

*Mirzaev I., Shomurodov J. Calculation of the seismic resistance of an underground pipeline based on experimental curves of interaction with soil.*

**Abstract:** *The problem of the effect of a seismic wave propagating in the ground on an extended underground pipeline interacting with the ground according to a nonlinear model is solved by the explicit finite difference method. The model of pipeline-soil interaction is set on the basis of experimental data. The curve "tangential stress - relative displacement" is set in the form of functions describing the experimental curve. Finite-difference schemes are constructed and calculations are performed using iterative refinement of the solution at each time step and compared with the results when the interaction curve is approximated by a piecewise linear function. When piecewise linear approximation of the curve is used, iterative refinement of the solution is applied only at the transition at any point from one linear section to the adjacent one. The calculations also take into account the effect of dynamic changes in ground pressure on the pipeline. Calculations have been made for harmonic waves with frequencies of 50, 5, 3, 2 and 1 Hz. The analysis of obtained results has been carried out and the influence of dynamic pressure and structural ground failure on the wave process in the pipeline has been shown.*

**Keywords:** *wave; pipeline; ground, collapse, iteration.*

УДК 539.3

## ЦИКЛИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТРЁХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ИХ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ

Старовойтов Э.И.<sup>1</sup>, Абдусаттаров А.<sup>2</sup>, Рузиева Н.Б.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

E-mail: nodi2005@rambler.ru

**Аннотация:** *В статье приводится моделирование расчета деформирования несимметричных по толщине упругопластических трёхслойных стержней с жестким заполнителем при циклических нагрузках. На основе вариационного принципа Лагранжа сформулирована краевая задача изгиба трёхслойных стержней при однократном и знакопеременном нагружении с учетом повреждаемости материала. Для решения сформулированных задач применен приближенный метод, базирующийся на методе упругих решений. Получены численные результаты расчетных величин для трёхслойных, в частности, однослойных стержней с учетом циклических характеристик материалов и повреждаемости.*

**Ключевые слова:** *трёхслойный стержень; циклическое нагружение; повреждаемость; вариационный принцип; уравнения равновесия в перемещениях.*

**Введение.** В последние годы в области строительства и производства современной техники широкое применение находят упругопластические и вязкопластические композиционные конструкции сложной структуры. Слоистые конструкции, в частности, трёхслойные, выполненные из материалов с существенно отличающимися физико-механическими и прочностными свойствами, обладают широким спектром новых качеств: высокой несущей способностью и изгибной жесткостью, стойкостью к тепловым воздействиям, сравнительно малым удельным весом по сравнению с традиционными однослойными конструкциями. В связи с этим значительное распространение получили трёхслойные элементы конструкции – стержни, пластины и оболочки, которые состоят из двух несущих слоев и заполнителя, обеспечивающего их совместную работу. Несущие слои из материалов высокой прочности и жесткости предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Связующие слои, служащие для образования монолитной конструкции, обеспечивают перераспределение усилий между несущими слоями.

Необходимость разработки математических моделей деформирования и расчета слоистых элементов тонкостенных конструкций, учитывающих физическую нелинейность материалов при однократных и циклических нагрузках с учетом повреждаемости и взаимодействия со средой, обусловлена их широким использованием в технике, строительстве и транспортном машиностроении.

Работа большинства несущих элементов трёхслойных конструкций происходит на фоне выхода материалов за пределы упругости. При действии циклических нагрузок это приводит к возникновению ряда дополнительных явлений, таких как вторичные пластические деформации, изменение диаграмм деформирования от цикла к циклу, теплообразование, накопление повреждений и распространение трещин, приводящих к разрушению материалов [1–5].

В монографии В.В.Москвитина [1] рассмотрены основные уравнения переменной пластичности и вязкопластичности, введено кинетическое уравнение повреждаемости для

оценки циклической и длительной прочности элементов конструкций. В работах [2–4] проанализированы общие подходы к построению теорий деформирования неоднородных слоистых элементов конструкций при квазистатических и динамических нагрузках. Изложены постановки и методы решения задач трёхслойных элементов конструкций, связанных с учетом упругих оснований при силовых, тепловых и радиационных воздействиях. Учтены физически нелинейные свойства материалов слоев. Приведен ряд аналитических и численных решений для трёхслойных стержней, пластин и оболочечных конструкций.

Основы расчета механики слоистых балок, пластин и оболочек при термосиловых нагружениях изложены в монографии [5]. Работы [6–7] посвящены исследованию изгиба эндвич-пластин в зависимости от их формы, наличия упругих и жестких опор, упругого основания и вида ячеистого заполнителя. Термосиловое деформирование трёхслойных несущих по толщине пластин рассмотрено в [8]. В работе [9] предложена уточненная теория свободных и вынужденных колебаний трёхслойных пластин.

В статьях [10,11] сформулирована постановка краевой задачи и получено ее решение для трёхслойной пластины с упругопластическими несущими слоями и нелинейно упругим заполнителем при нагружении из естественного состояния и повторном знакопеременном нагружении. Учтено влияние кольцевой равномерно распределенной нагрузки и температурного воздействия. В публикации [12] обозначена постановка и дано решение краевой задачи о термосиловом изгибе упругой трёхслойной круговой пластины на основании Пастернака. В работе [13] рассматривается компьютерное моделирование процессов упругопластического деформирования, повреждаемости и разрушения нелинейных материалов и конструкций. Исследования А.Р.Абировова [14] посвящено построению определяющих соотношений на основе экспериментальных изысканий, установлены области физической достоверности теории пластичности применительно к процессам сложного циклического нагружения.

В статье [15] рассмотрено моделирование процессов упругопластического деформирования и повреждаемости тонкостенных стержней при пространственно-переменном нагружении.

В работах [16–18] приводится упругопластический расчет тонкостенных стержней (трубопроводов) при пространственно-переменном нагружении с учетом обобщенного принципа Мазинга–Москвитина. Исследовано НДС тонкостенных стержней при циклическом нагружении с учетом вторичных пластических деформаций и повреждаемости. Модели деформирования трёхслойных пластин из вязкопластического композита с учетом повреждаемости материалов приводятся в [19].

**Цель, задачи и методика расчета.** Из краткого обзора следует, что в данном направлении целью являются разработка моделей деформирования трёхслойных упругопластических стержней на основе ряда гипотез и вариационного принципа Лагранжа, выведения систем дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях при переменном нагружении, формирование схемы расчета и реализации с использованием метода «упругих» решений. Важнейшими задачами в связи с этим служат разработка моделей деформирования трёхслойных элементов–стержней и пластин, совершенствование методики расчета и анализа НДС при однократных и циклических нагружениях с учетом обобщенного принципа Мазинга и накопления повреждаемости.

**Постановка задачи.** Рассматривается изгиб несимметричного по толщине упругопластического стержня с учетом его повреждаемости. Система координат связывается со срединной плоскостью заполнителя (рис.1). Допускается, что для тонких несущих слоев 1, 3 справедливы гипотезы Бернулли, а для несжимаемого по толщине заполнителя 2 предполагается, что нормаль остаётся прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi(x)$ . Деформации считаются малыми. На внешний слой стержня по длине действуют распределённые силовые нагрузки  $p(x)$  и  $q(x)$  (см. рис.1). На торцах предполагается наличие жестких диафрагм. Здесь  $h_k$  – толщина  $k$  – го слоя ( $k=1,2,3$  – номер слоя), при этом  $h_2=2$  с.

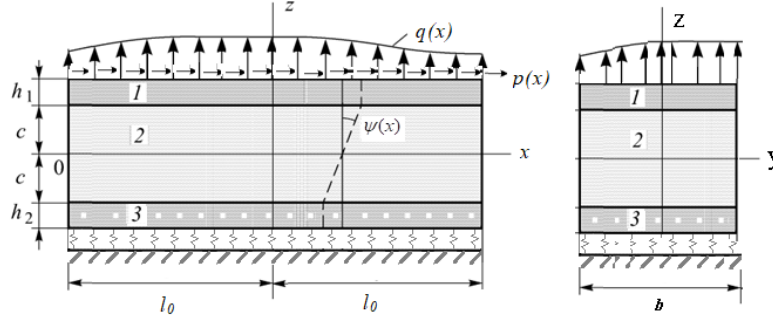


Рис.1. Нагружение трехслойного стержня

В соответствии с принятыми геометрическими гипотезами продольные перемещения в слоях  $u^{(k)}$  выражаются через три искомых функции  $u(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $w(x)$  [2]:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}, \quad c \leq z \leq c + h_1; \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}, \quad -c \leq z \leq c; \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, \quad -c - h_2 \leq z \leq -c, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $z$  – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Используя соотношения Коши и выражения (1), получим компоненты тензора деформаций в слоях:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\psi_{,r} - zw_{,rr}; & \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{r}(u + c\psi - zw_{,r}); & \varepsilon_{rz}^{(1)} &= 0; \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\psi_{,r} - zw_{,rr}; & \varepsilon_\varphi^{(3)} &= \frac{1}{r}(u + z\psi - zw_{,r}); & \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2}\psi; \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\psi_{,r} - zw_{,rr}; & \varepsilon_\varphi^{(2)} &= \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{,r}); & \varepsilon_{rz}^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Для связи напряжений и деформаций используются уравнения состояния на основе теории малых упругопластических деформаций Ильюшина:

$$S_{ij}^{(k)} = 2G_k(1 - \omega^k(\varepsilon_u^k))\varepsilon_{ij}^k; \quad \sigma^k = 3K_k\varepsilon^{(k)}. \quad (3)$$

Здесь  $s_{ij}^{(k)}$ ,  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – девятимерные и шаровые части тензора напряжений;  $G_k, K_k$  – модуль сдвиговой и объёмной деформаций;  $\varepsilon_u^{(k)}$  – интенсивность деформации;  $\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)})$  – в несущих слоях функция пластичности ( $k=1,2$ ), а при  $k=3$   $\omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)})$  – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность заполнителя. Для функции пластичности принимаются следующие выражения:

$$\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}; \\ A \left(1 - \frac{\varepsilon_y^{(k)}}{\varepsilon_u^{(k)}}\right)^\alpha, & \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_y^{(k)}; \end{cases} \quad \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_{u0}^{(3)}; \\ A_1 \left(1 - \frac{\varepsilon_{u0}^{(3)}}{\varepsilon_u^{(3)}}\right)^{\alpha_1}. \end{cases}$$

### Вывод уравнения равновесия при исходном нагружении

Для вывода уравнения равновесия трехслойного стержня воспользуемся вариационным принципом Лагранжа [3]

$$\delta(A - \Pi) = 0; \quad \delta A = \delta A_1 + \delta A_2, \quad (4)$$

где  $\delta A$  – вариации работы внешних сил:

$$\delta A_1 = b \int_0^l (P \delta u + q \delta W) dx.$$

Вариация работы внешних сил и моментов на торцах

$$\delta A_2 = (N_0 - N_l)\delta u + (Q_0 - Q_l)\delta w - (M_0 - M_l)\delta w_{,x}, \quad (5)$$

где  $N_0, Q_0, M_0, N_l, Q_l, M_l$  – заданные силы и моменты на торцах стержня ( $x=0, x=l$ );  $\delta \Pi$  – вариации потенциальной энергии, имеющие вид [2] ( $dv = dz ds$ ;  $ds = b dx$ ):

$$\delta \Pi = b \int_0^e \left[ \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_k^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} dz \right] dx. \quad (6)$$

Теперь определяем компоненты тензора напряжений в слоях, используя соотношения (3). Выделим линейные (индекс «e») и нелинейные (индекс «ω») части компонентов напряжений в следующем виде:

$$\sigma_x^{(k)} = \sigma_{xe}^{(k)} - \sigma_{x\omega}^{(k)}; \quad \sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xze}^{(3)} - \sigma_{xz\omega}^{(3)}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{xe}^{(k)} &= 2G_k \mathcal{E}_x^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)}; & \sigma_{x\omega}^{(k)} &= 2G_k \mathcal{E}_x^{(k)} \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}); \\ \sigma_{xze}^{(3)} &= 2G_3 \mathcal{E}_{xze}^{(3)}; & \sigma_{xz\omega}^{(3)} &= 2G_3 \mathcal{E}_{xze}^{(3)} \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}). \end{aligned} \quad (8)$$

Проведем следующую подобную операцию с обобщенными внутренними усилиями и моментами:

$$N^{(k)} = N_e^{(k)} - N_\omega^{(k)}; \quad M^{(k)} = M_e^{(k)} - M_\omega^{(k)}; \quad Q^{(3)} = Q_e^{(3)} - Q_\omega^{(3)}. \quad (9)$$

Здесь соответствующие элементы (6) определяются по формулам, например,

$$N_\omega^{(k)} = b \int_{h_k} \sigma_{x\omega}^{(k)} dz; \quad M_\omega^{(k)} = b \int_{h_k} \sigma_{z\omega}^{(k)} z dz; \quad Q_\omega^{(3)} = b \int_{-c}^c \sigma_{xz\omega}^{(3)} dz. \quad (10)$$

Определяя вариации работы внешних сил (5), потенциальной энергии (6) и подставляя их в уравнение (4), получаем систему дифференциальных уравнений равновесия трёх-слойного стержня в усилиях с учетом физической нелинейности ( $q_R=0$ ):

$$N_{,x}^e = -bP + N_{,x}^\omega; \quad H_{,x}^e - Q^e = H_{,x}^\omega - Q^\omega; \quad M_{,xx}^e = -bq + M_{,xx}^\omega, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} N_e^e &= \sum_{k=1}^3 N_e^{(k)}, \quad H^e = c(N_e^{(1)} - N_e^{(2)}) + M_e^{(3)}, \quad Q_e^e = Q_e^{(3)}; \\ N_\omega^e &= \frac{4}{3} b \sum_{k=1}^3 G_k \int_{h_k} \omega^{(k)} \varepsilon_x^{(k)} dz; \quad M_\omega^e = \frac{4}{3} b \sum_{k=1}^3 G_k \int_{h_k} \omega^{(k)} \varepsilon_x^{(k)} z dz; \quad Q_\omega^e = 2bG_3 \int_{-c}^c \omega_3 y dz. \end{aligned} \quad (12)$$

Определив упругие составляющие внутренних усилий через искомые перемещения  $u, v, w$  и подставив их в уравнения равновесия (11), получим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$\begin{aligned} a_1 u_{,xx} + a_6 \psi_{,xx} - a_7 w_{,xxx} &= -p + p_\omega; \\ a_6 u_{,xx} + a_2 \psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} - a_5 \psi &= h_\omega; \\ a_7 u_{,xxx} + a_3 \psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxx} &= -q + q_\omega. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_7$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned} a_1 &= K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + 2K_3^+ c; \quad a_2 = c^2 \left[ K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + \frac{2}{3} K_3^+ c \right]; \\ a_3 &= c \left[ K_1^+ h_1 (c + \frac{1}{2} h_1) + K_2^+ h_2 (c_2 + \frac{1}{2} h_2) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right]; \\ a_4 &= K_1^+ h_1 (c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2) + K_2^+ h_2 (c + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2; \\ a_5 &= 2G_3 c; \quad a_6 = c \left[ K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2 \right]; \quad a_7 = K_1^+ h_1 (c + \frac{1}{2} h_1) - K_2^+ h_2 (c_2 + \frac{1}{2} h_2); \\ K_k^+ &= K_k^+ + \frac{4}{3} G_k, \quad (k=1,2,3). \end{aligned} \quad (14)$$

В уравнении (13) нелинейные слагаемые имеют следующий вид:

$$P_\omega = \frac{1}{B_0} N_{,x}^\omega; \quad h_\omega = \frac{1}{B_0} (H_{,x}^\omega - Q^\omega); \quad q_\omega = \frac{1}{B_0} M_{,xx}^\omega.$$

Для решения системы (13) принимается приближенный метод – метод упругих решений. Для  $n$ -го приближения нетрудно переписать системы уравнений (13). Входящие в

правые части величины  $p_\omega^{(n-1)}, h_\omega^{(n-1)}, q_\omega^{(n-1)}$  служат «дополнительными» внешними нагрузками. На первом шаге итерации они нулевые, в дальнейшем на каждом шаге они вычисляются по результатам предыдущего приближения. Отметим, что процедура получения решения системы уравнений (13) не отличается от задачи теории упругости. В результате получаем искомое аналитическое решение в рекуррентном виде для  $n$ -го приближения [2]:

$$\begin{aligned} \psi^{(n)}(x) &= C_2^{(n)} sh(\beta x) + C_3^{(n)} ch(\beta x) + \frac{1}{\beta} [sh(\beta x) \int g^{(n)} ch(\beta x) - ch(\beta x) \int g^{(n)} sh(\beta x) dx]; \\ u^{(n)}(x) &= \gamma_3 \psi^{(n)} + \frac{1}{\alpha_2} [-a_4 L_2^{-1} (p - p_\omega^{(n-1)}) + a_7 L_3^{-1} (q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_7}{2} C_1^{(n)} x^2] + C_7^{(n)} x + C_8^{(n)}; \\ w^{(n)}(x) &= \frac{1}{\alpha_2} [\alpha_1 \int \psi^{(n)} dx - a_7 L_3^{-1} (p - p_\omega^{(n-1)}) + a_1 L_4^{-1} (q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{1}{6} a_1 C_1^{(n)} x^3] + \frac{1}{2} C_4^{(n)} x^2 + C_5^{(n)} x + C_6^{(n)}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$g^{(n)}(x) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \gamma_1 h_\omega^{(n-1)} + \gamma_2 (p - p_\omega^{(n-1)}) + \gamma_1 \left( \int (q - q_\omega^{(n-1)}) dx + C_1^{(n)} \right)$$

Константы интегрирования  $C_1^{(n)}, \dots, C_8^{(n)}$  определяются из условий закрепления стержня.

**Переменное нагружение и учет повреждаемости.** Рассмотрим теперь построение решения задачи для любого  $m$ -го переменного нагружения трехслойного упругопластического стержня с учетом накопления повреждаемости. Предположим, что после  $(m-1)$  цикла нагружения, начиная с момента  $t_{m-1}$ , происходит мгновенная разгрузка и новое нагружение осуществляется усилиями обратного знака  $p^{(m)}, q^{(m)}$  (здесь индекс « $m$ » – номер нагружения). Эти усилия создадут в  $k$ -м слое стержня поле перемещений  $u^{(m,k)}, v^{(m,k)}, w^{(m,k)}$ , деформации  $\varepsilon_x^{(m,k)}, \varepsilon_y^{(m,k)}, \varepsilon_z^{(m,k)}$  и напряжений  $\sigma_x^{(m,k)}, \sigma_y^{(m,k)}, \sigma_z^{(m,k)}, \sigma_{xz}^{(m,k)}$ .

Следуя, теории Москвитина [1], введем разности следующего вида:

$$\bar{\sigma}_x^{(m,k)} = (-1)^m (\sigma_x^{(m-1,k)} - \sigma_x^{(m,k)}); \quad \bar{\varepsilon}_x^{(m,k)} = (-1)^m (\varepsilon_x^{(m-1,k)} - \varepsilon_x^{(m,k)}); \quad \bar{u}^{(m)} = (-1)^m (u^{(m-1,k)} - u^{(m)}). \quad (16)$$

Считаем, что соотношения (2), связывающие деформации и перемещения для величин с «чертой» (16), будут справедливы. Для связи напряжений и деформации примем физические уравнения состояния типа (3), учитывающие повреждаемости материала [19]:

$$\bar{s}_{ij}^{(m,k)} = 2G_k \bar{f}^{(m,k)}(\bar{\varepsilon}_u^{(m-1,k)}, \eta^{(m-1,k)}) \bar{\varepsilon}_{ij}^{(m,k)}; \quad \bar{\sigma}^{(m,k)} = 3K_k \bar{\varepsilon}^{(m,k)}, \quad (17)$$

где

$$\bar{f}^{(m,k)} = (1 - \omega^{(m,k)}(\bar{\varepsilon}_u^{(m,k)}, \eta^{(m-1,k)})).$$

При учете повреждаемости функции пластичности можно представить в виде

$$\omega^{(m,k)} = \begin{cases} 0, & \bar{\varepsilon}_u^{(m,k)} \leq \bar{\varepsilon}_{sm}^{(k)}(\eta); \\ \lambda_m \left( 1 - \frac{\bar{\varepsilon}_{sm}^{(k)}(\eta)}{\bar{\varepsilon}_u^{(m,k)}} \right)^\alpha, & \bar{\varepsilon}_u^{(m,k)} > \bar{\varepsilon}_{sm}^{(k)}(\eta). \end{cases} \quad (18)$$

Здесь в случае обобщенного принципа Мазинга

$$\lambda_m = \lambda, \quad \bar{\varepsilon}_{sm}^{(k)} = \alpha_m \cdot \varepsilon_{s0}^{(k)}, \quad \alpha_m = Q_1 (m-1)^\chi,$$

а при учете накопления повреждений

$$\bar{\varepsilon}_{sm}^{(k)}(\eta) = \alpha_1^{m-2} (1 + \alpha_1) \varepsilon_s^{(k)} + (3G_{1k})^{-1} \cdot B^{\%} \left[ 1 - 0.5(1 + \alpha_1) \alpha_1^{n-2} \right] \cdot \left[ 1 - (1 - \eta^{(k)})^{1+\alpha} \right]^{\%} \cdot (n-1)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (19)$$

Функция повреждаемости  $\eta^{(k)}$  определяется из кинетического уравнения [1]:

$$\frac{\partial \eta_m^{(k)}}{\partial \lambda_m} = f^{(m,k)}(\bar{\sigma}_u^{(m,k)}, \eta_m^{(k)}); \quad f^{(m,k)} = A \frac{(\bar{\sigma}_u^{(m,k)})^\alpha}{(1 - \gamma \eta_m^{(k)})^\beta} \quad (20)$$

при условии  $\eta(0)=0, \eta(\lambda_N)=1$ , где  $\lambda_N$  – число полуциклов до наступления предельного состояния (разрушения).

Используя физические соотношения (17), здесь также компоненты напряжений подразделим на линейные и нелинейные составляющие

$$\bar{\sigma}_{xe}^{(m,k)} = 2G_k \bar{\mathcal{E}}_k^{(m,k)} + 3K_k \bar{\varepsilon}^{(m,k)}; \bar{\sigma}_{x\omega}^{(m,k)} = 2G_k \bar{\mathcal{E}}_k^{(m,k)} \omega^{(m,k)}, \quad (21)$$

и внутренние усилия

$$\bar{N}^{(m,k)} = \bar{N}_e^{(m,k)} - \bar{N}_\omega^{(m,k)}, \dots, \bar{M}^{(m,k)} = \bar{M}_e^{(m,k)} - \bar{M}_\omega^{(m,k)}, \bar{Q}^{(m,k)} = \bar{Q}_e^{(m,k)} - \bar{Q}_\omega^{(m,k)}. \quad (22)$$

Упругие («e») и неупругие («ω») составляющие внутренних усилий вычисляются аналогичным образом по формулам типа (12). Например,

$$\bar{N}_e^{(m,k)} = b \int_{h_k} \bar{\sigma}_{xe}^{(m,k)} dz, \dots, \bar{M}_\omega^{(m,k)} = b \int_{h_k} \bar{\sigma}_{z\omega}^{(m,k)} z dz. \quad (23)$$

Соответствующие итерационные уравнения равновесия в перемещениях (13) на  $n$ -м шаге для величин с чертой при  $m$ -м полуцикле имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a_1 \bar{u}_{,xx}^{(m,n)} + a_6 \bar{\psi}_{,xx}^{(m,n)} - a_7 \bar{w}_{,xxx}^{(m,n)} &= -\bar{p}^{(m)} + \bar{p}_\omega^{(m,n-1)}; \\ a_6 \bar{u}_{,xx}^{(m,n)} + a_2 \bar{\psi}_{,xx}^{(m,n)} - a_3 \bar{w}_{,xxx}^{(m,n)} - a_5 \bar{\psi}^{(m,n)} &= \bar{h}_\omega^{(m,n-1)}; \\ a_7 \bar{u}_{,xxx}^{(m,n)} + a_3 \bar{\psi}_{,xxx}^{(m,n)} - a_4 \bar{w}_{,xxx}^{(m,n)} &= -\bar{q}^{(m)} + \bar{q}_\omega^{(m,n-1)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Величины  $\bar{p}_\omega^{(m,n-1)}$ ,  $\bar{h}_\omega^{(m,n-1)}$ ,  $\bar{q}_\omega^{(m,n-1)}$ , соответствующие неупругим составляющим в (24) на первом шаге при неучёте повреждаемости ( $\eta_0=0$ ) известными, в следующем шаге вычисляются по результатам предыдущего приближения, т.е. используется метод «упругих» решений. В этом случае аналитическое решение будет иметь вид типа (15).

Для решения краевых задач необходимо добавить граничные условия. Например, в случае жёсткой заделки обоих торсов стержня должны выполняться граничные условия:

$$x = 0, l: \quad \bar{w}^{(m,n)} = \bar{u}^{(m,n)} = \bar{\psi}^{(m,n)} = \bar{w}_{,x}^{(m,n)} = 0. \quad (25)$$

Для шарнирно опертого случая граничные условия принимают следующий вид:

$$x = 0, l: \quad \bar{w}^{(m,n)} = \bar{u}^{(m,n)} = \bar{\psi}^{(m,n)} = \bar{M}^{(m,n)} = 0. \quad (26)$$

Отметим, что искомые решения задачи на  $m$ -м нагружении с учетом приведённых соотношений определяются следующим образом:

$$\sigma_x^{(m,k)}(x, z) = \sigma_x^{(k)} - \sum_{m=2}^M (-1)^m \cdot \bar{\sigma}_x^{(m,k)}(x, z); \quad \varepsilon_x^{(m,k)}(x, z) = \varepsilon_x^{(k)} - \sum_{m=2}^M (-1)^m \cdot \bar{\varepsilon}_x^{(m,k)}(x, z), \quad (27)$$

где величины с одним штрихом – напряжения и деформации в трехслойном стержне перед первой разгрузкой.

Таким образом, краевая задача для величин с «чертой» с точностью до обозначений совпадает с краевой задачей упругого расчета. Поэтому в некоторых случаях можно будет построить рекуррентные численно - аналитические решения [2, 3].

**Примеры расчета и анализ.** В качестве примера приведем результаты расчета деформирования трехслойных (однослойных) стержней при знакопеременном нагружении и с учетом накопления повреждений. Трехслойный стержень выполнен из материалов D-16T – фторопласта D-16T с толщиной слоев:  $h_1=h_2=0.03$ ,  $c=0.09$ . Граничные условия – защемленные с обоих концов.

На рис.2 показано изменение прогиба  $w^{(m)}(x)$  (а) и сдвига  $\psi^{(m)}(x)$  (б) вдоль оси трехслойного стержня при знакопеременном нагружении: 1 – упругий расчет; 2 –упругопластический; 3 – упругопластический на десятом полуцикле. Кривые с одним штрихом соответствуют нагружению из естественного состояния, с двумя штрихами означают повторный изгиб знакопеременной нагрузкой ( $q=10$ МПа). Максимальные значения перемещений при повторном нагружении снижаются на 1–2%, на 10-м цикле – еще на 4%, – это говорит о том, что материал несущего слоя D-16T является циклически упрочняющимся.

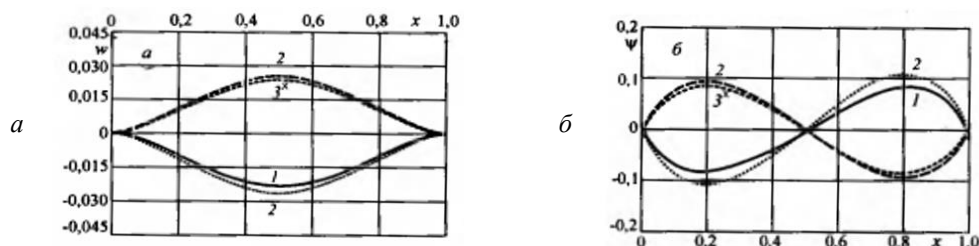


Рис.2. Изменение прогиба  $w^{(m)}(x)$  (а) и сдвига  $\psi^{(m)}(x)$  (б) трехслойного стержня, защемленного обоих концов

На рис.3. показано изменение прогиба  $w^{(m)}(x)$  и  $\psi^{(m)}(x)$  трехслойного стержня (консольное закрепление) при знакопеременном нагружении: 1 – упругий расчет; 2 – упругопластический; 3<sup>x</sup> – упругопластический на 10-м полуцикле. Как в предыдущей задаче, кривые с одним штрихом соответствуют нагружению из естественного состояния, с двумя повторный изгиб знакопеременной нагрузкой ( $q=2.5$  МПа).

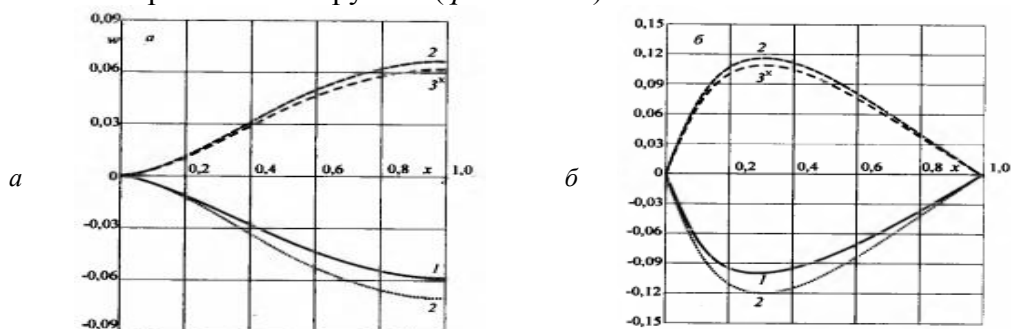


Рис.3. Изменение прогиба  $w^{(m)}(x)$  (а) и сдвига  $\psi^{(m)}(x)$  (б) трехслойного стержня (консольное закрепление)

Отметим, что учет нелинейности в обеих задачах приводит к увеличению максимальных напряжений во внешних слоях на 4–5%, в заполнителе – на 12–14%. В работе [3] отмечено, что результаты расчета существенно зависят от значения коэффициента постели  $k_0$  ( $k_0=1, 10^2, 10^5$  МПа/м).

Теперь для сравнительной оценки приводим результаты расчета однослойного стержня (при  $c=0$ ) с учетом циклических свойств материалов и накопления повреждений при переменных нагружениях. Рассмотрим изгиб стержня, защемленного по обоим концам, подверженному равномерно распределённой циклической нагрузке постоянной интенсивности.

Таблица 1

Значения расчетных величин по обобщенному принципу Мазинга

k	$\alpha_k$		$10^2 w^{(k)}(0.5)$		$\varepsilon_u^{(k)}(0)$		$M_x^{(k)}(0) \cdot 10^2$	
	D-16T	B-96	D-16T	B-96	D-16T	B-96	D-16T	B-96
1	1	1	0.3251	0.3251	4.9164	4.9164	-7.8063	-7.8063
2	2.020	2.080	-0.3189	-0.3013	4.7284	4.1940	7.8574	8.0030
3	2.062	2.148	0.3125	0.3065	4.3455	3.6910	-7.8476	-7.9590
4	2.087	2.190	-0.3117	-0.2911	4.1289	3.3428	7.6420	8.0870
5	2.105	2.220	0.3075	0.2997	3.9791	3.1445	-7.8643	-8.0151
9	2.150	2.293	0.3022	0.2930	3.6323	2.7158	-7.8825	-8.0702
15	2.186	2.354	0.2979	0.2881	3.3691	2.4229	-8.4435	-8.1105
19	2.203	2.382	0.2911	0.2861	3.2563	2.3067	-8.4519	-8.1271
20	2.206	2.388	-0.2978	-0.2743	3.2325	2.2829	7.7100	8.2253

Значения коэффициента обобщенного принципа Мазинга  $\alpha_k$  определены по известным формулам [1]. В табл.1 приведена кинетика изменения максимальных расчетных величин  $w^{(k)}, \varepsilon_u^{(k)}, M_x^{(k)}$  полученных при следующих программах нагружений:  $\delta^{(k)}=\delta q^{(k)}, \delta=1.75, k=20, q^{(k)}=(-1)^{k-1}$ . Сравнительный анализ результатов позволяет оценить влияние циклов

нагружений на кинетику НДС стержня. Из табл.1 следует, что разница *max* значений расчетных величин  $w^{(k)}$ ,  $\varepsilon_u^{(k)}$ ,  $M_x^{(k)}$  при  $k = 1$  и 19 для сплава В-96 составляет 12, 53 и 3.9%, для D-16Т – 8.9, 33, 2.9%.

В табл.2 приведены результаты расчета для защемленного по обоим концам стержня при переменных упругопластических нагружениях с учетом повреждаемости. За кинетическое уравнение повреждаемости принята формула (20). Расчеты выполнены при следующих данных:  $A_I=1.2 \cdot 10^{-4}$ ;  $\alpha=\beta=5$ ;  $\gamma_1=0.8$  и 1;  $\varepsilon_s=0.0015$ ;  $\alpha_I=0.97$ ;  $\delta=1,5$  и 2;  $q^{(k)}=(-1)^{k+1}q_0$ .

В табл.2 показана кинетика изменения расчётных величин  $w^{(k)}$ ,  $\varepsilon_u^{(k)}$ ,  $M_x^{(k)}$ ,  $\sigma_x^{(k)}$  в зависимости от числа циклов и накопления повреждений. Значения расчётных величин  $w^{(k)}$ ,  $\varepsilon_u^{(k)}$ ,  $M_x^{(k)}$  при  $k=1$  и 9 различаются соответственно на 24.75; 85.89; 6.67%; при  $k = 2$  и 8 – на 17.67; 63.67; 5.82%. При исходном нагружении ( $k=1$ ) функция повреждаемости равна нулю. Начиная со второго цикла, суммируется накопление повреждаемости и с возрастанием цикла нагружения она увеличивается в зависимости от экспериментально определяемых параметров  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ;  $\gamma_1$ .

Таблица 2

Кинетика изменения расчетных величин с учетом повреждаемости

k	$10^3 w^{(k)}(0.5)$	$\varepsilon_u^{(k)}(0)$	$\sigma_x^{(k)}(0) \cdot 10^2$	$M_x^{(k)}(0) \cdot 10^2$	$10 \cdot \eta(0), (\gamma = 1)$	$10 \cdot \eta(0), (\gamma = 0.8)$
1	4.1305	6.9751	-5.3727	-7.2973	0	0
2	-3.9896	6.6829	5.3890	7.3560	0.1546	0.1520
3	3.8683	6.1391	-5.4113	-7.4175	0.3264	0.3175
4	-3.7530	5.6482	5.4346	7.4778	0.5206	0.4996
5	3.6537	8.2032	-5.4634	-7.5389	0.7448	0.7026
6	-3.5574	4.7979	5.4929	7.6002	1.0114	0.9322
7	3.4742	4.4267	-5.5278	-7.6617	1.3424	1.1971
8	-3.3905	4.0831	5.5639	7.7212	1.7876	1.5109
9	3.3111	3.7523	-5.6078	-7.7840	2.5274	1.8976

Результаты расчета на НДС трехслойных (однослойных) стержней показывают, что обобщенный принцип Мазинга отражает основные свойства и особенности упрочняющихся материалов (D-16Т, В-96) стержней циклического нагружения.

**Заключение.** На основе вариационного принципа Лагранжа получена система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях трёхслойного стержня при однократном и переменном нагружении с учетом повреждаемости. Проанализировано напряженно-деформированное состояние трехслойных (однослойных) стержней при знакопеременном нагружении с учетом циклических характеристик и повреждаемости материалов. Показано, что применение модели трёхслойного элемента при переменном нагружении позволяет получить решение задачи для интересующего цикла нагружения путем введения соответствующего масштабного коэффициента.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного гранта фундаментальных исследований БРФФИИ (проект №ИЛ – 4821091577).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Москвитин В.В. Циклические нагружения элементов конструкций. М.: URSS. 2019. – 344 с. (переизд).
- [2] Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойных элементов конструкции на упругом основании. М.: Физматлит, 2006. – 379 с.
- [3] Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Рабинский Л.Н. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней. М.: МАИ, 2016. –184 с.
- [4] Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M. Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications. Academic Press, 2016. – 410 p.
- [5] Савицкий Д.М. Изгиб упругого трехслойного стержня в нейтронном потоке // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2014. №3. С.110 –114.
- [6] Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A. Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels // Materials Sciences and Applications. Vol.4. 2013. №8. P.471 – 477.
- [7] Lee C.R., Sun S.J., Kam T.Y. System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates // AIAA Journal. Vol.45. 2007. №9. P.2312 – 2322.



- [8] *Zenkour A.M., Alghamdi N.A.* Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates // *Journal of Sandwich Structures and Materials*. Vol.12. 2009. №1. P.7 – 46.
- [9] *Паймушин В.Н., Иванов В.И., Хусаинов В.Р.* Анализ свободных и собственных колебаний трехслойной пластины на основе уравнений уточненной теории // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2002. №4. Т.8. С.543 – 554.
- [10] *Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Абдусаттаров А.* Изгиб трехслойной пластины в температурном поле знакопеременной кольцевой нагрузкой // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2022. №3. Т.28. С.339 – 358.
- [11] *Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Абдусаттаров А.* Циклический изгиб трехслойных пластин в температурном поле // *Проблемы безопасности на транспорте. Материалы XII Междунар. науч. практ. конференции*. Гомель: БелГУТ, 2022. С.257 – 258.
- [12] *Козел А.Г.* Термосилового изгиб упругой трехслойной пластины на основании Пастернака // *Механика. Исследования и инновации*. Вып.14. Гомель, 2021. С.90 – 96.
- [13] *Кужуджанов В.Н.* Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. М.: МФТИ, 2008. – 215 с.
- [14] *Абиров Р.А.* Развитие математических моделей пластичности с учетом деформирования материалов при сложном нагружении: Автореф. дис... докт. физ.-мат. наук. Ташкент, 2014. – 52 с.
- [15] *Рашидов Т.Р., Абдусаттаров А., Исомиддинов А.И.* Моделирование процессов пластического деформирования и повреждаемости тонкостенных стержней при пространственно - переменном нагружении // *Докл. АН РУз*. 2011. №4. С. 35 – 38.
- [16] *Абдусаттаров А., Исомиддинов А.И., Рузиева Н.Б.* Упругопластический расчет тонкостенных стержней при переменном нагружении с учетом повреждаемости // *Узб. журнал «Проблемы механики»*. 2021. №2. С. 3 – 16.
- [17] *Абдусаттаров А., Рузиева Н.Б.* Нелинейное деформирование и учет повреждаемости подземных трубопроводов при циклических нагружениях // *Узб. журнал «Проблемы механики»*. 2022. №4. С. 19 – 31.
- [18] *Рузиева Н.Б., Абдусаттаров А.* Нелинейное деформирование подземных трубопроводов при циклическом нагружении // *Проблемы безопасности на транспорте. Материалы XI Междунар. науч. - практ. конференции*. Гомель: БелГУТ, 2021. Ч.2. С.113 – 114.
- [19] *Старовойтов Э.И., Абдусаттаров А.* Деформирование трехслойных пластин из вязкопластического композита с учетом повреждаемости материалов // *Международная научная и научно-техническая конференция на тему «Инновации в строительстве, сейсмическая безопасность зданий и сооружений»*. НамИСИ, 2022. С.417 – 420.

Дата поступления  
17.01.2023

**Старовойтов Э.И., Абдусаттаров А., Рузиева Н.Б. Уч қатламли эластик-пластик стерженларни емирилишини ҳисобга олган ҳолда циклик юкланиши**

**Аннотация:** Мақолада циклик юклар таъсиридаги қалинлиги бўйча носимметрик эластик –пластик уч қатламли бикир тўлдирувчи стерженларнинг деформациясини ҳисоблаш модели келтирилган. Лагранжинг вариацион принципага асосланиб, материалнинг емирилишини ҳисобга олган ҳолда бир марталик ва ўзгарувчан юкланишлар таъсиридаги уч қатламли стерженларни эгилишининг чегаравий масаласи шакллантирилган. Қўрилаётган масалани ечиш учун “эластик” ечимлар усулига асосланган ҳисоблаш усул қўлланилган. Материалларнинг циклик хусусиятларини ва емирилишини ҳисобга олган ҳолда уч қатламли, хусусан, бир қатламли стерженлар учун ҳисобланган сонли натижалар келтирилган.

**Калит сўзлар:** уч қаватли стержен; циклик юкланиш; емирилиш; вариацион тамоил; кўчишлар орқали мувозанат тенгламалари.

**Starovoitov E.I., Abdusattarov A., Ruzieva N.B. Cyclic loading of elastic-plastic three-layer rods taking into account and damage**

**Abstract:** The article presents a simulation of the calculation of deformation of thickness – asymmetric elastic – plastic three – layer rods with a rigid filler under cyclic loading. Based on the Lagrange variation principle, the boundary value problem of bending three – layer rods under single and alternating loading, taking into account the damage of the material, is formulated. To solve the formulated problems, an approximate method based on the method of elastic solutions is applied. Numerical results of calculated values for three – layer, in particular single – layer rods are obtained, taking into account the cyclic characteristics of materials and damage.

**Keywords:** three – layer rod; cyclic loading; damage; variation principle; equilibrium equations in displacements.