежегодных налогов изменятся.

Если наращение сложными процентами по учётной ставке d_m происходит m раз в год, то в формуле (5.6) a принимает значение

$$a = \left(1 - \frac{d_m}{m}\right)^{-m}.$$

Если начисляются непрерывные проценты по ставке δ, то

$$a = e^{\delta}.$$

Пример 5.1 На депозит была помещена сумма в 30 д.е. под 16 % годовых на полтора года, по истечении которых на эту сумму были начислены простые проценты. Определить наращенную сумму с учётом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты равна 12 %.

В соответствии с (5.1) получим

$$S_{\text{Н}}(1{,}5) = 30(1 + 1{,}5 \cdot 0{,}16(1 - 0{,}12)) = 36{,}336 \text{ д.е.}$$

Величина налога

$$G(1{,}5) = S(0)tig = 30 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}12 = 0{,}864 \text{ д.е.}$$

Пример 5.2 Если в условиях предыдущего примера наращение осуществлялось по годовой учётной ставке 14 %, то чему будет равна наращенная сумма после уплаты налога на проценты?

По формуле (5.2) получим

$$S_{\text{H}}(1{,}5) = \frac{30}{1 - 1{,}5 \cdot 0{,}14}(1 - 1{,}5 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}12) = 37{,}018 \text{ д.е.}$$

Пример 5.3 На вклад в 2 млн д.е. по истечении четырёх лет были начислены сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 12 %, проценты начисляются два раза в год. Определить наращенную сумму после уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты равна 8 %.

По условию $t = 4$, $m = 2$, $i_m = 12$ %, $g = 8$ %.

Наращенная сумма без уплаты налогов составит:

$$S(4) = 2{,}0\left(1 + \frac{0{,}12}{2}\right)^{2 \cdot 4} = 3{,}1877 \text{ млн д.е.}$$

$$a = \left(1 + \frac{0{,}12}{2}\right)^{2} = 1{,}1236.$$

Величина налога по (5.5)

$$G(4) = (3{,}1877 - 2{,}0)0{,}08 = 0{,}095 \text{ млн д.е.}$$

и, следовательно, наращенная сумма с учётом уплаты налогов

$$S_{\text{H}}(4) = 3{,}1877 - 0{,}095 = 3{,}0927 \text{ млн д.е.}$$

Если налоги начисляются в конце каждого года, то размеры налогов за каждый год:

$$G_1 = 2{,}0 \cdot (1{,}1236 - 1)0{,}08 = 0{,}019776 \text{ млн д.е.}$$

$$G_2 = 0{,}019776 \cdot 1{,}1236 = 0{,}022220 \text{ млн д.е.}$$

$$G_3 = 0{,}022220 \cdot 1{,}1236 = 0{,}024966 \text{ млн д.е.}$$

$$G_4 = 0{,}024966 \cdot 1{,}1236 = 0{,}028052 \text{ млн д.е.}$$

Суммируем налоги за каждый год и получим:

$$G(4) = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 = 0{,}095013,$$

что приблизительно равно 0,095 млн д.е.

Безусловно, рассмотренные примеры носят иллюстративный характер. Налогообложение представляет собой достаточно сложную и обширную тему, которую следует изучать отдельно. В данном пособии ставилась цель показать влияние взимания налогов на доходность финансовых операций.

5.2 Влияние инфляции на величину наращенной суммы

Инфляция определяется как процесс, характеризующийся повышением общего уровня цен в экономике или снижением покупательной способности денег. Инфляция может проявляться двояко: во-первых, в переполнении сферы обращения бумажными деньгами вследствие их чрезмерного выпуска; во-вторых, в сокращении товарной массы в обращении при неизменном количестве выпущенных денег. Во время инфляции цены на потребительские товары растут быстрее, чем увеличиваются доходы населения.

Основополагающий признак инфляции – рост цен в среднем: не увеличение цены какого-либо отдельного товара или даже группы товаров, а увеличение усреднённой цены всех товаров и услуг, выбранных в качестве базы выявления уровня инфляции.

Темпы инфляции определяются с помощью системы **индексов цен**. Если индекс цен обозначим I_p, а покупательную способность денег через I_D, то $I_D = 1/I_p$. В свою очередь индексом цен за время t называется величина

$$I_P^{(t)} = \frac{S_t}{S_0}, \tag{5.8}$$

где S_t – стоимость товаров в момент t;

S_0 – стоимость товаров в момент 0.

Индекс цен показывает, во сколько раз выросли цены за рассматриваемый период.

Темпом инфляции за время *t* называется величина

$$h_t = \frac{S_t - S_0}{S_0}. \qquad (5.9)$$

Величина $100h_t$ показывает, на сколько процентов выросли цены за период времени t.

Из (5.8) и (5.9) следует соотношение:

$$I_p^{(t)} = 1 + h_t .$$

Например, если $I_p^{(t)} = 2{,}4$, то $h_t = 1{,}4$, т.е. цены за рассматриваемый период t выросли в 2,4 раза, или, что эквивалентно, на 140 %.

Рассмотрим промежуток времени $t = t_1 + t_2 + \ldots + t_k$ (рисунок 5.1). Допустим, нам известны индексы цен $I_p^{(t_1)}, I_p^{(t_2)}, \ldots, I_p^{(t_k)}$ за соответствующие периоды времени $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

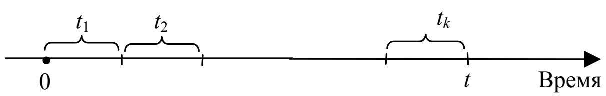

Рисунок 5.1

Поскольку индекс цен за данный период показывает во сколько раз выросли цены по отношению к уровню цен предыдущего периода, то

$$I_p^{(t)} = I_p^{(t_1)} I_p^{(t_2)} \ldots I_p^{(t_k)} = \prod_{i=1}^{k} I_p^{(t_i)} = \prod_{i=1}^{k} \left(1 + h_{t_i}\right). \qquad (5.10)$$

Пусть за время t была получена некоторая наращенная сумма $S(t)$, а индекс цен за этот период составил величину $I_р^{(t)}$, тогда сумма $S(t)$ с учётом инфляции

$$S_{\text{инфл.}}(t) = \frac{S(t)}{I_p^{(t)}}. \qquad (5.11)$$

Если величина $S(t)$ получена наращением суммы $S(0)$ за время t по

простой процентной ставке i, тогда формулу (5.11) можно представить в виде:

$$S_{\text{инфл.}}(t) = \frac{S(0)(1+it)}{I_p^{(t)}}, \qquad (5.12)$$

где $\dfrac{(1+it)}{I_p^{(t)}}$ – множитель наращения простых процентов с учётом инфляции.

Из формулы (5.12) следует, что в условиях инфляции действительное наращение первоначального капитала $S(0)$ произойдёт, если выполнится

$$\frac{(1+it)}{I_p^{(t)}} > 1 \;\Rightarrow\; 1 + it > I_p^{(t)}.$$

Если $1 + it = I_p^{(t)}$, то наращение просто компенсирует влияние инфляции. Из этого равенства найдём

$$i = \frac{I_p^{(t)} - 1}{t} = i^*. \qquad (5.13)$$

Процентная ставка i^* является минимально допустимой процентной ставкой, при которой не происходит реального уменьшения капитала за время t (эрозии капитала).

Для того, чтобы в условиях инфляции стоимость первоначального капитала реально росла с объявленной доходностью i, исходную процентную ставку i увеличивают. Такую новую ставку r называют **брутто-ставкой**. Размер брутто-ставки определяется из равенства

$$(1+it) = \frac{(1+rt)}{I_p^{(t)}} \;\Rightarrow\; r = \frac{(1+it)I_p^{(t)} - 1}{t}. \qquad (5.14)$$

Учитывая (5.13) формулу (5.14) можно записать:

$$r = iI_p^{(t)} + \frac{I_p^{(t)} - 1}{t} = iI_p^{(t)} + i^*.$$

Последняя формула даёт представление о структуре ставки r.

Пусть теперь задана норма доходности i и индекс цен $I_p^{(t)}$ за время t, тогда реальная годовая процентная ставка $i_{\text{реал.}}$, обеспечивающая доходность с учётом инфляции, может быть найдена из равенства

$$1 + i_{\text{реал.}} t = \frac{1 + it}{I_p^{(t)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_{\text{реал.}} = \frac{1}{t}\left(\frac{1 + it}{I_p^{(t)}} - 1\right) = \frac{i - i^*}{I_p^{(t)}}. \qquad (5.15)$$

Пример 5.4 Определить годовой индекс инфляции, если известен среднемесячный темп инфляции.

В условии задано $t = 1, t_1 = t_2 = ... = t_{12} = \frac{1}{12}$.

По формуле (5.10)

$$I_p^{(1)} = I_p = \left(I_p^{\left(\frac{1}{12}\right)}\right)^{12} = \left(1 + h_{\frac{1}{12}}\right)^{12}.$$

Пусть $h_{\frac{1}{12}} = 10\,\%$, тогда $I_p = (1 + 0{,}1)^{12} = 3{,}138$,

т.е. цены за год увеличатся более чем в 3,1 раза при темпе инфляции 10 % в месяц.

Пример 5.5 На сумму 5,0 д.е. в течение трёх месяцев начислялись простые проценты по ставке 40 % годовых. Каждый месяц цены росли соответственно на 15 %, 12 % и 10 %. Найти наращенную сумму с учётом инфляции, величину положительной процентной ставки, величину брутто-ставки.

По условию t = 3 мес. = 0,25 года, h_1 = 15 %, h_2 = 12 %, h_3 = 10 %, $S(0)$ = 5 д.е.

Значит, $I_p^{(1)} = 1{,}15; I_p^{(2)} = 1{,}12; I_p^{(3)} = 1{,}1$.

Индекс роста цен за три месяца составляет:

$$I_p^{(t)} = 1{,}15 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}1 = 1{,}4168.$$

По формуле (5.12)

$$S_{\text{инфл.}}(t) = \frac{5{,}0(1 + 0{,}4 \cdot 0{,}25)}{1{,}4168} = 3{,}882 \text{ д.е.}$$

По формуле (5.13)

$$i^* = \frac{1{,}4168 - 1}{0{,}25} = 1{,}6672,$$

т.е. реальное наращение капитала будет происходить только при ставке $i > 166{,}72\,\%$.

По формуле (5.14)

$$r = \frac{(1 + 0{,}4 \cdot 0{,}25)1{,}4168 - 1}{0{,}25} = 2{,}234,$$

т.е. ставка в 223,4 % годовых при наращении простыми процентами обеспечивает реальную доходность в 40 % годовых.

Пример 5.6 Определить реальную годовую ставку простых процентов с учётом инфляции, если ставка, указанная в договоре, равна 60 % при годовой инфляции в 30 %.

По условию $t = 1; I_p^{(1)} = I_p = 1{,}3; i = 0{,}6$.

Теперь по формуле (5.15)

$$i_{\text{реал.}} = \left(\frac{1 + 0{,}6 \cdot 1}{1{,}3} - 1\right) = 0{,}2308 \ (23{,}8\,\%).$$

Таким образом, при инфляции различают четыре вида процентных ставок:

1) исходная годовая процентная ставка i, указываемая в договорах; она не скорректирована на инфляцию;

2) реальная процентная ставка $i_{\text{реал.}}$, указывает доходность с учётом инфляции (исходя из формулы (5.15) $i_{\text{реал.}}$ может быть отрицательной);

3) брутто-ставка обеспечивает доходность i в условиях инфляции;

4) минимально допустимая процентная ставка i^*, при которой суммы $S(0)$ и $S_{\text{инфл.}}(t)$ обладают одинаковой покупательской способностью.

Пример 5.7 Пусть в финансовом контракте указана исходная годовая процентная ставка i = 30 %. Годовой темп инфляции h = 20 %.

Согласно (5.15) реальная годовая процентная ставка

$$i_{\text{реал.}} = 1\left(\frac{1+0{,}3\cdot 1}{1{,}20} - 1\right) = 0{,}0833 \ \ (8{,}33\,\%)\,.$$

Согласно (5.14) брутто-ставка, обеспечивающая доходность i = 30 % с учётом инфляции,

$$r = \frac{(1+0{,}3)1{,}2-1}{1} = 0{,}56\,(56\,\%)\,.$$

Согласно (5.13) минимальная годовая ставка i^*, при которой не происходит реального уменьшения капитала,

$$i^* = \frac{1{,}2-1}{1} = 0{,}2\,(20\,\%)\,.$$

Обратимся теперь к схеме наращения по сложным и непрерывным процентам. Пусть на капитал $S(0)$ в течение t лет начисляются сложные или непрерывные проценты. Тогда

$$S(t) = S(0)a^t\,,$$

где $a = (1+\frac{i_m}{m})^m$ или $a = (1-\frac{d_m}{m})^{-m}$, или $a = e^{\delta}$.

Пусть индекс цен за это время равен $I_p^{(t)}$. Тогда с учётом инфляции получим:

$$S_{\text{инфл.}}(t) = \frac{S(0)a^t}{I_p^{(t)}}\,.$$

Для того чтобы не происходило эрозии капитала, должно выполняться неравенство

$$a^t \ge I_p^{(t)} \ \Rightarrow\ a \ge \sqrt[t]{I_p^{(t)}}\,. \tag{5.16}$$

Причём, если

$$a = \sqrt[t]{I_p^{(t)}} = a^*\,,$$

то наращение капитала просто компенсирует действие инфляции.

Пусть $a = (1+\frac{i_m}{m})$, тогда

$$i_m^* = m\left(\sqrt[mt]{I_p^{(t)}} - 1\right).$$

Если $a = e^{\delta}$, то $\delta^* = \frac{1}{t}\ln I_p^{(t)}$.

Если $a = (1-\frac{d_m}{m})^{-m}$, то $d_m^* = \left(\frac{\sqrt[mt]{I_p^{(t)}}-1}{\sqrt[mt]{I_p^{(t)}}}\right)m$.

Брутто-ставку r_a, обеспечивающую заявленную доходность i, при индексе цен $I_p^{(t)}$ можно определить из равенства

$$\frac{S(0)a_r^t}{I_p^{(t)}} = S(0)a^t \ \Rightarrow\ a_r = a\sqrt[t]{I_p^{(t)}}\,, \tag{5.17}$$

где a_r – коэффициент наращения по брутто-ставке.

Используя соответствующий коэффициент a и формулу (5.17), можно найти брутто-ставки $r_{i_m}, r_{d_m}, r_{\delta}$:

$$r_{i_m} = m\left(\left(1+\frac{i_m}{m}\right)\sqrt[mt]{I_p^{(t)}} - 1\right); \tag{5.18}$$

$$r_{d_m} = m\left(1-\left(1-\frac{d_m}{m}\right)\frac{1}{\sqrt[mt]{I_p^{(t)}}}\right); \tag{5.19}$$

$$r_\delta = \delta + \frac{1}{t}\ln I_p^{(t)}. \qquad (5.20)$$

Для определения реальных ставок $i_{m\ \text{реал.}}, d_{m\ \text{реал.}}, \delta_{\text{реал.}}$ используем соотношение

$$a_{\text{реал.}}^t = \frac{a^t}{I_p^{(t)}} \Rightarrow a_{\text{реал.}} = \frac{a}{\sqrt[t]{I_p^{(t)}}}.$$

Подставляя вместо *a* соответствующее выражение, получим:

$$i_{m\ \text{реал.}} = m\left(\left(1+\frac{i_m}{m}\right)\frac{1}{\sqrt[mt]{I_p^{(t)}}} - 1\right); \qquad (5.21)$$

$$d_{m\ \text{реал.}} = m\left(1-\left(1-\frac{d_m}{m}\right)\sqrt[mt]{I_p^{(t)}}\right); \qquad (5.22)$$

$$\delta_{\text{реал.}} = \delta - \frac{1}{t}\ln I_p^{(t)}. \qquad (5.23)$$

Пример 5.8 На вклад в 30 д.е. ежемесячно начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 40 %. Ожидаемый темп инфляции – 2 % в месяц. Оценить наращенную сумму вклада через 1,5 года.

Очевидно,

$$S(1{,}5) = 30\left(1+\frac{0{,}4}{12}\right)^{12\cdot 1{,}5} = 54{,}131 \text{ д.е.}$$

Индекс инфляции за 1,5 года при $h_{\frac{1}{12}} = 2\,\%$ найдём по формуле (5.10)

$$I_p^{(1{,}5)} = (1+0{,}02)^{18} = 1{,}4282 \text{ д.е.}$$

Следовательно, наращенная за 1,5 года сумма с учётом инфляции

$$S_{\text{инфл.}}(1{,}5) = \frac{54{,}131}{1{,}4282} = 37{,}902 \text{ д.е.}$$

Реальный доход владельца капитала

$$S_{\text{инфл.}}(1{,}5) - S(0) = 37{,}902 - 30 = 7{,}902 \text{ д.е.}$$

Далее найдём процентные ставки $i_m^*, r_{i_m}, i_{m\ \text{реал.}}$:

1) минимально допустимая ставка, не приводящая к эрозии капитала, $i_m^* = 12\left(\sqrt[1{,}5\cdot 12]{1{,}4282} - 1\right) = 0{,}24$, т.е. при темпе инфляции 2 % в месяц и ежемесячном начислении сложных процентов реальное наращение капитала будет происходить только при процентной ставке, большей 24 %;

2) брутто-ставка, обеспечивающая доходность $i = 40\,\%$, а с учётом инфляции

$$r_{i_m} = 12\left(\left(1+\frac{0{,}4}{12}\right)\sqrt[1{,}5\cdot 12]{1{,}4282} - 1\right) = 0{,}6479\ (64{,}79\,\%);$$

3) реальная годовая процентная ставка, определяющая действительную доходность кредитной операции:

$$i_{m\ \text{реал.}} = 12\left(\left(1+\frac{0{,}4}{12}\right)\frac{1}{\sqrt[1{,}5\cdot 12]{1{,}4282}} - 1\right) = 0{,}1569\ \ (15{,}69\,\%).$$

6 ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК. ИЗМЕНЕНИЕ УСЛОВИЙ КОММЕРЧЕСКИХ СДЕЛОК

6.1 Эквивалентность процентных ставок

Мы уже видели, что один и тот же финансовый результат можно получить при решении задач наращения и дисконтирования, используя различные виды процентных ставок. И это естественно, так как любая ставка (процентная, учётная, сила роста) характеризует доходность финансовой операции.

Две ставки называются **эквивалентными**, если при замене одной ставки на другую финансовые отношения сторон не меняются, т.е. участникам финансового соглашения безразлично, какая ставка будет фигурировать в контракте.

При выводе равенств, связывающих эквивалентные ставки, используется следующая идея: если из капитала $S(0)$ наращением за время t необходимо получить капитал $S(t)$, то будут эквивалентны все ставки, обеспечивающие один и тот же множитель наращения. Поэтому, приравнивая друг другу множители наращения, получим соотношения между эквивалентными ставками. Точно так же при переходе от $S(t)$ к $S(0)$ с помощью дисконтирования приравниваются множители дисконтирования.

Пример 6.1 Коммерческий банк учитывает векселя по сложной учётной ставке d. Финансовые аналитики банка оценивают доходность его активных операций по ставке сложного годового процента. В связи с этим требуется оценить доходность банковских учётных операций через эквивалентную ставку i сложного процента.

Вложения банка в операции по учёту векселей составляют величину $S(0)$, а его выручка при погашении векселей равна $S(t)$.

При этом

$$S(0) = S(t)(1-d)^t .$$

Записывая условие эквивалентности, придём к уравнению

$$S(t) = S(0)(1+i)^t, S(t) = S(0)(1-d)^{-t} \Rightarrow S(0)(1+i)^t =$$

$$= S(0)(1-d)^{-t} .$$

Отсюда

$$i = \frac{d}{1-d} .$$

Пример 6.2 Предлагается поместить капитал на четыре года либо под сложную процентную ставку 20 % с полугодовым начислением процентов, либо под простую процентную ставку 26 % годовых. Выяснить, как выгоднее поступить.

Чтобы сделать правильный выбор, необходимо найти для данной сложной процентной ставки 20 % с начислением процентов два раза в году эквивалентную простую процентную ставку и сравнить её с предлагаемой процентной ставкой 26 %.

$$S(t) = S(0)(1+it), S(t) = S(0)(1+\frac{i_m}{m})^{mt} \Rightarrow S(0)(1+it) =$$

$$= S(0)(1+\frac{i_m}{m})^{mt} \Rightarrow i = \frac{\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{mt} - 1}{t} .$$

Следовательно,

$$i = \frac{\left(1+\frac{0,2}{2}\right)^{2\cdot 4} - 1}{4} = 0,2859.$$

Так как $28,59\ \% > 26\ \%$, то выгоднее поместить капитал под сложную процентную ставку.

Пример 6.3 Банк представляет ссуду на 27 месяцев под 16 % годовых с полугодовым начислением процентов по смешанной схеме. Определить эквивалентную простую процентную ставку.

По условию $i_m = 0,16$; $m = 2$; $t = 27$ мес., т.е. $t = a + b$, где $a = 2$ года, $b = 0,25$ года. По смешанной схеме начисления процентов получим наращенную сумму

$$S(t) = S(0)\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{ma}\left(1+i_m b\right).$$

При использовании простой процентной ставки

$$S(t) = S(0)(1+it) .$$

Приравняем множители наращения

$$1+it = \left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{ma}\left(1+i_m b\right).$$

Отсюда найдём эквивалентную простую процентную ставку

$$i=\frac{\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{ma}(1+i_m b)-1}{t}=\frac{\left(1+\frac{0{,}16}{2}\right)^{2\cdot 2}(1+0{,}16\cdot 0{,}25)-1}{2{,}25}=$$

$$=0{,}1844\ (18{,}44\ \%)\ .$$

6.2 Средние величины в финансовых расчётах

Рассматривая принцип эквивалентности процентных ставок, необходимо уделить внимание методам расчёта их средних значений, так как для нескольких процентных ставок их среднее значение является эквивалентной величиной.

Средняя ставка по простым процентам. При получении заёмщиком различных по величине кредитов S_j, выданных под различные процентные ставки i_j на срок t_j, средняя ставка вычисляется по формуле

$$\bar{i}=\frac{\sum_j i_j t_j S_j}{\sum_j t_j S_j},\quad j\geq 1, \tag{6.1}$$

где $\bar{i}$ – средняя процентная ставка;

S_j – величина j-го выданного кредита;

t_j – период действия ставки i_j;

i_j – простая процентная ставка, под которую выдан кредит S_j.

Средняя ставка по сложным процентам определяется по формуле

$$\bar{i}_c=\sqrt[t]{\left((1+i_1)^{t_1}(1+i_2)^{t_2}...(1+i_k)^{t_k}\right)}-1\ , \tag{6.2}$$

где i_1, i_2, …, i_k – ставки сложных процентов, действующие в интервалах времени $t_1, t_2,..., t_k$, причём $t_1+t_2+...+t_k=t$.

Пример 6.4 Фирма получила два кредита. Первый – 400 тыс. руб. на 3 месяца под 10 % годовых. Второй – 800 тыс. руб. на 9 месяцев под 14 % годовых (проценты простые). Определить среднюю процентную ставку.

По формуле (6.1) получим:

$$\bar{i}=\frac{0{,}1\cdot 0{,}25\cdot 400+0{,}14\cdot 0{,}75\cdot 800}{0{,}25\cdot 400+0{,}75\cdot 800}=0{,}13428\ \ (13{,}428\%)\ .$$

Наращенные суммы по каждому кредиту:

$$S(0{,}25)=400(1+0{,}25\cdot 0{,}1)=410{,}0\ \text{тыс. руб.}$$

$$S(0{,}75)=800(1+0{,}75\cdot 0{,}14)=884{,}0\ \text{тыс. руб.}$$

$$S_{\text{общ.}}=410+884=1294\ \text{тыс. руб.}$$

Теперь используем для вычисления наращенной суммы среднюю процентную ставку:

$$S(0{,}25)=400(1+0{,}25\cdot 0{,}13428)=413{,}428\ \text{тыс. руб.}$$

$$S(0{,}75)=800(1+0{,}75\cdot 0{,}13428)=880{,}568\ \text{тыс. руб.}$$

$$S_{\text{общ.}}=413{,}428+880{,}568=1293{,}996\ \text{тыс. руб.}$$

Пример 6.5 Долгосрочный кредит предоставлен на 6 лет на следующих условиях: первые два года – под 5 % (сложные проценты), следующие три года – под 7 % сложных годовых, а в последний год – под 8 %. Определить среднюю ставку.

По формуле (6.2) получим

$$\bar{i}=\sqrt[6]{(1+0{,}05)^2(1+0{,}07)^3(1+0{,}08)}-1=0{,}0649\ (6{,}49\ \%)\ .$$

Теперь допустим, что в кредит получена сумма $S(0)$, тогда через шесть лет наращенная сумма составит:

$$S(6)=S(0)1{,}05^2\cdot 1{,}07^3\cdot 1{,}08=1{,}457S(0)\ ,$$

При использовании средней процентной ставки сумма

$$S(6)=S(0)1{,}0649^6=1{,}458S(0)\ .$$

6.3 Безубыточное изменение условий контракта

Изменение экономической ситуации нередко побуждает одну из сторон – участниц коммерческой сделки – обратиться к другой стороне с предложением изменить условия ранее заключённых соглашений.

Чаще всего предлагается: изменить сроки платежей, произвести объединение нескольких платежей в один (консолидировать платежи) и т.д. Предлагаемые изменения должны быть безубыточными для обеих сторон, т.е. важнейшим принципом изменения условий контракта является принцип **финансовой эквивалентности**. Решение такой задачи сводится к выводу **уравнения эквивалентности**, в котором заменяемые платежи, приведённые к выбранному моменту времени, приравниваются вновь устанавливаемым платежам, приведённым к тому же моменту времени.

При краткосрочных контрактах для вывода уравнения эквивалентности используется метод начисления (дисконтирования) простых процентов, при среднесрочных и долгосрочных контрактах – сложных процентов.

При консолидации платежей $S(t_1)$, $S(t_2)$,…, $S(t_k)$ со сроками погашения t_1, t_2,…, t_k (рисунок 6.1) возможна постановка одной из двух задач:

1) по заданному сроку выплаты t^* консолидированного платежа найти его величину $S(t^*)$;

2) по заданной величине консолидированного платежа $S(t^*)$ определить срок его выплаты t^*.

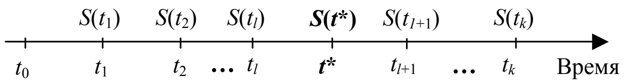

Рисунок 6.1

Пусть для нескольких консолидируемых платежей $t_m < t^*$, $m = 1, 2,..., l$, а для других – $t_m > t^*, m = l+1,..., k-1, k$. Тогда для нахождения консолидированного платежа $S(t^*)$ при условии начисления простых процентов по процентной ставке i (общей для каждого платежа) можно составить уравнение

$$S(t^*) = \sum_{m=1}^{l} S(t_m)\left(1+\frac{\tau_m}{K}i\right) + \sum_{m=l+1}^{k} S(t_m)\left(1+\frac{\tau_m}{K}i\right)^{-1}, \qquad (6.3)$$

где $\tau_m = t^* - t_m$ дней, $m = 1, 2,..., l$;

$\tau_m = t_m - t^*$ дней, $m = l+1,..., k$;

K – количество дней в году.

Примечание. Если величины τ_m измеряются в годах, то $K = 1$. Это примечание относится и к формулам (6.4) – (6.8);

$S(t^*)$ – консолидированный платёж.

Если консолидация платежей происходит на основе начисления и дисконтирования простых процентов по учётной ставке d, то уравнение эквивалентности примет вид:

$$S(t^*) = \sum_{m=1}^{l} S(t_m)\left(1-\frac{\tau_m}{K}d\right)^{-1} + \sum_{m=l+1}^{k} S(t_m)\left(1-\frac{\tau_m}{K}d\right). \qquad (6.4)$$

И, наконец, если величина консолидированного платежа рассчитывается при условии начисления сложных процентов по процентной ставке i, пользуемся уравнением

$$S(t^*) = \sum_{m=1}^{l} S(t_m)(1+i)^{\tau_m / K} + \sum_{m=l+1}^{k} S(t_m)(1+i)^{-\tau_m / K}. \qquad (6.5)$$

Задача консолидации платежей во второй постановке, когда известна величина консолидированного платежа $S(t^*)$ и необходимо найти t^* решается на основе приведения всех платежей и величины $S(t^*)$ к дате t_0, $t_0 < t_m$, $m = 1, 2,…, k$.

При дисконтировании всех платежей простыми процентами по процентной ставке i имеем:

$$S(t_0) = \sum_{m=1}^{k} S(t_m)\left(1+\frac{t_m - t_0}{K}i\right)^{-1},$$

где $S(t_0)$ – сумма приведённых на момент t_0 величин консолидируемых платежей.

С другой стороны, приведенный на момент t_0 консолидированный платеж равен:

$$S(t^*)\left(1+\frac{t^* - t_0}{K}i\right)^{-1}.$$

Следовательно, уравнение эквивалентности имеет вид:

$$S(t_0) = \sum_{m=1}^{l} S(t_m)\left(1+\frac{t_m - t_0}{K}i\right)^{-1} = S(t^*)\left(1+\frac{t^* - t_0}{K}i\right)^{-1},$$

а значит,

$$\frac{t^*-t_0}{K}=\frac{\dfrac{S(t^*)}{S(t_0)}-1}{i},\quad \left(S(t^*)>S(t_0)\right). \qquad (6.6)$$

Если применяется банковский учёт, т.е. все платежи дисконтируются простыми процентами по учётной ставке *d,* получаем уравнение эквивалентности вида:

$$S(t^*)\left(1-\frac{t^*-t_0}{K}d\right)=\sum_{m=1}^{k}S(t_m)\left(1-\frac{t_m-t_0}{K}d\right).$$

По-прежнему, обозначая правую часть через $S(t_0)$, получим формулу для нахождения t^*:

$$\frac{t^*-t_0}{K}=\frac{1-\dfrac{S(t_0)}{S(t^*)}}{d},\quad \left(S(t^*)>S(t_0)\right). \qquad (6.7)$$

При дисконтировании всех платежей сложными процентами по процентной ставке i уравнение эквивалентности имеет вид:

$$S(t^*)(1+i)^{-\frac{t^*-t_0}{K}}=\sum_{m=1}^{k}S(t_m)(1+i)^{-\frac{t_m-t_0}{K}}.$$

Обозначив последнюю сумму через $S(t_0)$, получим:

$$\frac{t^*-t_0}{K}=\frac{\ln\left(\dfrac{S(t^*)}{S(t_0)}\right)}{\ln(1+i)},\quad \left(S(t^*)>S(t_0)\right). \qquad (6.8)$$

Пример 6.6 Фирма получила кредит на сумму 900 д.е. под 10 % годовых (проценты простые). Кредит должен быть погашен двумя платежами: первый – 500 д.е. с процентами через 90 дней, второй – 400 д.е. с процентами через 120 дней. Впоследствии фирма договорилась с кредитором об объединении платежей в один со сроком погашения через 150 дней (рисунок 6.2). Определить размер консолидированного платежа (K = 360 дней).

По условию t_1 = 90 дней, t_2 = 120 дней, t^* = 150 дней.

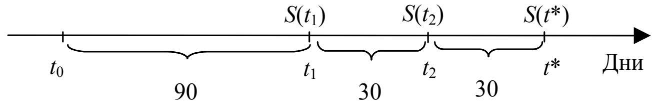

Рисунок 6.2

Прежде всего, найдём величины $S(t_1)$ и $S(t_2)$:

$$S(t_1)=500\left(1+\frac{90}{360}\cdot 0{,}1\right)=512{,}5\ \text{д.е.};$$

$$S(t_2)=400\left(1+\frac{120}{360}\cdot 0{,}1\right)=413{,}3\ \text{д.е.}$$

А теперь, пользуясь формулой (6.3), получим величину консолидированного платежа $S(t^*)$:

$$S(t^*)=512{,}5\left(1+\frac{60}{360}\cdot 0{,}1\right)+413{,}3\left(1+\frac{30}{360}\cdot 0{,}1\right)=937{,}78\ \text{д.е.}$$

Условие решаемой задачи позволяет вычислить $S(t^*)$ проще:

$$S(t^*)=900\left(1+\frac{150}{360}\cdot 0{,}1\right)=937{,}5\ \text{д.е.}$$

Пример 6.7 Два платежа S_1 = 1,4 млн руб. и S_2 = 1,9 млн руб. со сроком погашения 2 года и 3 года объединяются в один платёж 4,0 млн руб. с использованием сложной учётной ставки – 6 % (рисунок 6.3). Найти срок уплаты консолидированного платежа.

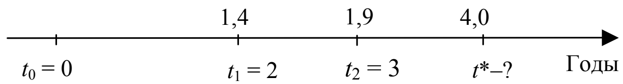

Рисунок 6.3

По формуле (6.8)

$$t^*-t_0=\frac{\ln\left(\dfrac{4{,}0}{S(t_0)}\right)}{\ln(1+0{,}06)},$$

$$t_0=0,$$

$$S(t_0) = 1{,}4(1+0{,}06)^{-2} + 1{,}9(1+0{,}06)^{-3} = 2{,}841 \text{ млн руб.}$$

$$t^* = \frac{\ln\left(\dfrac{4{,}0}{2{,}841}\right)}{\ln 1{,}06} = \frac{\ln 1{,}4079}{\ln 1{,}06} = 5{,}87 \text{ года.}$$

7 ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

7.1 Финансовые ренты. Основные понятия

В предыдущих главах мы рассматривали случаи, когда начисление процентов или дисконтирование производилось по отношению к одноразовому платежу (вклад, ссуда).

Между тем, оплата по заключённым сделкам может предусматривать и ряд последовательных выплат, распределённых во времени, которые называют **потоком платежей**. Примером могут служить погашение займа, арендная плата, инвестиции в производство, страховые платежи, выплаты пенсии и т.д.

Ряд последовательных фиксированных платежей, производимых через равные промежутки времени, называется **финансовой рентой** или **аннуитетом**. Первоначально рассматривались лишь ежегодные (*anno* – год на латинском языке) выплаты, откуда и произошло название «аннуитет».

Финансовая рента (далее – рента) может быть охарактеризована рядом параметров (рисунок 7.1):

- член ренты R_{t_i} – величина отдельного платежа;

- период ренты – временной интервал между двумя соседними платежами;

- срок ренты t – время от начала реализации ренты до момента начисления последнего платежа;

- процентная ставка – ставка, используемая для расчёта наращения или дисконтирования платежей, составляющих ренту;

- ***m*** – частота начисления процентов в году;

- ***p*** – частота платежей в году.

Рисунок 7.1

На практике используются различные виды финансовых рент.

При производстве платежей несколько раз в год (p раз) ренты называются p-срочными. Но встречаются ренты, у которых период между платежами может превысить год. Перечисленные ренты называются **дискретными.**

Если платежи ренты поступают непрерывно, то такая рента называется **непрерывной.**

Ренты бывают с **постоянными платежами**, т.е. $R_{t_i} = R, \; i = 1, 2, ...k,$ и с **переменными платежами.**

По моменту выплат ренты подразделяются на ренты **постнумерандо**, в которых платежи производятся в конце каждого периода ренты, и ренты **пренумерандо**, в которых платежи осуществляются в начале этих периодов. Иногда выплаты могут производиться в середине каждого периода (например выплата пенсии).

С точки зрения срока ренты делятся на **безусловные**, когда заранее оговариваются даты первой и последней выплаты, и **условные**, когда дата первой и/или последней выплат зависит от того, произойдёт или не произойдёт некоторое событие (примером может служить стипендия, выплата которой начинается после поступления абитуриента в вуз и прекращается после окончания вуза).

Если число членов ренты бесконечно, то такие ренты называются **вечными** (примером могут служить бессрочные облигации).

Обобщающими показателями ренты являются: **наращенная сумма** ренты и **современная** (**приведенная**) величина ренты. Наращенная сумма – это сумма всех членов потока платежей с начисленными на них процентами на конец срока ренты. Современная величина потока платежей – это сумма всех его членов, дисконтированных на определённый момент времени.

Обобщающие характеристики ренты используются в финансовом анализе при заключении различных коммерческих сделок, для планирования погашения задолженности, сравнения эффективности контрактов, имеющих различные условия их реализации.

7.2 Расчёт наращенной суммы и современной стоимости произвольного потока платежей

Рассмотрим общую постановку задачи. Пусть имеется ряд платежей R_{t_i}, выплачиваемых в моменты $t_i, i = 1, 2,..., k$. Общий срок выплат – t лет (рисунок 7.2). Найти наращенную на конец срока ренты сумму S_n потока платежей.

Допустим, проценты начисляются один раз в год по сложной годовой ставке i (величины $t_m - t_{m-1}, m = 1, 2,..., к$ вычисляются в годах).

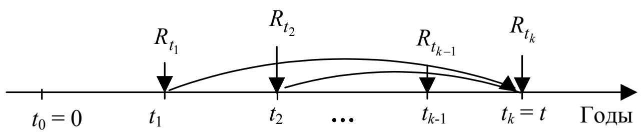

Рисунок 7.2

На платёж R_{t_1}, начисляются сложные проценты за период $(t - t_1)$ и поэтому в момент $t = t_k$ этот платеж становится равным $R_{t_1}(1 + i)^{t-t_1}$. На второй платёж начисляются проценты за период $t - t_2$ и он будет равен в момент t_k $R_{t_2}(1 + i)^{t-t_2}$ и т.д. На последний платёж R_{t_k} проценты не начисляются. В итоге наращенная сумма потока платежей

$$S_n = R_{t_1}(1+i)^{t-t_1} + R_{t_2}(1+i)^{t-t_2} + ... + R_{t_{k-1}}(1+i)^{t-t_{k-1}} + R_{t_k}.$$

$$S_n = \sum_{m=1}^{k} R_{t_m}(1+i)^{t-t_m}. \qquad (7.1)$$

Современную стоимость такого потока найдём как сумму дисконтированных платежей. Выберем момент времени, на который будем производить дисконтирование: $t_0 = 0$. Тогда

$$A_n = R_{t_1}(1+i)^{-(t_1-t_0)} + R_{t_2}(1+i)^{-(t_2-t_0)} + ... + R_{t_{k-1}}(1+i)^{-(t_{k-1}-t_0)} +$$

$$+ R_{t_k}(1+i)^{-(t_k-t_0)}.$$

$$A_n = \sum_{m=1}^{k} R_{t_m}(1+i)^{-(t_m-t_0)} = \sum_{m=1}^{k} R_{t_m} \nu^{(t_m-t_0)}, \qquad (7.2)$$

$$\nu = \frac{1}{1+i}.$$

Можно показать, что между величинами A_n и S_n существует зависимость вида:

$$S_n = A_n(1+i)^{(t_k-t_0)}, \qquad (7.3)$$

$$A_n = S_n(1+i)^{-(t_k-t_0)}. \qquad (7.4)$$

Пример 7.1 Предусматривается следующий порядок выдачи ссуды: 1 июля 2000 г. – 5 млн руб., 1 января 2001 г. – 15 млн руб., 1 января 2003 г. – 18 млн руб. Определить сумму задолженности на начало 2004 г. при условии, что проценты начисляются по ставке 20 % (рисунок 7.3).

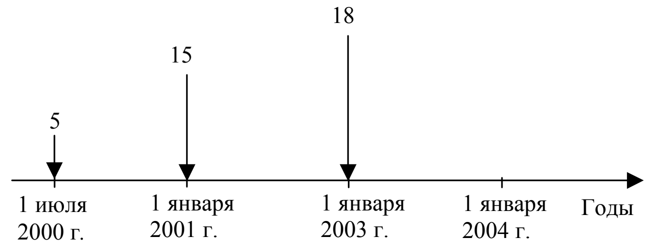

Рисунок 7.3

По формуле (7.1) найдём величину S_n:

$$S_n = 5(1+0{,}2)^{3{,}5} + 15(1+0{,}2)^{3} + 18(1+0{,}2)^{1} = 56{,}985 \text{ млн руб.}$$

По этим же данным определим современную стоимость потока на момент 1 июля 2000 г. По формуле (7.2) получим

$$A_n = 5 + 15(1+0{,}2)^{-0{,}5} + 18(1+0{,}2)^{-2{,}5} = 30{,}104 \text{ млн руб.}$$

По формуле (7.4) получим тот же результат

$$A_n = 56{,}985(1+0{,}2)^{-3{,}5} = 30{,}104 \text{ млн руб.}$$

7.3 Наращенная сумма финансовой ренты постнумерандо

В предыдущем разделе мы рассмотрели метод прямого счёта величин S_n и A_n. Этим методом можно найти наращенную сумму и современную стоимость любого потока платежей, в том числе и ренты с постоянными платежами. Однако свойства финансовой ренты с постоянными платежами позволяют получить для вычисления обобщающих характеристик ренты более компактные формулы.

Рассмотрим годовую ренту постнумерандо (рисунок 7.4). Пусть в течение t лет в конце каждого года поступают платежи по R д.е. На платежи начисляются сложные проценты по ставке i процентов годовых.

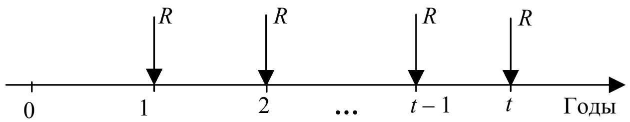

Рисунок 7.4

Наращенная к моменту t сумма (обозначим её S_p)

$$S_p = R(1+i)^{t-1} + R(1+i)^{t-2} + \ldots + R(1+i) + R\,.$$

Члены этой суммы

$$R,\quad R(1+i), \ldots, R(1+1)^{t-2}, R(1+1)^{t-1} \qquad (7.5)$$

представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом $a_1 = R$. Знаменатель прогрессии $q = (1+i)$. Число членов прогрессии $n = t$. Сумма членов прогрессии по формуле (1.8)

$$S_p = R\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)-1} = R\frac{(1+i)^t - 1}{i}. \qquad (7.6)$$

Величина $\dfrac{(1+i)^t - 1}{i}$ называется **коэффициентом наращения ренты**.

Возможны различные модификации ренты постнумерандо, например, когда платежи вносятся p раз в год, проценты начисляются m раз в год и т.д. В любом случае надо аккуратно записать ряд, состоящий из слагаемых суммы S_p, и применить уже известные нам формулы.

Рассмотрим ренту, схема которой изображена на рисунке 7.4, и допустим, что проценты на платежи начисляются m раз в год по номинальной процентной ставке i_m. В этом случае наращенная на момент t сумма

$$S_p = R\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m(t-1)} + R\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m(t-2)} + \ldots + R\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m\cdot 1} + R\,.$$

Ряд

$$R,\, R\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m}, \ldots, R\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m(t-2)}, R\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m(t-1)}$$

является геометрической прогрессией с первым членом $a_1 = R$, знаменателем $q = \left(1+\dfrac{i_m}{m}\right)^{m}$, число членов ренты – t.

Следовательно, по формуле (1.8) получим

$$S_p = R\frac{\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{mt} - 1}{\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m} - 1}. \qquad (7.7)$$

А теперь рассмотрим ренту (рисунок 7.5) с платежами R, которые вносятся p раз в год, сложные проценты начисляются один раз в год по сложной годовой ставке i.

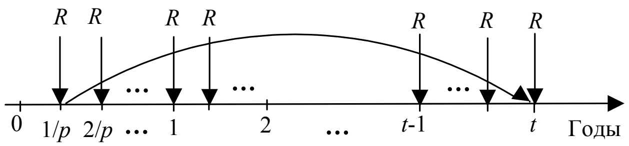

Рисунок 7.5

Очевидно платежи R вносятся через $1/p$ года. На первый платёж начисляются проценты в течение $(t-\dfrac{1}{p})$ лет, следовательно, наращенная сумма этого платежа равна $R(1+i)^{t-1/p}$. На второй платеж, внесённый через $2/p$ года, начисляются проценты в течение $(t-2/p)$ лет, т.е. наращенная сумма этого платежа равна $R(1+i)^{t-2/p}$. Наращенная сумма потока платежей

$$S_p = R(1+i)^{t-1/p} + R(1+i)^{t-2/p} + \ldots + R(1+i)^{1/p} + R.$$

Члены этой суммы представляют собой геометрическую прогрессию с $a_1 = R, q = (1+i)^{1/p}$, число членов $n = tp$, следовательно,

$$S_p = R\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^{1/p} - 1}. \qquad (7.8)$$

Пример 7.2 Страховая компания, заключившая договор с производственной фирмой на 3 года, помещает в банк под 15 % годовых с начислением процентов по полугодиям поступающие ежегодные страховые взносы – 500,0 тыс. руб. Найти сумму, полученную страховой компанией через 3 года (рисунок 7.6).

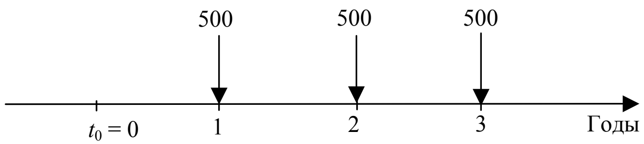

Рисунок 7.6

По условию $t = 3$; $i_m = 0{,}15$; $m = 2$.

Наращенная сумма ренты, схема которой изображена на рисунке 7.6, вычисляется так:

$$S_p = 500\left(1+\frac{0{,}15}{2}\right)^{2\cdot 2} + 500\left(1+\frac{0{,}15}{2}\right)^{2\cdot 1} + 500.$$

По формуле (7.7) получим

$$S_p = 500\frac{\left(1+\dfrac{0{,}15}{2}\right)^{2\cdot 3} - 1}{\left(1+\dfrac{0{,}15}{2}\right)^{2} - 1} = 1745{,}5 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 7.3 Для создания фонда вносятся взносы в конце каждого года в течение 5 лет. Размер одного взноса равен 4,0 д.е. На каждый взнос происходит непрерывное начисление процентов по силе роста $\delta = 0{,}185$. Найти наращенную сумму ренты.

$$S_p = R\mathring{a}^{\delta(t-1)} + R\mathring{a}^{\delta(t-2)} + \ldots + R.$$

Очевидно, $a_1 = R$, $q = e^{\delta}$, $n = t$, значит

$$S_p = R\frac{e^{\delta t} - 1}{e^{\delta} - 1} = 4{,}0\frac{e^{0{,}185\cdot 5} - 1}{e^{0{,}185} - 1} = 29{,}955 \text{ д.е.}$$

7.4 Современная величина финансовой ренты постнумерандо

Понятие современной величины (приведённой или текущей величины) было рассмотрено ранее. Как уже упоминалось, в этом случае производится оценка будущих поступлений с позиции текущего момента. Схема дисконтирования годовой финансовой ренты изображена на рисунке 7.7.

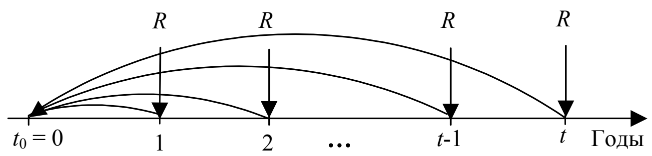

Рисунок 7.7

Эта рента описывается параметрами:

R – платёж ренты;

i – годовая процентная ставка;

t – срок ренты;

1 год – период ренты.

Текущая стоимость A_p финансовой ренты (см. рисунок 7.4) складывается из текущей стоимости каждого платежа. Оценим приведённую стоимость ренты на момент $t_0 = 0$.

Платёж, внесённый в конце первого года, дисконтируется по ставке i на момент $t_0 = 0$ и его величина равна $R(1+i)^{-1}$. Приведённая величина второго платежа равна $R(1+i)^{-2}$ и т.д. В итоге

$$A_p = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + ... + R(1+i)^{-t}.$$

По формуле (1.8), принимая $a_1 = R(1+i)^{-1}$, $q = (1+i)^{-1}$, $n = t$, получим:

$$A_p = \frac{R}{1+i} \cdot \frac{(1+i)^{-1 \cdot t} - 1}{(1+i)^{-1} - 1} = R\frac{1-(1+i)^{-t}}{i}. \qquad (7.9)$$

И по-прежнему справедливо

$$S_p = A_p(1+i)^t.$$

Величина $\frac{1-(1+i)^{-t}}{i}$ называется **коэффициентом приведения ренты**.

Приведенная стоимость ренты, схема которой приведена на рисунке 7.4, при начислении процентов m раз в год и номинальной ставке i_m вычисляется так:

$$A_p = R\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{-m\cdot 1} + R\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{-m\cdot 2} + ... + R\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{-mt}.$$

Принимая $a_1 = R(1+\frac{i_m}{m})^{-m}$, $q = (1+\frac{i_m}{m})^{-m}$, $n = t$ и применяя формулу (1.8), получим:

$$A_p = R\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{-m} \frac{\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{-mt} - 1}{\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{-m} - 1} = R\frac{\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{-mt} - 1}{1-\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{m}}. \qquad (7.10)$$

Пример 7.4 Владелец малого предприятия предусматривает создание в течение трёх лет фонда развития в размере 150 д.е. Для этого ежегодно в банк вносится 41,2 д.е. под 20 % годовых (проценты сложные). Какая сумма потребовалась бы фирме для создания фонда в 150 д.е., если бы она была помещена в банк на три года под 20 % годовых?

Для решения задачи рассчитаем текущую величину ренты с параметрами:

$R = 41{,}2$; $t = 3$; $i = 0{,}20$.

По формуле (7.9) получим

$$A_p = 41{,}2\frac{1-(1+0{,}2)^{-3}}{0{,}2} = 86{,}79 \text{ д.е.}$$

Если сумму 86,79 д.е. поместить в банк на три года под 20 % годовых, то наращенная сумма составит:

$$S(3) = 86{,}79(1+0{,}2)^3 = 149{,}973 \text{ д.е. } (\approx 150 \text{ д.е.}).$$

В то же время наращенная сумма при ежегодных платежах в размере 41,2 д.е. под 20 % годовых составит формула (7.6):

$$S_p = 41{,}2\frac{(1+0{,}2)^{-3} - 1}{(1+0{,}2)-1} = 149{,}968 \text{ д.е. } (\approx 150 \text{ д.е.}).$$

Пример 7.5 Для создания фонда вносятся рентные платежи по полугодиям в течение трёх лет по 20,6 тыс. руб. под 20 % годовых, начисление процентов ежеквартальное (рисунок 7.8). Найти современную величину ренты.

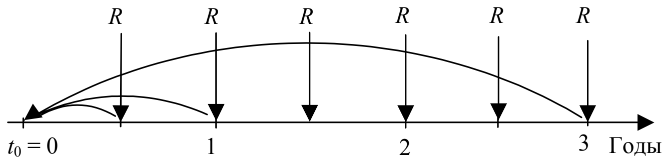

Рисунок 7.8

Параметры ренты: $i_m = 0{,}2;\ m = 4;\ t = 3;\ p = 2;\ R = 20{,}6$.

$$A_p = 20{,}6\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{-0{,}5\cdot 4} + 20{,}6\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{-1\cdot 4} + \ldots +$$

$$+\,20{,}6\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{-3\cdot 4} = \left(a_1 = 20{,}6\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{-2}, q = \left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{-2}, n = 6\right) =$$

$$= 20{,}6\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{-2}\frac{\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{-2\cdot 6}-1}{\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{-2}-1} = 20{,}6\,\frac{\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{-12}-1}{1-\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{2}} =$$

$$= 89{,}065 \text{ тыс. руб.}$$

7.5. Наращенная и текущая стоимость финансовой ренты пренумерандо

Рассмотрим финансовую ренту, в которой предполагается внесение платежей в начале каждого года (рисунок 7.9).

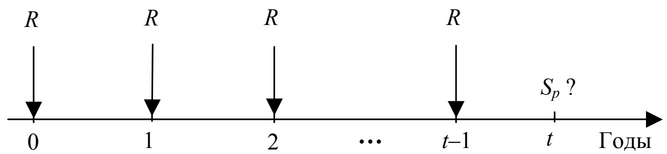

Рисунок 7.9

В этом случае наращенная сумма ренты получается суммированием следующих слагаемых:

$$S_p = R(1+i)^t + R(1+i)^{t-1} + \ldots + R(1+i) = R(1+i)\frac{(1+i)^t - 1}{1+i-1} =$$

$$= R(1+i)\frac{(1+i)^t - 1}{i}.$$

Текущая стоимость (на момент 0) такой ренты

$$A_p = R + R(1+i)^{-1} + \ldots + R(1+i)^{-(t-1)} = R\,\frac{(1+i)^{-t} - 1}{(1+i)^{-1} - 1} =$$

$$= R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-t}}{i}.$$

Пример 7.6 Ежегодно в начале года в банк вносится очередной взнос в размере 10 тыс. руб. Банк устанавливает годовую номинальную процентную ставку 20 % (рисунок 7.10). Какая сумма будет на счёте по истечении шести лет, если начисление сложных процентов происходит ежеквартально?

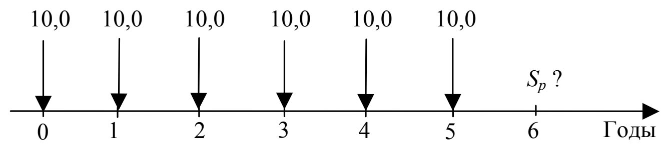

Рисунок 7.10

Параметры ренты: R = 10 тыс. руб., $i_m = 0{,}2$, $m = 4$, $t = 6$.
Наращенная сумма ренты

$$S_p = 10\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{6\cdot 4} + 10\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{5\cdot 4} + \ldots + 10\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{1\cdot 4} =$$

$$= 10\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{4}\frac{\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{4\cdot 6}-1}{\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{4}-1} = 125{,}498 \text{ тыс. руб.}$$

Приведённая на момент 0 стоимость ренты вычисляется так:

$$A_p = 10 + 10\left(1+\frac{0,2}{4}\right)^{-1\cdot 4} + 10\left(1+\frac{0,2}{4}\right)^{-2\cdot 4} + \ldots + 10\left(1+\frac{0,2}{4}\right)^{-5\cdot 4} =$$

$$= 10\frac{\left(1+\frac{0,2}{4}\right)^{-4\cdot 6} - 1}{\left(1+\frac{0,2}{4}\right)^{-4} - 1} = 38,9 \text{ тыс. руб.}$$

7.6 Определение параметров финансовых рент

При заключении коммерческих сделок может возникнуть ситуация, когда требуется определить размер разовых платежей, частоту их поступления, процентную ставку, срок ренты (предполагается, что все остальные параметры ренты известны).

Рассмотрим методы таких расчётов на примерах.

Пример 7.7 Малое предприятие, решившее в течение трёх лет создать специальный фонд в размере 150 тыс. руб., будет производить ежегодно платежи в банк под 15 % годовых (рисунок 7.11). Определить размер годового взноса.

Из условия известно: S_p = 150 тыс. руб.; $t = 3$; $i = 0,15$; $R = ?$

$$S_p = R(1+i)^2 + R(1+i) + R = R\frac{(1+i)^3 - 1}{(1+i) - 1} = R\frac{(1+i)^3 - 1}{i}.$$

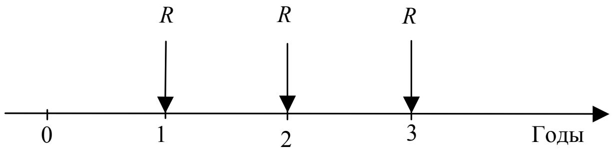

Рисунок 7.11

$$S_p = R\frac{(1+0,15)^3 - 1}{0,15} \Rightarrow R = \frac{150}{\frac{(1+0,15)^3 - 1}{0,15}} = 43,196 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 7.8 В банке получена ссуда 20000 руб. на 5 лет под 13 %

годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток (рисунок 7.12). Предполагается, что для погашения долга в банк будут вноситься одинаковые суммы в конце каждого года. Требуется определить величину годового платежа.

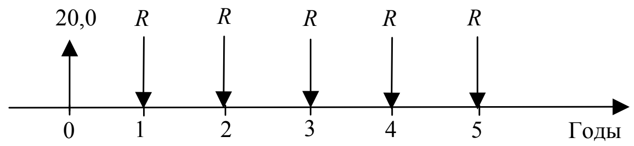

Рисунок 7.12

В рассматриваемой задаче известна текущая (на момент 0) стоимость финансовой ренты постнумерандо; $i = 0,13$; $t = 5$; R – ?

$$A_p = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \ldots + R(1+i)^{-5} = R\frac{1-(1+i)^{-5}}{i},$$

$$20000 = R1,13^{-1} + R1,13^{-2} + \ldots + R1,13^{-5} = R\frac{1-1,13^{-5}}{0,13},$$

$$R = \frac{20000 \cdot 0,13}{1-1,13^{-5}} = 5686,3 \text{ руб.}$$

Пример 7.9 Малое предприятие предполагает создать специальный фонд в размере 150 тыс. руб., для чего будет в конце каждого года вносить в банк 43,196 тыс. руб. под 15 % годовых (проценты сложные). Определить срок, необходимый для создания фонда (рисунок 7.13).

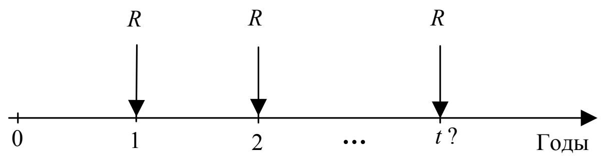

Рисунок 7.13

По условию параметры ренты равны: $R = 43,196$; $i = 0,15$; $S_p = 150$; рента постнумерандо.

По формуле (7.6) можно записать

$$S_p = R\frac{(1+i)^t - 1}{i}.$$

Преобразуем это выражение:

$$(1+i)^t = \frac{S_p}{R}i + 1.$$

Прологарифмируем последнее выражение:

$$t\ln(1+i) = \ln(\frac{S_p}{R}i + 1),$$

$$t = \frac{\ln(\frac{S_p}{R}i + 1)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln(\frac{150}{43{,}196} \cdot 0{,}15 + 1)}{\ln(1{,}15)} = \frac{0{,}41929}{0{,}13962} = 3 \text{ года.}$$

Процентная ставка является показателем доходности финансовой сделки, поэтому важно определить её в процессе подготовки контракта. Но из формул

$$S_p = R\frac{(1+i)^t - 1}{i} \text{ или } A_p = R\frac{1-(1+i)^{-t}}{i}$$

найти i достаточно сложно, если $t > 2$. Существует целый ряд математических методов, позволяющих найти величину i из вышеприведённых равенств. Мы не рассматриваем эти методы, предполагая, что в нашем распоряжении имеется компьютер с математическими пакетами программ.

Заканчивая изучение вопроса о характеристиках потока платежей следует отметить, что мы не вывели формулы для вычисления наращенной и текущей стоимости целого ряда возможных видов рент. Это сделано отчасти потому, что невозможно предусмотреть все случаи, с которыми можно столкнуться на практике, а отчасти потому, что важнее уметь самим вывести нужную формулу, чем искать готовую в книгах.

8 НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

8.1 Принципы принятия решений по инвестиционным проектам

Данная глава посвящена изложению некоторых методов анализа и оценки эффективности реальных инвестиций и сравнению эффективности альтернативных инвестиционных проектов.

В финансовом анализе рассматриваются два основных типа инвестиций:

- инвестиции в некоторые виды ценных бумаг – облигации и акции. Подобные инвестиции называются финансовыми или портфельными;
- реальные инвестиции – вложения в основные фонды и прирост материально-производственных запасов.

В любом случае, **инвестирование** – это долгосрочные вложения экономических ресурсов с целью создания объектов, приносящих выгоду в будущем. Поэтому инвестирование является одним из наиболее важных объектов деятельности любой коммерческой организации. Принятие инвестиционных решений осложняется тем, что приходится учитывать не только экономическую эффективность проекта, но и экологическую безопасность, техническую выполнимость проекта, ограниченность финансовых ресурсов, предпринимательский и финансовый риски и т.д.

Для принятия решений инвестиционного характера используются различные формализованные и неформализованные методы и критерии. Степень их сочетания определяется различными обстоятельствами, в том числе и тем, насколько менеджер знаком с имеющимися математическими моделями, которые могут служить основой для принятия решений. Тем не менее какого-то универсального метода, пригодного для всех случаев жизни, не существует. Этим определяется множественность возможных инвестиционных решений и необходимость применения неформальных методов выбора одного из них.

8.2 Выбор коммерческих контрактов

Существующий рынок товаров и услуг позволяет потребителю выбрать наиболее приемлемые условия их приобретения. При этом при необходимости заключения контракта действия потребителя определяются двумя факторами:

- ценой товара;
- условиями кредитования.

Потребитель, приобретая товар или услугу, выбирает тот, который, обладая необходимыми качественными характеристиками, имеет наиболее низкую цену на рынке. Кроме того, важнейшее значение имеет выбор производителя (продавца) товара, предоставляющего коммерческий кредит. Очень жесткие условия кредита (высокая процентная ставка, малый срок его погашения и др.) могут свести к минимуму выгоды низкой цены товара.

Существует несколько методов анализа финансовых последствий реализации коммерческих контрактов. Мы будем рассматривать один из них – метод сравнения сумм современных величин всех платежей, предусмотренных контрактами. Для покупателя, естественно, наиболее выгоден контракт с наименьшей современной величиной всех расходов по контракту.

Для вычисления современных величин всех платежей дисконтирование в сравниваемых контрактах производится по единой процентной ставке, так называемой **ставке сравнения**. При выборе ставки сравнения ориентируются, как правило, на действующий или прогнозируемый средний уровень ссудной процентной ставки. Иногда выбирают и более конкретные ориентиры – доходность определённых ценных бумаг, банковских операций и т.д. Так или иначе, но сравнение различных контрактов производится на основе одной и той же ставки, которая отличается от процентных ставок, предлагаемых в контрактах. Ставка сравнения превышает наибольшую или меньше наименьшей ставки по контрактам.

Очевидно, что полученные по ставке сравнения современные величины являются условными показателями, но и смысл их заключается только в том, чтобы определить рейтинг контрактов.

Пример 8.1 Строительная фирма готова выполнить работы по строительству объекта стоимостью 10,0 млн д.е. Срок сооружения – полгода. Фирма предлагает два варианта погашения коммерческого кредита.

Вариант 1. 10 % стоимости объекта выплачивается при заключении контракта, 10 % – при сдаче объекта. Остаток кредита погашается в течение четырёх лет равными ежегодными выплатами. Льготный период отсутствует.

Вариант 2. 10 % стоимости объекта выплачивается при заключении контракта, 12 % – при сдаче объекта. Предусматривается льготный период – 6 месяцев (выплата процентов в конце периода). Остаток кредита погашается в течение шести лет равными ежегодными выплатами.

Проценты за кредиты в обоих вариантах – 15 %. Выбрать наиболее выгодный для заказчика контракт.

Примем ставку сравнения $i_{ср}$, равную 10 %.

Рассмотрим вариант 1. По этому варианту схема платежей представлена на рисунке 8.1.

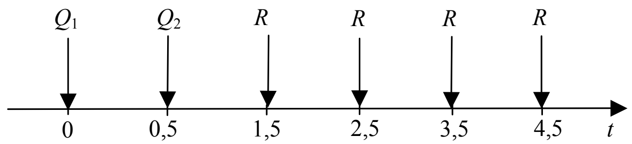

Рисунок 8.1

Стоимость объекта $S(0) = 10{,}0$ млн д.е. Размеры авансовых платежей по условию:

$$Q_1 = 10{,}0 \cdot 0{,}1 = 1 \text{ млн д.е;}$$

$$Q_2 = 10{,}0 \cdot 0{,}1 = 1 \text{ млн д.е.}$$

Нам необходимо вычислить размер R ежегодных выплат (в конце года) для погашения долга.

Очевидно, в момент $t = 0{,}5$ сумма долга (после выплаты авансовых платежей)

$$A_D = S(0) - Q_1 - Q_2 = 10{,}0 - 1{,}0 - 1{,}0 = 8{,}0 \text{ млн д.е.}$$

Величина A_D представляет собой приведённую (на момент $t = 0{,}5$) стоимость ренты постнумерандо:

$$A_D = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + R(1+i)^{-4} = R\frac{1-(1+i)^{-4}}{i};$$

$$8{,}0 = R\frac{1-1{,}15^{-4}}{0{,}15};$$

$$R = \frac{8}{2{,}854978} = 2{,}80212 \text{ млн д.е.}$$

Таким образом, мы знаем размеры всех платежей в 1-м варианте контракта. Теперь мы должны найти сумму A_1 всех платежей, приведённых на момент $t = 0$ по ставке сравнения $i_{\text{ср}} = 0{,}10$:

$$A_1 = Q_1 + Q_2(1+i_{\text{ср}})^{-0{,}5} + R(1+i_{\text{ср}})^{-1{,}5} + R(1+i_{\text{ср}})^{-2{,}5} +$$

$$+ R(1+i_{\text{ср}})^{-3{,}5} + R(1+i_{\text{ср}})^{-4{,}5} = 1{,}0 + 1{,}0(1+0{,}1)^{-0{,}5} +$$

$$+ 2{,}80212(1{,}1^{-1{,}5} + 1{,}1^{-2{,}5} + 1{,}1^{-3{,}5} + 1{,}1^{-4{,}5}) = 10{,}42242 \text{ млн д.е.}$$

Выполним расчёт платежей по 2-му варианту (рисунок 8.2).

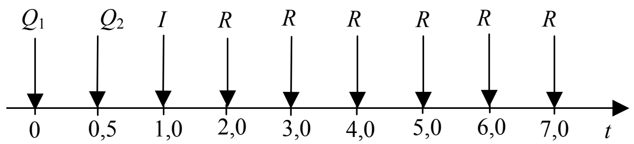

Рисунок 8.2

$$Q_1 = 10{,}0 \cdot 0{,}1 = 1 \text{ млн д.е.}$$

$$Q_1 = 10{,}0 \cdot 0{,}12 = 1{,}2 \text{ млн д.е.}$$

Долг заказчика на момент $t = 0{,}5$

$$D = 10{,}0 - 1{,}0 - 1{,}2 = 7{,}8 \text{ млн д.е.}$$

Через полгода, т.е. в момент времени $t = 1$ по контракту следует выплатить проценты за пользование кредитом:

$$I = 7{,}8(1+0{,}15)^{0{,}5} - 7{,}8 = 0{,}56457 \text{ млн д.е.}$$

В момент времени $t = 1$ современная стоимость шести платежей $A_D = 7{,}8$ млн д.е. Найдём платеж R из формулы

$$A_D = R\frac{1-(1+i)^{-t}}{i},\ t = 6.$$

$$R = \frac{A_D i}{1-(1+i)^{-t}} = \frac{7{,}8 \cdot 0{,}15}{1-1{,}15^{-6}} = 2{,}06105 \text{ млн д.е.}$$

Теперь найдём современную стоимость (в момент $t = 0$) потока платежей, изображённого на рисунке 8.2.

Сначала найдём современную стоимость при $t = 1$ финансовой ренты постнумерандо, состоящей из шести платежей размера $R = 2{,}06105$ млн д.е., помним, что процентная ставка сравнения (дисконтирования) равна 0,1:

$$A_R = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 2{,}06105 \cdot \frac{1-1{,}1^{-6}}{0{,}1} = 8{,}97641 \text{ млн д.е.}$$

Таким образом, современная стоимость A_2 потока платежей по второму варианту составляет:

$$A_2 = Q_1 + Q_2\left(1+i_{\text{ср}}\right)^{-0{,}5} + I\left(1+i_{\text{ср}}\right)^{-1} + A_R\left(1+i_{\text{ср}}\right)^{-1} =$$

$$= 1{,}0 + 1{,}2(1+0{,}1)^{-0{,}5} + 0{,}56457(1+0{,}1)^{-1} + 8{,}97641(1+0{,}1)^{-1} =$$

$$= 10{,}81776 \text{ млн д.е.}$$

Получили $A_1 < A_2$, следовательно, заказчику более выгоден первый вариант контракта.

На практике коммерческие контракты могут значительно отличаться друг от друга своими параметрами (ценой товара, уровнем процентных ставок, сроком кредита и т.п.). И в этом случае выбор оптимального контракта сводится к расчёту современных величин, в которых учитываются все особенности каждого контракта.

8.3 Анализ эффективности инвестиционных проектов

Экономический анализ эффективности планируемых инвестиций является сложной задачей. Для выбора наилучших объектов и вариантов вложения средств во всём мире применяются несколько методик. Чаще всего они основаны на использовании следующих четырёх показателей:

1) чистая текущая стоимость;

2) внутренняя норма доходности;

3) период окупаемости;

4) индекс рентабельности.

Построим модель потока денежных расходов и поступлений в некотором инвестиционном проекте.

Пусть инвестиционный проект начинается в момент $t_0 = 0$ с капиталовложения в размере $S(0)$ д.е., а затем в моменты

$$t_1,\ t_2,...,t_n,\ 0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$$

происходит расход (инвестиции) $S(t_k)$ и чистые денежные поступления $C(t_k)$ д.е., $k = 1, 2,\ldots, n$ (рисунок 8.3).

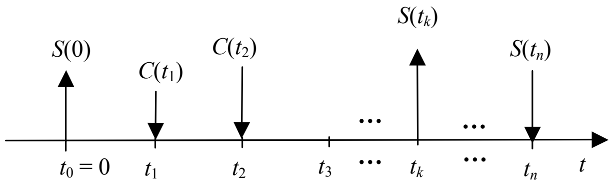

Рисунок 8.3

Чистая текущая (приведённая) стоимость обозначается ***NPV*** – аббревиатура от английского *Net Present Value*, вычисляется по формуле

$$NPV = \sum_{k=1}^{n} C(t_k)(1+i)^{-t_k} - \sum_{k=0}^{n} S(t_k)(1+i)^{-t_k}\ . \qquad (8.1)$$

В формуле (8.1) предполагается, что величины $S(t_k)$ и $C(t_k)$ могут быть равны нулю в некоторые моменты t_k в зависимости от того, была ли произведена инвестиция или получен доход в момент t_k. Кроме того, мы считаем, что вопрос о соответствии единиц измерения процентной ставки i и периода дисконтирования урегулирован.

Очень важным моментом является выбор уровня процентной ставки i, по которой производится дисконтирование. Эта ставка должна отражать ожидаемый усреднённый уровень ссудного процента на финансовом рынке и учитывать риск инвестиционного процесса. То есть необходимо добавлять некоторую рисковую премию, учитывающую риск, связанный с неопределённостью получения дохода

от конкретного капиталовложения, так и рыночный риск, вызванный конъюнктурой.

Очевидно, что если:

$NPV > 0$, то проект безубыточный;

$NPV < 0$, то проект убыточный;

$NPV = 0$, то проект ни прибыльный, ни убыточный.

Видимо, значение $NPV < 0$ приводит к решению отклонить рассматриваемый инвестиционный проект. Значения $NPV = 0$ и $NPV > 0$ говорят о том, что требуются дополнительные исследования для решения вопроса о приемлемости инвестиционного проекта.

Внутренняя норма доходности (*IRR*) широко используется при анализе эффективности инвестиционных проектов. Смысл этого показателя заключается в следующем. Для реализации инвестиционного проекта требуется привлечь финансовые средства. Но может быть вложение этих средств на банковский депозит окажется более выгодным (и менее рискованным), чем вложение в инвестиционный проект. То есть задача заключается в сравнении доходности от вложения средств на банковский депозит и в инвестиционный проект. Доходность вложения на банковский депозит определяется рыночной процентной ставкой i на момент $t_0 = 0$, а доходность вложений в инвестиционный проект (на тот же момент времени $t_0 = 0$) находится из уравнения

$$NPV(i) = \sum_{k=1}^{n} C(t_k)(1+i)^{-t_k} - \sum_{k=0}^{n} S(t_k)(1+i)^{-t_k} = 0\,, \qquad (8.2)$$

где i полагается неизвестной величиной.

Это уравнение называется **уравнением стоимости** или **уравнением доходности** для проекта на момент 0.

Если у уравнения $NPV(i) = 0$ существует единственный положительный корень i_0, то его называют **ставкой доходности проекта** или **внутренней нормой доходности (*IRR*)** за базовую единицу времени.

Если $i_0 = IRR < i$, то инвестиционный проект следует отвергнуть. Если $i_0 = IRR > i$, то соответствующий проект в принципе можно принять.

Нахождение корня уравнения (8.2) – не простая задача, но в ее решении нам помогут математические пакеты программ для персональных компьютеров и следующая теорема.

Теорема 8.1 Пусть $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ и для каждого момента t_k известны величины всех нетто-платежей по проекту.

$$f(t_k) = S(t_k) - C(t_k),\ k = \overline{0, n}.$$

Построим последовательность накопленных сумм:

$$F_0 = f(t_0),\ F_1 = f(t_0) + f(t_1),\ F_2 = f(t_0) + f(t_1) + f(t_2), ...$$

$$...F_n = f(t_0) + f(t_1) + ... + f(t_n).$$

Если $F_0 \neq 0$ и $F_n \neq 0$ и если после исключения нулевых значений последовательность $F_0, F_1, ..., F_n$ имеет ровно одну перемену знака, то уравнение доходности (8.2) имеет единственный положительный корень, т.е. i_0 определено.

В этом случае график функции $NPV(i)$ представлен на рисунке 8.4.

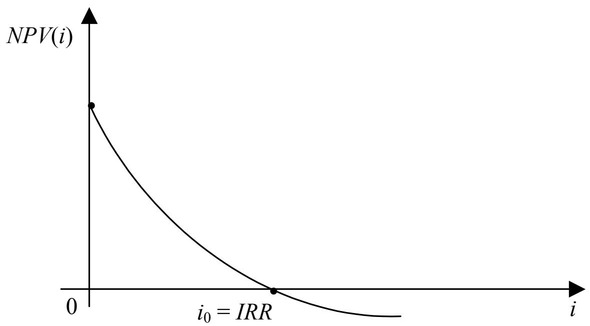

Рисунок 8.4

Срок окупаемости (*PP*) инвестиций – срок, за который можно вернуть инвестированные в проект средства – очень важный показатель при анализе инвестиционных проектов. Существует несколько методов нахождения срока окупаемости инвестиций. Мы рассмотрим один из них, учитывающий временной аспект.

Если при расчёте NPV принята ставка i, то

$$PP = \min_{k:1 \le k \le n}\left(\sum_{s=0}^{k} f(t_s)(1+i)^{-t_s} \ge 0\right). \qquad (8.3)$$

Основной недостаток показателя срока окупаемости заключается в том, что он не учитывает весь период действия инвестиций, т.е. на величину PP не оказывают влияния те доходы, которые появляются после момента полного возмещения вложенных средств.

В целом срок окупаемости является не столько критерием выбора инвестиционного проекта, сколько ограничением: если срок окупаемости больше допустимой для данной фирмы величины, то проект просто исключается из рассмотрения.

Индекс рентабельности (***PI***) проекта представляет собой отношение суммы всех дисконтированных денежных доходов от инвестиций к сумме всех дисконтированных инвестиционных расходов

$$PI = \left(\sum_{k=1}^{n} C(t_k)(1+i)^{-t_k}\right) \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} S(t_k)(1+i)^{-t_k}\right). \qquad (8.4)$$

Если $PI < 1$, то проект должен быть отклонён, а среди проектов, у которых $PI > 1$ следует отдать предпочтение проекту с наибольшим индексом рентабельности. Однако следует иметь в виду, что не всегда проект с самым большим индексом рентабельности будет иметь и самую высокую чистую текущую стоимость.

Рассмотренные четыре финансовых показателя эффективности инвестиционных проектов могут не позволить однозначно выбрать один из возможных вариантов инвестиций. Поэтому обычно следуют такой методике. Прежде всего, все учитываемые суммы очищаются от налогов. Затем, если для фирмы особенно важен период окупаемости, то сначала на его основе отбрасывают неприемлемые варианты. Если этот показатель для фирмы не очень важен, то его не применяют вообще. Далее обычно применяют два из трёх финансовых показателей: чистая текущая стоимость, внутренняя норма доходности и индекс рентабельности. При этом финансовые аналитики делают выбор показателей на основе своего опыта.

Пример 8.2 Коммерческая организация рассматривает целесообразность приобретения технологической линии. Стоимость линии составляет 10 млн д.е., срок эксплуатации – 5 лет, износ на оборудование начисляется по методу равномерной амортизации, ликвидационная стоимость оборудования будет достаточна для покрытия расходов, связанных с демонтажем линии. Выручка от реализации продукции прогнозируется по годам в следующих объёмах (тыс. д.е.):

6800, 7400, 8200, 8000, 6000. Текущие расходы по годам оцениваются следующим образом: 3400 тыс. д.е. в первый год эксплуатации линии с последующим ежегодным ростом их на 3 %. Ставка налога на прибыль составляет 30 %. Сложившееся финансово-хозяйственное положение коммерческой организации таково, что коэффициент рентабельности авансированного капитала составлял 21–22 %. Руководство организации не считает возможным участвовать в проектах, срок окупаемости которых более четырёх лет.

Целесообразен ли данный проект (используется ставка дисконтирования 19 %)?

Анализ проекта выполняется в три этапа:

1) расчёт чистых денежных поступлений по годам;

2) расчёт аналитических показателей;

3) анализ показателей.

Этап 1. Расчёты приведены в таблице (8.1).

Таблица 8.1

Денежные потоки, тыс. д.е.	Правило вычисления	Годы				
		1	2	3	4	5
1 Выручка	По условию	6800	7400	8200	8000	6000
2 Текущие расходы	стб$_i$ = стб$_{i-1}$ · 1,3 i = 2, 3, 4, 5	3400	3502	3607	3715	3827
3 Амортизация	10000:5	2000	2000	2000	2000	2000
4 Налогооблагаемая прибыль	стр.1 – стр.2 –стр.3	1400	1898	2593	2285	173
5 Налоги на прибыль	стр.4 · 0,3	420	569	778	686	52
6 Чистая прибыль	стр.4 – стр.5	980	1329	1815	1599	121
7 Чистые денежные поступления	стр.3 + стр.6	2980	3329	3815	3599	2121

Денежный поток выглядит, как показано на рисунке 8.5.

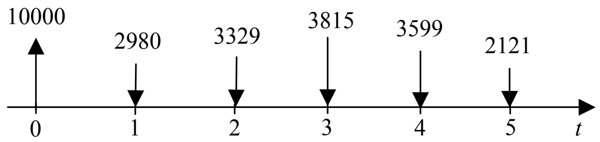

Рисунок 8.5

Этап 2. Расчёт аналитических показателей.

Чистая приведённая стоимость.

Процентная ставка i = 19 %.

$$NPV = 2980(1+0{,}19)^{-1} + 3329(1+0{,}19)^{-2} + 3815(1+0{,}19)^{-3} +$$

$$+ 3599(1+0{,}19)^{-4} + 2121(1+0{,}19)^{-5} - 10000(1+0{,}19)^{0} =$$

$$= -198 \text{ тыс. д.е.}$$

Внутренняя норма доходности.

Составим уравнение доходности проекта

$$2980(1+i)^{-1} + 3329(1+i)^{-2} + 3815(1+i)^{-3} + 3599(1+i)^{-4} +$$

$$+ 2121(1+i)^{-5} - 10000 = 0.$$

Это нелинейное уравнение имеет единственный положительный корень и этот корень $i_0 = IRR = 18{,}1\,\%$.

Срок окупаемости проекта.

$Z_0 = 10000 \cdot 1{,}19^{0} = -10000;$ $\quad Z_3 = 3815 \cdot 1{,}19^{-3} = 2263{,}88;$

$Z_1 = 2980 \cdot 1{,}19^{-1} = 2504{,}09;$ $\quad Z_4 = 3599 \cdot 1{,}19^{-4} = 1794{,}82;$

$Z_2 = 3329 \cdot 1{,}19^{-2} = 2350{,}82;$ $\quad Z_5 = 2121 \cdot 1{,}19^{-5} = 888{,}70;$

$Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 < 0.$

Следовательно, срок окупаемости $PP > 5$ лет.

Индекс рентабельности.

$$PI = \frac{2504{,}09 + 2350{,}82 + \ldots + 888{,}70}{10000} = \frac{9802{,}37}{10000} = 0{,}9802.$$

Этап 3. Анализ показателей. Очевидно, что проект следует отклонить. Он является убыточным по всем показателям.

9 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

По учебному плану студенты дневной формы обучения выполняют расчетно-графическую работу, а студенты безотрывной формы обучения – контрольную работу.

Номера задач, которые необходимо выполнить, определяются с помощью таблицы 9.1. В первом столбце указан номер варианта контрольной работы, который соответствует двум последним цифрам шифра студента. В последующих столбцах приведены номера задач, которые следует выбрать из восьми разделов.

Таблица 9.1

Номер варианта	**Номер раздела**							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
01	1	2	3	4	5	6	7	8
02	2	3	4	5	6	7	8	9
03	3	4	5	6	7	8	9	10
04	4	5	6	7	8	9	10	11
05	5	6	7	8	9	10	11	12
06	6	7	8	9	10	11	12	13
07	7	8	9	10	11	12	13	8
08	8	9	10	11	12	13	14	9
09	9	10	11	12	13	14	15	10
10	10	11	12	13	14	15	16	11
11	11	12	13	14	15	16	17	12
12	12	13	14	15	16	17	18	13
13	13	14	15	16	17	18	19	10
14	14	15	16	17	18	19	20	1
15	15	16	17	18	19	20	1	2
16	16	17	18	19	20	1	2	3
17	17	18	19	20	1	2	3	4
18	18	19	20	1	2	3	4	5
19	19	20	1	2	3	4	5	6
20	20	1	2	3	4	5	6	7
21	1	3	5	7	9	11	13	8
22	2	4	6	8	10	12	14	9
23	3	5	7	9	11	13	15	10
24	4	6	8	10	12	14	16	11
25	5	7	9	11	13	15	17	12
26	6	8	10	12	14	16	18	13
27	7	9	11	13	15	17	19	1
28	8	10	12	14	16	18	20	2

Продолжение таблицы 9.1

Номер варианта	**Номер раздела**							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
29	9	11	13	15	17	19	1	3
30	10	12	14	16	18	20	2	4
31	11	13	15	17	19	1	3	5
32	12	14	16	18	20	2	4	6
33	13	15	17	19	1	3	5	7
34	14	16	18	20	2	4	6	8
35	15	17	19	1	3	5	7	9
36	16	18	20	2	4	6	8	10
37	17	19	1	3	5	7	9	11
38	18	20	2	4	6	8	10	12
39	19	1	3	5	7	9	11	13
40	20	2	4	6	8	10	12	1
41	1	4	7	10	13	16	19	2
42	2	5	8	11	14	17	20	3
43	3	6	9	12	15	18	1	4
44	4	7	10	13	16	19	2	5
45	5	8	11	14	17	20	3	6
46	6	9	12	15	18	1	4	7
47	7	10	13	16	19	2	5	8
48	8	11	14	17	20	3	6	9
49	9	12	15	18	1	4	7	10
50	10	13	16	19	2	5	8	11
51	11	14	17	20	3	6	9	12
52	12	15	18	1	4	7	10	13
53	13	16	19	2	5	8	11	12
54	14	17	20	3	6	9	12	11
55	15	18	1	4	7	10	13	10
56	16	19	2	5	8	11	14	9
57	17	20	3	6	9	12	15	8
58	18	1	4	7	10	13	16	7
59	19	2	5	8	11	14	17	6
60	20	3	6	9	12	15	18	1
61	1	5	9	13	17	1	5	9
62	2	6	10	14	18	2	6	10
63	3	7	11	15	19	3	7	11
64	4	8	12	16	20	4	8	12
65	5	9	13	17	1	5	9	13
66	6	10	14	18	2	6	10	4
67	7	11	15	19	3	7	11	5

Продолжение таблицы 9.1

Номер варианта	**Номер раздела**							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
68	8	12	16	20	4	8	12	6
69	9	13	17	1	5	9	13	7
70	10	14	18	2	6	10	14	8
71	11	15	19	3	7	11	15	9
72	12	16	20	4	8	12	16	10
73	13	17	1	5	9	13	17	1
74	14	18	2	6	10	14	18	2
75	15	19	3	7	11	15	19	3
76	16	20	4	8	12	16	20	4
77	17	1	5	9	13	17	1	5
78	18	2	6	10	14	18	2	6
79	19	3	7	11	15	19	3	7
80	20	4	8	12	16	20	4	8
81	1	6	11	16	1	6	11	11
82	2	7	12	17	2	7	12	12
83	3	8	13	18	3	8	13	13
84	4	9	14	19	4	9	14	12
85	5	10	15	20	5	10	15	11
86	6	11	16	1	6	11	16	1
87	7	12	17	2	7	12	17	2
88	8	13	18	3	8	13	18	3
89	9	14	19	4	9	14	19	4
90	10	15	20	5	10	15	20	5
91	11	16	1	6	11	16	1	6
92	12	17	2	7	12	17	2	7
93	13	18	3	8	13	18	3	8
94	14	19	4	9	14	19	4	9
95	15	20	5	10	15	20	5	10
96	16	1	6	11	16	1	6	11
97	17	2	7	12	17	2	7	12
98	18	3	8	13	18	3	8	13
99	19	4	9	14	19	4	9	10
100	20	5	10	15	20	5	10	9

Работа, выполненная не по своему варианту, считается незачтённой и возвращается студенту для переработки.

З а д а н и е 1

1 На первоначальный долг 15000 д.е. начисляются простые проценты по годовой процентной ставке 0,12. Выведите формулу для определения этого долга через n лет. Вычислите величину долга через 6 лет.

2 Банк начисляет своим клиентам дивиденды в виде простых процентов по годовой процентной ставке 0,1. Определите величину вклада через n лет, через 5 лет, если сумма первоначального вклада 200 д.е.

3 Определите величину процентов и величину наращенной суммы при начислении простых процентов по процентной ставке i для контрактов со следующими параметрами (таблица 9.2).

Таблица 9.2

Параметр	Номер контракта					
	1	2	3	4	5	6
$S(0)$	7000	2000	6000	5000	1000	10000
n, лет	4	3	5	2	6	5
i	0,1	0,6	0,8	0,12	0,14	0,04

4 Используя три варианта расчета процентов (в зависимости от выбора временной базы и числа дней в сроке долга), сравните финансовые результаты для следующих контрактов, связанных с определением погасительного платежа при начислении простых процентов по годовой процентной ставке i на сумму первоначального долга $S(0)$ (таблица 9.3).

Таблица 9.3

Номер контракта	Первоначальный долг $S(0)$	Время выдачи K_1	Время погашения K_2	Процентная ставка i
1	100	10.02	22.09	0,1
2	200	18.05	30.12	0,09
3	500	22.09	01.03	0,11
4	4000	13.03	30.06	0,12
5	100	20.01	05.10	0,08

Примечание. При точном вычислении числа дней в сроке долга день выдачи и день погашения долга считаются равными одному дню (например, с 20.01 по 26.01 имеем 7 дней – 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, в то же время 26 - 20 = 6), т.е. $\tau = K_2 - K_1$, где K_1, K_2 – порядковые номера дней выдачи и погашения в году. При приближенном вычислении числа дней в сроке долга день выдачи н день погашения долга принимаются равными одному дню (например, с 25.01 по 10.02 имеем 15 дней: 6 дней января, 10 дней февраля минус один день). Если долг взят и погашен в разные годы (рисунок 9.1), то его срок $\tau = 365 - K_1 + K_2$.

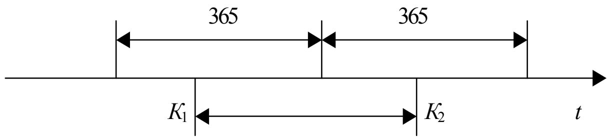

Рисунок 9.1

5 За время пользования долгом величина начисленных процентов составила 20000 д.е. при временной базе 360 дней. Найти аналогичную сумму при расчете ее по точному варианту начисления простых процентов, т.е. при временной базе 365 дней.

6 За время пользования долгом величина процентных денег составила 25000 д.е. при временной базе 365 дней. Найти величину процентных денег при расчете их по обыкновенному (банковскому) варианту при тех же остальных условиях начисления простых процентов.

7 При начислении простых процентов за время пользования долгом по годовой процентной ставке 0,1 и временной базе 365 дней получены проценты в сумме 15000 д.е. Определите величину эквивалентной годовой процентной ставки для получения тех же процентов при временной базе 360 дней за тот же срок долга.

8 В контракте предусмотрено начисление простых процентов в следующем порядке: в первом году по годовой процентной ставке 0,08, в каждом последующем полугодии процентная ставка увеличивается на 0,005. Определите величину наращенного вклада через три года, если сумма первоначального вклада равна 10000 д.е.

9 Ежемесячно на сумму вклада начисляются простые проценты по годовой процентной ставке 0,12. Определите величину наращенного вклада в конце второго квартала, если начисляемые каждые два месяца проценты капитализировались, а величина первоначального вклада, сделанного в начале года, равна 20000 д.е.

10 Кредит на сумму 3000000 д.е. открыт на три года под процентную ставку 0,05. Кредит погашается равными суммами в конце каждого месяца. Определите величину ежемесячных погасительных платежей, если на сумму кредита начисляются простые проценты.

11 По условиям контракта должник уплачивает 36000 д.е. через 100 дней. Кредит предоставлен под годовую процентную ставку 0,08. Определите величину кредита и сумму дисконта при временной базе

365 дней, если для дисконтирования погашаемого долга используется математический учет простыми процентами.

12 В условиях контракта задачи 11 срок долга 120 дней, процентная ставка 0,12, погашаемый долг 130000 д.е.

13 Вексель выдан на сумму 300000 д.е. с уплатой 26.11. Владелец векселя учел его в банке 03.10 по годовой учетной ставке 0,06. Определите сумму, которую получит владелец при банковском учете векселя простыми процентами (дисконтами), и величину дисконта, который получит банк после погашения векселя.

14 При величинах погашаемого долга и срока пользования им, указанных в задаче 13, определите ту величину годовой учетной ставки, при которой владелец векселя не получит ни одного цента при его учете.

15 Определите величину срока долга, при котором банк приобретет вексель за 1 д.е., используя для его дисконтирования банковский учет простыми дисконтами по учетной ставке 0,08, если в векселе проставлена сумма 35000 д.е.

16 Ссуда в 100000 д.е. выдана в невисокосном году 10.01 до 06.10 под годовую учетную ставку 0,08. Найдите размер погасительного платежа при условии, что наращение производится простыми процентами.

17 В условиях задачи 16 оцените величину годовой учетной ставки, при которой величина первоначального долга возрастает в 5 раз.

18 Обязательство уплатить через 180 дней сумму 50000 д.е. и начисленные на нее простые проценты по годовой процентной ставке 0,08 было учтено за 120 дней до окончания срока долга. Определите полученную при учете сумму, если он проводился простыми дисконтами по годовой учетной ставке 0,1.

19 Определите срок долга, который необходим для того, чтобы первоначальный долг $S(0)$ вырос до величины $S(n)$ при условии, что на сумму долга будут начислены простые проценты по годовой процентной (учетной) ставке к временной базе, согласно условиям контрактов (таблица 9.4).

Таблица 9.4

Номер контракта	Параметры			
	$S(n)$	$S(0)$	$i(d)$	K
1	10500	10000	0,08	365(360)
2	13000	12000	0,1	365(360)
3	20000	18000	0,12	365(260)
4	100000	90000	0,1	365(360)

20 Контракт предусматривает погашение долга в сумме 15000 д.е. через 100 дней. Сумма первоначального долга 14000 д.е. Определите доходность операции для кредитора в виде годовой процентной и учётной ставок при начислении простых процентов и временной базе 360 дней.

Задание 2

1 В банк на сберегательный счет положены 2000 д.е. Банк начисляет сложные проценты по годовой процентной ставке 0,08. Выведите формулу величины вклада через *n* лет и найдите сумму вклада через 5 лет.

2 В условиях задачи 1 через 6 лет годовая процентная ставка снижена до 0,06. Найдите величину вклада после того, как прошло ещё 6 лет.

3 Кредит в размере 30000 д.е. выдан на срок 3 года и 160 дней при начислении сложных процентов по годовой процентной ставке 0,065 с временной базой 365 дней. Определите величину долга к концу срока.

4 Господин Иванов отметил своё 60-летие и получил от фирмы, в которой он работает, чек на 1000 д.е. Эти деньги он решил использовать, начиная с 70-летнего возраста. Для этого он положил указанную сумму денег на счет в банке под годовую процентную ставку 0,10 для начисления сложных процентов на 10 лег. Определите величину процентных денег, которые получит господин Иванов через 10 лет.

5 В условиях задачи 4 определите величину процентов, которые можно получить в 75-летнем возрасте при годовой процентной ставке 0,08.

6 Годовая процентная ставка начисления сложных процентов за кредит установлена на уровне 0,08 плюс надбавка величиной 0,5 % от суммы ссуды в первые два года и 0,8 % в следующие два года. Определите величину множителя наращения к концу срока кредита.

7 На счет в банке сделан вклад 5000 д.е. Банк начисляет на вклад сложные проценты по годовой процентной ставке 0,08. Если проценты начисляют ежеквартально, то какова станет величина вклада через 3 года, а также величина номинальной процентной ставки?

8 4000 д.е. положены на депозит. Найдите величину вклада через 1 год и через 4 года при ежемесячном начислении сложных процентов по годовой номинальной процентной ставке 0,06.

9 На ссуду 10000 д.е. начисляются сложные проценты в конце каждого квартала по годовой номинальной процентной ставке 0,05. Определите величину долга через 5 и 10 лет.

10 В условиях задачи 9 срок ссуды 10 лет, проценты начисляются: а) в конце каждого полугодия по номинальной годовой процентной ставке 0,12; б) в конце каждого месяца по номинальной годовой процентной ставке 0,12.

11 Определите наращенную сумму долга, если сложные проценты на первоначальный долг 10000 д.е. начисляются: а) один раз в году; б) 4 раза в году по годовой номинальной процентной ставке 0,1 в течение 1,5 года.

12 Банк начисляет сложные проценты на вклад исходя из годовой номинальной процентной ставки 0,12. Найдите эффективную годовую процентную ставку при ежедневной и при ежеквартальной капитализации процентов при временной базе 365 дней.

13 Известно, что эффективная процентная ставка равна 0,06 (0,08; 0,1; 0,12). Определите номинальную процентную ставку при начислении сложных процентов за 12 (6; 4; 2) периодов в году.

14 Клиент банка готов положить некоторую сумму денег на депозит на 4 года с ежегодным начислением сложных процентов по годовой процентной ставке 0,1. В конце этого срока клиент желает получить сумму в 10000 д.е. для покупки автомобиля. Как велик должен быть вклад, чтобы желание клиента сбылось?

15 Определите современную величину суммы 50000 д.е., которая будет выплачена через 5 (10, 20) лет при учете этой суммы сложными процентами (дисконтами) по годовой процентной ставке 0,05.

16 В условиях задачи 15 дисконтирование производится сложными процентами по годовой номинальной процентной ставке 0,05 четыре раза в году в течение 5 лет.

17 Определите величину дисконта при продаже финансового инструмента на сумму 5000 д.е., если до срока погашения осталось 2,5 года. Банк, покупающий этот финансовый инструмент, применяет для учета сложные проценты по годовой учетной ставке 0,08.

18 В условиях задачи 17 дисконтирование производится сложными процентами 4 раза в году.

19 2000 д.е. должны быть возвращены через 5 лет. Определите современную величину погашаемого долга и эффективную учетную

ставку, если дисконтирование долга осуществляется ежеквартально сложными процентами по годовой номинальной учетной ставке 0,05.

20 При выдаче кредита на 180 дней под годовую процентную ставку 0,08 начисления простых процентов кредитор удержал комиссионные в размере 0,5 % от суммы кредита. Какова эффективность операции в виде эффективной процентной ставки для кредитора ($K = 365$)?

21 В условиях задачи 20 кредит выдается под сложные проценты на 2 года.

22 Вексель учтен простыми дисконтами по годовой учетной ставке 0,1 за 160 дней до его погашения. При выполнении операции учета с владельца векселя удержали комиссионные в размере 0,5 %. Определите доходность операции в виде эффективной процентной ставки ($K = 360$).

Задание 3

1 На первоначальную сумму долга 1000000 д.е. непрерывно начисляются проценты по силе роста 0,075 в течение 10 лет. Определите наращенную сумму.

2 Определите величину силы роста при начислении сложных процентов на вклад $S(0)$ в течение n лет, $S(0) = 100$ д.е.; $S(4) = 110$ д.е.; $S(10) = 2S(0)$; $S(8) = 3S(0)$.

3 Вклад, на который в течение двух лет непрерывно начислялись сложные проценты по силе роста d, а в последующие 4 года – по силе роста $2d$ удвоился. Найдите величину силы роста d.

4 На первоначальный вклад 2000 д.е. в течение трех лет непрерывно начисляли сложные проценты по силе роста 0,06. Затем еще в течение четырех лет – по силе роста 0,08. Найдите величину вклада через 7 лет.

5 Найдите срок удвоения вклада при непрерывном начислении на него процентов по силе роста 0,08. Определите срок утроения того же вклада.

6 Выразите в форме $y = a \cdot e^{kt}$ следующие функции: $y = 2^t$; $y = 1000 \cdot 2^{t/3}$; $y = 5(1{,}04)^t$; $y = 6 \cdot 10^8(1{,}05)^{-t}$.

7 Компания по переработке древесины владеет лесоматериалом «на корню», стоимость которого в t году оценивается по формуле $V(t) = 2(1 + 0{,}3t)$. Годовая процентная ставка в рассматриваемый период времени при начислении сложных процентов равна 0,1. Определите современную стоимость лесоматериала, если он обрабатывается и продается через 1 год, 6, 7 и 8 лет. Дайте рекомендации по использованию лесного массива.

8 Инвестиционная компания купила гостиничные апартаменты за 5,5 млн д.е., а спустя 4 года продала их за 9 млн д.е. Найдите величину силы роста на инвестированные деньги и ежегодный прирост капитала в процентах.

9 Два года назад фирма купила машину за 6000 д.е., современная оценка которой 4500 д.е. Предполагая, что стоимость машины амортизируется по экспоненциальному закону, определите стоимость машины через последующие 3 года от сегодняшнего дня.

10 В период с 1985 по 1990 г. прибыль компании увеличивалась ежегодно в среднем на 12 %. В 1990 году она составила 5200000 д.е. Предполагая, что годовой прирост постоянен, найдите прибыль в 1995 году.

11 Число служащих N компании зависит от количества выпускаемой этой компанией продукции x по закону $N = 100 \cdot e^{0,2x}$. Средняя зарплата составляет 6 д.е. в час при 35-часовой рабочей неделе. Компания продает продукцию по 2000 д.е. за единицу продукции. Изобразите график еженедельных затрат на зарплату и дохода как функции x, если $10 < x < 130$. Укажите интервал изменения величины x, в котором компания может иметь прибыль.

12 Две фирмы имеют годовые обороты 1 млн д.е. и 2 млн д.е. соответственно. Оборот первой фирмы растет ежемесячно на 2 %, а оборот второй – уменьшается на 1 %. Определите, когда годовые обороты фирм станут одинаковыми.

13 На некоторую сумму начисляются непрерывные проценты по силе роста, изменяющейся дискретно во времени, а именно первые два года ее величина равна 0,08, а следующие три года – 0,09, далее в течение 5 лет – 0,1. Определите множитель наращения.

14 Начальное значение силы роста равно 0,1, а годовой прирост силы роста составляет 0,025. Определите множитель наращения для 5-летнего срока.

15 Предполагается, что сила роста с начальным уровнем 0,09 ежегодно увеличивается на 10 %. Определите величину множителя наращения для 5-летнего срока.

16 Определите величину начального значения силы роста, если сумма долга удваивается за 5 лет, а годовой темп изменения (роста)

силы роста установлен на уровне 1,1.

17 Определите срок долга в годах, за который сумма 8000 д.е. выросла до 10000 д.е. при начислении сложных процентов по процентной ставке 0,07: а) один раз в году; б) ежеквартально; в) ежемесячно.

18 Определите срок удвоения суммы долга при начислении непрерывных процентов по силе роста, изменяющейся с постоянной величиной в год на 10 % и начальной величиной 0,1.

19 Сбербанк выпускает сертификаты номиналом 1000 д.е. Выкупная цена зависит от срока хранения сертификата. При пятилетнем сроке выплачивается 1500 д.е., при десятилетнем – 2500 д.е. Определите, при каких величинах годовых процентных ставок при начислении сложных процентов возможны такие выплаты.

20 Вексель учитывается за два года до погашения. Определите величину годовой учетной ставки при дисконтировании суммы, указанной в векселе, сложными процентами, если владелец векселя получит 90 % суммы векселя.

З а д а н и е 4

1 Определите сумму наращенного вклада при различных способах (i_n, i_c, d_n, d_c) начисления процентов на первоначальный вклад 1000 д.е. при заданных значениях годовых процентных ставок $i_n = i_c = d_n = d_c = 0{,}06$ для сроков вклада: а) $n_1 = 0{,}5$ года; б) $n_2 = 2$ года.

2 Найдите число лет, необходимое для увеличения вклада в L раз при различных способах начисления процентов на первоначальный вклад $S(0)$ для следующих контрактов (таблица 9.5).

Таблица 9.5

Контракт	1	2	3	4	5	6	7
Показательный вклад $S(0)$, тыс. д.е.	100	100	200	200	50	50	300
Увеличение вклада в L раз	2	4	2	1,5	3	4	5
Процентные ставки $i_n = i_c = d_n = d_c$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,9	0,1	0,12

3 Определите величину первоначального вклада, необходимого для получения суммы $S(n)$ = 2000 д.е. при различных способах начисления процентов и заданных значениях годовых процентных ставок $i_n = i_c = d_n = d_c = 0{,}03$ для сроков вкладов $n_1 = 0{,}6$ года, $n_2 = 2$ года.

4 Определите значение годовой учетной ставки, эквивалентной годовой процентной ставке 0,1 при начислении простых процентов в течение срока долга, имеющего следующие значения: 1, 3, 5, 1/2, 1/4, 1/12 года.

5 Определите значение годовой учетной ставки при начислении простых процентов, эквивалентной годовой процентной ставке при начислении простых процентов в течение одного года, если i_n принимает значения: 0,05; 0,06; 0,07; 0,08; 0,09; 0,1.

6 Определите значение годовой процентной ставки при начислении простых процентов, эквивалентной годовой учетной ставке при начислении простых процентов в течение одного года, если d_n принимает значения: 0,05; 0,06; 0,07; 0,08; 0,09; 0,1.

7 Докажите, что если сумма, инвестированная для начисления сложных процентов m раз в году по годовой процентной ставке j, то эффективная процентная ставка определяется по формуле $i_{эф} = \left(1 + \dfrac{j}{m}\right)^m - 1$, а при непрерывном начислении – по формуле $i_{эф} = e^{\delta} - 1$.

8 Найдите эффективную процентную ставку, соответствующую начислению сложных процентов по годовой номинальной процентной ставке 0,08: а) один раз в полугодие; б) ежеквартально; в) ежемесячно; г) непрерывно.

9 Найдите годовую номинальную процентную ставку, соответствующую эффективной процентной ставке 0,084, если сложные проценты начисляются один раз: а) в полугодие; б) в квартал; в) в месяц; г) непрерывно.

10 Определите доходность, измеренную величиной годовой процентной ставки при начислении простых процентов, если вексель учитывается простыми дисконтами по годовой учетной ставке 0,1, а срок уплаты по векселю 260 дней при временной базе, составляющей 365 дней для процентной ставки и 360 – дней для учетной ставки.

11 Операция учета по годовой процентной ставке даёт 20 % дохода в год. Определите доходность операции по годовой учетной ставке, если она проводится также простыми процентами при 60-дневном сроке ссуды.

12 Определите, какой годовой процентной ставкой при начислении сложных процентов можно заменить в контракте годовую про-

центную ставку 0,18 при начислении простых процентов, не изменяя финансовых отношений сторон, если срок операции 500 дней, а временная база 365 дней.

13 Вексель учитывается простыми дисконтами по годовой учетной ставке 0,08 при временной базе 360 дней. Определите эффективность этой операции, выраженную в годовой процентной ставке при начислении сложных процентов, если срок оплаты векселя наступает через 120 дней.

14 При разработке контракта стороны договорились о том, что эффективная годовая доходность финансовой операции должна составить 0,09. Определите номинальную процентную ставку при начислении сложных процентов каждый месяц.

15 На начальную сумму ссуды предусматривается непрерывное начисление процентов по силе роста, изменяющейся дискретно по следующей схеме: первые два года она равна 0,08, следующие три года – 0,09 и далее в течение 5 лет – 0,1. Определите множитель наращения и эквивалентную годовую процентную ставку при начислении сложных процентов.

16 В контракте предусматривается начисление простых процентов по годовой процентной ставке в следующих размерах: первые полгода – 0,1, затем год – 0,12 и последующие полгода 0,15. Определите эквивалентную этим условиям среднегодовую процентную ставку и наращенную сумму, если величина первоначального долга равна 10000 д.е.

17 Что лучше для вкладчика:

– непрерывное начисление процентов по силе роста 0,05 или начисление сложных процентов по годовой процентной ставке 0,052;

– непрерывное начисление процентов по силе роста 0,06 или начисление сложных процентов каждые полгода по годовой номинальной процентной ставке 0,061;

– непрерывное начисление процентов по силе роста 0,08 или ежеквартальное начисление сложных процентов по годовой номинальной процентной ставке 0,082?

18 Годовая процентная ставка по ссуде при начислении сложных процентов определена на уровне 0,08 плюс надбавка 0,005 в первые два года, 0,008 – в последующие три года. Найдите среднюю годовую процентную ставку.

19 Имеются два обязательства. Условия первого: величина погашаемого долга – 500 д.е., срок долга – 4 месяца. Условие второго: величина погашаемого долга – 550 д.е., срок долга – 10 месяцев. Можно ли считать эти обязательства эквивалентными, если долг учитывается простыми дисконтами по годовой учетной ставке $d_n = 0{,}8$ ($d_n = 0{,}06$)? Какова должна быть учетная ставка для равноценных финансовых обязательств?

20 Два платежа – 10000 д.е. и 5000 д.е. со сроками 120 и 160 дней, отсчитываемыми от одного дня, заменяются одним платежом со сроком 200 дней (от того же дня). При выполнении этой операции используются простые проценты с годовой процентной ставкой 0,08 для временной базы 365 дней. Определите величину нового платежа.

21 На 01.09 консолидируются три платежа 10, 20 и 30 тыс. д.е. со сроками 01.05, 01.06 и 01.08. Найдите величину консолидированного платежа при использовании простых процентов по годовой процентной ставке 0,1 и временной базе 365 дней.

Задание 5

1 Два векселя, один на 1000 д.е. и сроком до 01.06, другой на 2000 д.е. и сроком до 01.09 заменяются одним с продлением срока до 01.10. При объединении векселей применяются простые проценты с годовой учетной ставкой 0,09. Определите новую сумму долга, если временная база равна 360 дней.

2 Два платежа 10000 д.е. и 20000 д.е. со сроками 120 и 150 дней, отсчитываемыми от одного дня, заменяются одним платежом со сроком 200 дней (от того же дня) с начислением сложных процентов по годовой процентной ставке 0,08 и временной базе 365 дней. Определите величину нового платежа.

3 Платежи 1000 д.е., 2000 д.е. и 3000 д.е., которые должны уплачиваться соответственно через 60, 90 и 120 дней после некоторой даты, решено заменить на один платеж, равный 6500 д.е. Определите срок выплаты консолидированного платежа при использовании простых процентов с годовой процентной ставкой 0,1.

4 В условиях задачи 3 величина консолидированного платежа равна 6000 д.е. Для определения срока долга воспользуйтесь приближенной формулой.

5 Платежи 10000 д.е., 20000 д.е. и 30000 д.е. со сроками погашения 2, 3 и 5 лет решено заменить консолидированным платежом в 60000 д.е. Определите срок нового платежа, если используются

сложные проценты с годовой процентной ставкой 0,08.

6 Два обязательства 10000 д.е. и 5000 д.е. должны быть погашены 01.11 и 01.01 соответственно. Однако стороны, пересмотрев условия договоров, решили, что должник 01.12 уплачивает 6000 д.е., а остальной долг гасит 01.03. Необходимо определить сумму погашаемого остатка при использовании простых процентов с годовой процентной ставкой 0,06.

7 Обязательства об уплате 10000 д.е. через 5 месяцев и 90000 д.е. через 9 месяцев пересмотрены так, что выплаты будут произведены равными суммами через 4 и 6 месяцев. Для определения величин этих выплат использовались простые проценты с годовой процентной ставкой 0,08. Найдите эти суммы, если временная база равна 360 дням.

8 Существующее обязательство о выплате первоначального долга 90000 д.е. с начисленными на него сложными процентами по годовой процентной ставке 0,08 через 5 лет пересмотрено так, что первая выплата размером в 3000 д.е. будет произведена через 2 года, а оставшаяся сумма гасится через 4 года. Определите сумму окончательного долга.

9 Вексель был куплен за 180 дней до погашения, при этом его учет произвели простыми дисконтами по учетной ставке 0,07. Через 50 дней вексель продали, проведя его учет простыми дисконтами по учетной ставке 0,065. Определите эффективность сделки, измеренную в виде годовой процентной ставки, соответствующей начислению: а) простых процентов; б) сложных процентов.

10 В условиях задачи 9 величина учетной ставки, используемой для учета векселя в момент его продажи, не задана. Определите значения этой учетной ставки, при которых сделка «купли-продажи векселя» была бы не убыточна.

11 Сертификат куплен за 1020 руб. за 170 дней до его выкупа, а через 90 дней он был продан за 1060 руб. Определите доходность операции в виде процентной ставки при начислении: а) простых процентов; б) сложных процентов.

12 Сертификат номиналом 100 тыс. руб. с объявленной доходностью 12 % годовых, начисляемых простыми процентами, и сроком на 720 дней куплен по цене 110 тыс. руб. за 250 дней до погашения. Определите доходность инвестиций в виде эффективной процентной ставки.

13 Сертификат сроком на 720 дней с объявленной доходностью 10 % годовых, начисляемых простыми процентами, был приобретен в момент его эмиссии по номинальной цене 100 тыс. руб. Затем он был продан за 200 дней до погашения. Рыночная процентная ставка в момент продажи равна 0,08. Определите эффективность данной операции.

14 Финансовый инструмент, приносящий постоянный доход, купленный за 200 дней до погашения, через 100 дней продан. В момент покупки годовая процентная ставка на рынке равнялась 0,1, а в момент продажи – 0,08. Определите доходность операции «купли-продажи финансового инструмента» в виде эффективной процентной ставки.

15 На сумму 20000 д.е. начисляются сложные проценты в течение трех лет по годовой процентной ставке 0,08. Годовой темп прироста инфляции 0,03. Определите: а) наращенную сумму без учета инфляции; б) наращенную сумму с учетом инфляции; в) брутто-ставку; г) наращенную сумму по брутто-ставке.

16 Стоимость машины, купленной за 10000 д.е., восстанавливается с момента покупки (производятся амортизационные отчисления). Стоимость машины изменилась во времени в зависимости от числа лет t её эксплуатации по закону $V(t) = 10000 \cdot e^{-0,2t}$. Найдите величину амортизационных отчислений через 8 лет. Рассчитайте величину ежегодных отчислений в процентах.

17 Наблюдения показали, что рыночная цена акции изменялась с 1988 г. по 1993 г. по закону $R(t) = 4 \cdot (1,2)^t$ д.е., где t – время в годах, начиная с 1988 г. Определите цену акции в 1993 г. Предполагая, что этот закон сохраняется, определите, через какое время стоимость акции возрастет до 20 д.е. Рассчитайте ежегодный прирост стоимости акции в процентах.

18 Между январем 1990 г и январем 1994 г. индекс потребительских цен I_p (уровень инфляции) вырос со 121 до 636. Определите годовой темп прироста цен за этот период в процентах. Выразите индекс цен в форме $a \cdot e^{kt}$, если величина индекса цен при $t = 0$ соответствует индексу цен в январе 1990 г. Предполагая темп прироста индекса цен постоянным, установите, когда индекс цен достигнет величины 5000?

19 Ежемесячный прирост инфляции составляет 10 %. Рассчитайте годовой прирост инфляции. Запишите закон изменения инфляции в

форме $a \cdot e^{bt}$, где $a = 1$, b – темп роста инфляции за год. Определите, когда индекс цен (уровень инфляции) достигнет 1000 %.

20 На финансовом рынке величина оборота банка, млн д.е., зависит от затрат на рекламу по закону $S = 10000(1 - e^{-0{,}001x})$, где x – ежемесячные затраты на рекламу. Определите величину оборота, если $x = 500$ д.е. (1000 д.е.).

21 Численность населения в стране ежегодно увеличивается на 3 %. Каков должен быть темп прироста национального продукта, чтобы через 20 лет произошло его удвоение на душу населения?

Задание 6

1 Создается страховой фонд. В конце каждого года делается взнос в размере 40000 д.е. и на собранные деньги начисляются сложные проценты по годовой процентной ставке 0,1. Выведите формулу наращенной суммы через n лет. Определите размер фонда через 10 лет.

2 В условиях задачи 1 сложные проценты начисляются ежеквартально по годовой процентной ставке 0,12.

3 В конце каждого года клиент банка вкладывает 2000 д.е. на счет в банке, где ежегодно на вклады начисляют сложные проценты по годовой процентной ставке 0,1. Найдите величину вклада через 12 лет после первого взноса (с учётом последнего вклада).

4 В начале каждого месяца клиент банка инвестирует 200 д.е. на сберегательный счёт, на них ежемесячно начисляют сложные проценты по процентной ставке 0,005 в месяц. Какова будет величина вклада через 2 года (с учётом последнего 25-го вклада)?

5 Через 6 лет компания должна отдать долг по векселям в размере 1 млн д.е. Для того чтобы аккумулировать эту сумму, компания планирует выплачивать в начале каждого года в страховой фонд некоторую сумму R. Последний взнос компания делает за год до оплат векселей. Если фонд начисляет сложные проценты по годовой процентной ставке 0,08, то какова должна быть величина ежегодных вкладов?

6 Найдите величину сбережения на конец: а) десятого года, если в конце каждого года депонируется 1000 д.е. для начисления сложных процентов по годовой процентной ставке 0,08; б) пятого года, если в конце каждого года депонируется 2000 д.е. для начисления сложных процентов по годовой процентной ставке 0,06; в) четвертого года, если в конце каждого полугодия депонируется 500 д.е. для начисления сложных процентов по годовой процентной станке 0,06; г) шестого года, если в конце каждого квартала депонируется 1000 д.е. для начисления сложных процентов по годовой процентной ставке 0,08; д) третьего года, если в конце каждого месяца депонируется 200 д.е. для начисления сложных процентов по годовой процентной ставке 0,12; ж) пятого года, если в конце каждых четырех месяцев депонируется 500 д.е. для начисления сложных процентов по годовой процентной ставке 0,09.

7 Для создания страхового фонда ежегодно выделяется 4000 д.е. На аккумулируемые средства начисляются сложные проценты по годовой процентной ставке 0,06. Определите общую сумму фонда через 5 лет, если: а) средства поступают в конце каждого года, а проценты начисляются каждые полгода; б) средства поступают в конце каждого квартала, а проценты начисляются каждые полгода; в) поступления и начисления производятся каждый квартал.

8 Условия контракта предусматривают ежегодные взносы в сумме 40000 д.е. в течение 5 лет. Определите наращенную к концу срока ренты сумму при непрерывном начислении сложных процентов по силе роста 0,06 с учетом того, что взносы производятся: а) раз в конце года; б) каждое полугодие; в) поквартально.

9 В условиях задачи 8 задана эффективная процентная ставка 0,06. Определите наращенную сумму при непрерывном начислении сложных процентов.

10 Для начала своей деятельности небольшая коммерческая фирма решила взять кредит в банке. Ежемесячные выплаты, осуществляемые должником, дисконтируются по процентной ставке 0,01. Кредит предоставляется при условии, что он будет погашен за 24 месяца. Фирма, оценив свои возможности и предлагаемые условия, решила, что она может выплачивать в месяц 1500 д.е. Какова сумма максимального кредита?

11 Каждый член ренты 500 д.е., выплачиваемый в конце года, дисконтируется сложными процентами по годовой процентной ставке 0,06. Определите современную величину ренты при условии, что срок ренты равен 10 годам.

12 Величина члена ренты, равного 1000 д.е., ежеквартально дисконтируется сложными процентами по номинальной годовой процентной ставке 0,1. Срок ренты 4 года. Рассчитайте современную величину ренты.

13 Нефтяная компания должна ежемесячно выплачивать господину Петрову пенсию 300 д.е. Предполагая, что годовая номинальная процентная ставка равна 0,12 при начислении сложных процентов, посчитайте современную величину 48 пенсионных выплат, если первая выплата будет сделана в первый месяц текущего года. Определите также современную величину 96 и 144 пенсионных выплат.

14 Господину Сидорову исполнилось 65 лет. Начиная со своего 66-летия он хотел бы в течение последующих 10 лет получать ежегодно по 5000 д.е. Страховая компания начисляет на вклады сложные проценты по годовой процентной ставке 0,08. Какую сумму должен положить Сидоров на счет в страховую компанию, чтобы осуществить свое желание?

15 Молодожены имеют годовой доход 45000 д.е. Ипотечный банк даёт в долг сумму, которая должна постоянно погашаться одной третьей месячного дохода. Если банк использует начисление сложных процентов по месячной процентной ставке 0,012 и долг погашается в течение 25 лет, то какова может быть величина взятого кредита?

16 Владельцы химического завода в Бхопале (Индия) предложили в качестве компенсации за ущерб, нанесенный окружающей среде в результате аварии, выплатить 200 млн дол. в течение 35 лет ежемесячными равными платежами. Найдите современную величину указанной компенсации при ежемесячном дисконтировании платежей сложными процентами по годовой процентной ставке 0,1.

17 По контракту необходимо выплачивать ежегодно 10000 д.е. в течение 5 лет. Какая сумма необходима для выполнения условий контракта при начислении на платежи сложных процентов по годовой номинальной процентной ставке 0,08, если: а) выплаты производятся один раз в конце года, проценты начисляются раз в полгода; б) выплаты производятся ежеквартально, начисление процентов каждый квартал?

18 В начале каждого года на счет инвестируют 2000 д.е. для начисления сложных процентов по годовой процентной ставке 0,08. Определите величину вклада: а) к концу года; б) к концу 5-го года.

19 Определите размер одинаковых взносов в конце каждого года при начислении на них сложных процентов по годовой процентной ставке 0,08 для: а) создания к концу 5-го года фонда, равного 1 млн д.е.; б) погашения текущей задолженности, равной 1 млн д.е., в течение 5 лет.

20 Господин Иванов берет долг на 5 лет под недвижимость. Через 5 лет величина долга станет равной 19500 д.е. Чтобы вернуть этот долг, Иванов планирует класть ежемесячно в банк некоторую сумму денег *R*. На эти вклады банк начисляет ежемесячно сложные проценты по годовой процентной ставке 0,09. Первый взнос Иванов делает немедленно, а последний – перед оплатой закладной. Какова должна быть величина ежемесячных взносов, если закладная оплачивается полностью?

21 Определите величину депонируемой суммы в конце: а) каждого года, чтобы к концу 6-го года сумма вклада составила 15000 д.е. при начислении сложных процентов по годовой процентной ставке 0,08; б) каждого полугодия, чтобы к концу 10-го года сумма вклада составила 50000 д.е. при начислении каждые полгода сложных процентов по годовой процентной ставке 0,06; в) каждых трех месяцев, чтобы к концу 4-го года сумма вклада составила 20000 д.е. при ежеквартальном начислении сложных процентов по годовой процентной ставке 0,08; г) каждого месяца, чтобы к концу 3-го года сумма вклада составила 8000 д.е. при ежемесячном начислении процентов по годовой процентной ставке 0,12.

Задание 7

1 Семья делает равные ежемесячные вклады для начисления на них сложных процентов по месячной процентной ставке 0,005. Спустя 3 года после открытия счета деньги со счета были сняты, и на них был куплен дом. Определите величину ежемесячных взносов, если стоимость дома 8000 д.е.

2 Отец решил дать своему сыну через 8 лет университетское образование. Он подсчитал, что к этому моменту ему необходимо иметь 20000 д.е. Для этого он решил депонировать ежемесячно некоторую сумму денег *R* под сложные проценты по годовой процентной ставке 0,06. Найдите величину *R*.

3 Служащий госучреждения решил отправиться через 5 лет в туристическую поездку по Австралии. Для этого он начал ежегодно депонировать некоторую сумму под сложные проценты по процентной ставке 0,06, чтобы накопить сумму 15000 д.е. Определите величину одинаковых ежегодных вкладов.

4 Чтобы через 10 лет приобрести оборудование по цене 120000 д.е., фирма планирует создать резервный фонд. Сумма ежеквартальных взносов, которые депонируются под сложные проценты,

начисляемые каждый квартал по годовой процентной ставке 0,08, равна 1986,69 д.е. После 34-го взноса (8,5 лет) годовая процентная ставка увеличилась до 0,12. Определите величину квартальных взносов в оставшийся период.

5 Фирма планирует купить через 12 лет оборудование за 200000 д.е. Чтобы осуществить этот план, фирма каждый год вкладывает деньги в резервный фонд для начисления сложных процентов по годовой процентной ставке 0,06. Первоначальные взносы были по 11855,41 д.е. После 8 лет банк увеличил годовую процентную ставку до 0,08. Какой величины были взносы в оставшийся период?

6 Вычислите сумму, получаемую в конце каждого: а) года в течение 8 лет, если за аннуитет при начислении сложных процентов по годовой процентной ставке 0,06 заплатили 30000 д.е.; б) месяца в течение трех лет, если аннуитет получен за счет вложения 25000 д.е. при начислении сложных процентов по годовой процентной ставке 0,12.

7 Ожидаемая продолжительность жизни для мужчин после ухода на пенсию равна 12 годам. Если мужчина в 25 лет имеет 100000 д.е. для приобретения аннуитета, то какую ежегодную пенсию он может получать при начислении сложных процентов по годовой процентной ставке 0,08?

8 Госпожа Иванова получила наследство 10000 д.е., которые она вложила под начисление сложных процентов по годовой процентной ставке 0,06 для приобретения аннуитета. Иванова желает в конце каждого года брать сумму R для отдыха на Гавайях. Определите величину R, если последняя выплата использована через 10 лет.

9 Господин Петров, уходя на пенсию, инвестировал 120000 д.е. на сберегательный счет для начисления сложных процентов по годовой процентной ставке 0,05. В начале каждого года он берет некоторую сумму R для своих расходов в наступающем году. Если последние деньги получены через 15 лет, какова должна быть величина R?

10 В задаче 9 определите величину вклада, если выплаты производятся в течение 10 лет.

11 Текущий долг выплачивается в течение 40 месяцев одинаковыми платежами. Величина долга 5000 д.е. Если на долг начисляются сложные проценты по ежемесячной процентной ставке 0,01, какова должна быть величина ежемесячного взноса для погашения долга?

12 Если в задаче 11 долг выплачивается в течение 18 месяцев, то какова должна быть величина ежемесячных взносов для погашения долга?

13 Сумма долга банку 6000 д.е. Банк начисляет на долг сложные проценты по годовой процентной ставке 0,12. Погасительные выплаты производятся в конце каждого года. Если долг погашается за 4 года, то каковы ежегодные погасительные выплаты?

14 Кредит 40000 д.е. выплачивается ежемесячными платежами в течение 25 лет (300 платежей). Посчитайте величину ежемесячных взносов, если на долг начисляются сложные проценты по процентной ставке 0,0075 в месяц.

15 В задаче 14 кредит гасится за: а) 20 лет; б) 5 лет; в) 15 лет.

16 Клиент банка имеет возможность приобрести новый автомобиль по цене 15000 д.е. со скидкой в 10 %. Необходимую сумму он берет в кредит в банке, где начисляются сложные проценты по месячной процентной ставке 0,012. Определите величину ежемесячных равных погасительных платежей за кредит, выплачиваемых за 48 месяцев.

17 Господин Сидоров покупает автомобиль за 20000 д.е. с 15 %-ной скидкой. Остаток он занимает в банке, где начисляют на сумму долга сложные проценты по годовой процентной ставке 0,009 ежемесячно. Определите величину ежемесячных погасительных взносов, если долг гасится 36 ежемесячными выплатами. Какова величина процентных денег после 30 выплат?

18 Семья планирует купить новый автомобиль за 10000 д.е. Эту сумму семья взяла в долг на 36 месяцев под сложные проценты по процентной ставке 0,0075 в месяц. Определите величину ежемесячных выплат.

19 В задаче 18 существует альтернативный вариант покупки автомобиля, а именно за 3 года до приобретения автомобиля в конце каждого месяца в течение 36 месяцев семья кладет на сберегательный счет под сложные проценты по процентной ставке 0,005 в месяц некоторую сумму, чтобы к моменту покупки иметь необходимые деньги. За это время цена автомобиля увеличивается ежегодно на 5 %. Определите величину ежемесячных вкладов, чтобы можно было купить машину.

20 В конце какого года сумма станет равной: а) 5486645 д.е. при депонировании в конце каждого года 100 д.е. для начисления сложных процентов по годовой процентной ставке 0,06; б) 2950,21 д.е.

при депонировании 75 д.е, в конце каждого месяца для начисления сложных процентов по годовой процентной ставке 0,06.

21 1 млн д.е., вложенный в проект, приносит в течение 15 лет ежегодно доход в 100 тыс. руб. Определите доходность инвестиций, выраженную в годовой процентной ставке, если доход выплачивается: а) в конце каждого года; б) в конце каждого квартала.

22 В течение 10 лет необходимо создать страховой фонд за счет ежегодных взносов по 100 тыс. д.е. Определите величину процентной ставки, по которой должны начисляться сложные проценты для создания фонда величиной 2 млн д.е.

Задание 8

1 Пятилетний контракт предусматривает, что после первого платежа 5000 д.е., производимого в конце первого года, последующие платежи ежегодно увеличиваются на 1000 д.е. При этом на платежи начисляются сложные проценты по годовой процентной ставке 0,08. Определите наращенную сумму потока платежей данного контракта, а также его современную величину.

2 По условиям контракта в течение трех лет в конце каждого полугодия выплачиваемые платежи увеличиваются на 1000 д.е., при этом величина первого платежа равна 1000 д.е., и в течение всего срока контракта начисляются сложные проценты по годовой процентной ставке 0,1. Определите наращенную сумму потока платежей, а также его современную величину.

3 По контракту 200000 д.е. текущего долга погашается в течение 6 лет потоком ежегодно возрастающих на величину первой выплаты платежей с начислением в конце каждого года на остаток долга сложных процентов по годовой процентной ставке 0,05. Определите размеры платежей в потоке.

4 Контракт предусматривает погашение задолженности в конце каждого года в течение 8 лет потоком возрастающих на 10 % платежей с первой выплатой в 18000 д.е. и ежегодным начислением сложных процентов по годовой процентной ставке 0,06 на сумму оставшегося долга. Найдите современную величину и наращенную сумму такого потока платежей.

5 В условиях задачи 4 платежи осуществляются в конце каждого квартала и первый платеж равен 4500 д.е.

6 Проект кредитуется в четыре этапа: сначала предоставляется

30000 д.е., затем через полгода – 70000 д.е., еще через год – 150000 д.е., после чего еще через 1,5 года предоставляется 200000 д.е. Определите величину задолженности по кредиту через 4 года с момента предоставления первой суммы кредита, а также современную величину кредита на момент предоставления первой суммы кредита, если кредит дается под сложные проценты по годовой процентной ставке 0,09.

7 Четырехгодичный контракт предусматривает взносы в 2 этапа с начислением на них сложных процентов по годовой процентной ставке 0,08 на первом этапе в течение первых 1,5 лет и по годовой процентной ставке 0,1 на втором этапе в последующие 2,5 года. На первом этапе взносы по 5000 д.е. производятся в конце каждого полугодия. На втором этапе взносы по 8000 д.е. производятся в конце каждого квартала. Определите наращенную сумму потока платежей.

8 Предполагается, что непрерывно и равномерно поступающий в течение 20 лет ежегодный доход от эксплуатации нефтяного месторождения составит 10 млн д.е. Оцените наращенную сумму такого потока платежей, если на них ежегодно начисляются сложные проценты по годовой процентной ставке 0,1.

9 В условиях задачи 8 на платежи непрерывно начисляются проценты по силе роста 0,1.

10 Определите срок, за который наращенная сумма станет в 6 раз больше годовых взносов, если взносы поступают непрерывно и равномерно, и на них непрерывно начисляются проценты по силе роста 0,06.

11 Выразите через силу роста доходность инвестиций в 1 млн д.е., если ежегодная отдача от них в 150000 д.е. поступает равномерно в течение 10 лет.

12 Отдача от 1 млн д.е., инвестированных в проект, составляет в первый год 300000 д.е. В последующие 5 лет отдача ежегодно возрастает на 10000 д.е. Определите доходность инвестиций, измеренную в виде непрерывной процентной ставки.

13 Планируется с момента $t=0$ ежегодно увеличивать выпуск продукции на 200000 д.е. в течение трех лет. В начальный момент $t=0$ выпуск продукции оценивается в 5 млн д.е. Определите суммарный стоимостной объем выпуска продукции с непрерывно начисляемыми процентами по силе роста 0,08.

ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

1 В чем заключается смысл понятия «временна́я ценность денег»?

2 В чем состоит экономический смысл кредитной операции? Что такое проценты (процентные деньги)?

3 Какие виды процентных ставок Вы знаете? В каких случаях применяется каждая из ставок?

4 Перечислите параметры, характеризующие кредитную операцию.

5 Укажите схему формирования величины процентной ставки.

6 Запишите формулу наращения по простым процентам. Дайте графическую интерпретацию указанной формулы. Обычные и точные проценты.

7 В чем заключается смысл операции дисконтирования? Запишите формулы дисконтирования по простым процентам (банковский и математический учет).

8 Как связаны между собой простая процентная ставка i и простая учетная ставка d (запишите формулу)?

9 Что такое вексель? Как производится учет векселей?

10 Какую из ставок (i или d) выгоднее использовать кредитору? Докажите Ваше утверждение графически.

11 Запишите формулу наращения по сложной процентной ставке i. Дайте графическую интерпретацию указанной формулы.

12 Какая процентная ставка – простая или сложная – выгоднее для дебитора? Подтвердите Ваше утверждение графически.

13 Запишите формулу дисконтирования по сложной учетной ставке. Какую ставку – сложную процентную или сложную учетную – выгоднее использовать дебитору (кредитору)? Подтвердите Ваше утверждение графически.

14 Что такое номинальная процентная ставка? Напишите формулу наращения при начислении процентов m раз в год.

15 Допустим, задана процентная ставка i. Что выгоднее для дебитора – начисление процентов один раз в год или m раз в год? Рассмотрим случаи простых и сложных проценов.

16 Наращение процентов при произвольной длине интервала наращения.

17 Когда возникает необходимость в непрерывном начислении процентов? Запишите формулы наращения дисконтирования при постоянной силе роста.

18 Выполните вывод формулы наращения при условии, что сила роста зависит от времени линейно.

19 Какое влияние оказывают налоги на величину наращенной суммы?

20 Что такое инфляция, индекс цен, темп инфляции?

21 При каком условии не будет происходить эрозии капитала при начислении простых процентов?

22 При каком условии не будет происходить эрозии капитала при начислении сложных процентов?

23 Дайте характеристику четырем видам процентных ставок, существующих при наличии инфляции.

24 Какие ставки называются эквивалентными? В чем заключается идея вычисления эквивалентных ставок?

25 Что такое уравнение эквивалентности? Когда это уравнение применяется в финансовом анализе?

26 Что такое поток платежей (приведите примеры)? Перечислите основные параметры потока платежей. Укажите обобщающие показатели потока платежей.

27 Приведите формулы для вычисления наращенной суммы и приведённой стоимости произвольного потока платежей.

28 Приведите формулы для вычисления наращенной суммы и приведённой стоимости финансовой ренты постнумерандо.

29 Приведите формулы для вычисления наращенной суммы и приведённой стоимости финансовой ренты пренумерандо.

30 Перечислите принципы принятия решений при выборе коммерческого контракта.

31 Как проводится анализ эффективности инвестиционных проектов?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1 *Четыркин Е.М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. – М.: Дело ЛТД, 1995. – 320с.

2 *Мелкумов Я.С.* Финансовые вычисления. Теория и практика. М.: Инфра – М.: 2002. – 383с.

3 *Ковалев В.В., Уланов В.А.* Курс финансовых вычислений. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 544с.

4 *Капельян С.Н., Левкович О.А.* Основы коммерческих и финансовых расчетов. – Мн.: НТЦ «АПИ», 1999. – 224с.

Дополнительная

5 *Башарин Г.П.* Начала финансовой математики. – М.: Инфра – М, 1997. – 160с.

6 *Капитоненко В.В.* Финансовая математика и ее приложения. – М.: Издательство ПРИОР, 1999. – 144с.

7 *Чуйко А.С.*, *Шершнев В.Т.* Математические основы финансового обслуживания. – М.: Рос. Экон. акад.; Екатеринбург: Деловая книга, 1998. – 128с.

8 *Бочаров В.В.* Финансовое моделирование. – СПб: Питер, 2000. – 208с.

9 *Медведев Г.А.* Начальный курс финансовой математики. – Мн.: БГУ, 1997. – 177с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

СЕРЁГИНА Валентина Серафимовна

Математические модели финансовых вычислений
Пособие

Редактор Т. М. Р и з е в с к а я
Технический редактор В. Н. К у ч е р о в а
Корректор М. П. Д е ж к о

Подписано в печать 07.11.2004 г. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$.
Бумага газетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 7,21. Уч.-изд. л. 5,91. Тираж 300 экз.
Зак. № . Изд. № 4109.

Редакционно-издательский отдел УО «БелГУТ», 246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34.
Лиц. № 02330/0133394 от 19.07.2004 г.

Типография УО «БелГУТ», 246022, г. Гомель, ул. Кирова, 34.
Лиц. № 02330/0148780 от 30.04.2004 г.