УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ПЛАСТИНЫ, ПОБУЖДАЕМЫЕ МНОГОКРАТНО ПОВТОРНОЙ НАГРУЗКОЙ

Маркова М. В., Леоненко Д. В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. Композитные трехслойные элементы конструкций давно заняли свою нишу в инженерном деле. Их явное преимущество над элементами, выполненными из одного материала, заключается в возможности контролировать и задавать требуемые проектными и техническими условиями физико-механические параметры элемента: прочность, жесткость, тепло- и электропроводность, звуко- и магнитную проницаемость и т. д. Это возможно как раз благодаря сочетанию в рамках единого пакета свойств разнородных совместно работающих материалов. Кроме того, благодаря включению связующих срединных прослоек из легких материалов можно достичь существенного снижения общего веса конструкции без значимого ухудшения показателей прочности и жесткости. В то же время, проектирование слоистых конструкций с точным изменением толщины в наиболее напряженных местах повышает их рациональность с точки зрения материалоемкости.

Объем публикаций и научных исследований, направленных на моделирование и изучение работы слоистых конструкций, воспринимающих воздействие внешних нагрузок, включает несколько тысяч работ. Это обусловлено существованием различных методов приведения трехмерной задачи теории упругости к двумерной и подходов к моделированию и решению поставленных задач. Однако и на сегодняшний день трехслойные конструкции и, в частности, элементы с функциональным изменением толщины не утратили своей актуальности. Приведем обзор научных разработок схожей проблематики последних лет.

Собственные частоты и формы колебаний круговых пластин с функционально-изменяющейся толщиной заполнителя широко рассмотрены в работах Р. Лала и Р. Рани [1–5]. Схожая задача о свободных колебаниях трехслойной пластины с переменной толщиной срединного слоя обозревается в работе Ч. Чанга и Х. Чена [6]. Ч. Лу в работе [7] поднимает вопрос об изменении аэродинамических свойств трехслойной балки при изменении ее толщины вдоль пролета. В работе С. Суслера и Х. Туркмени [8] представлены теоретические и численные исследования нелинейного динамического деформирования пластин с конической формой сердцевины и коническим изменением толщины внешних слоев. В [9; 10] представлен способ изменения несущей способности прямоугольных сэндвич-панелей путем ступенчатого изменения толщины их внешних слоев, рассмотрены вопросы изгиба и устойчивости таких пластин, а также исследована зависимость между собственными частотами и формой ступенчатого профиля.

В данной работе будут рассмотрены вопросы динамического деформирования круговой трехслойной пластины со ступенчатым изменением толщины внешних слоев.

Основная теоретическая часть. Рассмотрим вынужденные колебания круговой жестко защемленной по наружному контуру трехслойной пластины. Толщина ее внешних слоев ступенчато изменяется вдоль радиуса. Толщина срединного заполнителя постоянна (рисунок 1).

Пластина находится в покое. Начальные деформации в пластине отсутствуют. В некоторый момент времени t_0 пластина воспринимает действие внешней многократно повторной нагрузки, выводящей ее из состояния равновесия (рисунок 2). Функция рассматриваемого воздействия имеет вид:

$$q_{(\mathrm{I,II})}(r,t)=\sum_{m=1}^{N}\left(q_0-q_0\frac{t-(m-1)\tau}{\tau_q}\right)\Big(H_0\big[(m-1)\tau+\tau_q-t\big]-H_0\big[(m-1)\tau-t\big]\Big). \qquad (1)$$

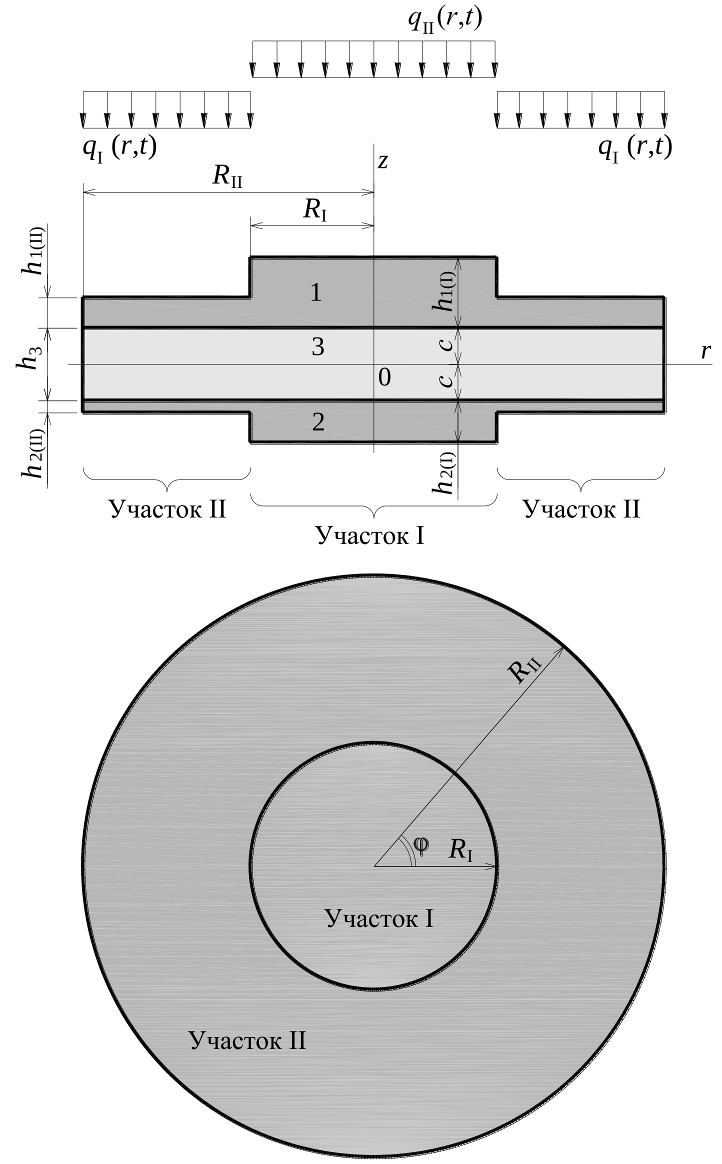

Рис. 1. Круговая трехслойная пластина со ступенчатым изменением толщины внешних слоев

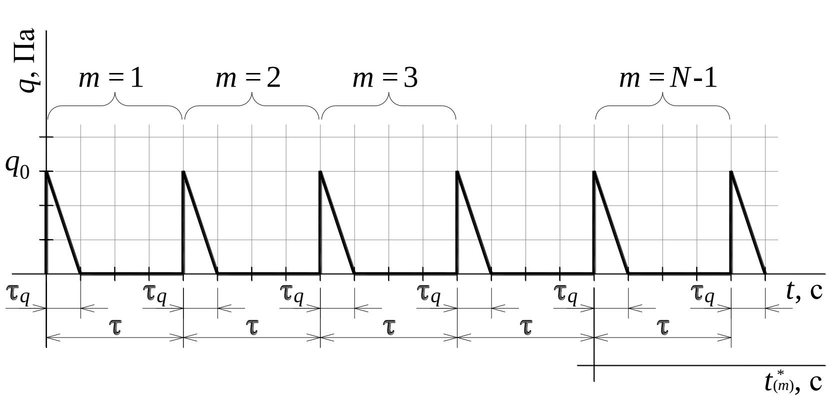

Рис. 2. Многократно повторная линейно-убывающая внешняя нагрузка

В приведенном выше выражении (1) I, II – номер рассматриваемого участка пластины (см. рисунок 1); q_0 – максимальная интенсивность внешнего воздействия; τ_q – продолжительность действия нагрузки; τ – временно́й интервал длительности цикла загружения, представляющий собой сумму времени действия внешней нагрузки и времени свободных колебаний пластины до восприятия следующего воздействия; m – номер цикла; N – количество ударов; H_0 – функция Хевисайда [11]:

$$H_0(f)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad f\le 0;\\ 1 & \text{при} \quad f>0.\end{cases} \tag{2}$$

Деформирование пластины моделируется в рамках дискретно-структурного подхода, основанного на предположениях о характере работы каждого слоя в отдельности, образующих единую систему гипотез. Считаем, что относительно толстый срединный заполнитель пластины подвержен сдвиговым деформациям при его изгибе, то есть для него справедлива сдвиговая модель Тимошенко [12]. Деформирование относительно тонких внешних слоев описываем в соответствии с классической гипотезой Кирхгофа о прямолинейности и перпендикулярности нормали к срединной поверхности до и после изгиба пластины [13; 14]. То есть при изгибе пластины нормаль, проведенная к срединной поверхности, во внешних слоях поворачивается на некоторый угол θ, и при этом остается прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной плоскости. В то же время в пределах заполнителя нормаль повернется на некоторый угол ψ, причем $\psi > \theta$, но также останется прямолинейной и не изменит своей длины.

Таким образом получаем, что при колебаниях пластины в ней возникают следующие перемещения: изгиб $w(r, t)$, сдвиг в заполнителе $\psi(r, t)$ и радиальное смещение координатной поверхности $u(r, t)$. В дальнейшем перечисленные функции будем считать искомыми.

Опираясь на вариационный принцип Гамильтона [15–17], в [18; 19] была получена система дифференциальных уравнений движения для каждого прямолинейного участка пластины, имеющего постоянную толщину. При этом общее решение для пластины в целом может быть представлено путем сопряжения частных решений для отдельных прямолинейных участков:

$$\begin{gathered} w=w_{(\mathrm{I})}+\left(w_{(\mathrm{II})}-w_{(\mathrm{I})}\right)\cdot H_0\left(r-R_{\mathrm{I}}\right); \quad \psi=\psi_{(\mathrm{I})}+\left(\psi_{(\mathrm{II})}-\psi_{(\mathrm{I})}\right)\cdot H_0\left(r-R_{\mathrm{I}}\right); \\ u=u_{(\mathrm{I})}+\left(u_{(\mathrm{II})}-u_{(\mathrm{I})}\right)\cdot H_0\left(r-R_{\mathrm{I}}\right). \end{gathered} \tag{3}$$

Для решения системы уравнений движения пластины функции искомых перемещений $w(r, t)$, $u(r, t)$, $\psi(r, t)$ представим в виде суммы квазистатических $w_s(r, t)$, $u_s(r, t)$, $\psi_s(r, t)$ и динамических $w_d(r, t)$, $u_d(r, t)$, $\psi_d(r, t)$ составляющих:

$$w_{(\mathrm{I,II})}=w_{s(\mathrm{I,II})}+w_{d(\mathrm{I,II})}; \quad u_{(\mathrm{I,II})}=u_{s(\mathrm{I,II})}+u_{d(\mathrm{I,II})}; \quad \psi_{(\mathrm{I,II})}=\psi_{s(\mathrm{I,II})}+\psi_{d(\mathrm{I,II})}. \tag{4}$$

Выражения для определения квазистатических составляющих перемещений имеют вид [20]:

$$w_{s(\mathrm{I,II})}=C_{s5(\mathrm{I,II})}+C_{s6(\mathrm{I,II})}r^2+C_{s7(\mathrm{I,II})}\ln r+C_{s8(\mathrm{I,II})}r^2\ln r+D_{(\mathrm{I,II})}\int\frac{1}{r}\int r\int\frac{1}{r}\int\left(rq_{(\mathrm{I,II})}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}r\mathrm{d}r\mathrm{d}r;$$

$$u_{s(\mathrm{I,II})}=C_{s1(\mathrm{I,II})}r+\frac{C_{s2(\mathrm{II})}}{r}+2C_{s6(\mathrm{I,II})}b_{1(\mathrm{I,II})}r+\frac{C_{s7(\mathrm{I,II})}b_{1(\mathrm{I,II})}}{r}+C_{s8(\mathrm{I,II})}b_{1(\mathrm{I,II})}r\left(2\ln r+1\right)+$$
$$+\frac{D_{(\mathrm{I,II})}b_{1(\mathrm{I,II})}}{r}\int r\int\frac{1}{r}\int\left(rq_{(\mathrm{I,II})}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}r\mathrm{d}r\,;$$
$$\psi_{s(\mathrm{I,II})}=C_{s3(\mathrm{I,II})}r+\frac{C_{s4(\mathrm{II})}}{r}+2C_{s6(\mathrm{I,II})}b_{2(\mathrm{I,II})}r+\frac{C_{s7(\mathrm{I,II})}b_{2(\mathrm{I,II})}}{r}+C_{s8(\mathrm{I,II})}b_{2(\mathrm{I,II})}r\left(2\ln r+1\right)+$$
$$+\frac{D_{(\mathrm{I,II})}b_{2(\mathrm{I,II})}}{r}\int r\int\frac{1}{r}\int\left(rq_{(\mathrm{I,II})}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}r\mathrm{d}r\,. \qquad (5)$$

Константы интегрирования квазистатического деформирования C_{si} определяются из граничных условий жесткой заделки, условий равенства всех перемещений и внутренних усилий в точке изменения толщины пластины, а также сингулярности логарифмических функций в начале координат.

Выражения для определения динамических составляющих перемещений имеют вид:

$$w_{d(\mathrm{I,\,II})}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_{d5n(\mathrm{I,\,II})}I_0\left(r\gamma^{+}_{(\mathrm{I,\,II})n}\right)+C_{d6n(\mathrm{II})}K_0\left(r\gamma^{+}_{(\mathrm{II})n}\right)+C_{d7n(\mathrm{I,\,II})}J_0\left(r\gamma^{-}_{(\mathrm{I,\,II})n}\right)+C_{d8n(\mathrm{II})}Y_0\left(r\gamma^{-}_{(\mathrm{II})n}\right)\right]\times$$
$$\times\left(A_n\cos\left(\omega_n t\right)+B_n\sin\left(\omega_n t\right)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}W_n\left(r\right)\cdot\left(A_n\cos\left(\omega_n t\right)+B_n\sin\left(\omega_n t\right)\right);$$
$$u_{d(\mathrm{I,\,II})}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_{d1n(\mathrm{I,\,II})}r+\frac{C_{d2n(\mathrm{II})}}{r}+C_{d5n(\mathrm{I,\,II})}I_1\left(r\gamma^{+}_{(\mathrm{I,\,II})n}\right)\left(\gamma^{+}_{(\mathrm{I,\,II})n}b_{1(\mathrm{I,\,II})}+\frac{\omega_n^2 m_{1(\mathrm{I,\,II})}}{\gamma^{+}_{(\mathrm{I,\,II})n}}\right)-\right.$$
$$-C_{d6n(\mathrm{I,\,II})}K_1\left(r\gamma^{+}_{(\mathrm{I,\,II})n}\right)\left(\gamma^{+}_{(\mathrm{I,\,II})n}b_{1(\mathrm{I,\,II})}+\frac{\omega_n^2 m_{1(\mathrm{I,\,II})}}{\gamma^{+}_{(\mathrm{I,\,II})n}}\right)-C_{d7n(\mathrm{I,\,II})}J_1\left(r\gamma^{-}_{(\mathrm{I,\,II})n}\right)\left(\gamma^{-}_{(\mathrm{I,\,II})n}b_{1(\mathrm{I,\,II})}-\frac{\omega_n^2 m_{1(\mathrm{I,\,II})}}{\gamma^{-}_{(\mathrm{I,\,II})n}}\right)-$$
$$\left.-C_{d8n(\mathrm{I,\,II})}Y_1\left(r\gamma^{-}_{(\mathrm{I,\,II})n}\right)\left(\gamma^{-}_{(\mathrm{I,\,II})n}b_{1(\mathrm{I,\,II})}-\frac{\omega_n^2 m_{1(\mathrm{I,\,II})}}{\gamma^{-}_{(\mathrm{I,\,II})n}}\right)\right]\times\left(A_n\cos\left(\omega_n t\right)+B_n\sin\left(\omega_n t\right)\right);$$
$$\psi_{d(\mathrm{I,\,II})}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_{d3n(\mathrm{I,\,II})}r+\frac{C_{d4n(\mathrm{II})}}{r}+C_{d5n(\mathrm{I,\,II})}I_1\left(r\gamma^{+}_{(\mathrm{I,\,II})n}\right)\left(\gamma^{+}_{(\mathrm{I,\,II})n}b_{2(\mathrm{I,\,II})}+\frac{\omega_n^2 m_{2(\mathrm{I,\,II})}}{\gamma^{+}_{(\mathrm{I,\,II})n}}\right)-\right.$$
$$-C_{d6n(\mathrm{I,\,II})}K_1\left(r\gamma^{+}_{(\mathrm{I,\,II})n}\right)\left(\gamma^{+}_{(\mathrm{I,\,II})n}b_{2(\mathrm{I,\,II})}+\frac{\omega_n^2 m_{2(\mathrm{I,\,II})}}{\gamma^{+}_{(\mathrm{I,\,II})n}}\right)-C_{d7n(\mathrm{I,\,II})}J_1\left(r\gamma^{-}_{(\mathrm{I,\,II})n}\right)\left(\gamma^{-}_{(\mathrm{I,\,II})n}b_{2(\mathrm{I,\,II})}-\frac{\omega_n^2 m_{2(\mathrm{I,\,II})}}{\gamma^{-}_{(\mathrm{I,\,II})n}}\right)-$$
$$\left.-C_{d8n(\mathrm{I,\,II})}Y_1\left(r\gamma^{-}_{(\mathrm{I,\,II})n}\right)\left(\gamma^{-}_{(\mathrm{I,\,II})n}b_{2(\mathrm{I,\,II})}-\frac{\omega_n^2 m_{2(\mathrm{I,\,II})}}{\gamma^{-}_{(\mathrm{I,\,II})n}}\right)\right]\times\left(A_n\cos\left(\omega_n t\right)+B_n\sin\left(\omega_n t\right)\right). \qquad (6)$$

Здесь $\gamma^{\pm}{}_n$ – коэффициенты, зависящие от частоты собственных колебаний пластины ω_n; $I_0(r\gamma^{+}{}_n)$, $K_0(r\gamma^{+}{}_n)$, $J_0(r\gamma^{-}{}_n)$, $Y_0(r\gamma^{-}{}_n)$ – функции Бесселя от действительного и мнимого аргумента [21; 22]; A_n и B_n – временны́е константы интегрирования, определяемые из начальных условий колебания пластины. Подробный вывод (6) представлен в работе [23].

Исходя из свойств ортогональности Бесселевых функций и условий нормировки выражения для временны́х констант интегрирования A_n и B_n будут иметь вид:

$$A_n = \int_0^{R_{\text{II}}} rW_n(r)\, f_1(r)\,\mathrm{d}r; \quad B_n = \frac{1}{\omega_n}\int_0^{R_{\text{II}}} rW_n(r)\, f_2(r)\,\mathrm{d}r, \tag{7}$$

где $f_1(r)$, $f_2(r)$ – функция прогиба и функция скорости движения точек пластины соответственно в начальный момент времени t_0;

$W_n(r)$ – координатная функция формы колебаний.

Опираясь на исходные условия задачи об отсутствии колебательных процессов и начальных деформаций до момента приложения внешней нагрузки, учитывая $(3)_1$, можно записать:

$$\begin{gathered} w(r,0) = w_s(r,0) + w_d(r,0) = 0; \\ f_1(r) = w_d(r,0) = -w_s(r,0) \quad \text{и} \quad f_2(r) = \dot{w}_d(r,0) = -\dot{w}_s(r,0). \end{gathered} \tag{8}$$

Рассмотрим загружение пластины многократно повторной внешней нагрузкой (см. рисунок 2). Представим данную нагрузку в виде циклически повторяющейся кратковременной нагрузки. Примем, что каждый цикл внешнего воздействия имеет собственную локальную координатную ось времени $t^*_{(m)}$. Взаимосвязь между основной координатной осью t и локальными $t^*_{(m)}$ можно представить следующим выражением:

$$t^*_{(m)} = t - (m-1)\tau.$$

В то же время, аналитическое решение для функции прогиба пластины при действии кратковременной нагрузки представим в виде суммы двух решений на различных временны́х участках колебаний: «1» – от момента приложения внешней нагрузки $t^*_{(m)} = 0$ до момента завершения действия нагрузки τ_q – $w^q_{(m)}(r,\, t)$; и «2» – от момента завершения внешнего воздействия τ_q до момента приложения нового внешнего воздействия $t^*_{(m+1)} = 0$ – $w^0_{(m)}(r,\, t)$. Второй временной участок представляет собой свободные колебания пластины, начальными условиями для которых служат функции прогиба и скорости движения точек пластины при вынужденных колебаниях предыдущего временно́го участка в момент времени $t^*_{(m)} = \tau_q$:

$$\begin{gathered} f_1^0(r) = w^q_{(m)}(r,\tau_q) = w_s\left(r,\left[(m-1)\tau + \tau_q\right]\right) + w^q_{d(m)}(r,\tau_q); \\ f_2^0(r) = \dot{w}^q_{(m)}(r,\tau_q) = \dot{w}_s\left(r,\left[(m-1)\tau + \tau_q\right]\right) + \dot{w}^q_{d(m)}(r,\tau_q). \end{gathered} \tag{9}$$

Отличие первого цикла внешнего воздействия от всех последующих будет заключаться в начальных условиях для первого временно́го участка. В момент времени $t^*_{(m)} = 0$ при $m = 1$ прогиб и скорость движения точек пластины будут отсутствовать – начальные условия для первого временно́го участка представлены выражениями (8). При $m > 1$ начальными условиями цикла будут служить функции прогиба и скоростей движения точек пластины предыдущего цикла в момент времени τ, то есть, учитывая алгоритм построения решения, прогиб и скорости движения точек будут определяться свободными колебаниями пластины предыдущего цикла в момент времени $(\tau - \tau_q)$:

$$\begin{gathered} w^q_{(m)}(r,0) = w_s\left(r,\left[(m-1)\tau\right]\right) + w^q_{d(m)}(r,0) = w^0_{d(m-1)}\left(r,\left[\tau - \tau_q\right]\right); \\ f_1^q(r) = w^q_{d(m)}(r,0) = -w_s\left(r,\left[(m-1)\tau\right]\right) + w^0_{d(m-1)}\left(r,\left[\tau - \tau_q\right]\right); \end{gathered} \tag{10}$$

$$f_2^q(r) = \dot{w}_{d(m)}^q(r,0) = -\dot{w}_s\left(r,\left[(m-1)\tau\right]\right) + \dot{w}_{d(m-1)}^0\left(r,\left[\tau-\tau_q\right]\right).$$

Общее выражение для функции прогиба m-ного цикла внешнего воздействия:

$$\begin{aligned} w_{(m)}(r,t) = w_s(r,t) + w_{d(m)}^0\left(r,\left[t-(m-1)\tau-\tau_q\right]\right) + \left(w_{d(m)}^q\left(r,\left[t-(m-1)\tau\right]\right) - \right. \\ \left. -w_{d(m)}^0\left(r,\left[t-(m-1)\tau-\tau_q\right]\right)\right)\cdot H_0\left[(m-1)\tau+\tau_q-t\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь время функции динамического прогиба свободных колебаний определено как $[t-(m-1)\tau-\tau_q]$ в виду того, что выражения (7) для констант интегрирования A_n и B_n получены из условия начала колебаний, то есть при $t = 0$.

Итоговое выражение для функции прогиба пластины при вынужденных колебаниях, побуждаемых многократным ритмичным внешним воздействием

$$\begin{aligned} w(r,t) = w_s(r,t) + \sum_{m=1}^{N}\left[w_{d(m)}^0\left(t-(m-1)\tau-\tau_q\right) + \left[w_{d(m)}^q\left(t-(m-1)\tau\right) - w_{d(m)}^0\left(t-(m-1)\tau-\tau_q\right)\right]\times\right. \\ \left.\times\left(H_0\left[(m-1)\tau+\tau_q-t\right] - H_0\left[(m-1)\tau-t\right]\right)\right] - \sum_{m=2}^{N}\left[\left(w_{d(m)}^0\left(t-(m-1)\tau-\tau_q\right)\right)\cdot H_0\left((m-1)\tau-t\right) + \right. \\ \left. + w_{d(m-1)}^0\left(t-(m-2)\tau-\tau_q\right)\left(1-H_0\left[(m-1)\tau-t\right]\right)\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Для многократно повторной линейно-убывающей внешней нагрузки константы интегрирования A_n и B_n для функции первого временного участка первого цикла будут иметь вид:

$$\begin{aligned} A_{n(1)}^q = \frac{-1}{d_n}\left[\int_0^{R_\mathrm{I}}\left(r\left[I_0\left(r\gamma_{(\mathrm{I})n}^+\right) + k_{1n}J_0\left(r\gamma_{(\mathrm{I})n}^-\right)\right]\left[C_{s5(\mathrm{I})} + C_{s6(\mathrm{I})}r^2 + D_{(\mathrm{I})}\frac{q_{0(\mathrm{I})}r^4}{64}\right]\right)\mathrm{d}r + \right. \\ + \int_{R_\mathrm{I}}^{R_\mathrm{II}}\left(r\left[k_{2n}I_0\left(r\gamma_{(\mathrm{II})n}^+\right) + k_{3n}K_0\left(r\gamma_{(\mathrm{II})n}^+\right) + k_{4n}J_0\left(r\gamma_{(\mathrm{II})n}^-\right) + k_{5n}Y_0\left(r\gamma_{(\mathrm{II})n}^-\right)\right]\times\right. \\ \left.\left.\times\left[C_{s5(\mathrm{II})} + C_{s6(\mathrm{II})}r^2 + C_{s7(\mathrm{II})}\ln r + C_{s8(\mathrm{II})}r^2\ln r + D_{(\mathrm{II})}\frac{q_{0(\mathrm{II})}r^4}{64}\right]\right)\mathrm{d}r\right]; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} B_{n(1)}^q = \frac{1}{\omega_n d_n}\left[\int_0^{R_\mathrm{I}}\left(r\left[I_0\left(r\gamma_{(\mathrm{I})n}^+\right) + k_{1n}J_0\left(r\gamma_{(\mathrm{I})n}^-\right)\right]\cdot D_{(\mathrm{I})}\frac{r^4 q_{0(\mathrm{I})}}{64\tau_q}\right)\mathrm{d}r + \int_{R_\mathrm{I}}^{R_\mathrm{II}}\left(r\left[k_{2n}I_0\left(r\gamma_{(\mathrm{II})n}^+\right) + \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. + k_{3n}K_0\left(r\gamma_{(\mathrm{II})n}^+\right) + k_{4n}J_0\left(r\gamma_{(\mathrm{II})n}^-\right) + k_{5n}Y_0\left(r\gamma_{(\mathrm{II})n}^-\right)\right]\cdot D_{(\mathrm{II})}\frac{r^4 q_{0(\mathrm{II})}}{64\tau_q}\right)\mathrm{d}r\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Константы интегрирования для функции первого временно́го участка m-ного цикла при $m > 1$ могут быть определены с помощью следующих выражений

$$A^q_{n(m)}=\frac{-1}{d_n}\left[\int\limits_0^{R_\mathrm{I}}\left(r\left[I_0\left(r\gamma^+_{(\mathrm{I})n}\right)+k_{1n}J_0\left(r\gamma^-_{(\mathrm{I})n}\right)\right]\cdot\left[C_{s5(\mathrm{I})}+C_{s6(\mathrm{I})}r^2+D_{(\mathrm{I})}\frac{q_{0(\mathrm{I})}r^4}{64}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A^0_{n(m-1)}\cos\left(\omega_n\left[\tau-\tau_q\right]\right)+B^0_{n(m-1)}\sin\left(\omega_n\left[\tau-\tau_q\right]\right)}{d_n}\times\left(I_0\left(r\gamma^+_{(\mathrm{I})n}\right)+k_{1n}J_0\left(r\gamma^-_{(\mathrm{I})n}\right)\right)\right)\right]\right)\mathrm{d}r+$$

$$+\int\limits_{R_\mathrm{I}}^{R_\mathrm{II}}\left(r\left[k_{2n}I_0\left(r\gamma^+_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{3n}K_0\left(r\gamma^+_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{4n}J_0\left(r\gamma^-_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{5n}Y_0\left(r\gamma^-_{(\mathrm{II})n}\right)\right]\cdot\left[C_{s5(\mathrm{II})}+C_{s6(\mathrm{II})}r^2+\right.\right.$$

$$+C_{s7(\mathrm{II})}\ln r+C_{s8(\mathrm{II})}r^2\ln r+D_{(\mathrm{II})}\frac{q_{0(\mathrm{II})}r^4}{64}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A^0_{n(m-1)}\cos\left(\omega_n\left[\tau-\tau_q\right]\right)+B^0_{n(m-1)}\sin\left(\omega_n\left[\tau-\tau_q\right]\right)}{d_n}\times\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(k_{2n}I_0\left(r\gamma^+_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{3n}K_0\left(r\gamma^+_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{4n}J_0\left(r\gamma^-_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{5n}Y_0\left(r\gamma^-_{(\mathrm{II})n}\right)\right)\right)\right]\right)\mathrm{d}r\right];\qquad(15)$$

$$B^q_{n(m)}=\frac{1}{\omega_n d_n}\left[\int\limits_0^{R_\mathrm{I}}\left(r\left[I_0\left(r\gamma^+_{(\mathrm{I})n}\right)+k_{1n}J_0\left(r\gamma^-_{(\mathrm{I})n}\right)\right]\cdot\left[D_{(\mathrm{I})}\frac{r^4q_{0(\mathrm{I})}}{64\tau_q}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\omega_n}{d_n}\left(A^0_{n(m-1)}\sin\left(\omega_n\left[\tau-\tau_q\right]\right)-B^0_{n(m-1)}\cos\left(\omega_n\left[\tau-\tau_q\right]\right)\right)\left(I_0\left(r\gamma^+_{(\mathrm{I})n}\right)+k_{1n}J_0\left(r\gamma^-_{(\mathrm{I})n}\right)\right)\right)\right]\right)\mathrm{d}r+$$

$$+\int\limits_{R_\mathrm{I}}^{R_\mathrm{II}}\left(r\left[k_{2n}I_0\left(r\gamma^+_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{3n}K_0\left(r\gamma^+_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{4n}J_0\left(r\gamma^-_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{5n}Y_0\left(r\gamma^-_{(\mathrm{II})n}\right)\right]\times\right.$$

$$\times\left[D_{(\mathrm{II})}\frac{r^4q_{0(\mathrm{II})}}{64\tau_q}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\omega_n}{d_n}\left(A^0_{n(m-1)}\sin\left(\omega_n\left[\tau-\tau_q\right]\right)-B^0_{n(m-1)}\cos\left(\omega_n\left[\tau-\tau_q\right]\right)\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(k_{2n}I_0\left(r\gamma^+_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{3n}K_0\left(r\gamma^+_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{4n}J_0\left(r\gamma^-_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{5n}Y_0\left(r\gamma^-_{(\mathrm{II})n}\right)\right)\right)\right)\mathrm{d}r\right].\qquad(16)$$

Константы интегрирования для второго временнóго участка m-ного цикла:

$$A^0_{n(m)}=\frac{1}{d_n}\left[\int\limits_0^{R_\mathrm{I}}\left(r\left[I_0\left(r\gamma^+_{(\mathrm{I})n}\right)+k_{1n}J_0\left(r\gamma^-_{(\mathrm{I})n}\right)\right]\times\right.\right.$$

$$\left.\times\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A^q_{n(m)}\cos\left(\omega_n\tau_q\right)+B^q_{n(m)}\sin\left(\omega_n\tau_q\right)}{d_n}\left(I_0\left(r\gamma^+_{(\mathrm{I})n}\right)+k_{1n}J_0\left(r\gamma^-_{(\mathrm{I})n}\right)\right)\right)\right)\mathrm{d}r+$$

$$+\int\limits_{R_\mathrm{I}}^{R_\mathrm{II}}\left(r\left[k_{2n}I_0\left(r\gamma^+_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{3n}K_0\left(r\gamma^+_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{4n}J_0\left(r\gamma^-_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{5n}Y_0\left(r\gamma^-_{(\mathrm{II})n}\right)\right]\times\right.$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A^q_{n(m)}\cos\left(\omega_n\tau_q\right)+B^q_{n(m)}\sin\left(\omega_n\tau_q\right)}{d_n}\times\right.$$

$$\times\left(k_{2n}I_0\left(r\gamma^{+}_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{3n}K_0\left(r\gamma^{+}_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{4n}J_0\left(r\gamma^{-}_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{5n}Y_0\left(r\gamma^{-}_{(\mathrm{II})n}\right)\right)\Bigg)\Bigg)\mathrm{d}r\Bigg]; \qquad (17)$$

$$B^0_{n(m)}=\frac{-1}{\omega_n d_n}\Bigg[\int\limits_0^{R_\mathrm{I}}\Bigg(r\left[I_0\left(r\gamma^{+}_{(\mathrm{I})n}\right)+k_{1n}J_0\left(r\gamma^{-}_{(\mathrm{I})n}\right)\right]\Bigg[\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(\frac{\omega_n}{d_n}\left(A^q_{n(m)}\sin\left(\omega_n\tau_q\right)-B^q_{n(m)}\cos\left(\omega_n\tau_q\right)\right)\times$$

$$\times\left(I_0\left(r\gamma^{+}_{(\mathrm{I})n}\right)+k_{1n}J_0\left(r\gamma^{-}_{(\mathrm{I})n}\right)\right)\Bigg)+\frac{D_{(\mathrm{I})}q_{0(\mathrm{I})}r^4}{64\tau_q}\Bigg]\Bigg)\mathrm{d}r+$$

$$+\int\limits_{R_\mathrm{I}}^{R_\mathrm{II}}\Bigg(r\left[k_{2n}I_0\left(r\gamma^{+}_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{3n}K_0\left(r\gamma^{+}_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{4n}J_0\left(r\gamma^{-}_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{5n}Y_0\left(r\gamma^{-}_{(\mathrm{II})n}\right)\right]\times$$

$$\times\Bigg[\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(\frac{\omega_n}{d_n}\left(A^q_{n(m)}\sin\left(\omega_n\tau_q\right)-B^q_{n(m)}\cos\left(\omega_n\tau_q\right)\right)\Bigg(k_{2n}I_0\left(r\gamma^{+}_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{3n}K_0\left(r\gamma^{+}_{(\mathrm{II})n}\right)+$$

$$+k_{4n}J_0\left(r\gamma^{-}_{(\mathrm{II})n}\right)+k_{5n}Y_0\left(r\gamma^{-}_{(\mathrm{II})n}\right)\Bigg)\Bigg)+\frac{D_{(\mathrm{II})}q_{0(\mathrm{II})}r^4}{64\tau_q}\Bigg]\Bigg)\mathrm{d}r\Bigg]. \qquad (18)$$

Численные расчеты. Для численной апробации полученного решения рассмотрим защемленную по внешнему контуру круговую трехслойную ступенчатую пластину, имеющую уширение в центральной части (см. рисунок 1).

Геометрические параметры пластины: внешний радиус – $R_\mathrm{II}=1$ м; радиус центрального участка I – $R_\mathrm{I}=0{,}5R_\mathrm{II}$; толщина внешних слоев пластины на участке I – $h_{1(\mathrm{I})}=h_{2(\mathrm{I})}=0{,}04$ м; толщина внешних слоев пластины на участке II – $h_{1(\mathrm{II})}=h_{2(\mathrm{II})}=0{,}02$ м; толщина срединного заполнителя – $h_3=0{,}3$ м.

Состав слоев пластины представлен материалами «сталь–ПС-1–сталь».

Физико-механические характеристики материалов слоев [24–26]: сталь – $\rho_{1,2}=7850$ кг/м^3; $K_{1,2}=1{,}913\cdot10^{11}$ Па, $G_{1,2}=0{,}78\cdot10^{11}$ Па; полистирольный пенопласт (ПС-1) – $\rho_3=60$ кг/м^3; $K_3=10\cdot10^6$ Па, $G_3=15\cdot10^6$ Па. Здесь ρ – плотность; K – модуль объемной деформации; G – модуль сдвига.

Пластина воспринимает нагрузку из 6-и последовательных внешних воздействий, временно́й интервал между которыми привязан к первой частоте собственных колебаний пластины ω_0. Продолжительность приложения нагрузки совпадает с полупериодом и периодом первой формы колебаний пластины: $\tau=134\pi/\omega_0=1{,}00$ с, $\tau=135\pi/\omega_0=1{,}01$ с; $\tau_q=\pi/\omega_0=7{,}4\cdot10^{-3}$ с, $\tau_q=2\pi/\omega_0=14{,}9\cdot10^{-3}$ с.

Максимальная интенсивность каждого внешнего воздействия $q_{0(\mathrm{I})}=q_{0(\mathrm{II})}=-100$ кПа.

На рисунке 3 представлены графики изменения прогибов пластины во времени.

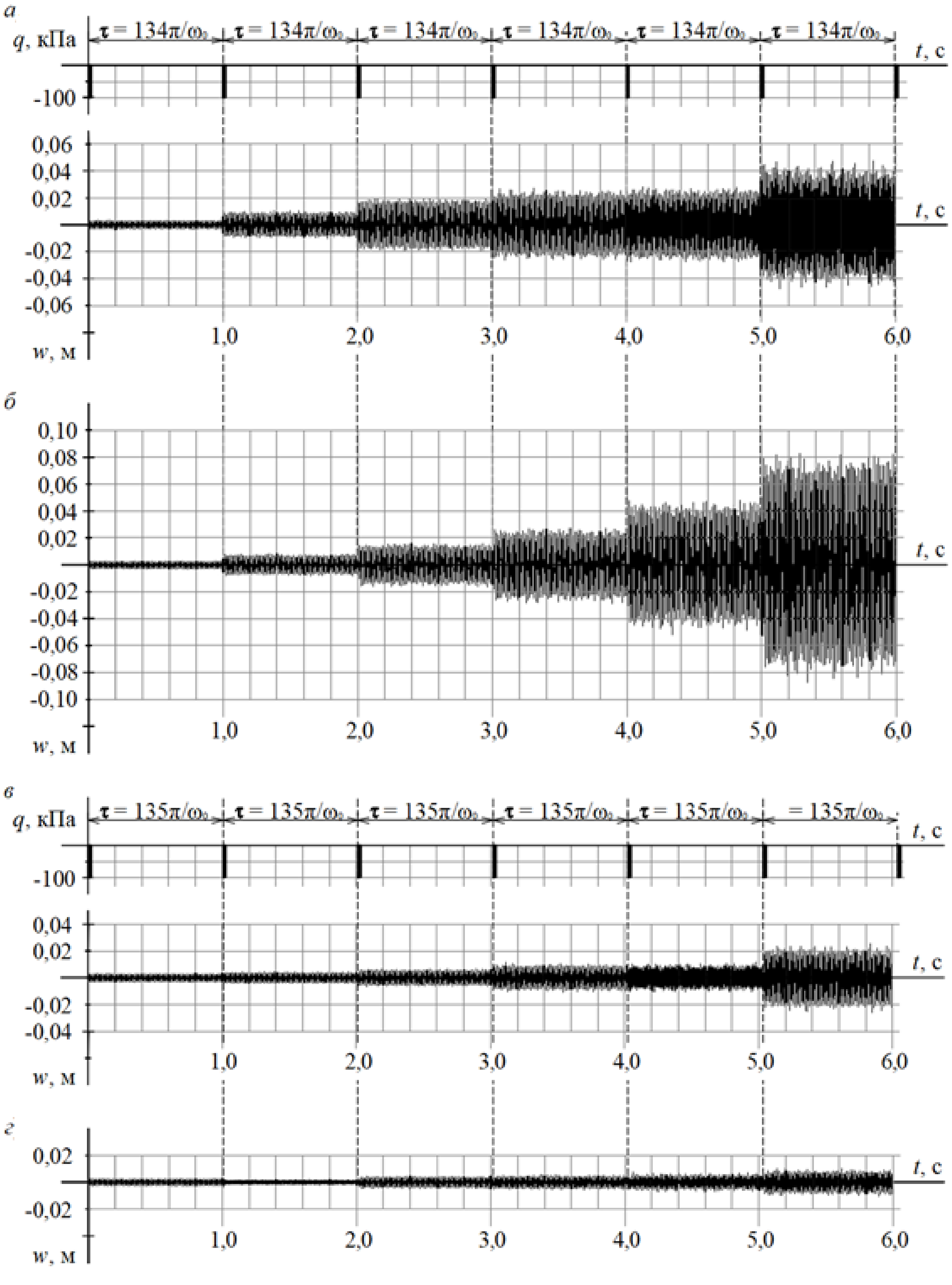

Рис. 3. Изменение прогиба пластины «сталь–ПС-1–сталь» при приложении многократно повторной линейно-убывающей нагрузки: *а, в* – длительность приложения каждого воздействия $\tau_q = \pi / \omega_0$; *б, г* – длительность приложения каждого воздействия $\tau_q = 2\pi / \omega_0$

Выводы. Из приведенных графиков видно, что временно́й интервал между внешними воздействиями оказывает существенное влияние на характер вынужденных колебаний.

Выразив интервал между нагрузками как $\tau = k\pi / \omega_0$ можно сказать, что если k представляет собой натуральное четное число, то с течением времени колебаний происходит постоянное нарастание амплитуды прогибов. При этом для многократно повторной линейно-убывающей нагрузки длительность самого внешнего воздействия τ_q никак не влияет на характер колебаний.

В случае, если интервал между воздействиями представлен выражением $\tau = k\pi/\omega_0$ с нечетным значением k, характер колебаний пластины строится по принципу попеременного возбуждения и гашения амплитуды прогибов. При этом, как и в предыдущем случае, длительность загружения τ_q не оказывает влияние на характер колебаний.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т22М-072).

ЛИТЕРАТУРА

1. Lal, R. On radially symmetric vibrations of circular sandwich plates of non-uniform thickness / R. Lal, R. Rani // International journal of mechanical sciences. – 2015. – № 99. – P. 29–39. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.04.016
2. Lal, R. On the radially symmetric vibrations of circular sandwich plates with polar orthotropic facings and isotropic core of quadratically varying thickness by harmonic differential quadrature method / R. Lal, R. Rani // Meccanica. – 2016. – № 51. – P. 611–634. https://doi.org/10.1007/s11012–015–0226–9.
3. Rani, R. Radially symmetric vibrations of exponentially tapered clamped circular sandwich plate using harmonic differential quadrature method / R. Rani, R. Lal // Mathematical analysis and its applications. – 2015. – № 143. – P. 633–643. https://doi.org/10.1007/978–81–322–2485–3_52.
4. Lal, R. On the use of differential quadrature method in the study of free axisymmetric vibrations of circular sandwich plates of linearly varying thickness / R. Lal, R. Rani // Journal of vibration and control. – 2016. – № 7(22). – P. 1729–1748. https://doi.org/10.1177/1077546314544695.
5. Rani, R. Axially symmetric vibrations of circular sandwich plates of linearly varying thickness / R. Rani, R. Lal // Soft computing for problem solving : proceedings of the third international conference, New Delhi, 04.03.2014 / Springer; In: M. Pant [et al.] (eds). – New Delhi, 2014. – № 258. – P. 169–181. https://doi.org/10.1007/978–81–322–1771–8_15.
6. Chang, J. S. Free vibrations of sandwich plates of variable thickness / J. S. Chang, H. C. Chen // Journal of sound and vibration. – 1992. – № 2(155). – P. 195–208. https://doi.org/10.1016/0022–460X(92)90507-T.
7. Lu, Ch. H. Bending of anisotropic sandwich beams with variable thickness / Ch. H. Lu // Journal of thermoplastic composite materials. – 1994. – № 4(7). – P. 364–374. https://doi.org/10.1177/089270579400700406.
8. Süsler, S. Nonlinear dynamic analysis of tapered sandwich plates with multi-layered faces subjected to air blast loading / S. Süsler, H. Türkmeni // International Journal of mechanics and materials in design. – 2017. – № 13. – P. 429–451. https://doi.org/10.1007/s10999–016–9346–1.
9. Nguyen, C. H. Dynamics and buckling of sandwich panels with stepped facings / C. H. Nguyen [et al.] // International journal of structural stability and dynamics. – 2011. – № 04(11). – P. 697–716. https://doi.org/10.1142/S0219455411004300.
10. Nguyen, C. H. Enhanced static response of sandwich panels with honeycomb cores through the use of stepped facings / C. H. Nguyen, K. Chandrashekhara, V. Birman // Journal of sandwich structures & materials. – 2011. – № 2(13). – P. 237–260. https://doi.org/10.1177/1099636210369615.

11. Зорич, В. А. Математический анализ. Часть I / В. А. Зорич. – изд. 6-е дополн. – Москва : МЦНМО, 2012. – 710 с.

12. Timoshenko, S. P. On the correction for shear the differential equation for transverse vibrations of the prismatic bars / S. P. Timoshenko // Philosophical magazine and journal of science. – 1921. – № 41(245). – P. 744–746. https://doi.org/10.1080/14786442108636264

13. Bauchau, O. Kirchhoff plate theory / O. Bauchau, J. Craig // Structural analysis. – 2009. – № 163. – P. 819–914.

14. Reddy, J. N. Theory and analysis of elastic plates and shells / J. N. Reddy. – Boca-Raton : CRC Press, 2006. – 568 p. https://doi.org/10.1201/9780849384165

15. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – Москва : Мир, 1975. – 872 с.

16. Natural vibration of circular and annular thin plates by Hamiltonian approach / Z. H. Zhou [et al.] // Journal of Sound and Vibration. – 2011. – № 5(330). – P: 1005–1017. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.09.015

17. Колтунов, М. А. Упругость и прочность цилиндрических тел / М. А. Колтунов, Ю. Н. Васильев, В. А. Черных. – Москва : Высшая школа, 1975. − 528 с.

18. Маркова, М. В. Постановка начально-краевой задачи об осесимметричных колебаниях круговой трехслойной пластины переменной толщины / М. В. Маркова, Д. В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. – Минск, 2022. – Вып. 36. – С. 3–10.

19. Маркова, М. В. Вынужденные колебания круговой трехслойной пластины ступенчато-переменной толщины, побуждаемые ударным воздействием / М. В. Маркова // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 28–36.

20. Леоненко, Д. В. Колебания круговой трехслойной ступенчатой пластины при ударном периодическом воздействии / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // Механика машин, механизмов и материалов. – 2022. – № 3 (60). – С. 68–76.

21. Бейтман, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтман, А. Эрдейи. – Москва : Наука, 1974. – 296 с.

22. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций / Г. Н. Ватсон. – Москва : Изд-во иностр. лит., 1949. – 799 с.

23. Маркова, М. В. Собственные колебания круговой трехслойной ступенчатой пластины / М. В. Маркова // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – №14 (14). – С. 147–158.

24. Плескачевский, Ю. М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко. – Москва : Физматлит, 2011. – 560 с.

25. СП 5.04.01–2021. Стальные конструкции. – Введ. 29.07.2021. – Минск : Минстройархитектуры, 2021. – 147 с.

26. Строительные конструкции с применением пластмасс. Примеры проектирования и расчета: учеб. пособие для инж.-строит. вузов и фак. / А. М. Иванов [и др.]. – Москва : Высш. школа, 1968. – 220 с.

Поступила:15.04.2023