

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ В СТАЦИОНАРНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

¹Старовойтов Э. И., ²Журавков М. А., ¹Яровая А.В.

¹Белорусский государственный университет транспорта

²Белорусский государственный университет

Введение. Эксплуатация трехслойных элементов конструкций, занявших доминирующее положение в технике и строительстве, часто протекает в условиях воздействия внешних температурных полей. Это объясняет возросший спрос на разработку математических моделей трехслойных пластин и методов их расчета на различные виды и типы термосиловых нагрузок.

Монографии [1–2] описывают различные подходы к построению математических моделей статического и динамического деформирования многослойных и трехслойных элементов конструкций в различных физико-механических полях. В них также изложены методы решения соответствующих краевых и начально-краевых задач. Гармонические и нестационарные динамические нагружения неоднородных цилиндрических и сферических оболочек исследованы в работах [3–7]. Изотермическое динамическое деформирование трехслойных круговых пластин при импульсных и резонансных непрерывных и локальных нагрузках рассмотрено в статьях [8–13]. Затухание колебаний в вязкоупругой трехслойной пластине в условиях нейтронного облучения исследовано в статье [14; 15]. Нестационарный контакт сферических и цилиндрических оболочек анализируется в работах [16–19]. Публикации [20–27] посвящены изотермическому и термосиловому квазистатическому нагружению трехслойных пластин и стрержней, в том числе опирающихся на упругое основание [28; 29].

В статье [30] решена задача о собственных колебаниях упругой круговой трехслойной пластины в температурном поле. Проведен численный параметрический анализ зависимости собственных чисел и частот колебаний защемленной по контуру пластины от температуры. Здесь, на базе полученных в [30] результатов, построено решение задачи о вынужденных колебаниях упругой круговой трехслойной пластины в стационарном температурном поле и проведен численный параметрический анализ зависимости параметров колебаний защемленной по контуру пластины от температуры.

1. Постановка начально-краевой задачи. Используется цилиндрическая система координат r, φ, z , связанная со срединной плоскостью заполнителя, ось z направлена вверх, перпендикулярно к первому слою (рисунок 1). Для тонких внешних несущих слоев толщинами $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого легкого заполнителя ($h_3 = 2c$) справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали.

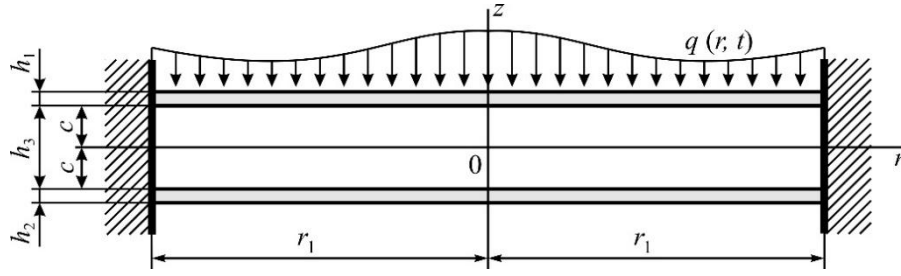


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной пластины

Считаем, что к наружной поверхности первого несущего слоя приложена произвольная распределенная поперечная нагрузка $q(r, t)$. Температурное поле принимается однородным. В силу осесимметричности нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ ($k=1, 2, 3$ – номер слоя), а прогиб пластины w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ . В дальнейшем эти функции считаем искомыми. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi = 0$ при $r = 1$). Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_1 .

Для описания зависимости модулей упругости $G(T)$, $K(T)$ материалов слоев от однородной стационарной температуры T , использовалась универсальная формула Белла [1]:

$$\begin{aligned} \{G(T), K(T), E(T)\} &= \{G(0), K(0), E(0)\} \varphi(T), \\ \varphi(T) &= \begin{cases} 1, & 0 < T / T_m \leq 0,06, \\ 1,03(1 - T / (2T_m)), & 0,06 < T / T_m \leq 0,57, \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

где T_m – температура плавления материала; $G(0)$, $K(0)$, $E(0)$ – значения модулей при начальной температуре.

Деформации и напряжения в слоях связаны термоупругим законом Гука:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k(T_k) \varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T_k) \quad (k=1,2,3), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_k(T_k) \varepsilon_{rz}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi), \end{aligned}$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon_\alpha^{(k)}$ – девиаторные, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения материала k -го слоя.

Уравнения движения рассматриваемой пластины получены вариационным методом в [1]. Соответствующая система дифференциальных уравнений в частных производных будет

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} &= -q. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь L_2 , L_3 – линейные дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2},$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_r \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

коэффициенты

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \\ a_3 &= h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+, \quad a_4 = c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right), \\ a_5 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \\ a_6 &= h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\ K_k^+ &= K_k(T) + \frac{4}{3} G_k(T), \quad K_k^- = K_k(T) - \frac{2}{3} G_k(T); \end{aligned} \quad (3)$$

$M_0 \ddot{w}$ – поперечные инерционные силы, $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_0^2$, ρ_k – плотность материала k -го слоя.

Здесь, как и ранее, температура в явном виде в уравнения движения (2) не входит. Она учитывается в коэффициентах (3) термозависимостью параметров упругости материалов слоев.

Начальные условия принимаются однородными ($t = 0$):

$$w(r, 0) \equiv 0, \quad \dot{w}(r, 0) \equiv 0. \quad (4)$$

На заделанном контуре пластины должны выполняться граничные условия:

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = 1. \quad (5)$$

2. Методика решения начально-краевой задачи. При рассмотрении вынужденных колебаний круговой трехслойной пластины решение строится с помощью разложения в ряды по системам собственных ортонормированных функций, приведенных в [30]. Внешняя нагрузка $q(r, t)$ и искомые перемещения $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$ представляются в виде

$$\begin{aligned} q(r, t) &= M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t), \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t), \\ \psi(r, t) &= b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n T_n(t), \quad u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n T_n(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где β_n – собственные числа; $v_n(\beta_n r)$, $\phi_n(\beta_n r)$ – системы собственных ортонормированных функций

$$v_n(\beta_n r) = \frac{1}{d_n} \left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_0(\beta_n r) \right],$$

$$\phi_n(\beta_n r) = \frac{\beta_n}{d_n} \left[J_1(\beta_n r_1) \frac{r}{r_1} - J_1(\beta_n r) + \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} (I_1(\beta_n r_1) \frac{r}{r_1} - I_1(\beta_n r)) \right].$$

Ряды в (6) сходятся равномерно, что обеспечено полнотой используемых систем собственных фундаментальных функций. Это позволяет считать искомые функции непрерывными и дифференцируемыми. В силу выбора собственных функций $v_n(\beta_n r)$, $\phi_n(\beta_n r)$ граничные условия на контуре пластины (5) выполняются автоматически.

Выражения для коэффициентов разложения нагрузки в ряд по системе собственных функций $q_n(t)$ получим, умножив первое из соотношений в (6) на функцию $v_n(\beta_n r)$ и проинтегрировав по радиусу пластины:

$$\int_0^1 q(r, t) v_n r dr = M_0 \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} v_m q_m(t) v_n r dr = M_0 \sum_{m=0}^{\infty} q_m(t) \int_0^1 v_m v_n r dr.$$

В силу ортонормированности системы собственных функций

$$\int_0^1 v_m v_n r dr = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

имеем

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^1 q(r, t) v_n r dr. \quad (7)$$

При колебаниях в стационарном температурном поле заземленной по контуру трехслойной пластины дифференциальное уравнение для определения искомой функции времени $T_n(t)$ можно получить из третьего уравнения системы (2) после подстановки в него выражений (6), (7) и использования линейной дифференциальной связи функций v_n , ϕ_n :

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = q_n. \quad (8)$$

Общее решение уравнения (8) можно принять в виде

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t-\tau)) q_n(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Следовательно, прогиб $w(r, t)$, относительный сдвиг $\psi(r, t)$ и радиальное перемещение $u(r, t)$ в круговой трехслойной упругой пластине, находящейся под воздействием осесимметричной динамической нагрузки в стационарном температурном поле, определяются соотношениями (6). При этом учитываются функции времени (9). Удовлетворяя начальным условиям движения (4), получим коэффициенты

$$A_n = B_n = 0.$$

Следовательно, задача по исследованию вынужденных колебаний, сводится к нахождению параметров разложения в ряд заданной нагрузки $q_n(t)$ и определению функции $T_n(t)$.

3. Решение начально-краевой задачи. Пусть на рассматриваемую пластину действует локальная мгновенно приложенная динамическая поверхностная нагрузка, равномерно распределенная внутри круга относительного радиуса $b \leq 1$.

В этом случае нагрузку можно представить с помощью функции Хэвисайда $H_0(r)$:

$$q(r, t) = q_0(t)H_0(b - r). \quad (10)$$

Подставляя нагрузку (10) в формулу (2.3), получаем интегральное выражение для вычисления параметров $q_n(t)$:

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)}{M_0 d_n} \int_0^{r_1} H_0(b - r) \left(J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_0(\beta_n r) \right) r dr.$$

Взяв, входящие в это выражение определенные интегралы от произведения функций Бесселя и Хэвисайда, получим коэффициенты разложения нагрузки (10) в ряд по системе собственных ортонормированных функций $v_n(\beta_n r)$:

$$q_n(t) = \frac{q_0(t)b}{M_0 d_n \beta_n} \left(J_1(\beta_n b) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n b) \right). \quad (11)$$

Функция времени $T_n(t)$ вычисляется по формуле (9) с учетом коэффициентов (11). При постоянной интенсивности мгновенно приложенной нагрузки $q_0(t) = q_0 = \text{const}$ и нулевых начальных условиях получаем

$$T_n(t) = \frac{q_0 b (1 - \cos(\omega_n t))}{M_0 d_n \beta_n \omega_n^2} \left(J_1(\beta_n b) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_1(\beta_n b) \right). \quad (12)$$

При $b = r_1$ нагрузка распределена по всей поверхности пластины.

4. Численные результаты получены для круговой трехслойной пластины единичного радиуса $r_1 = 1$ м. Собственные частоты колебаний ω_n вычислялись по формуле

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}$$

с использованием собственных чисел из работы [30] при интенсивности распределенной нагрузки $q_0 = 7000$ Па.

На рисунке 2 показано изменение прогиба (*a*) и относительного сдвига в заполнителе (*б*) вдоль радиуса пластины, защемленной по контуру. Слои выполнены из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т ($h_1 = h_2 = 0,02$, $h_3 = 0,05$). Кривые рассчитаны при комнатной температуре $T_1 = 0$ ($t_1 = 0,0115$ с) и после нагрева на $T = 200$ °С ($t_2 = 0,0123$ с) для различных значений радиуса пятна нагрузки: 1 – $b = 0,5$ м (T_1 , t_1); 2 – $b = 0,5$ м (T_2 , t_2); 3 – $b = 1$ м (T_1 , t_1); 4 – $b = 1$ м (T_2 , t_2). Моменты времени t_1 , t_2 в которые вычислялись прогиб и сдвиг соответствуют максимуму функции (12) при частоте основного тона ω_0 . Увеличение температуры приводит к росту перемещений на 16–17 %.

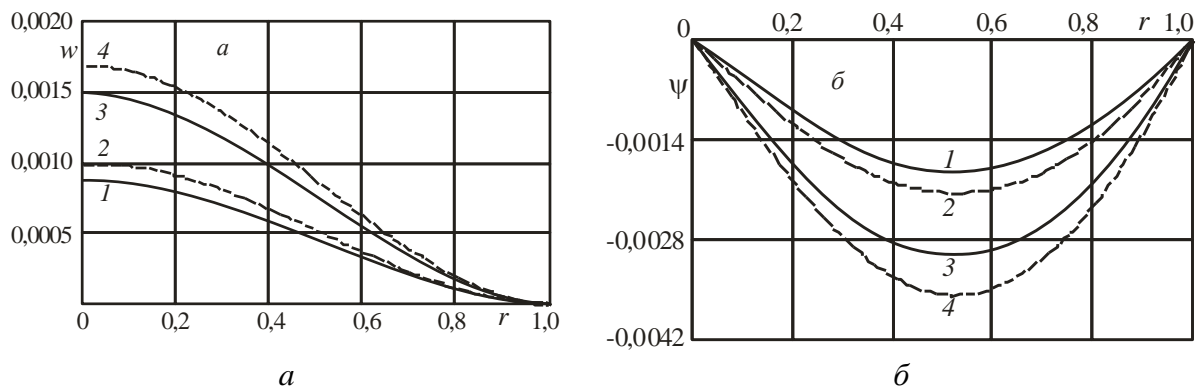


Рис. 2. Прогиб (*a*) и относительный сдвиг (*б*) в трехслойной пластине при круговой мгновенно приложенной нагрузке ($t = \pi / \omega_0$, Д16-Г-фторопласт-4-Д16Г)

Аналогичные графики для пластины, слои которой выполнены из материалов кордиерит-фторопласт-4-Д16Г, приведены на рисунке 3. Кривые рассчитаны в момент времени $t_3 = 0,005$ с, соответствующий максимуму функции времени (12) при частоте основного тона ω_0 . Здесь воздействие температуры не приводит к заметному изменению перемещений, что обусловлено весьма жестким кордиеритовым слоем.

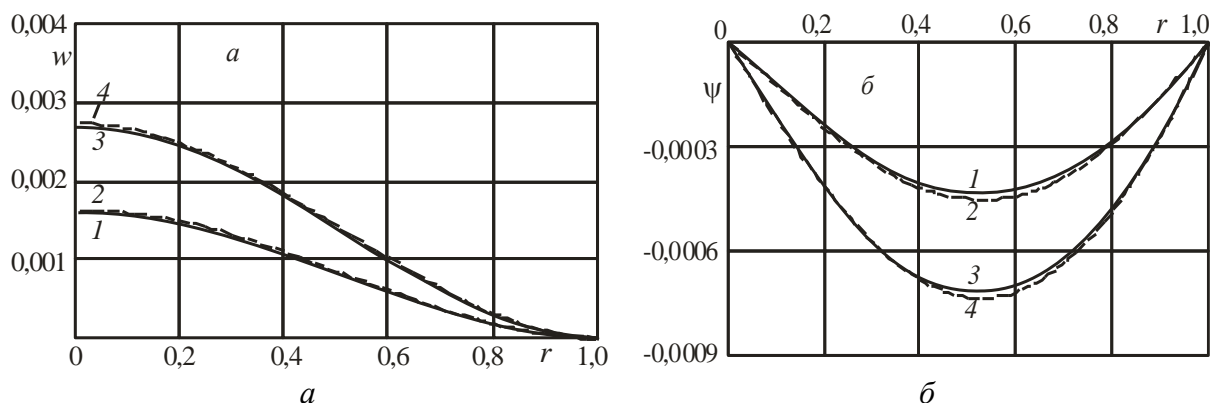


Рис. 3. Прогиб (*a*) и относительный сдвиг (*б*) в трехслойной пластине при круговой мгновенно приложенной нагрузке ($t = \pi / \omega_0$, кордиерит-фторопласт-4-Д16Г)

Рисунок 4 иллюстрирует сходимость ряда (6) для прогиба при нагрузке, равномерно распределенной по верхней плоскости пластины Д16Г-фторопласт-Д16Г ($b = 1$ м): 1 – $T = 0$; 2 – $T = 200$ °С. При расчете прогиба суммировались первые восемь членов ряда. Добавление последующих 92 слагаемых изменяло результат менее чем на 0,01 %. Отдельные точки на графике соединены для лучшего зрительного восприятия процесса сходимости.

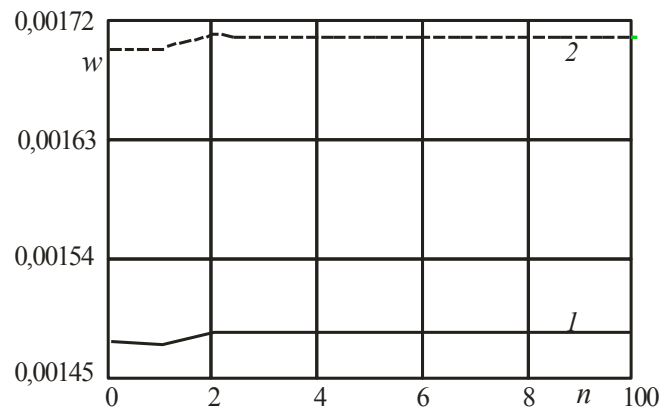


Рис. 4. Сходимость ряда при вычислении прогиба

Выводы. Предложена механико-математическая модель динамического деформирования упругих трехслойных круговых пластин мгновенно приложенными нагрузками. Она позволяет исследовать зависимость параметров колебаний от величины стационарного температурного поля. Показано, что температура влияет на амплитуды колебаний через механические характеристики материалов, собственные частоты и собственные функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция».

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков [и др.] – Минск : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
2. Журавков М. А. Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов – Минск : БГУ, 2021 – 535 с.
3. Gorshkov, A. G. Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell / A. G. Gorshkov, E. I. Starovoitov, A. V. Yarovaya // International applied mechanics. – 2001. – Vol. 37, No. 9. – P. 1196–1203.
4. Старовойтов Э. И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – 21, № 2. – С. 162–169.
5. Mikhailova, E. Yu. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) / E. Yu. Mikhailova, G. V. Fedotenkov // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, No. 2. – P. 239–247.
6. Tarlakovskii, D. V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, No. 2. – P. 145–152.
7. Mikhasev, G. I. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells / G. I. Mikhasev, H. Altenbach // Thin-walled laminated structures. – Cham: Springer. – 2019. – P. 157–198.
8. Могилевич Л. И. Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым наполнителем / Л. И. Могилевич, В. С. Попов, Э. И. Старовойтов // Наука и техника транспорта. – 2006. – № 2. – С. 56–63.
9. Paimushin, V. N. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour / V. N. Paimushin // Mechanics of Composite Materials. – 2017. – Vol. 53, No. 1. – P. 1–16.

10. Bakulin, V. N., Dynamic Stability of a Cylindrical Shell under Alternating Axial External Pressure. / V. N. Bakulin, E. N. Volkov, A. I. Simonov // Russian Aeronautics. – 2017. – Vol. 60, No. 4. – P. 508–513.
11. Bakulin, V. N. Parametric resonance of a three layered cylindrical composite rib-stiffened shell / V. N. Bakulin, D. A. Boitsova, A. Ya. Nedbai // Mechanics of composite materials. – 2021. – Vol. 57, No. 5. – P. 623–634.
12. Starovoitov, É. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, No. 5. – P. 474–481.
13. The oblique impact response of composite sandwich plates/ I. Ivañez [et al.] // Composite Structures. – 2015. – No. 133. – P. 1127–1136.
14. Vakhneev, S. Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol. 18, No. 4. – P. 699–704.
15. Paimushin, V. N. Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping / V. N. Paimushin, V. A. Firsov, V. M. Shishkin // Mechanics of Composite Materials. – 2017 – Vol. 53, No. 4. – P. 283–304.
16. Fedotenkov, G. V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovskiy // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – Vol. 162, No. 2. – p. 246–253.
17. Paimushin, V. N. Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate / V. N. Paimushin, R. K. Gazizullin // Mechanics of Composite Materials. – 2017 – Vol. 53, No. 3. – P. 407–436.
18. Fedotenkov, G. V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovskiy, Y. A. Vahterova // Lobachevskii journal of mathematics. – 2019. – Vol. 40, No. 4. – P. 439–447.
19. Suvorov, Ye. M. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium / Ye. M. Suvorov, D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2012. – Vol. 76, No. 5. – P. 511–518.
20. Захарчук Ю. В. Деформирование круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Теоретическая и прикладная механика. Минск : БНТУ, 2018. – Вып. 33. – С. 363–369.
21. Захарчук Ю. В. Влияние сжимаемости наполнителя на перемещения в трехслойной круговой симметричной пластине / Ю. В. Захарчук // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2. – С. 14–27.
22. Козел А. Г. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – № 11 (11). – С. 127–133.
23. Козел А. Г. Деформирование круговой трехслойной пластины, защемленной по контуру, на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. Минск : БНТУ. – 2018. – Вып. 33. – С. 318–323.
24. Нестерович А. В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при несимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – № 11 (11). – С. 195–203.
25. Нестерович, А. В. Несимметричное нагружение физически нелинейной трехслойной круговой пластины в своей плоскости // Теоретическая и прикладная механика. Минск : БНТУ. – 2021. – Вып. 36. – С. 42–46.

26. Старовойтов Э. И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.

27. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field / É. I. Starovoitov [et al.] // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol. 88, No. 4. – P. 1023–1029.

28. Трацевская Е. Ю. Закономерности развития суффозионно-просадочных явлений на территории Белоруссии / Е. Ю. Трацевская, А. Н. Галкин // Инженерная геология массивов лессовых пород. труды международной научной конференции. под ред. В. Т. Трофимова, В. А. Королева. – М. : 2004. – С. 108–109.

29. Трацевская Е. Ю. Особенности освоения техногенных грунтов г. Гомеля в современных условиях / Е. Ю. Трацевская, А. Н. Галкин // Многообразие грунтов: морфология, причины, следствия. Труды Международной научной конференции. Под ред. В. Т. Трофимова и В. А. Королева. – М. 2003. – С. 123.

30. Старовойтов, Э. И. Термоупругие свободные колебания трехслойной круговой пластины / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, А. В. Яровая // Теоретическая и прикладная механика. – Минск : БНТУ, 2021. – Вып. 36. – С. 15–20.

Поступила: 15.03.2023