**М. В. БУЙ, И. О. ДЕЛИКАТНАЯ, А. П. ПАВЛЕНКО**
УО БелГУТ (г. Гомель, Беларусь)

# РАСЧЕТ СВОЙСТВ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ НА ГРАНИЦЕ ПРОВОДНИК – ВАКУУМ

При расчете электростатических полей вблизи резких границ (например, проводник – вакуум) часто приходится рассматривать разрывные решения. Это обстоятельство вызывает чувство математической неудовлетворенности, т. к. по принципу суперпозиции расчет напряженности поля сводится к сложению большого количества малых слагаемых (т. е. интегрированию), а процедура интегрирования, как правило, приводит к более гладкому поведению функций. В работе [1] мы уже говорили о том, что для расчета потенциала гравитационного поля сферической оболочки, обобщив его для вычисления напряженности электростатического поля, можно показать прямым интегрированием, что эта величина представляется суммой двух равных по величине слагаемых. Причем при переходе от точки снаружи оболочки к точке внутри нее второе из них меняет знак, тем самым обеспечивая равенство нулю напряженности поля. Для наглядной иллюстрации этого проведем прямое вычисление напряженности электростатического поля, создаваемого равномерно заряженной по поверхности сферой во всех точках пространства. Это будет сделано с помощью обобщения метода, примененного в [2, § 55] для расчета потенциала гравитационного поля сферической оболочки.

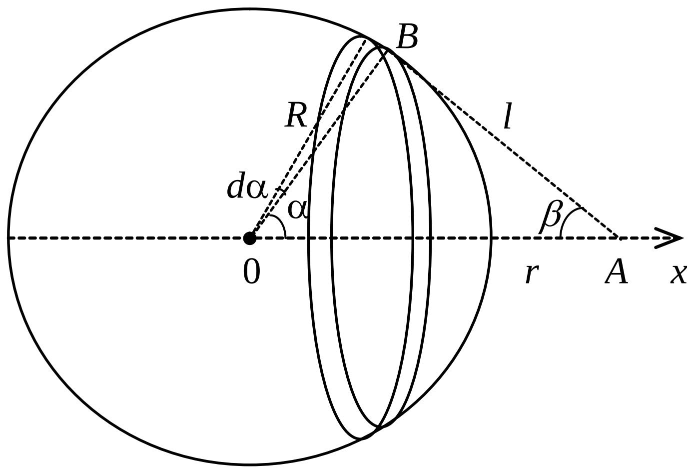


**Рисунок 1**

Площадь сферической поверхности радиуса $R$: $S = 4\pi R^2$ (см. рисунок 1). Площадь тонкого слоя с углом $\alpha$ и шириной, видимой под углом $d\alpha$: $dS = 2\pi R^2 \sin(\alpha) d\alpha$.

Заряд, располагающий на тонком слое $dq = \dfrac{dS}{S} q = \dfrac{q}{2}\sin(\alpha) d\alpha$.

Для треугольника $0BA$ по теореме косинусов $l^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha)$. После взятия дифференциала от обеих сторон получим $\sin(\alpha) d\alpha = \dfrac{l dl}{Rr}$. Отсюда следует, что $dq = \dfrac{ql}{2Rr} dl$.

Для бесконечно малого участка тонкого слоя (который можно рассматривать как точечный заряд $d'q$) проекция напряженности электростатического поля в точке $A$ равна. Очевидно, что соответствующая проекция для поля, создаваемого всем тонким слоем $dE_x = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\cos(\beta)$. В силу симметрии здесь и в последующих формулах напряженность поля направлена по нормали к поверхности. Поэтому проекция совпадает по величине с модулем вектора (для положительного заряда). Обозначения проекций оставлены для того, чтобы формулы верно описывали случаи любых знаков заряда.

Для треугольника $0BA$ по теореме косинусов $R^2 = r^2 + l^2 - 2rl\cos(\beta)$. Отсюда следует, что $\cos(\beta) = \frac{r^2 - R^2 + l^2}{2rl}$. После подстановки этой формулы и выражения для заряда $dq$ в предыдущее соотношение получим:

$$dE_x = \frac{qldl}{4\pi\varepsilon_0 2Rrl^2}\frac{r^2 - R^2 + l^2}{2rl} = \frac{q}{16\pi\varepsilon_0 Rr^2}\left(1 + \frac{r^2 - R^2}{l^2}\right)dl.$$

После интегрирования по всей поверхности сферы (расстояние от точки $A$ до сферы изменяется от $l_1$ до $l_2$) для напряженности поля, создаваемого всеми зарядами сферы, получим

$$E_x = \int dE_x = \frac{q}{16\pi\varepsilon_0 Rr^2}\left[\int_{l_1}^{l_2} dl + \left(r^2 - R^2\right)\int_{l_1}^{l_2}\frac{dl}{l^2}\right] \text{ или } E_x = \frac{q}{16\pi\varepsilon_0 Rr^2}\left(1 + \frac{r^2 - R^2}{l_1 l_2}\right)(l_2 - l_1).$$

Рассмотрим два случая.

1) $r > R \quad l_1 = r - R \quad l_2 = r + R \quad \frac{r^2 - R^2}{l_1 l_2} = 1 \quad l_2 - l = 2R$.

Подстановка в итоговую формулу дает выражение, совпадающее с формулой для поля точечного заряда $E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

2) $r < R \quad l_1 = R - r \quad l_2 = R + r \quad \frac{r^2 - R^2}{l_1 l_2} = -1 \quad l_2 - l = 2r$.

Здесь результатом является нулевое значение для напряженности поля $E_x = 0$.

Таким образом, величина напряженности представляется суммой двух равных по величине слагаемых. Причем при переходе от точки снаружи оболочки к точке внутри нее второе из них меняет знак, тем самым обеспечивая равенство нулю напряженности поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буй, М. В. Особенности расчета свойств электростатических полей при решении задач / М. В. Буй, И. О. Деликатная // Инновационные технологии обучения физико-математическим и профессионально-техническим дисциплинам : материалы XIII Междунар. науч.-практ. интернет-конф., Мозырь, 25–26 марта 2021 г. / УО МГПУ им. И. П. Шамякина ; редкол.: И. Н. Ковальчук (отв. ред.) [и др.]. – Мозырь, 2021. – С. 9–11.

2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие для студентов физических специальностей высших учебных заведений : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – 6-е изд., стер. – М. : Физматлит, 2014. – Т. 1 : Механика. – 560 с.