

- 1) Cycom 970-38%-3KT650-P-193-1520 W-T6 (углеткань);
- 2) HexPly M21/34%/UD194/IMA-12K (углелента);
- 3) HexPly M21/40%/285T2/AS4C-6K (углеткань);
- 4) HexPly 8552/34%/UD134/ AS4-12K (углелента).

Изучаются следующие смешанные ( $0^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$ ,  $90^\circ$ ) симметричные схемы с укладками монослоев в пластинах (16, 14 и 12 монослоев):

- 1)  $90^\circ / 45^\circ / 90^\circ / -45^\circ / 0^\circ / 45^\circ / 0^\circ / 45^\circ / 45^\circ / 0^\circ / 45^\circ / 0^\circ / -45^\circ / 90^\circ / 45^\circ / 90^\circ$ ;
- 2)  $45^\circ / -45^\circ / 0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 45^\circ / -45^\circ / -45^\circ / 45^\circ / 0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / -45^\circ / 45^\circ$ ;
- 3)  $45^\circ / -45^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 45^\circ / -45^\circ / -45^\circ / 45^\circ / 0^\circ / 90^\circ / -45^\circ / 45^\circ$ .

В работе также исследовано влияние диаметра отверстия (2, 4, 6, 8 мм) на прочность ламината. Дано сравнение полученных результатов с некоторыми имеющимися экспериментальными и теоретическими данными отечественных и зарубежных авторов.

Выработаны практические выводы и рекомендации.

#### Список литературы

- 1 Witney, J. M. Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations / J. M. Witney, R. J. Nuismer // Journal of Composite Materials. – 1974. – Vol. 8. – P. 253–265.
- 2 Оценка прочности металло-композитных соединений с применением критерия Нуизмера / Я. С. Боровская [и др.] // Ученые записки ЦАГИ. – 2018. – Т. XLIX, № 2. – С. 84–92.
- 3 Исследование критериев разрушения композиционных образцов с концентраторами напряжений при сжатии / В.И. Гришин [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 58–86.
- 4 Ершова, А. Ю. Испытания образцов «полоса с отверстием» из углепластика с типовой укладкой монослоев на растяжение и сжатие / А. Ю. Ершова, М. И. Мартиросов // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXII Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. – М. : МАИ, 2018. – Т. 1. – С. 102–104.
- 5 Ершова, А. Ю. Экспериментальное исследование влияния температурно-влажностных условий на механические свойства образцов «полоса с отверстием» из полимерного композиционного материала / А. Ю. Ершова, М. И. Мартиросов, Д. В. Дедова // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXXVII Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. – М. : МАИ, 2021. – Т. 1. – С. 91–97.

УДК 539.3

## СВЯЗНАЯ КВАЗИТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ОБОБЩЕННО-ТЕРМОУПРУГОЙ НЕТОНКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ОБОЛОЧКИ

*С. И. ЖАВОРОНОК*

*Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва*

*Ек. Л. КУЗНЕЦОВА*

*Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва  
Московский авиационный институт (НИИ), Российская Федерация*

Предложена новая вариационная формулировка расширенной теории N-го порядка обобщенно-термоупругих нетонких неоднородных анизотропных оболочек. В соответствии с концепцией описания оболочек как континуально-дискретных систем [1] в основу теории положен Лагранжев вариационный формализм аналитической механики континуальных систем [2] и аналитической термодинамики [3], а также метод редукции пространственной размерности модели [4–7]. Модель оболочки определена на расслоении гладкого многообразия, соответствующего некоторой реперной поверхности (в общем случае не совпадающей со срединной или лицевыми поверхностями) конфигурационным пространством со множеством переменных поля первого рода [8, 9], поверхностной и контурной плотностями функционалов Лагранжа и Рэлея и уравнениями связей [10, 11]. Переменные поля первого рода порождаются коэффициентами разложения полей векторов перемещения и энтропии М. Био [3] по системе функций безразмерной нормальной координаты, образующей биортогональный базис в гильбертовом пространстве над отрезком  $[-1, 1]$ . Плотности функционалов Лагранжа и Рэлея, зависящие от переменных поля первого рода, их производных по временной переменной и ковариантных производных по криволинейным координатам на многообразии вытекают из исходных формулировок пространственных и граничных плотностей соответствующих

функционалов трехмерной модели термоупругого тела [2, 3], обобщенных на случай анизотропной неоднородной среды с одним временем релаксации теплового потока [12], в результате интегрирования по безразмерной нормальной координате. Уравнения связей следуют из краевых условий (как механических [10, 11], так и термодинамических [13], перенесенных с лицевых поверхностей оболочки на ее реперную поверхность и выраженных через переменные поля и их ковариантные производные. Рассмотрены краевые задачи I, II и III рода; краевым условиям I рода соответствуют голономные связи, краевым условиям II и III рода – неголономные связи, обобщающие [10]. Уравнения движения и уравнения переноса тепла теории оболочек N-го порядка (при удержании N+1 члена частичной суммы ряда по биортогональной базисной системе как для вектора перемещения, так и для вектора энтропии Био) строятся методов множителей Лагранжа и являются обобщенными уравнениями Лагранжа второго рода несвободной континуальной двумерной термомеханической системы. Выполнена постановка начально-краевой задачи теории обобщенно-термоупругих неоднородных анизотропных оболочек; введение связей в вариационную формулировку модели оболочки обеспечивает точное удовлетворение краевых условий на лицевых поверхностях при любом порядке теории. В частности, расширенная теория оболочек первого порядка, удовлетворяющая краевым условиям в форме связей, соответствует канонической модели термоупругой оболочки Кирхгофа – Лява. Рассмотрены приложения предложенной расширенной теории N-го порядка к задачам о диссипации энергии при высокочастотных колебаниях термоупругой цилиндрической функционально-градиентной оболочки и о тепловом ударе по обобщенно-термоупругой по Лорду – Шульману композиционной анизотропной оболочке. Рассмотрена также возможность приложения расширенных теорий обобщенно-термоупругих оболочек различного порядка к описанию нестационарного деформирования тонкостенных конструкций в процессе аддитивного производственного процесса [14], в том числе потери устойчивости оболочки при динамическом нагреве локальным источником тепла [15], и к моделированию динамики тонкостенной композитной конструкции, оснащенной слоистой тепловой защитой при взаимодействии с высокотемпературной окружающей средой [16]. Показано, что теория оболочек переменной толщины может быть положена в основу итерационного процесса расчета напряженно-деформированного состояния тонкостенной конструкции при фазовом переходе, сопровождающемся уносом массы с одной из ее лицевых поверхностей.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-19-00680).*

#### Список литературы

- 1 Кильчевский, Н. А. Основы аналитической механики оболочек / Н. А. Кильчевский. – Киев : Изд. АН УССР, 1963. – 354 с.
- 2 Кильчевский, Н. А. Аналитическая механика континуальных систем / Н. А. Кильчевский, Г. А. Кильчинская, Н. Е. Ткаченко. – Киев : Наукова думка, 1979. – 188 с.
- 3 Био, М. Вариационные принципы в теории теплообмена / М. Био. – М. : Энергия, 1975. – 209 с.
- 4 Векуа, И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек / И. Н. Векуа. – М. : Наука, 1982. – 282 с.
- 5 Гуляев, В. И. Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач / В. И. Гуляев. – Львов : Вища шк., 1978. – 192 с.
- 6 Хома, И. Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек / И. Ю. Хома. – Киев : Наук. думка, 1986. – 172 с.
- 7 Амосов, А. А. К проблеме редукции плоской задачи теории упругости к последовательности одномерных краевых задач / А. А. Амосов, С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т. 3, № 1. – С. 69–80.
- 8 Жаворонок, С. И. Вариационные уравнения трехмерной теории анизотропных оболочек / С. И. Жаворонок // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 4, ч. 5. – С. 2153–2155.
- 9 Жаворонок, С. И. Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода трехмерной теории анизотропных оболочек / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 116–132.
- 10 Жаворонок, С. И. Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода расширенной трехмерной теории N-го порядка анизотропных оболочек / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 3. – С. 370–381.
- 11 Егорова, О. В. О вариационных уравнениях расширенной теории N-го порядка упругих оболочек и их приложении к некоторым задачам динамики / О. В. Егорова, С. И. Жаворонок, А. С. Курбатов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 2. – С. 36–59.
- 12 Lord, H. W. A generalized dynamical theory of elasticity / H. W. Lord, Y. Shulman // J. Mechanics and Physics of Solids. – 1967. – Vol. 15. – P. 299–309.
- 13 Григорьянц, Н. М. Вариационные принципы обобщенной теплопроводности / Н. М. Григорьянц, С. К. Киклевич // Прикладная механика. – 1977. – Т. XIV, № 1. – С. 34–38.

14 Современные проблемы моделирования теплопереноса в технологических процессах селективного лазерного спекания и сплавления / С. И. Жаворонок [и др.] // Теплофизика высоких температур. – 2019. – Т. 57, № 6. – С. 919–952.

15 Research of the Problem of Loss of Stability of Cylindrical Thinwalled Structures under Intense Local Temperature Exposure / A. S. Kurbatov [et al.] // Periodico Tche Quimica. – 2020. – Vol. 17. – P. 884–891.

16 Основные проблемы при создании систем тепловой защиты на базе структурно-неоднородных материалов и методы их решения / А. Н. Астапов [и др.] // Теплофизика высоких температур. – 2021. – Т. 59, № 2. – С. 248–279.

17 Кузнецова, Е. Л. Задача типа Стефана в композиционных материалах с произвольным числом подвижных границ фазовых превращений / Е. Л. Кузнецова, С. И. Жаворонок // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. – 2023. – Т. 165, № 4. – С. 236–245.

УДК 539.3

## ОБ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЯХ РАУСА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ НЕТОНЫХ ОБОЛОЧЕК В ЗАДАЧАХ О ДИСПЕРСИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ВОЛНОВОДАХ

С. И. ЖАВОРОНОК, А. С. КУРБАТОВ

*Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва*

Рассмотрено развитие иерархической теории нетонких неоднородных анизотропных оболочек как континуально-дискретных систем [1] на базе вариационного формализма аналитической динамики континуума и метода редукции пространственной размерности трехмерной модели деформируемого твердого тела [2–7]. В основу «квазитрехмерной» теории оболочек, способной аппроксимировать напряженно-деформированное состояние в окрестностях боковых поверхностей, областей наложения кинематических связей, линий разрыва компонентов поля главного вектора внешних сил, окрестностях волновых фронтов и т. п. областях неприводимости [1] к двумерной модели тонкого тела положена вариационная формулировка модели линейно-упругой неоднородной анизотропной среды, заданная в рамках формализма Лагранжа аналитической механики континуальных систем [8] одной переменной поля первого рода – вектором перемещения, пространственной и граничной плотностями функционала Лагранжа. Модель оболочки формулируется в терминах двумерного многообразия, соответствующего реперной поверхности, с заданной на нем системой криволинейных координат; оболочка как трехмерное тело отнесена к системе координат, нормально связанной с реперной поверхностью [2]. С целью построения системы уравнений, разрешенных относительно ковариантных производных первого порядка по одной из координат на многообразии, осуществляется преобразование Лежандра функционала Лагранжа трехмерной модели упругой среды по данным ковариантным производным, и вводятся новые переменные, определенные на касательном расслоении многообразия и имеющие смысл обобщенных напряжений [9] (аналогично обобщенным импульсам, порождаемым преобразованием Лежандра функции Лагранжа дискретной системы по обобщенным скоростям). Полученная в результате преобразования Лежандра по части пространственных производных функция интерпретируется как плотность обобщенного функционала Рауса упругой среды [9, 10]. Краевые условия, поставленные на лицевых поверхностях оболочки в трехмерной постановке задачи, записываются относительно новых переменных. Пространственная редукция трехмерной модели упругой среды, которая задана вектором перемещения и вектором обобщенного напряжения, осуществляется путем разложения данных величин по некоторой системе функций безразмерной нормальной к реперной поверхности координаты, образующей биортогональный базис в функциональном пространстве  $H[-1,1]$  [9–11], и интегрирования плотности функционала Лагранжа по нормальной координате, а также переноса краевых условий с лицевых поверхностей на реперную поверхность оболочки [12, 13] и их записи относительно коэффициентов разложений и их ковариантных производных. Модель оболочки, таким образом, определена фазовым пространством со множеством обобщенных перемещений и обобщенных сил, заданных коэффициентами разложения векторов перемещения и обобщенного напряжения [9, 10] по биортогональной системе функций, поверхностной и контурной плотностями функционала Рауса и ограничениями в форме равенств, которые вытекают из краевых условий, перенесенных с лицевых поверхностей на реперную поверхность оболочки. Уравнения движения и определяющие уравнения строятся методом множителей Лагранжа [12, 13] и интерпретируются как обобщенные уравнения Рауса двумерной континуальной системы с ограничениями. Теория оболочек  $N$ -го порядка формулируется