

## ИЗГИБ КРУГОВОЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ЛОКАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

В. С. САЛИЦКИЙ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Спрос на использование слоистых конструкций обуславливает развитие математических моделей и методов их расчета на различные виды и типы нагрузок. В монографиях [1–5] приводятся подходы к принятию кинематических гипотез и построению краевых задач для трехслойных элементов конструкций. Свободные и вынужденные колебания трехслойных и пятислойных пластин рассмотрены в работах [6, 7].

Квазистатическому деформированию трехслойных пластин со сжимаемым и несжимаемым заполнителями посвящены статьи [8–12]. В публикациях [13–15] приводятся результаты об осесимметричном изгибе пятислойных пластин.

Уравнения равновесия для круговой пятислойной пластины в усилиях получены в [18]. Решение задачи об изгибе пятислойной круговой пластины равномерно распределенной нагрузкой приведено в [19, 20]. Здесь предлагается решение краевой задачи об изгибе пятислойной круговой пластины локальной круговой нагрузкой.

Рассматривается симметричная по толщине пятислойная круговая пластина, деформируемая локальной нагрузкой, равномерно распределенной по кругу относительного радиуса  $r \leq b$ :

$$q(r) = q_0 H_0(b-r), \quad (1)$$

где  $H_0(x)$  – функция Хэвисайда;  $q_0$  – интенсивность распределенной нагрузки.

Тонкие внешние несущие слои толщиной  $h_2 = h_4$  и внутренний несущий слой толщиной  $h_1$  выполнены из более прочных материалов и принимают на себя основную силовую нагрузку. Также в модели учитываются относительный сдвиг  $\psi$  и работа касательных напряжений в заполнителях. Цилиндрическая система координат  $r, \varphi, z$  связывается со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя. Все геометрические размеры пластины отнесены к ее радиусу  $r_0$ .

Система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях получена в [15] при равномерно распределенной нагрузке. В случае нагрузки (1) она принимает вид

$$\begin{aligned} L_2(a_4 \psi - a_5 w_{,r}) - 2cG_3 \psi &= 0, \\ L_3(a_5 \psi - a_6 w_{,r}) &= -q_0 H_0(b-r), \end{aligned} \quad (2)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; коэффициенты

$$\begin{aligned} a_4 &= \left[ 2K_2^+ h_2 h_3^2 + 2K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right], \quad a_5 = \left[ K_2^+ h_2 h_3 (h_1 + 2h_3 + h_2) + 2K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right], \\ a_6 &= \left[ 2K_2^+ h_2 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right]; \end{aligned}$$

$L_2, L_3$  – линейные дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv \left( \frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Решение системы (2) для пластины, заделанной по контуру, имеет вид

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2} \left[ \frac{I_1(\beta r)}{I_1(\beta)} \left( \frac{b^2}{2} - bK_1(\beta)I_1(\beta b) \right) + bI_1(\beta b)K_1(\beta r) + \frac{H_0(b-r)}{2} \left( \frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) \right) - \frac{b^2}{2r} \right], \\ w &= \frac{a_5}{a_6} \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)} \left\{ \frac{I_0(\beta r)}{\beta I_1(\beta)} \left( \frac{b^2}{2} - bK_1(\beta)I_1(\beta b) \right) - \frac{b^2 I_0(\beta) \beta}{2\beta^2 I_1(\beta)} + \frac{bI_1(\beta b)}{\beta^2 I_1(\beta)} - \frac{bI_1(\beta b)K_0(\beta r)}{\beta} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b^2}{2} \ln(r) \frac{H_0(b-r)}{2} \left[ \frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln \left( \frac{r}{b} \right) + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b)I_0(\beta r) + I_1(\beta b)K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{q_0}{8a_6} \left\{ \left( \frac{r^4 - 5b^4}{8} - \frac{b^4}{2} \ln \left( \frac{r}{b} \right) - b^2 r^2 \ln \left( \frac{r}{b} \right) + \frac{b^2 r^2}{2} \right) H_0(b-r) + b^2 r^2 (\ln r - 1) + \frac{b^2}{4} r^2 (2 - b^2) + \frac{b^4}{2} \ln r + \frac{b^4}{4a_6} + \frac{b^2}{2a_6} \right\}. \quad (3)$$

Численно исследованы прогиб и сдвиг (3) в защемленной по контуру пятислойной круговой пластине единичного радиуса, симметричной по толщине. За базовую расчетную модель принята пластина, слои которой набраны из материалов Д16-Т – фторопласт – Д16-Т – фторопласт – Д16-Т. Толщины несущих слоев:  $h_1 = h_2 = h_4 = 0,02$ , заполнителей:  $h_3 = h_5 = 0,1$ , величина нагрузки  $q_0 = 10$  МПа. Упругие характеристики этих материалов приведены в [1].

Зависимость максимальных перемещений от величины пятна нагрузки (1) при различной толщине внутреннего несущего слоя следующая: уменьшение толщины внутреннего слоя в 2 раза приводит к увеличению прогиба на 11,4 процента; увеличение толщины внутреннего несущего слоя в 1,5 раза приводит к уменьшению прогиба на 15,2 процента.

Предложенное в работе решение позволяет моделировать напряженно-деформированное состояние круговых пятислойных пластин при локальных поверхностных нагрузках. Численные расчеты показали существенное влияние радиуса пятна нагрузки и жесткости материалов несущих слоев на величину максимальных перемещений в пластине.

*Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-25».*

#### Список литературы

- 1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
- 2 Журавков, М. А. Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.
- 3 Zhuravkov, M. A. Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.
- 4 Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : IDEAL PRESS, 2023. – 381 с.
- 5 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов [и др.]. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.
- 6 Старовойтов, Э. И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 162–169.
- 7 Лачугина, Е. А. Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // Теоретическая и прикладная механика. – Минск : БНТУ, 2023. – Вып. 38. – С. 227–233.
- 8 Деформирование ступенчатой композитной балки в температурном поле / Э. И. Старовойтов [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 4. – С. 987–993. – EDN UARYZD.
- 9 Захарчук, Ю. В. Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.
- 10 Старовойтов, Э. И. Изгиб трехслойной пластины равномерно распределенной нагрузкой в нейтронном потоке / Э. И. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3 (48). – С. 56–62.
- 11 Козел, А. Г. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – Гомель : БелГУТ, 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.
- 12 Нестерович, А. В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – Гомель : БелГУТ, 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.
- 13 Салицкий, В. С. Уравнения равновесия круговой пятислойной пластины в усилиях / В. С. Салицкий // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVII Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. – 2021. – Т. 1. – С. 199–201.
- 14 Салицкий, В. С. Изгиб защемленной по контуру круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – Гомель : БелГУТ, 2022. – Вып. 15. – С. 209–213.
- 15 Салицкий, В. С. Изгиб круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2023. – Вып. 38 – С. 234–239.

УДК 539.3

## СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНА ПРИ РЕЗОНАНСНОЙ НАГРУЗКЕ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Э. И. СТАРОВОЙТОВ

*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

**Введение.** Конструктивные слоистые элементы широко применяются с середины прошлого века в транспортном машиностроении, аэрокосмическом комплексе и строительстве. Исследование