УДК 624.072
ББК 38.53

НЕЛИНЕЙНЫЙ СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ОРТОТРОПНЫХ ПЛИТ НА УПРУГОМ ИЗОТРОПНОМ ОСНОВАНИИ

К. А. СИРОШ[1], О. В. КОЗУНОВА[2]
[1]магистр, аспирант
Белорусский государственный университет транспорта
г. Гомель, Беларусь,
[2]к.т.н., доцент, доцент кафедры «Архитектура и строительство»
Белорусский государственный университет транспорта
г. Гомель, Беларусь,
[2]докторант
Белорусский национальный технический университет
г. Минск, Беларусь

Аннотация. Рассмотрена регулярная система ортотропных плит на упругом изотропном основании. Основание заменяется расчетной областью, которая аппроксимируется объемной разбивочной сеткой. Упругий и нелинейный расчет конструкции выполнялся вариационно-разностным методом с заменой дифференциальных уравнений конечно-разностными аппроксимациями. Полученная система алгебраических уравнений решается с использованием итерационного алгоритма. При первом приближении ортотропная плита рассчитывается как линейно-упругая и однородная, при последующих приближениях как линейно-упругая и неоднородная.

При нахождении переменной жесткости ортотропной плиты на упругом изотропном основании используется зависимость «жесткость – кривизна» в направлениях осей инерции по Соломину. Энергия деформации упругого основания заменяется работой реактивных давлений в контактной зоне на основании закона сохранения энергии.

Нелинейный статический анализ результатов расчета проведен для осадок ортотропной плиты и контактных напряжений.

Вычисления реализованы в проприетарной системе компьютерной алгебры Mathematica.

Ключевые слова: бесконечная регулярная система плит, ортотропная плита, вариационно-разностный метод, упругий слой, контактная зона, прогиб плиты, осадка основания, контактные напряжения, физическая нелинейность, зависимость «жесткость – кривизна».

NONLINEAR STATIC ANALYSIS OF A SYSTEM OF ORTHOTROPIC PLATES ON AN ELASTIC ISOTROPIC BASE

K. A. SIROSH[1], O. V. KOZUNOVA[2]
[1]master's degree, PhD student
Belarusian State University of Transport
Gomel, Belarus,
[2] PhD in engineering, associate professor, Department «Architecture and Construction»
Belarusian State University of Transport
Gomel, Belarus,
[2]doctoral student
Belarusian National Technical University
Minsk, Belarus

Abstract. A regular system of orthotropic plates on an elastic isotropic base is considered. The base is replaced by a calculated area, which is approximated by a volumetric center grid. Elastic and nonlinear calculation of the structure was performed by the variational-difference method with the replacement of differential equations by finite-difference approximations. The resulting system of algebraic equations is solved using an iterative algorithm. At the first approximation, the orthotropic plate is calculated as linearly elastic and homogeneous, at subsequent approximations as linearly elastic and inhomogeneous.

When finding the variable stiffness of an orthotropic plate on an elastic isotropic base, the dependence "stiffness – curvature" in the directions of the axes of inertia according to Solomin is used. The deformation energy of the elastic base is replaced by the work of reactive pressures in the contact zone on the basis of the law of conservation of energy.

Nonlinear static analysis of the calculation results is carried out for the values of orthotropic plate sediments and contact stresses in the contact zone of the plate and the base.

Calculations are implemented in the proprietary Mathematica computer algebra system.

Keywords: infinite regular plate system, orthotropic plate, variation-difference method, elastic layer, contact zone, plate deflection, base sediment, contact stresses, physical nonlinearity, "stiffness – curvature" dependence.

Введение.

Расчет и исследование работы конструкций ставит перед исследователями задачу выбора метода расчета исследуемой конструкции. Особое место в расчете конструкции занимает правильный выбор метода расчета, так как от выбранного метода зависит достоверность результатов исследования напряженно-деформированного состояния (НДС). Контактные задачи строительной механики сложны в решении и нелинейны из-за наличия многих неизвестных, многофакторности параметров контактирующих тел, неоднородности зоны контакта. Поэтому при создании расчетной модели исследователь сталкивается с необходимостью упрощения параметров реальной физической модели при использовании методов расчета. Сложность решения таких задач предполагает использование вычислительной техники и компьютерных программ для численного решения, итерационного алгоритма для реализации нелинейной постановки и обязательного исследования сходимости итерационного процесса.

Решение задач контактного взаимодействия для изгибаемых конструкций на упругом основании методами теории упругости [1] и строительной механики [2] получило современное развитие в работах белорусских ученых [3–9], в которых учитывались разнообразные усложняющие параметры контактирующих тел.

Вопрос расчета регулярной системы железобетонных плит на упругом основании с учетом ортотропии достаточно не исследован в силу неоднозначности и неопределенности исходных данных неоднородных упругих тел. Математическая реализация постановок и алгоритмов таких задач весьма сложны. В работах М. И. Горбунова-Посадова [10], С. Д. Семенюка [11], С. Н. Клепикова [12], С. В. Босакова [5] различными подходами рассмотрен алгоритм расчета фундаментных изотропных плит.

Одним из приближенных к реальным условиям работы конструкции способов расчета является вариационно-разностный метод (ВРМ). Метод сводит решение дифференциальных уравнений контактной задачи теории упругости через конечно-разностные аппроксимации к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Постановка задачи и алгоритм расчета.

Бесконечная регулярная система прямоугольных гибких ортотропных плит опирается на упругое изотропное основание и находится под действием внешней статической нагрузки F, которая действует в центре плиты перпендикулярно и симметрично плоскости осей инерции.

Регулярная система прямоугольных гибких ортотропных плит рассекается в силу симметрии на базовые фрагменты. Из системы вычленяется расчетный элемент – ортотропная плита. Каждая ортотропная плита разбивается на равные участки размерами $\Delta x \times \Delta y$ (см. рис. 1).

Основание моделируется упругим ограниченным по толщине однородным слоем, соединенным с несжимаемым основанием. При решении пространственной задачи упругое основание заменяется расчетной областью, которая аппроксимируется с постоянными шагами по осям глобальной системы координат симметричной объемной разбивочной сеткой (см. рис. 1).

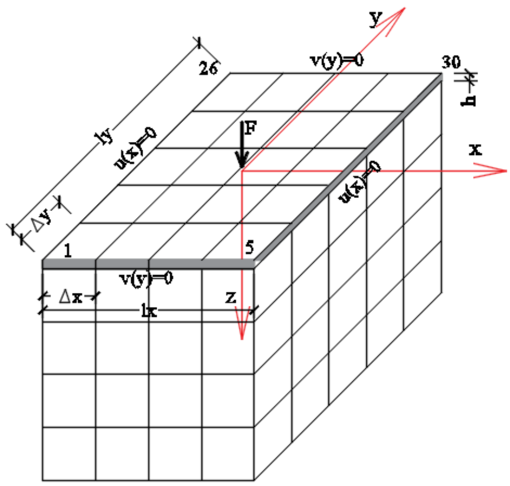


Рисунок 1 – Расчетная область, соответствующая одному расчетному элементу (ортотропной плите)

Кинематические граничные условия: на границах расчетной области основания перемещения по X и Y отсутствуют; в зоне контакта осадки основания и прогиб плиты равны.

Смешанные граничные условия: в крайних точках ортотропной плиты регулярной системы [13]

$$Q_z\Big|_{x=\pm\frac{lx}{2}} = -D_x\frac{d^3w}{dx^3} = 0\ ,\ Q_z\Big|_{y=\pm\frac{ly}{2}} = -D_y\frac{d^3w}{dy^3} = 0 \quad \varphi_x\Bigg|_{y=\pm\frac{ly}{2}} = \frac{dw}{dy} = 0,\ \ \varphi_y\Bigg|_{x=\pm\frac{lx}{2}} = \frac{dw}{dx} = 0. \tag{1}$$

При нагружении конструкции на упругом основании постоянной нагрузкой ее полная потенциальная энергия принимает минимальное значение в состоянии равновесия – вариационный принцип Лагранжа [1]. Величина полной потенциальной энергии конструкции *Э* есть сумма энергий деформации конструкции Ω , упругого основания *U* и работы внешней нагрузки *П.*

Плоскость изгиба – это срединная плоскость недеформированной плиты в осях *XY*. В центр тяжести плиты помещено начало координат. Ось Z направлена в сторону противоположную действия силы и является одной из главных осей (в силу симметрии задачи). Объемными силами пренебрегаем [14]. Для гибкой ортотропной плиты действует обобщенный закон Гука в виде (2.7), (2.8) из [15].

Энергия деформации конструкции тождественна энергии изгиба. Выражение потенциальной энергии деформаций ортотропной плиты по Лехницкому [15] учитывает кручение плиты в плоскости XOY

$$\Omega = V = \frac{1}{2}\iint\left[D_x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_x\nu_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dx\,dy. \tag{2}$$

Цилиндрические жесткости изгиба гибкой ортотропной плиты по направлениям осей Y и X соответственно [15]

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12\left(1-\nu_x\nu_y\right)},\quad D_y = \frac{E_y h^3}{12\left(1-\nu_x\nu_y\right)}, \tag{3}$$

где E_x, E_y, ν_x, ν_y – главные модули упругости и коэффициенты Пуассона материала плиты.

Для учета жесткости кручения плиты применена формула Тимошенко [16]

$$D_k = D_{xy} = \frac{\nu_x + \nu_y}{2}\sqrt{D_x\cdot D_y}. \tag{4}$$

Изгибающие и крутящий моменты ортотропной изолированной плиты [14]

$$M_x = -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),\ M_y = -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), M_k = -2 D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{5}$$

Энергия деформации упругого основания по закону сохранения энергии есть работа реактивных давлений [16]. Энергия деформации упругого основания для изолированной плиты системы [7]:

$$U = \frac{1}{2} \iint\limits_S p(x, y) w(x, y) dx dy; \tag{6}$$

где $p(x, y)$ – реактивные давления в контактной зоне конструкции;

S – площадь области контакта плиты с упругим основанием.

Работа внешней нагрузки $q(x, y)$ для прямоугольной плиты [7]

$$\Pi = -\iint\limits_S q(x, y) w(x, y) dx dy. \tag{7}$$

Нелинейная постановка расчета ортотропной плиты на упругом основании выполняется вариационно-разностным методом (ВРМ) с организацией итерационного процесса. Решение организуется в перемещениях путем замены дифференциальных уравнений конечно-разностными аппроксимациями (метод конечных разностей). На 1-й итерации плита рассчитывается как линейно-упругая и однородная, ортотропная со слабо выраженной ортотропией, на последующих итерациях как линейно-упругая, ортотропная и неоднородная.

При решении поставленной задачи энергия деформации плиты подсчитывается для каждой ячейки метода конечных разностей, а затем суммируется по объему плиты.

Замена интегро-дифференциальных выражений функционалов энергий конечно-разностными аппроксимациями позволяют систему дифференциальных уравнений преобразовать в систему линейных алгебраических уравнений [17; 18], решение которой позволит найти значения неизвестных компонентов вектора перемещений.

Учет физической нелинейности.

Подробный алгоритм расчета с использованием приведенного модуля упругости (деформации) для нахождения переменных жесткостей приведен в [19]. В данной работе нелинейный расчет основан на зависимости «жесткость – кривизна» по Соломину [20], которая связана с диаграммой «момент – кривизна» через секущую жесткость (которая представляет собой тангенс угла наклона секущей к оси кривизн, проведенной к точке К диаграммы «момент – кривизна»)

$$\mathrm{tg}\beta_i = B_i = \frac{M_k}{\chi_k}, \tag{8}$$

где B_i – переменная (секущая) жесткость при изгибе плиты в i-том состоянии.

Расчет с учетом физической нелинейности предполагает итерационный процесс.

Контактная поверхность разбивается на равные прямоугольные участки и вычисляются перемещения центра каждого участка от приложенной силы. При реализации итерационного алгоритма изгибная жесткость уточняется на каждом участке ортотропной плиты по зависимости «жесткость – кривизна». При каждой итерации модуль упругости (деформации) в i-той точке основания изменяется. При нахождении переменной (секущей) жесткости плиты на каждой итерации используется зависимость «жесткость – кривизна» в направлениях X, Y.

Применение зависимости «жесткость – кривизна» сокращает промежуточные вычисления, к тому же зависимость легче аппроксимируется, чем зависимость «момент – кривизна» [17].

Зависимость «жесткость – кривизна» построена одним из авторов в [21] с использованием приведенной цилиндрической жесткости плиты по направлению осей ортотропии (рис. 2).

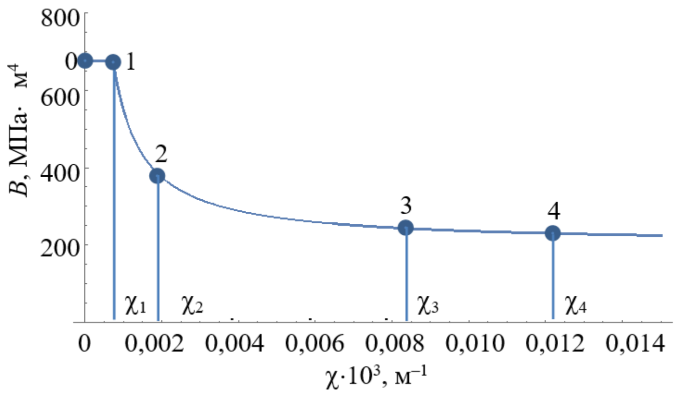


Рисунок 2 – Зависимость «жесткость – кривизна» [21]

Контактная задача решается в линейной постановке (1 итерация) относительно перемещений узловых точек изотропного основания. Нелинейное решение реализуется на 2-й и последующих итерациях. Итерационный процесс заканчивается, как только разница между последующим и предыдущим приближением исследуемой функции будет отвечать требуемой точности решения задачи.

Критерий погрешности ξ применяется для оценки сходимости. Практическим критерием сходимости служит относительная погрешность $f(x, y)$, которая за один обход сетки не должна превосходить ξ

$$\delta_f = \frac{f_{\max}^{(n)} - f_{\max}^{(n-1)}}{f_{\max}^{(n)}} \cdot 100\ \% \le \xi \, . \tag{9}$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta_i = \left| f_{max}^{(n)} - f_{max}^{(n-1)} \right|, \tag{10}$$

где $f_{\max}^{(n)}, f_{max}^{(n-1)}$ – максимальное значение исследуемой функции в центре ячейки при i-й итерации и $(i\text{-}1)$-й итерации соответственно.

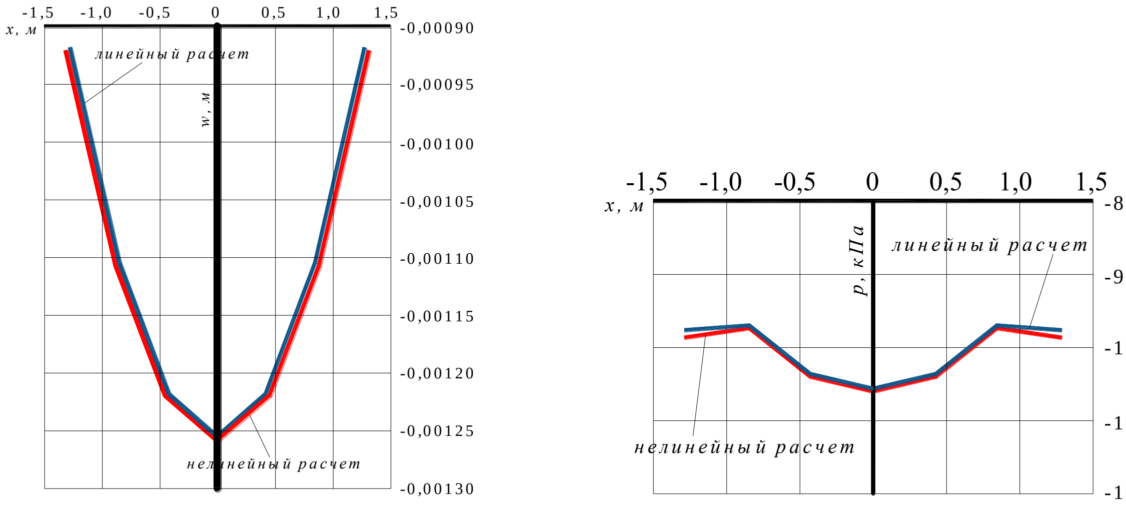
Сопоставление результатов упругого и нелинейного расчетов.

Исходные данные: размеры изолированной железобетонной плиты 4×3 м, h = 0,14 м; материал – тяжелый бетон C20/25; $E_б$ = 29,05 Мпа; $\nu_б$ = 0,17. Изотропное упругое основания: H = 7 м; E_0 = 20 кПа; ν_0 = 0,33. Внешняя статическая нагрузка F = 65 кН, распределенная на участке 0,4×0,4 м, приложена в центре плиты. Собственный вес конструкции q = 3,5 кН/м^2. Численное решение представлено в [21].

Анализ результатов упругого и нелинейного расчетов для значений осадок ортотропной плиты и реактивных давлений под плитой графически представлен на рис. 3.

На первом графике можно наблюдать практически полное совпадение значений осадок, полученных в результате упругого и нелинейного решения, при малом их увеличении, с учетом переменной кривизны и жесткости.

На втором графике приведено графическое сравнение реактивных давлений под плитой упругого и нелинейного решения в зоне взаимодействия. В центре плиты результаты решений практически полностью совпадают, а к краям плиты наблюдается расхождении до 3 %, при учете переменной кривизны и жесткости.



а *б*

Рисунок 3 – Анализ осадок железобетонной плиты (*а*) и контактных напряжений (*б*): синяя линия – упругое решение; красная линия – нелинейный расчет

Источник: Козунова О. В. Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании. Часть 2. Результаты расчета. / О. В. Козунова // Наука и техника. – 2022. – № 21 (4). – С. 290–296.

Заключение.

В рассматриваемой работе авторы вариационно-разностным методом исследовали параметры напряженно-деформированного состояния изолированных ортотропных плит на упругом изотропном основании, как элемента регулярной бесконечной системы ортотропных плит на упругом слое (с ограничением глубины сжимаемой толщи). Построен алгоритм расчета изолированной ортотропной плиты с учетом работы материала конструкции.

Отметим, при вычислении осадок плиты, а также при определении контактных напряжений (реактивных давлений под плитой) вблизи места приложения силы достаточно использовать упругую модель. Для нахождения реактивных давлений при удалении от места действия внешней силы, в особенности вблизи границ плиты, целесообразно применение нелинейной модели.

Методика расчета предлагаемой изолированной плиты лежит в основе методики расчета регулярной системы плиты. Полученные результаты будут являться обобщением теории статических расчетов плит методами строительной механики.

Напряженно-деформированное состояние железобетонной плиты и контактной зоны под плитой определяется в совокупности для бесконечной регулярной системы. При работе изолированной плиты необходимо учитывать нелинейные свойства железобетона через переменную кривизну плиты в каждом направлении. Данная область исследования нелинейных задач требует дальнейшей разработки для создания общей методики решения такого типа задач.

Исследования реализовывались в проприетарной системе компьютерной алгебры Mathematica.

Литература:

1. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высшая школа, 1990. – 400 с.

2. Ржаницын, Р. А. Строительная механика / Р. А. Ржаницын. – М., Высшая школа, 1991. – 439 с.

3. Босаков, С. В. Расчет системы перекрестных балок на двухслойном основании / С. В. Босаков, Я. Д. Семенюк // Вестник БПУ. Серия: Строительство и архитектура. – 2000. – № 1. – С. 14–16.

4. Босаков, С. В. Расчет железобетонных пространственных фундаментов, как системы перекрестных балок, на упругом основании с учетом ползучести бетона / С. В. Босаков, С. Д. Семенюк // Вестник БГТУ. Серия: Строительство и архитектура. – 2001. – № 1. – С. 13–16.

5. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск: БНТУ, 2002. – 127 с.

6. Семенюк, С. Д. Железобетонные и пространственные фундаменты жилых и гражданских зданий на неравномерно деформированном основании / С. Д. Семенюк. – Могилев : Белорусско–Российский университет, 2003. – 269 с.

7. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости: монография / С. В. Босаков. – Брест : БрГТУ, 2006. – 107 с.

8. Босаков, С. В. Вариационно-разностный подход в решении контактной задачи для нелинейно упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Теория расчета (Часть 1) / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Вестник БНТУ. − 2009. − № 1. – С. 5−13.

9. Guenfoud, S. A Ritz's method based solution for the contact problem of a deformable rectangular plate on an elastic quarter-space / S. Guenfoud, S. V. Bosakov, D. F. Laefer // International Journal of Solids and Structures. – 2010. – Vol. 47. – P. 1822–1829.

10. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1984. – 680 с.

11. Семенюк, С. Д. Железобетонные пространственные фундаменты жилых и гражданских зданий на неравномерно-деформируемом основании / С. Д. Семенюк. − Могилев, БРУ, 2003.– 269 с.

12. Клепиков, С. Н. Расчет конструкций на упругом основании / С. Н. Клепиков. – Киев: Будівельник, 1967. – 184 с.

13. Козунова, О. В. Нелинейный расчет бесконечной регулярной системы плит на изотропном основании / О. В. Козунова, К. А. Сирош // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : Материалы XXVIII Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова, Кремёнки, 16–20 мая 2022 г. – М.: ООО «ТРП», 2022. – С. 113–115.

14. Козунова О. В. Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании. Часть 1. Теория расчета. / О. В. Козунова // Наука и техника. – 2022. – № 21 (3). – С. 211–221.

15. Лехницкий, С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. М.: Госуд. изд-во технико-теор. лит-ры, 1957. 387 с.

16. Тимошенко, С. П. Пластины и оболочки/ С. П. Тимошенко, С.Войновский-Кригер М., Фитматгиз, 1963.– 536 с.

17. Козунова, О. В. Нелинейный расчет железобетонной балки на упругом основании с помощью зависимости «жесткость-кривизна» / О. В. Козунова/ НТЖ: Строительная механика и расчет сооружений. М. – № 1. – 2022. – С. 37–46.

18. Козунова, О. В. Расчет бесконечной системы перекрестных балок на упругом основании вариационно-разностным методом / О. В. Козунова, К. А. Сирош // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия F. Строительство. Прикладные науки. 2021. – С. 65–71.

19. Козунова, О. В. Нелинейный расчет регулярной системы железобетонных балок на упругом основании на симметричную нагрузку / О. В. Козунова, К. А. Сирош // Механика. Исследования и инновации: международный сборник научных трудов / БелГУТ. – Гомель, 2021. – Вып. 14. – С. 97–104.

20. Соломин, В. И. Методы расчета и оптимальное проектирование железобетонных фундаментных конструкций // В. И. Соломин, С. Б. Шматков. – М., Стройиздат, 1986. –208 с.

21. Козунова О. В. Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании. Часть 2. Результаты расчета. / О. В. Козунова // Наука и техника. – 2022. – № 21 (4). – С. 290–296.

References:

1. Aleksandrov A. V., & Potapov V. D. (1990). Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti [Fundamentals of the Theory of Elasticity and Plasticity]. Moscow: Vysshaya Shkola. (In Russ.).

2. Rzhanitsyn R. A. Stroitel'naya mekhanika [Structural Mechanics]. Moscow: Vysshaya Shkola. (In Russ.).

3. Bosakov S. V., & Semenyuk Ya. D. (2000). Raschet sistemy perekrestnykh balok na dvukhsloinom osnovanii [Calculation of a system of cross beams on a two – layer base]. Vestnik BPU.

Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura [Bulletin of BSPU. Series: Construction and Architecture], (1), 14–16. (In Russ.). https://rep.bstu.by/handle/data/5742

4. Bosakov S. V., & Semenyuk S. D. (2001) Raschet zhelezobetonnykh prostranstvennykh fundamentov, kak sistemy perekrestnykh balok, na uprugom osnovanii s uchetom polzuchesti betona [Calculation of reinforced concrete spatial foundations as a system of cross beams on an elastic base taking into account the creep of concrete]. Vestnik BGTU. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura [Bulletin of BSTU. Series: Construction and Architecture], (1), 13–16. (In Russ.). https://rep.bstu.by/handle/data/15979

5. Bosakov S. V. (2002). Staticheskie raschety plit na uprugom osnovanii [Static Calculations of Slabs on an Elastic Foundation]. Minsk: Belarusian National Technical University. (In Russ.).

6. Semenyuk S. D. (2003) Zhelezobetonnye i prostranstvennye fundamenty zhilykh i grazhdanskikh zdanii na neravnomerno deformirovannom osnovanii [Reinforced concrete and spatial foundations of residential and civil buildings on an unevenly deformed base]. Mogilev: Belarusian–Russian University. (In Russ.).

7. Bosakov S. V. (2006). Metod Rittsa v kontaktnykh zadachakh teorii uprugosti: monografiya [The Ritz Method in Contact Problems of Elasticity Theory]. Brest: Brest State Technical University. (In Russ.).

8. Bosakov S. V. & Kozunova O. V. (2009). Variatsionno-raznostnyi podkhod v reshenii kontaktnoi zadachi dlya nelineino uprugogo neodnorodnogo osnovaniya. Ploskaya deformatsiya. Teoriya rascheta (Chast' 1) [Variational-difference approach in solving the contact problem for a nonlinearly elastic inhomogeneous base. Flat deformation. Theory of calculation (Part 1)]. Vestnik BNTU [Bulletin of BNTU], (1), 5−13. (In Russ.). https://rep.bntu.by/handle/data/2215

9. Guenfoud S. A., Bosakov S. V., & Laefer D. F. (2010). Ritz's method based solution for the contact problem of a deformable rectangular plate on an elastic quarter-space. International Journal of Solids and Structures, (47), 1822–1829. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2010.03.014

10. Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., & Solomin V. I. (1984). Raschet konstruktsii na uprugom osnovanii [Calculation of Structures on an Elastic Foundation]. 3rd ed. Moscow, Stroiizdat. (In Russ.).

11. Semenyuk S. D. (2003). Zhelezobetonnye prostranstvennye fundamenty zhilykh i grazhdanskikh zdanii na neravnomerno-deformiruemom osnovanii [Reinforced concrete spatial foundations of residential and civil buildings on an unevenly deformable base]. Mogilev: Belarusian–Russian University. (In Russ.).

12. Klepikov S. N. (1967). Raschet konstruktsii na uprugom osnovanii [Calculation of Structures on an Elastic Foundation]. – Kiev: Budivelnik. (In Russ.).

13. Kozunova O. V., & Sirosh K. A. (2022). Nelineinyi raschet beskonechnoi regulyarnoi sistemy plit na izotropnom osnovanii [Nonlinear calculation of an infinite regular system of plates on an isotropic base]. Materialy XXVIII Mezhdunar. simpoziuma im. A. G. Gorshkova: Tom 1. Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruktsii i sploshnykh sred [Materials of XXVIII International. A. G. Gorshkov Symposium: Vol. 1. Dynamic and technological problems of mechanics of structures and continuous media] (113–115). Moscow: OOO "TRP". (In Russ.).

14. Kozunova O. B. (2022). Sovershenstvovanie metodiki rascheta gibkikh ortotropnykh plit na uprugom osnovanii. Chast' 1. Teoriya rascheta [Improvement of Calculation Technique for Flexible Orthotropic Plates on Elastic Base. Part 1: Calculation Theory]. Nauka i tekhnika [Science & Technique], 21(3), 211–221. (In Russ.). DOI:10.21122/2227-1031-2022-21-3-211-221

15. Lekhnitskii S. G. (1957). Anizotropnye plastinki [Anisotropic Plates]. Moscow: State Publishing House of Technical and Theoretical Literature. (In Russ.).

16. Timoshenko S. P., & Voynovsky-Kriger S. (1963) Plastiny i obolochki [Plates and Shells]. Moscow: Fizmatgiz. (In Russ.).

17. Kozunova O. V. (2022). Nelineinyi raschet zhelezobetonnoi balki na uprugom osnovanii s pomoshch'yu zavisimosti «zhestkost'-krivizna» [Nonlinear calculation of a reinforced concrete beam on an elastic base using the dependence «stiffness-curvature»]. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii [Construction mechanics and calculation of structures], (1), 37–46. (In Russ.). DOI: 10.37538/0039-2383.2022.1.37.46

18.Kozunova O. V., & Sirosh K. A. (2021). Raschet beskonechnoi sistemy perekrestnykh balok na uprugom osnovanii variatsionno-raznostnym metodom [Calculation of an infinite system of cross beams on an elastic base by the variational-difference method]. Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya F. Stroitel'stvo. Prikladnye nauki [Bulletin of Polotsk State University. Series F. Construction. Applied sciences], 65–71. (In Russ.). https://elib.psu.by/handle/123456789/28783

19. Kozunova O. V., & Sirosh K. A. (2021). Nelineinyi raschet regulyarnoi sistemy zhelezobetonnykh balok na uprugom osnovanii na simmetrichnuyu nagruzku [Nonlinear calculation of a regular system of reinforced concrete beams on an elastic base for a symmetrical load]. Mekhanika. Issledovaniya i innovatsii: mezhdunarodnyi sbornik nauchnykh trudov [Mechanics. Research and Innovation: International collection of scientific papers], (14), 97–104. (In Russ.). http://elib.bsut.by:8080/xmlui/handle/123456789/6763

20. Solomin V. I. & Shmatkov S. B/ (1986) Metody rascheta i optimal'noe proektirovanie zhelezobetonnykh fundamentnykh konstruktsii [Calculation Methods and Optimal Design of Reinforced Concrete Foundation Structures]. Moscow: Stroiizdat. (In Russ.).

21. Kozunova O. B. (2022). Sovershenstvovanie metodiki rascheta gibkikh ortotropnykh plit na uprugom osnovanii. Chast' 2. Rezul'taty rascheta [Improvement of Calculation Technique for Flexible Orthotropic Plates on Elastic Base. Part 2. Calculation Results]. Nauka i tekhnika [Science & Technique], 21(4), 290–296. (In Russ.). DOI:10.21122/2227-1031-2022-21-4-290-296