В настоящей работе представлены новые формы решений в оригиналах, полученные на основе прежних результатов с применением методов контурного интегрирования на комплексной плоскости. В случае регулярных ядер в виде конечных сумм экспонент решение предложено в виде двух слагаемых. Одно – разложение по некоторому подмножеству собственных форм, другое – легко вычисляемый интеграл по замкнутому контуру. В случае сингулярных ядер Ржаницына – Колтунова решение также представлено в специальной форме, содержащей неполное спектральное разложение и слагаемое в виде некоторого нового интеграла. Весьма важно, что каждый из интегралов при любом значении времени лишен указанных выше недостатков и легко вычисляется даже при большом количестве слоев композита. Всё это позволяет существенно упростить динамические расчеты многослойных конструкций.

С помощью новых формул проведены исследования распространения нестационарных волн в слоистых композитах при конкретных исходных данных.

Исследование выполнено за счет гранта РНФ № 24-29-00164.

УДК 536.2

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ЗАВИСИМОСТИ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ ОТ ВРЕМЕНИ

Ю. А. ПШЕНИЧНОВ
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Метод ВКБ [1, 2], разработанный для решения задач квантовой механики, нашел применение и в различных областях физики. В [3, 4] на основе совместного применения преобразования Лапласа и даного метода построены асимптотические решения для задач теплопроводности с зависящими от координаты z теплоемкостью C и коэффициентом теплопроводности λ.

Посредством введения новой координаты [5]

$$x=\int_0^z \frac{dz}{\lambda(z)}\left(\int_0^{z_1}\frac{dz}{\lambda(z)}\right)^{-1}, 0\le x\le 1, z\le x\le z_1, \tag{1}$$

и использования безразмерных величин уравнение теплопроводности принимает вид

$$\gamma(x)\frac{\partial\theta}{\partial F_o}=\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \tag{2}$$

где $\gamma(x)=C(z)\lambda(z)/\gamma_1$, $\gamma_1=C(z_1)\lambda(z_1)$, $F_o=\frac{\tau}{\gamma_1 z_1^2}$, $\theta(x,F_o)=\frac{T(z,\tau)}{T_0}$,

z_1 – ширина неограниченной пластины; τ – время; T_0 – начальная температура.

Применив к уравнению (2) преобразование Лапласа, получим

$$\frac{d^2U_{si}^+}{dx^2}-s\gamma(x)U_{si}^+=0. \tag{3}$$

Если уравнение (3) в интервале $0\le x\le 1$ не имеет особых точек, то первый член асимптотики ВКБ-решения записывается в виде [2]

$$U_s^+(x)=\frac{1}{\sqrt{\gamma(x)}}\left[A\exp\left(-\sqrt{s}\gamma_x\right)+B\exp\left(\sqrt{s}\gamma_x\right)\right],\ \gamma_x=\int_0^x\sqrt{\gamma(x)}\,dx. \tag{4}$$

Для данного изображения обратное преобразование можно выполнить двумя способами [5, 6]. В первом случае теорема обращения [6] применяется непосредственно к выражению (4) и решение для $U(x, F_o)$ принимает вид ряда по собственным функциям. Этот путь неприемлем, поскольку изображение (4) справедливо только для больших значений s, и, следовательно, оригинал в форме ряда верен только для малых значений Fo, когда ряд имеет плохую сходимость и неудобен для вычислений. Другой путь инверсии предполагает предварительное разложение (4) в ряд по экспоненциальным функциям, то есть в наиболее естественный для больших значений s ряд, в котором можно ограничиться несколькими первыми числами. В этом случае обратное преобразование приводит к решению, имеющему наиболее простой вид при малых значениях времени τ.

Найденный вторым способом оригинал для данного изображения принимает вид

$$U(x,F_o)=\sqrt[4]{\frac{\gamma(1)}{\gamma(x)}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\operatorname{erfc}\frac{(2n+1)\gamma_1-\gamma_x}{2\sqrt{F_o}}-\operatorname{erfc}\frac{(2n+1)\gamma_1+\gamma_x}{2\sqrt{F_o}}\right]. \tag{5}$$

При получении асимптотического решения нет необходимости в расчетах учитывать всю сумму. Поэтому асимптотическое решение рассматриваемой задачи получается принципиально простым [3]:

$$U(x,F_o)=\sqrt[4]{\frac{\gamma(1)}{\gamma(x)}}\left(\operatorname{erfc}\frac{\gamma_1-\gamma_x}{2\sqrt{F_o}}-\operatorname{erfc}\frac{\gamma_1+\gamma_x}{2\sqrt{F_o}}\right). \tag{6}$$

Для случая $\gamma(x)=1+x$ расчет по предлагаемой формуле (6) и численным методом [7] до $F_o=0{,}2$ формула (6) дает результаты, графически совпадающие с значениями температуры, полученными численным методом. Заметное расхождение наблюдается только при $F_o>0{,}5$, что характерно для приближенных решений в форме Лапласа и более простых задач, когда теплофизические свойства тела не зависят от координаты.

Для симметричных относительно плоскости $x=0$ граничных условий первого рода, а также для граничных условий второго и третьего родов найденные данным методом изображения и асимптотические решения приведены в [4].

Рассмотрим случай, когда температура поверхности $x=0$ изменяется по степенному закону

$$U(0,F_o)=F_o^{k/2},\ \ k=0,1,\ldots,\ \ U(0,F_o)=0.$$

Ограниченное при $x\to\infty$ ВКБ-решение уравнения (3) можно записать в виде [60]

$$U_s^{+}(x)=A\exp\left[\sqrt{s}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\varpi_n(x)s^{-n/2}dx\right], \tag{7}$$

где $$\varpi_0=-\sqrt{\gamma(x)},\quad \varpi_1=-\frac{\varpi_0'}{2\varpi_0},\quad \varpi_2=-\frac{\varpi_1'+\varpi_1^2}{2\varpi_0},\quad \varpi_{n+1}=-\frac{1}{2\varpi_0}\left(\varpi_n'+\sum_{m=1}^{n}\varpi_m\varpi_{n+1-m}\right),\quad n\ge 2.$$

Разложив $\exp(g_x/\sqrt{s})$ в ряд Тейлора по степеням $1/\sqrt{s}$, получим

$$U_s^{+}(x)=\sqrt[4]{\frac{\gamma(0)}{\gamma(x)}}\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\frac{\exp\left(-\sqrt{s}\gamma_x\right)}{s^{\frac{k}{2}+1}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_x^{\ n}}{n!}s^{-\frac{n}{2}}\right),\ \ g_x=\int_0^x\varpi_2(x)dx. \tag{8}$$

Переходя к оригиналу с помощью таблицы изображений [79], найдем

$$U(x,F_o)=\sqrt[4]{\frac{\gamma(0)}{\gamma(x)}}\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)(4F_o)^{\frac{k}{2}}\left(i^k erfc\frac{\gamma_x}{2\sqrt{F_o}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_x^{\ n}}{n!}F_o^{\frac{n}{2}}2^n i^{n+k}erfc\frac{\gamma_x}{2\sqrt{F_o}}\right). \tag{9}$$

При малых значениях F_o в этом ряде допустимо ограничиться несколькими первыми слагаемыми.

Можно показать, что при $\gamma(x)=\text{const}$ полученные асимптотические решения переходят в известные решения, приведенные в [5, 6].

Список литературы

1 **Маделунг, Э.** Математический аппарат физики / Э. Маделунг. – М. : Наука, 1968. – 620 с.

2 **Никифоров, А. Ф.** Основы теории специальных функций / А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. – М. : Наука, 1974. – 304 с.

3 **Пшеничнов, Ю. А.** Асимптотика решения уравнений телопроводности и диффузии для неоднородной среды / Ю. А. Пшеничнов // Теплообмен и гидродинамика. – Красноярск : КПИ, 1975. – Вып. 3. – С. 29–34.

4 **Пшеничнов, Ю. А.** Асимптотика решения неоднородной краевой задачи теплопроводности при зависимости коэффициентов переноса от координаты / Ю. А. Пшеничнов // Теплообмен и гидродинамика. – Красноярск : КПИ, 1976. – Вып. 4. – С. 15–22.

5 **Лыков, А. В.** Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высш. шк., 1967. – 599 с.

6 **Карслоу, Х. С.** Теплопроводность твердых тел / Х. С. Карслоу, Д. К. Егер. – М. : Наука, 1964. – 488 с.

7 **Ваничев, А. П.** Приближенный метод решения задач теплопроводности при переменных константах / А. П. Ваничев // Известия АН СССР. ОТН. – 1946. – № 2. – С. 1767–1774.