

**ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»**

Кафедра «Электротехника»

Н. П. ВОЛКОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

**Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы
студентов электротехнических специальностей**

Гомель 2015

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Электротехника»

Н. П. ВОЛКОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

*Одобрено методической комиссией электротехнического
факультета в качестве учебно-методического пособия
для самостоятельной работы студентов электротехнических
специальностей*

Гомель 2015

УДК 621.3(075.8)
ББК 31.2
В67

Рецензент – канд. техн. наук, доцент кафедры «Электротехника»
В. Н. Галушко (УО «БелГУТ»)

Волков, Н. П.

В67 Теоретические основы электротехники. Переходные процессы в электрических цепях : учеб.-метод. пособие / Н. П. Волков ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2015. – 100 с.
ISBN 978-985-554-440-2

Рассмотрены вопросы анализа переходных процессов в цепях с сосредоточенными параметрами курса «Теоретические основы электротехники». Приведены решения типовых задач по рассмотренным в пособии темам.

Предназначено для студентов электротехнических специальностей.

УДК 621.3(075.8)
ББК 31.2

ISBN 978-985-554-440-2

©1Волков Н. П., 2015
© Оформление. УО «БелГУТ», 2015

1 ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССАХ

1.1 Возникновение переходных процессов

В работе электрической цепи с сосредоточенными параметрами, имеющей в своём составе накопители энергии (катушки индуктивности и конденсаторы), различают два режима: *установившийся* и *переходный*.

В установившемся режиме токи и напряжения всех элементов цепи предполагают постоянными или изменяющимися по периодическому (синусоидальному или несинусоидальному) закону в течение бесконечно большого интервала времени. К установившемуся режиму также относят состояние цепи, отключенной от внешних источников энергии, т. е. цепи с нулевым запасом энергии в накопительных элементах.

Переходным процессом называют электромагнитный процесс перехода электрической цепи с накопителями энергии от одного установившегося режима к другому, который возникает при различного рода *коммутациях*.

Под *коммутациями* подразумевают изменения структуры цепи, вызванные включениями, отключениями пассивных и активных ветвей, короткого замыкания отдельных участков, изменения параметров входящих в нее элементов.

Начало переходного процесса определяется моментом коммутации, который и принимают за начало отсчета $t = 0$.

На электрических схемах коммутацию обозначают с помощью коммутационных устройств в виде замыкания (рисунок 1.1, *а*), размыкания (рисунок 1.1, *б*) или переключения (рисунок 1.1, *в*) ключа. Коммутационные устройства на схемах изображают в положении, принятом за начальное.

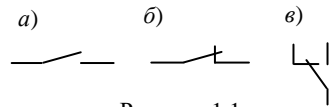


Рисунок 1.1

Полагают, что коммутация происходит мгновенно, при этом момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, обозначают $t(0-)$, а момент времени, следующий непосредственно после коммутации, обозначают $t(0+)$. Знак „+“ можно опускать.

Переходный процесс может возникать и без коммутации, если на цепь воздействуют импульсные сигналы.

Энергия магнитного поля, создаваемого током i_L , который проходит через катушку с индуктивностью L ,

$$W_M = \frac{Li_L^2}{2}. \quad (1.1)$$

Энергия электрического поля, возникающая вследствие того, что к конденсатору емкостью C приложено напряжение u_C ,

$$W_3 = \frac{Cu_C^2}{2}. \quad (1.2)$$

Установившиеся процессы в электрической цепи во временном диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$ характеризуются неизменным запасом энергии в накопительных элементах при действии в цепи источников постоянного напряжения и тока. При действии в цепи источников периодического напряжения и тока в том же временном интервале не изменяется средний за период запас энергии в реактивных элементах.

Реальные источники энергии, питающие электрическую цепь, обладают ограниченной мощностью, поэтому энергия электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки не может меняться скачком на конечное значение за бесконечно малый промежуток времени. В силу этого не могут меняться скачком ток i_L в катушке индуктивности и напряжение u_C на конденсаторе.

В цепях без накопителей энергии переходный процесс отсутствует; после коммутации в цепи сразу возникает установившийся режим.

Величины, определяющие накопленную энергию элементов (ток i_L катушки и напряжение u_C конденсатора), изменяются непрерывно.

Эти положения отражают законы коммутации, один из которых относится к индуктивному элементу L , а другой – к емкостному элементу C .

1.2 Законы коммутации

Первый закон коммутации

Ток в ветви с индуктивным элементом в момент коммутации непрерывен, его значение непосредственно перед коммутацией при $t(0-)$ и сразу после нее при $t(0+)$ одно и то же:

$$i_L(0) = i_L(0-). \quad (1.3)$$

Второй закон коммутации

Напряжение на емкостном элементе в момент коммутации непрерывно, его значение непосредственно перед коммутацией при $t(0-)$ и сразу после нее при $t(0+)$ одно и то же:

$$u_C(0) = u_C(0-). \quad (1.4)$$

Токи i_L в катушках и напряжения u_C на конденсаторах играют ключевую роль при расчете переходных процессов и носят название *переменных состояния*.

Ток в катушке и напряжение на ее зажимах связаны соотношениями:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad (1.5)$$

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L dt + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt, \quad (1.6)$$

где $i_L(0)$ – начальное значение тока катушки в момент $t = 0$.

Соотношения между зарядом q , током i_C и напряжением u_C конденсатора можно записать следующим образом:

$$q = Cu_C; \quad (1.7)$$

$$i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}; \quad (1.8)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_C dt + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt, \quad (1.9)$$

где $u_C(0)$ – начальное значение напряжения на конденсаторе в момент $t = 0$.

Напряжение u_r на активном сопротивлении r и ток i , протекающий через него, связаны соотношением

$$u_r = ri. \quad (1.10)$$

Уравнения (1.5), (1.8) и (1.10), устанавливающие связь между током и напряжением на пассивных элементах r , L , и C цепи, называются *компонентными*.

1.3 Начальные условия

Законы коммутации служат основой для определения *начальных условий*, т. е. значений искомых токов и напряжений и их производных в момент коммутации, которые однозначно определяют решение дифференциальных уравнений. Различают *независимые* и *зависимые* начальные условия.

К независимым начальным условиям относят значения токов в катушках и напряжения на конденсаторах, а к зависимым – остальные величины: токи в резисторах и конденсаторах, напряжения на резисторах и катушках и проводные этих величин.

В соответствии с законами коммутации независимые начальные условия определяют путем расчета докоммутационной схемы.

В момент коммутации катушка с током $i_L(0)$ представляет собой идеальный источник тока, а заряженный до напряжения $u_C(0)$ конденсатор – идеальный источник ЭДС.

Если токи в катушках и напряжения на конденсаторах в момент коммутации равны нулю, то говорят, что в цепи имеют место *нулевые начальные условия*. В этих случаях каждую катушку можно рассматривать как разрыв участка цепи, а каждый конденсатор – короткозамкнутым участком.

Зависимые начальные условия определяют путем расчета послекоммутационной схемы для момента $t(0+)$ по законам Кирхгофа с использованием найденных ранее независимых начальных условий. Их удобно находить, рассчитывая схему замещения для момента коммутации, в которой катушки заменяют идеальными источниками тока, а конденсаторы – идеальными источниками ЭДС.

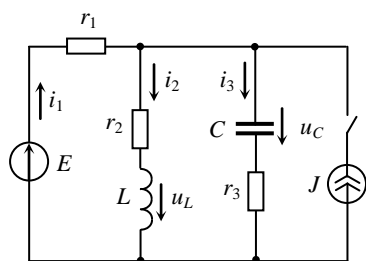


Рисунок 1.2

Пример 1.1 В электрической цепи, схема которой приведена на рисунке 1.2, действует источник постоянного напряжения с ЭДС $E = 24$ В. В момент времени $t = 0$ к цепи подключается источник постоянного тока с током $J = 1,2$ А. Параметры элементов цепи: $r_1 = 6$ Ом, $r_2 = 4$ Ом, $r_3 = 3$ Ом, $L = 0,2$ Гн, $C = 40$ мкФ. Определить значения токов ветвей, напряжений на реактивных элементах, а также скорости изменения во времени напряжения на емкостном и тока

в индуктивном элементе в момент коммутации.

Решение. Независимые начальные условия найдем путем расчета схемы до коммутации (рисунок 1.3). В ней катушка заменена короткозамкнутым участком, а конденсатор – разрывом ветви. Находим токи ветвей и напряжение на конденсаторе, которые были непосредственно перед коммутацией:

$$i_1(0-) = i_2(0-) = \frac{E}{r_1 + r_2} = 2,4 \text{ A};$$

$$u_C(0-) = r_2 i_2(0-) = 9,6 \text{ В.}$$

В соответствии с законами коммутации

$$i_2(0) = i_2(0-) = 2,4 \text{ A};$$

$$u_C(0) = u_C(0-) = 9,6 \text{ В.}$$

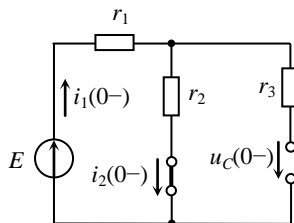


Рисунок 1.3

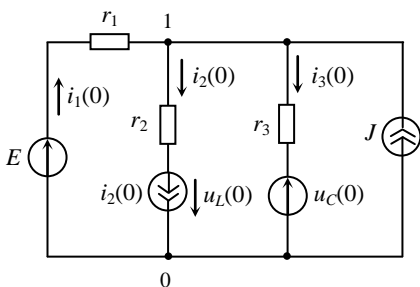


Рисунок 1.4

Зависимые начальные условия определим по схеме замещения для момента коммутации на рисунке 1.4. В ней катушка заменена источником тока с током $i_2(0)$, а конденсатор – идеальным источником напряжения с ЭДС, равной $u_C(0)$. Расчет схемы произведем методом узловых потенциалов. Схема имеет два узла. Примем потенциал узла 0 равным нулю, составим уравнение для определения потенциала узла 1 и

найдем его значение:

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) \varphi_1(0) = \frac{E}{r_1} - i_2(0) + \frac{u_C(0)}{r_3} + J; \quad \varphi_1(0) = 12 \text{ В.}$$

Токи ветвей вычислим по закону Ома:

$$i_1(0) = \frac{-\varphi_1(0) + E}{r_1} = 2 \text{ A}; \quad i_3(0) = \frac{\varphi_1(0) - u_C(0)}{r_3} = 0,8 \text{ A.}$$

Напряжение на катушке найдем по второму закону Кирхгофа:

$$u_L(0) = \varphi_1(0) - r_2 i_2(0) = 2,4 \text{ В.}$$

В соответствии с компонентными уравнениями реактивных элементов (1.5) и (1.8) рассчитываем скорости изменения искоемых величин:

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L} = 12 \text{ А/с;}$$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_3(0)}{C} = 2 \cdot 10^4 \text{ В/с.}$$

Пример 1.2 Схема на рисунке 1.5 питается от синусоидального источника ЭДС $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$, где $E_m = 100 \text{ В}$, $\psi = 60^\circ$, $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$. Параметры элементов схемы: $r_1 = 6 \text{ Ом}$, $r_2 = 12 \text{ Ом}$, $r_3 = 8 \text{ Ом}$, $L = 0,04 \text{ Гн}$, $C = 50 \text{ мкФ}$. В момент времени $t = 0$ происходит коммутация. Определить независимые и зависимые начальные условия.

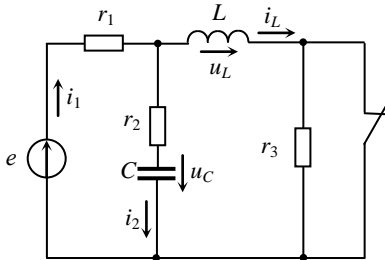


Рисунок 1.5

Решение. Вычислим сопротивления катушки и конденсатора, которые потребуются для дальнейших расчетов:

$$x_L = \omega L = 40 \text{ Ом;}$$

$$x_C = 1/(\omega C) = 20 \text{ Ом.}$$

Рассчитаем схему до коммутации, для чего найдем эквивалентное комплексное сопротивление схемы относительно зажимов источника при замкнутом ключе.

$$\underline{Z}_{\text{эк}} = r_1 + \frac{(r_2 - jx_C)jx_L}{r_2 - jx_C + jx_L} = 41,294 - j18,824 = 45,382 e^{-j24,5^\circ} \text{ Ом.}$$

Найдем комплексные амплитуды токов ветвей и напряжения на конденсаторе

$$\underline{I}_{1m} = \frac{E_m}{\underline{Z}_{\text{эк}}} = 0,211 + j2,193 = 2,203 e^{-j84,5^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_{2m} = \underline{I}_{1m} \frac{jx_L}{r_2 - jx_C + jx_L} = -1,625 + j3,412 = 3,78 e^{j115,5^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_{Lm} = \underline{I}_{1m} - \underline{I}_{2m} = 1,836 - j1,218 = 2,203e^{-j33,6^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{U}_{Cm} = -jX_C \cdot \underline{I}_{2m} = 68,234 + j32,5 = 75,58e^{j25,5^\circ} \text{ В.}$$

Мгновенные значения тока катушки и напряжения на конденсаторе:

$$i_L(t) = \text{Im}[\underline{I}_{Lm} e^{j\omega t}] = 2,2 \sin(\omega t - 33,6^\circ) \text{ A};$$

$$u_C(t) = \text{Im}[\underline{U}_{Cm} e^{j\omega t}] = 75,58 \sin(\omega t + 25,5^\circ) \text{ В.}$$

Находим независимые начальные условия.

$$i_L(0) = i_L(0-) = 2,2 \sin(-33,6^\circ) = -1,22 \text{ A};$$

$$u_C(0) = u_C(0-) = 75,58 \sin 25,5^\circ = 32,54 \text{ В.}$$

Расчет зависимых начальных условий проведем, воспользовавшись схемой замещения для момента коммутации на рисунке 1.6, в которой катушка заменена источником тока с током $i_L(0)$, а конденсатор – идеальным источником напряжения с ЭДС, равной $u_C(0)$. Для определения токов ветвей схемы применим метод наложения:

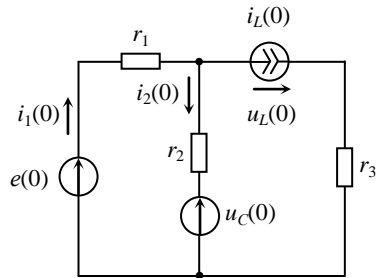


Рисунок 1.6

$$i_1(0) = \frac{e(0) - u_C(0)}{r_1 + r_2} + i_L(0) \frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{100 \sin 60^\circ - 32,54}{18} - 1,22 \frac{6}{18} = 0,563 \text{ A};$$

$$i_2(0) = i_1(0) - i_L(0) = 0,563 + 1,22 = 1,783 \text{ A.}$$

Напряжение $u_L(0)$ на зажимах источника тока находим по уравнению, составленному по второму закону Кирхгофа для внешнего контура:

$$u_L(0) = e(0) - r_1 i_1(0) - r_3 i_L(0) = 56,38 \text{ В.}$$

Скорости изменения искоемых величин:

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L} = 1409,5 \text{ A/c};$$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_2(0)}{C} = 35660 \text{ В/с}.$$

2 КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Для описания переходного процесса в электрической цепи с сосредоточенными параметрами используются уравнения, составленные на основании законов Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений, и компонентных уравнений, которые затем сводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению n -го порядка:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t), \quad (2.1)$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ – постоянные коэффициенты;

n – порядок уравнения;

t – время;

$x(t)$ – искомая функция (напряжение, ток);

$f(t)$ – внешнее воздействие (напряжение, ЭДС, ток).

Цепи, описываемые дифференциальными уравнениями такого типа, называются *цепями n -го порядка*. Порядок цепи обычно определяется числом реактивных элементов, которые она содержит.

Классический метод расчета переходных процессов в электрических цепях сводится к непосредственному нахождению решений дифференциальных уравнений. Согласно этому методу решение дифференциального уравнения (2.1) записывается в виде суммы двух слагаемых:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad (2.2)$$

где $x_1(t)$ – частное решение исходного уравнения;

$x_2(t)$ – общее решение однородного дифференциального уравнения, полученного из уравнения (2.1) при $f(t) = 0$.

Частное решение $x_1(t)$ неоднородного дифференциального уравнения определяется видом функции $f(t)$, стоящей в правой части уравнения. Поэтому эта составляющая называется *принужденной* и обозначается $x_{пр}(t)$. Принужденный режим, создаваемый источником постоянной или периодической ЭДС, как указывалось ранее, называют *установившимся*. Расчет принужденной составляющей в этом случае может быть произведен любым известным методом расчета цепей в установившемся режиме.

Общее решение $x_2(t)$ однородного дифференциального уравнения не зависит от внешнего воздействия, т. к. $f(t) = 0$. Поэтому процесс, описываемый составляющей общего решения, называют *свободным процессом*, составляющую $x_2(t)$ обозначают $x_{св}(t)$ и называют *свободной составляющей*.

Свободные составляющие переходного процесса возникают за счет изменения запаса энергии в реактивных элементах цепи. Так как запасенная в цепи энергия при отсутствии внешних источников будет постепенно расходоваться, то свободная составляющая с течением времени уменьшается до нуля.

Выражение для свободной составляющей определяется видом корней *характеристического уравнения*, которое получается *алгебраизацией* однородного дифференциального уравнения путем замены оператора d/dt алгебраическим оператором p . В зависимости от вида корней характеристического уравнения выражения для свободной составляющей записывают:

а) если корни p_k вещественные и разные или комплексные:

$$x_{св}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}; \quad (2.3, а)$$

б) если корни p_k вещественные и равные (кратные):

$$x_{св}(t) = \sum_{k=1}^n A_k t^{(k-1)} e^{p_k t}. \quad (2.3, б)$$

Постоянные интегрирования A_k находят из начальных условий, для чего составляют систему дифференциальных уравнений относительно искомой величины и ее производных для момента коммутации.

2.1 Переходные процессы в цепях с одним реактивным элементом

2.1.1 Переходный процесс в rL -цепи

При подключении цепи из последовательно соединенных сопротивления r и индуктивности L к источнику напряжения $u(t)$ в момент $t = 0$ (рисунок 2.1) возникает переходный электромагнитный процесс. Опишем его дифференциальным уравнением, составленным относительно тока i в соответствии со вторым законом Кирхгофа:

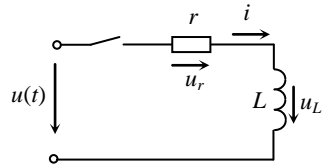


Рисунок 2.1

$$L \frac{di}{dt} + ri = u(t) \quad \text{или} \quad \frac{di}{dt} + \frac{r}{L}i = \frac{1}{L}u(t). \quad (2.4)$$

Находим решение этого уравнения согласно формуле (2.2):

$$i(t) = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}.$$

Свободная составляющая тока $i_{\text{св}}$ является решением однородного уравнения

$$\frac{di}{dt} + \frac{r}{L}i = 0 \quad (2.5)$$

и имеет вид

$$i_{\text{св}} = Ae^{pt}, \quad (2.6)$$

где $p = -\frac{r}{L}$ – корень характеристического уравнения

$$p + \frac{r}{L} = 0. \quad (2.7)$$

Таким образом, ток в rL -цепи при подключении ее к источнику напряжения $u(t)$ определяется выражением

$$i(t) = i_{\text{пр}} + Ae^{-\frac{r}{L}t} = i_{\text{пр}} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.8)$$

Величина $r/L = \tau$ имеет размерность времени и называется *постоянной времени* rL -цепи. Ее можно определить как интервал времени, в конце которого свободная составляющая величина уменьшается в $e = 2,72$ раза по сравнению со своим значением в начале интервала. Таким образом, если переходный процесс теоретически длится бесконечно долго, то практически он завершается через время, равное $(4 \div 5)\tau$.

Величина, обратная постоянной времени, $\alpha = 1/\tau = L/r$ называется коэффициентом затухания.

Принуждённая составляющая тока $i_{пр}$ может быть найдена, если задана функция воздействующего напряжения. Рассмотрим три случая:

- а) включение rL -цепи на постоянное напряжение;
- б) короткое замыкание rL -цепи;
- в) включение rL -цепи на гармоническое напряжение.

Включение rL -цепи на постоянное напряжение U . При подключении цепи к источнику постоянного напряжения $u(t) = U$ принужденный ток будет равен U/r , поэтому решение дифференциального уравнения по формуле (2.8) примет вид

$$i(t) = \frac{U}{r} + A e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Постоянную интегрирования A определим на основании первого закона коммутации. До коммутации катушка была обесточена: $i(0) = i(0-) = 0$.

Вследствие этого из выражения для тока имеем при $t = 0$:

$$0 = \frac{U}{r} + A \quad \text{или} \quad A = -\frac{U}{r}.$$

Таким образом, изменения тока в rL -цепи и напряжения на индуктивности описываются выражениями

$$i(t) = \frac{U}{r} (1 - e^{-\frac{r}{L}t}); \quad (2.9)$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = U e^{-\frac{r}{L}t}. \quad (2.10)$$

Графики изменения тока $i(t)$ и напряжения $u_L(t)$ на катушке приведены на рисунке 2.2. На оси абсцисс отложены отрезки, кратные постоянной времени τ .

Из формулы (2.10) и графика $u_L(t)$ следует, что в момент включения цепи обесточенная катушка рассматривается как разрыв и напряжение на её зажимах уравновешивается источником напряжения.

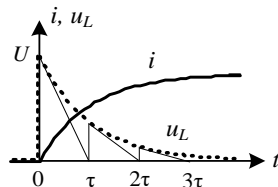


Рисунок 2.2

Короткое замыкание rL -цепи. В схеме на рисунке 2.3 до коммутации протекает ток

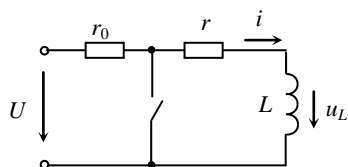


Рисунок 2.3

$$i(0-) = \frac{U}{r_0 + r} = I_0.$$

После замыкания ключа в контуре $r-L$ возникает переходный процесс, описываемый однородным дифференциальным уравнением

$$L \frac{di}{dt} + ri = 0,$$

решение которого даётся в следующем виде:

$$i(t) = i_{cb} = A e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Постоянная A может быть найдена путем приведения полученного решения к начальному условию.

$$i(0) = i(0-) = I_0 = A.$$

Отсюда находим, что при замыкании катушки с током I_0 на резистор сопротивлением r ток в цепи и напряжение на катушке определяются выражениями

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{r}{L}t}; \quad (2.11)$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -rI_0 e^{-\frac{r}{L}t}. \quad (2.12)$$

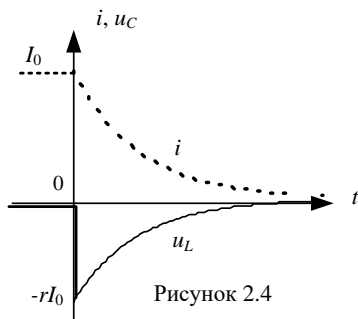


Рисунок 2.4

Графики изменения тока $i(t)$ и напряжения $u_L(t)$ для этого случая приведены на рисунке 2.4.

Запасенная в катушке индуктивности к моменту коммутации энергия магнитного

поля $W_M = \frac{LI_0^2}{2}$ во время переходного процесса расходуется на тепловые потери в сопротивлении r :

$$W_{\text{тепл}} = \int_0^{\infty} i^2(t) r dt = \int_0^{\infty} I_0^2 e^{-2\frac{r}{L}t} r dt = \frac{LI_0^2}{2}.$$

Включение rL -цепи на гармоническое напряжение. При подключении источника синусоидального напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ к rL -цепи принужденный ток будет определяться выражением

$$i_{\text{пр}} = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

где
$$Z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L}{r}.$$

Свободная составляющая тока, как и в двух предыдущих случаях, определяется формулой

$$i_{\text{св}} = A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Ток переходного процесса

$$i(t) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) + A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

На основании первого закона коммутации при $t = 0$ имеем

$$0 = \frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi) + A, \quad \text{откуда} \quad A = -\frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi).$$

Окончательно получаем

$$i(t) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.13)$$

Напряжение на индуктивности

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \frac{di}{dt} = \frac{U_m}{Z} \omega L \sin(\omega t + \psi - \varphi + 90^\circ) - L \frac{U_m}{Z} \left(-\frac{r}{L}\right) \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{r}{L}t} = \\ &= U_m \left[\frac{\omega L}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi + 90^\circ) + \frac{r}{Z} \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{r}{L}t} \right]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношения сторон треугольника сопротивлений rL -цепи: $\sin \varphi = \frac{\omega L}{Z}$ и $\cos \varphi = \frac{r}{Z}$, окончательно получим:

$$u_L = U_m \left[\sin \varphi \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \cos \varphi \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{r}{L}t} \right]. \quad (2.14)$$

На рисунке 2.5 изображены кривые $i_{св}(t)$, $i_{пр}(t)$ и $i(t)$. Начальные ординаты $i_{св}(0)$ и $i_{пр}(0)$ одинаковы по абсолютному значению и противоположны по знаку. Поэтому ток i в начальный момент равен нулю. Если в момент включения выполняется условие, что $\psi - \varphi = 0$ или $\psi - \varphi = \pi$, то свободный ток не возникает, и в цепи сразу наступает установившийся режим.

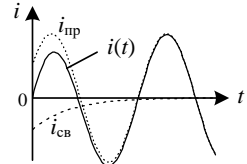


Рисунок 2.5

2.1.2 Переходный процесс в rC -цепи

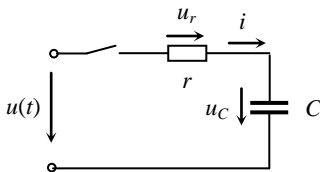


Рисунок 2.6

Рассмотрим процесс в rC -цепи при ее подключении к источнику напряжения $u(t)$ (рисунок 2.6). Конденсатор до коммутации не был заряжен: $u_C(0-) = 0$. Состояние схемы после коммутации определяется вторым законом Кирхгофа:

$$u_C(t) + ri(t) = u(t).$$

Составим дифференциальное уравнение относительно напряжения u_C на емкости с учетом компонентного уравнения (1.8):

$$rC \frac{du_C}{dt} + u_C = u(t), \quad \text{или} \quad \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{rC} u_C = \frac{1}{rC} u(t).$$

Решение полученного неоднородного дифференциального уравнения запишем в соответствии с выражением (2.2) в виде суммы принужденной и свободной составляющих

$$u_C(t) = u_{Cпр} + u_{Cсв}.$$

Свободную составляющую $u_{Cсв}$ найдём путем решения однородного дифференциального уравнения

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{rC}u_C = 0, \quad u_{C\text{св}} = Ae^{pt},$$

где A – постоянная интегрирования;

p – корень характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение составляется на основании однородного дифференциального:

$$p + \frac{1}{rC} = 0, \quad \text{откуда} \quad p = -\frac{1}{rC}. \quad (2.15)$$

Величина $\tau = rC$ называется постоянной времени rC -цепи.

Принужденная составляющая зависит от характера воздействующего напряжения. Рассмотрим несколько вариантов.

Включение rC -цепи на постоянное напряжение. При подключении рассматриваемой схемы к источнику постоянного напряжения $u(t) = U$ конденсатор в установившемся режиме зарядится до напряжения источника: $u_{C\text{пр}} = U$. Получим решение в виде

$$u_C(t) = U + Ae^{-\frac{t}{rC}}.$$

Постоянную интегрирования A можно определить из приведения полученного решения к начальному условию. Конденсатор до коммутации не был заряжен, следовательно, в соответствии со вторым законом коммутации

$$u_C(0) = u_C(0-) = 0.$$

Итак, в момент коммутации $u_C(0) = U + A = 0$, откуда $A = -U$. В итоге получили закон изменения напряжения на конденсаторе от времени:

$$u_C(t) = U \left(1 - e^{-\frac{t}{rC}} \right). \quad (2.16)$$

Ток i во время переходного процесса изменяется по следующему закону:

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{rC}}. \quad (2.17)$$

Графики изменения напряжения u_C на емкости и тока i в цепи приведены на рисунке 2.7. Как видно из графика $i(t)$, ток в момент коммутации изменяется скачком. Это объясняется тем, что незаряженный конденсатор в момент коммутации подобен короткозамкнутому участку, и напряжение источника непосредственно прикладывается к сопротивлению r .

Рассмотрим процесс подключения rC -цепи к источнику с энергетической точки зрения. По окончании переходного процесса, который теоретически протекает бесконечно долго, конденсатор получает от источника энергию, равную $\frac{CU^2}{2}$. За это время расход энергии источника составит

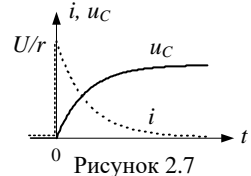


Рисунок 2.7

$$W_{\text{ист}} = \int_0^{\infty} U i(t) dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{U^2}{r} e^{-\frac{t}{rC}} \right) dt = CU^2.$$

Часть этой энергии в количестве

$$W_{\text{тепл}} = \int_0^{\infty} r i^2(t) dt = \int_0^{\infty} r \left(\frac{U}{r} \right)^2 e^{-2\frac{t}{rC}} dt = \frac{CU^2}{2}$$

переходит в тепловую энергию в резисторе и составляет ровно половину энергии источника, вторая половина переходит в энергию электрического поля конденсатора.

Короткое замыкание rC -цепи. Конденсатор емкостью C в схеме на рисунке 2.8 заряжается до напряжения источника U . При замыкании ключа он разряжается на резистор сопротивлением r . При $t \geq 0$ в рассматриваемой rC -цепи нет внешнего источника, поэтому дифференциальное уравнение, составленное для контура $r-C$, является однородным:

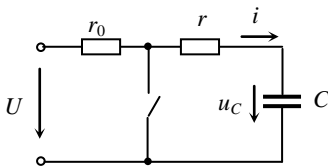


Рисунок 2.8

$$rC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad \text{или} \quad \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{rC} u_C = 0.$$

Характеристическое уравнение, его корень и выражение для свободной составляющей напряжения на емкости будут такими же, как и в предыдущем случае:

$$p + \frac{1}{rC} = 0; \quad p = -\frac{1}{rC}; \quad u_{C\text{св}} = A e^{-\frac{1}{rC}t}.$$

При отсутствии принужденной составляющей закон изменения напряжения на емкости будет иметь вид

$$u_C(t) = A e^{-\frac{1}{rC}t}.$$

Постоянную интегрирования A найдем из начальных условий на основании второго закона коммутации:

$$u_C(0) = u_C(0-) = U; \quad A = U.$$

Тогда
$$u_C(t) = U e^{-\frac{t}{rC}}, \quad (2.18)$$

а ток в цепи

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U}{r} e^{-\frac{t}{rC}}.$$

(2.19)

Знак « \rightarrow » в последнем выражении означает, что ток при разряде конденсатора на резистор проходит в направлении, противоположном указанному на рисунке. Графики изменения $u_C(t)$ и $i(t)$ приведены на рисунке 2.9.

Запасенная в конденсаторе энергия электрического поля в количестве

$$W_3 = \frac{CU^2}{2}$$

во время переходного процесса превращается в тепловую в сопротивлении r :

$$W_{\text{тепл}} = \int_0^{\infty} r i^2 dt = \frac{CU^2}{2}.$$

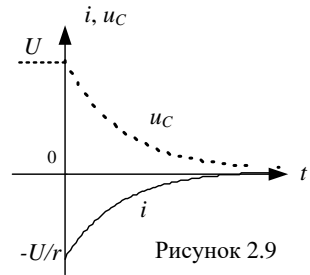


Рисунок 2.9

Включение rC -цепи на гармоническое напряжение. При подключении rC -цепи к источнику синусоидального напряжения $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$ исходные уравнения переходного процесса сохраняются. Для напряжения u_C имеем неоднородное уравнение

$$rC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Его общее решение имеет ту же форму, что и ранее:

$$u_C(t) = u_{Cnp} + A e^{-\frac{t}{rC}}.$$

Расчет принужденной составляющей напряжения выполним методом комплексных амплитуд. Комплексное сопротивление схемы

$$\underline{Z} = r - j \frac{1}{\omega C} = Z e^{-j\varphi}.$$

Комплексная амплитуда тока в установившемся режиме

$$\underline{I}_{mnp} = \frac{U_m}{\underline{Z}} = \frac{U_m e^{j\psi}}{Z e^{-j\varphi}} = \frac{U_m}{Z} e^{j(\psi+\varphi)}.$$

Комплексная амплитуда напряжения на конденсаторе в установившемся режиме

$$\underline{U}_{Cmnp} = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I}_{mnp} = \frac{U_m}{Z\omega C} e^{j(\psi+\varphi-90^\circ)}.$$

Его мгновенное значение

$$u_{Cnp} = \frac{U_m}{Z\omega C} \sin(\omega t + \psi + \varphi - 90^\circ).$$

Получаем переходное напряжение на емкости

$$u_C(t) = \frac{U_m}{Z\omega C} \sin(\omega t + \psi + \varphi - 90^\circ) + A e^{-\frac{t}{rC}}.$$

Постоянную интегрирования находим по начальному условию:

$$u_C(0) = 0 = \frac{U_m}{Z\omega C} \sin(\psi + \varphi - 90^\circ) + A,$$

откуда
$$A = -\frac{U_m}{Z\omega C} \sin(\psi + \varphi - 90^\circ) = \frac{U_m}{Z\omega C} \cos(\psi + \varphi).$$

Искомое напряжение на емкости

$$u_C(t) = \frac{U_m}{Z\omega C} \sin(\omega t + \psi + \varphi - 90^\circ) + \frac{U_m}{Z\omega C} \cos(\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{rC}}, \quad (2.20)$$

а ток в цепи

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{du_C}{dt} = C \frac{U_m}{Z\omega C} \omega \sin(\omega t + \psi + \varphi) + C \frac{U_m}{Z\omega C} \cos(\psi + \varphi) \left(-\frac{1}{rC}\right) e^{-\frac{t}{rC}} = \\ &= \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi + \varphi) - \frac{U_m}{Z\omega Cr} \cos(\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{rC}} = \\ &= \frac{U_m}{r} \left[\frac{r}{Z} \sin(\omega t + \psi + \varphi) - \frac{1}{Z\omega C} \cos(\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{rC}} \right]. \end{aligned}$$

Исходя из соотношений сторон треугольника сопротивлений rC -цепи:

$$\frac{r}{Z} = \cos \varphi \text{ и } \frac{1}{Z\omega C} = \sin \varphi, \text{ получим закон изменения тока цепи:}$$

$$i(t) = \frac{U_m}{r} \left[\cos \varphi \sin(\omega t + \psi + \varphi) - \sin \varphi \cos(\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{rC}} \right]. \quad (2.21)$$

Из полученных выражений следует, что если включение rC -цепи происходит в момент, когда $\psi + \varphi = \pm\pi/2$, то свободная составляющая напряжения на емкости не возникает и в цепи сразу без переходного процесса наступает принужденный установившийся режим.

2.1.3 Переходные процессы в разветвленных цепях первого порядка

Переходный процесс в разветвленной цепи описывается системой линейных уравнений с постоянными коэффициентами, составленных по законам Кирхгофа. Можно воспользоваться при составлении уравнений и другими способами, например, применением метода контурных токов.

Цепь первого порядка содержит только один накопительный элемент и переходный процесс в ней описывается дифференциальным уравнением первого порядка.

Рассмотрим методику анализа переходных процессов в разветвленной цепи первого порядка на основе примера 2.1.

Пример 2.1 В цепи, схема которой представлена на рисунке 2.10, происходит коммутация (замыкание ключа). Требуется найти законы изменения напряжения u_C и тока i_2 конденсатора во время переходного процесса.

Решение. Составим систему уравнений для схемы после замыкания ключа по законам Кирхгофа:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0; \quad (2.22)$$

$$r_1 i_1 + r_2 i_2 + u_C = E; \quad (2.23)$$

$$r_2 i_2 + u_C - r_3 i_3 = 0, \quad (2.24)$$

где
$$i_2 = C \frac{du_C}{dt}. \quad (2.25)$$

Преобразуем систему уравнений в дифференциальное уравнение относительно переменной u_C , исключив для этого переменные i_1 и i_3 :

$$i_3 = \frac{r_2 i_2 + u_C}{r_3} = \frac{r_2}{r_3} C \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{r_3} u_C;$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = C \left(1 + \frac{r_2}{r_3} \right) \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{r_3} u_C.$$

Подставив полученные выражения в уравнение (2.23), получим дифференциальное уравнение относительно напряжения u_C :

$$C \left(r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3} \right) \frac{du_C}{dt} + \left(\frac{r_1}{r_3} + 1 \right) u_C = E$$

и запишем для него решение в виде

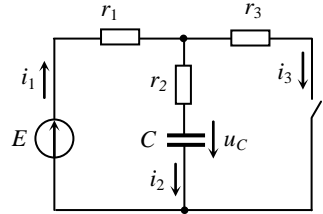


Рисунок 2.10

$$u_C(t) = u_{Cпр} + u_{Cсв}.$$

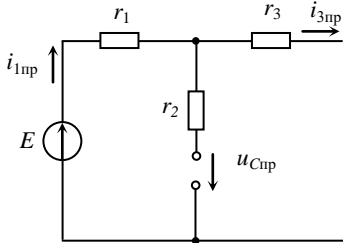


Рисунок 2.11

Принужденную составляющую напряжения $u_{Cпр}$ найдем по схеме замещения для установившегося процесса (рисунок 2.11), на которой конденсатор заменен разрывом ветви:

$$u_{Cпр} = \frac{Er_3}{r_1 + r_3}.$$

Характеристическое уравнение

$$C \left(r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3} \right) p + \left(\frac{r_1}{r_3} + 1 \right) = 0$$

имеет корень

$$p = - \frac{r_1 + r_3}{C(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)},$$

откуда находим постоянную времени цепи

$$\tau = \frac{1}{|p|} = - \frac{C(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)}{r_1 + r_3}$$

и свободную составляющую напряжения $u_{Cсв} = A e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Получили

$$u_C(t) = \frac{Er_3}{r_1 + r_3} + A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Постоянную интегрирования найдем из начального условия. К моменту коммутации конденсатор был заряжен до напряжения источника. В соответствии со вторым законом коммутации

$$u_C(0) = u_C(0-) = E.$$

$$\text{Таким образом, при } t = 0 \quad u_C(0) = E = \frac{Er_3}{r_1 + r_3} + A \quad \text{и} \quad A = \frac{Er_1}{r_1 + r_3}.$$

Искомое напряжение на конденсаторе

$$u_C(t) = \frac{Er_3}{r_1 + r_3} + \frac{Er_1}{r_1 + r_3} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Ток, проходящий через конденсатор,

$$i_2(t) = C \frac{du_c}{dt} = -\frac{Er_1}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Пример 2.2 Рассчитать переходный процесс в цепи, схема которой дана на рисунке 2.12, при замыкании ключа. В цепи действует источник с постоянной ЭДС $E = 24$ В, параметры элементов цепи: $r_1 = r_2 = 6$ Ом, $r_3 = 3$ Ом, $r_4 = 9$ Ом, $L = 0,2$ Гн.

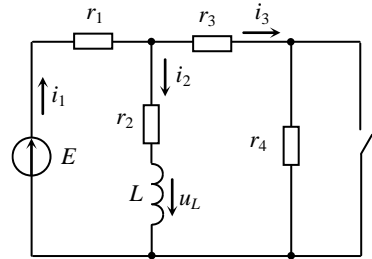


Рисунок 2.12

Решение. Определим независимое начальное условие, т. е. ток в катушке в момент коммутации, для чего рассчитаем схему до коммутации (рисунок 2.13):

$$i_1(0-) = \frac{E}{r_1 + \frac{r_2(r_3 + r_4)}{r_2 + r_3 + r_4}} = 2,4 \text{ А};$$

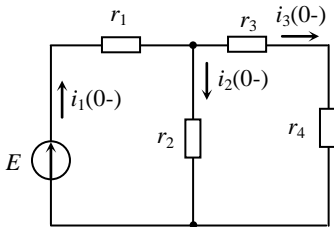


Рисунок 2.13

$$i_2(0-) = i_1(0-) \frac{r_3 + r_4}{r_2 + r_3 + r_4} = 1,6 \text{ А}.$$

Согласно первому закону коммутации

$$i_2(0) = i_2(0-) = 1,6 \text{ А}.$$

Составим систему уравнений на основании законов Кирхгофа для схемы после коммутации (ключ замкнут):

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0; \quad (2.26)$$

$$r_1 i_1 + r_2 i_2 + u_L = E; \quad (2.27)$$

$$r_2 i_2 + u_L - r_3 i_3 = 0, \quad (2.28)$$

где $u_L = L \frac{di_2}{dt}$.

Приведем полученную систему уравнений к дифференциальному уравнению относительно тока i_2 в катушке. Из уравнения (2.28) выразим ток i_3 :

$$i_3 = \frac{r_2}{r_3} i_2 + \frac{L}{r_3} \frac{di_2}{dt},$$

а затем, подставив его в уравнение (2.26), выразим ток i_1 через ток i_2 :

$$i_1 = i_2 + \frac{r_2}{r_3} i_2 + \frac{L}{r_3} \frac{di_2}{dt}.$$

Подставив полученное выражение в уравнение (2.27), получим

$$\left(1 + \frac{r_1}{r_3}\right) L \frac{di_2}{dt} + \left(r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3}\right) i_2 = E.$$

С учетом численных значений параметров элементов цепи получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно тока i_2 :

$$0,6 \frac{di_2}{dt} + 24i_2 = 24 \quad \text{или} \quad \frac{di_2}{dt} + 40i_2 = 40.$$

Решение уравнения запишем в виде суммы принужденной и свободной составляющих:

$$i_2(t) = i_{2\text{пр}}(t) + i_{2\text{св}}(t).$$

Расчет принужденной составляющей осуществим для схемы после коммутации (рисунок 2.14) при $t \rightarrow \infty$, т. е. после окончания переходного процесса:

$$i_{1\text{пр}} = \frac{E}{r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}} = 3 \text{ A};$$

$$i_{2\text{пр}} = i_{1\text{пр}} \frac{r_3}{r_2 + r_3} = 1 \text{ A}.$$

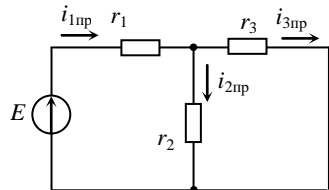


Рисунок 2.14

Представим свободную составляющую тока $i_{2\text{св}}$ в форме $i_{2\text{св}} = A e^{pt}$, где p –

корень характеристического уравнения $p + 40 = 0$, откуда находим $p = -40$ с⁻¹.

Таким образом,

$$i_2(t) = 1 + Ae^{-40t}.$$

Для определения постоянной A используем начальное условие, согласно которому при $t = 0$ ток $i_2(0) = 1,6$ А.

$$i_2(0) = 1,6 = 1 + A, \text{ откуда } A = 0,6.$$

Окончательно получим искомый ток

$$i_2(t) = 1 + 0,6e^{-40t} \text{ А.}$$

Далее, используя приведенную выше систему уравнений, найдем остальные переходные величины.

Напряжение на катушке

$$u_L = L \frac{di_2}{dt} = -4,8e^{-40t} \text{ В.}$$

Из уравнения (2.28) найдем переходный ток i_3 :

$$i_3 = \frac{r_2 i_2 + u_L}{r_3} = 2 - 0,4e^{-40t} \text{ А,}$$

а из уравнения (2.26) – ток i_1 : $i_1 = i_2 + i_3 = 3 + 0,2e^{-40t}$ А.

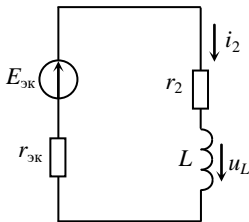


Рисунок 2.15

Решение данной задачи можно упростить, если предварительно произвести эквивалентное преобразование послекоммутационной схемы. Эквивалентные преобразования можно производить с ветвями, не содержащими реактивных элементов. Заменим левую и правую ветви схемы на рисунке 2.12 (при замкнутом ключе), которые соединены параллельно, эквивалентной (рисунок 2.15) с параметрами

$$E_{\text{эк}} = \frac{Er_3}{r_1 + r_3} = 8 \text{ В; } r_{\text{эк}} = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3} = 2 \text{ Ом.}$$

Для эквивалентной одноконтурной схемы можно сразу записать дифференциальное уравнение

$$L \frac{di_2}{dt} + (r_1 + r_{\text{эк}})i_2 = E_{\text{эк}},$$

подставив в которое числовые значения параметров схемы, получим

$$0,2 \frac{di_2}{dt} + 8i_2 = 8 \quad \text{или} \quad \frac{di_2}{dt} + 40i_2 = 40.$$

Полученное дифференциальное уравнение такое же, как и найденное выше.

2.1.4 Получение характеристического уравнения без составления дифференциального

Как видно из рассмотренных выше примеров, дифференциальное уравнение, описывающее изменение какой-либо из величин во время переходного процесса, было необходимо для получения характеристического уравнения. Последнее служит для нахождения корня этого уравнения, который, в свою очередь, входит в выражение для свободной составляющей искомой величины.

Как показал анализ переходных процессов во всех приведенных выше случаях, свободная составляющая любой искомой величины в цепи первого порядка имеет вид

$$x_{\text{св}}(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

где

$$\tau = L/r_{\text{эк}} \quad \text{или} \quad \tau = Cr_{\text{эк}},$$

причем $r_{\text{эк}}$ – это эквивалентное сопротивление рассматриваемой цепи в свободном режиме относительно выводов (зажимов) единственного накопительного элемента.

Свободный процесс в цепи – это процесс без источников энергии. Он происходит за счет начальной энергии в накопителях и с течением времени затухает до нуля из-за необратимых потерь энергии в r -элементах, поэтому корень характеристического уравнения p всегда отрицателен.

Пусть в цепи первого порядка с элементом L (рисунок 2.16, а), имеет место переходный процесс. Свободному режиму этого процесса соответствует схема на рисунке 2.16, б, которая может быть преобразована до одного эквивалентного сопротивления $r_{\text{эк}}$, соединенного последовательно с индуктивностью L (рисунок 2.16, в).

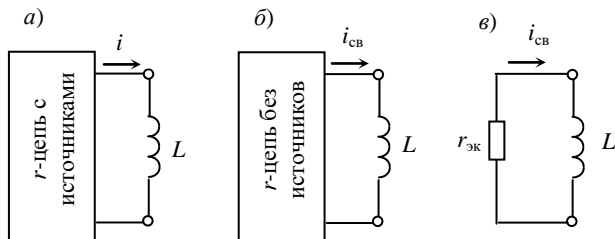


Рисунок 2.16

Для последней схемы запишем уравнение по второму закону Кирхгофа

$$L \frac{di_{\text{св}}}{dt} + r_{\text{эк}} i_{\text{св}} = 0,$$

которому соответствует характеристическое уравнение

$$Lp + r_{\text{эк}} = 0,$$

откуда

$$p = -r_{\text{эк}} / L.$$

При экспоненциальном характере изменения свободного тока в катушке $i_{\text{св}}(t) = Ae^{pt}$ свободная составляющая напряжения на ее зажимах изменяется по закону

$$u_{L\text{св}} = L \frac{di_{\text{св}}}{dt} = LpA e^{pt} = Lp i_{\text{св}}.$$

Полученное выражение говорит о том, что величины $u_{L\text{св}}$ и $i_{\text{св}}$ связаны между собой законом Ома, в котором величина Lp имеет характер сопротивления.

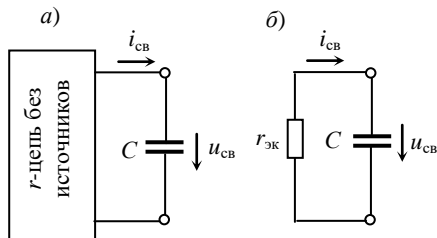


Рисунок 2.17

Аналогичным образом в цепи первого порядка с конденсатором C для описания свободного процесса воспользуемся схемой, приведенной на рисунке 2.17, *а*, которая в свою очередь преобразовывается в схему на рисунке 2.17, *б* и описывается уравнением

$$r_{\text{эк}} C \frac{du_{\text{св}}}{dt} + u_{\text{св}} = 0.$$

Ему соответствует характеристическое уравнение

$$r_{\text{эк}} Cp + 1 = 0,$$

корень которого

$$p = -\frac{1}{r_{\text{эк}} C}.$$

Выразим $u_{\text{св}}$ через $i_{\text{св}}(t) = Ae^{pt}$, воспользовавшись компонентным уравнением для емкости

$$u_{\text{св}} = \frac{1}{C} \int i_{\text{св}} dt = \frac{1}{Cp} A e^{pt} = \frac{1}{Cp} i_{\text{св}}.$$

Величины $u_{\text{св}}$ и $i_{\text{св}}$ также связаны между собой законом Ома, в котором величина $1/Cp$ представляет собой сопротивление.

Вернемся к примеру 2.1. Уравнения (2.22)–(2.24), описывающие переходный процесс в рассмотренном примере, могут служить и для описания свободного процесса в отсутствии внешнего источника. В этом случае система уравнений примет следующий вид:

$$i_{1\text{св}} - i_{2\text{св}} - i_{3\text{св}} = 0;$$

$$r_1 i_{1\text{св}} + r_2 i_{2\text{св}} + u_{\text{св}} = 0;$$

$$r_2 i_{2\text{св}} + u_{\text{св}} - r_3 i_{3\text{св}} = 0.$$

С учетом того, что $u_{\text{св}} = \frac{1}{Cp} i_{\text{св}}$, вместо системы дифференциальных получим систему алгебраических уравнений, которую можно решить методом Крамера:

$$i_{1\text{св}} - i_{2\text{св}} - i_{3\text{св}} = 0; \quad (2.22')$$

$$r_1 i_{1\text{св}} + (r_2 + 1/Cp) i_{2\text{св}} = 0; \quad (2.23')$$

$$(r_2 + 1/Cp) i_{2\text{св}} - r_3 i_{3\text{св}} = 0. \quad (2.24')$$

Система уравнений имеет нетривиальное решение, если ее главный определитель равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ r_1 & r_2 + 1/Cp & 0 \\ 0 & r_2 + 1/Cp & -r_3 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получим характеристическое уравнение

$$C \left(r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3} \right) p + \left(\frac{r_1}{r_3} + 1 \right) = 0,$$

которое аналогично найденному ранее.

На основании системы уравнений (2.22')–(2.24') представим на рисунке 2.18 схему замещения для свободного процесса. В ней внешний источник ЭДС удален, но учтено его нулевое внутреннее сопротивление, а конденсатор представлен операторным сопротивлением $1/Cp$. В отсутствие внешних источников свободный ток в любой ветви схемы может быть выражен по закону Ома как отношение нулевой ЭДС ветви к входному операторному сопротивлению $Z(p)$ относительно этой ЭДС.

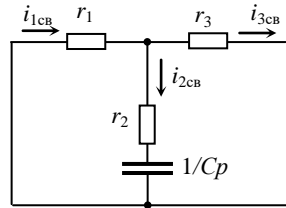


Рисунок 2.18

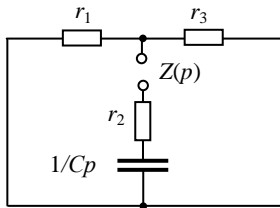


Рисунок 2.19

Ненулевое решение возможно при условии, что $Z(p) = 0$. Для определения $Z(p)$ разорвем любую ветвь схемы и запишем выражение для входного сопротивления относительно этого разрыва. Например, разорвем среднюю ветвь (рисунок 2.19), найдем входное операторное сопротивление и приравняем его нулю:

$$Z(p) = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3} + r_2 + \frac{1}{Cp} = 0.$$

После приведения выражения к общему знаменателю и приравнивания числителя нулю получим характеристическое уравнение

$$C(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)p + r_1 + r_3 = 0,$$

или

$$C\left(r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3}\right)p + \left(\frac{r_1}{r_3} + 1\right) = 0.$$

Выражение для $Z(p)$ отличается от выражения для комплексного сопротивления $Z(j\omega)$ тем, что множитель $j\omega$ заменен оператором p .

Таким образом, определение корней характеристического уравнения методом входного сопротивления следует выполнять в следующем порядке:

1) из послеконмутационной схемы исключают все внешние источники и заменяют их собственными внутренними сопротивлениями: идеальный источник ЭДС (напряжения) – короткозамкнутым участком, а идеальный источник тока – разрывом. Катушка индуктивности заменяется операторным сопротивлением Lp , а конденсатор – операторным сопротивлением $1/Cp$;

2) записывают выражение для входного операторного сопротивления $Z(p)$ схемы относительно двух зажимов, получающихся в результате размыкания любой ветви схемы и приравнивают его нулю;

3) решая полученное уравнение, находят искомые значения корней.

Примечание – В тех случаях, когда разветвленная цепь имеет лишь один накопитель энергии, удобнее рассматривать формулу входного сопротивления относительно ветви с накопителем энергии.

Если в схеме имеется источник тока, операторное сопротивление нельзя рассматривать относительно ветви с источником тока. Его следует рассчитывать относительно любой другой ветви схемы, полагая при этом ветвь с источником тока разомкнутой.

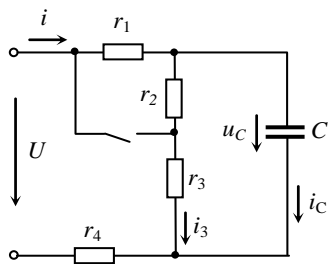


Рисунок 2.20

Пример 2.3 В цепи, схема которой представлена на рисунке 2.20, происходит коммутация (замыкание ключа). Требуется найти законы изменения напряжения u_C на конденсаторе и токов ветвей цепи во время переходного процесса. Напряжение источника $U = 250$ В, параметры пассивных элементов схемы: $C = 50$ мкФ, $r_1 = 100$ Ом, $r_2 = 150$ Ом, $r_3 = 200$ Ом, $r_4 = 50$ Ом.

Решение. Найдем независимое начальное условие, т. е. напряжение на конденсаторе в момент коммутации

$$u_C(0) = u_C(0-) = \frac{U(r_2 + r_3)}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} = 175 \text{ В.}$$

Проанализируем послекоммутационную схему на рисунке 2.21. Запишем систему уравнений для этой схемы, составленную по законам Кирхгофа:

$$i - i_1 - i_2 - i_3 = 0;$$

$$i_1 + i_2 - i_C = 0;$$

$$r_3 i_3 + r_4 i = U;$$

$$r_1 i_C + u_C - r_3 i_3 = 0,$$

где $r_{12} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$.

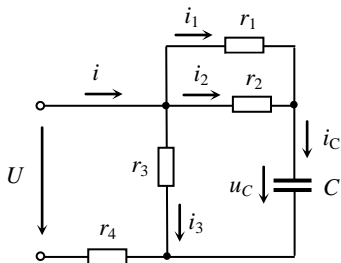


Рисунок 2.21

В качестве расчетной величины выберем напряжение u_C на конденсаторе и запишем для него решение в виде суммы принужденной и свободной составляющих:

$$u_C(t) = u_{Cпр} + u_{Cсв}.$$

Найдем принужденную составляющую $u_{Cпр} = \frac{U r_3}{r_3 + r_4} = 200$ В.

Свободная составляющая напряжения $u_{Cсв} = A e^{pt}$.

Таким образом, $u_C(t) = 200 + Ae^{pt}$.

Постоянную интегрирования A найдем из начальных условий:

$$u_C(0) = 175 = 200 + A, \quad \text{откуда } A = -25.$$

Корень характеристического уравнения p определим из схемы замещения для свободного процесса на рисунке 2.22.

Приравняем нулю входное операторное сопротивление $Z(p)$:

$$Z(p) = \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} + r_{12} + \frac{1}{Cp} = 0 \quad \text{и найдем значение } p = -200 \text{ с}^{-1}.$$

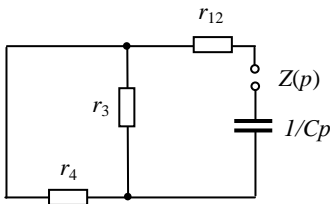


Рисунок 2.22

уравнений.

Окончательно получили

$$u_C(t) = 200 - 25e^{-200t} \text{ В.}$$

Ток в ветви с конденсатором

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0,25e^{-200t} \text{ А.}$$

Токи в ветвях схемы находим на основании приведенной выше системы

$$i_3(t) = \frac{r_{12} i_C + u_C}{r_3} = 1 - 0,05e^{-200t} \text{ А;}$$

$$i_1(t) = i_C \frac{r_2}{r_1 + r_2} = 0,1e^{-200t} \text{ А;}$$

$$i_2(t) = i_C - i_1 = 0,15e^{-200t} \text{ А;}$$

$$i(t) = i_3 + i_C = 1 + 0,2e^{-200t} \text{ А.}$$

Пример 2.4 Найти ток i_3 переходного процесса в цепи, схема которой приведена на рисунке 2.23. Напряжение источника $U = 36$ В, параметры элементов схемы: $L = 0,1$ Гн, $r_1 = 4$ Ом, $r_2 = 6$ Ом, $r_3 = 9$ Ом, $r_4 = 3$ Ом.

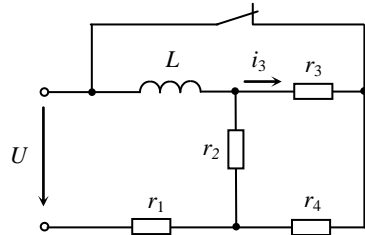


Рисунок 2.23

Решение. Запишем решение для искомого тока в виде суммы принужденной и свободной составляющих:

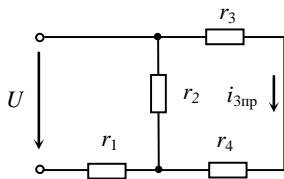


Рисунок 2.24

$$i_3(t) = i_{3\text{пр}} + i_{3\text{св}}.$$

Принужденную составляющую тока определяем из схемы замещения установившегося режима (рисунок 2.24), при котором катушка заменяется короткозамкнутым участком:

$$i_{3\text{пр}} = \frac{U}{\frac{r_2(r_3 + r_4)}{r_2 + r_3 + r_4} + r_1} \cdot \frac{r_2}{r_2 + r_3 + r_4} = 1,5 \text{ А.}$$

Принимая во внимание, что $i_{3\text{св}} = Ae^{pt}$, получаем

$$i_3(t) = 1,5 + Ae^{pt}.$$

Постоянную интегрирования A найдем из начальных условий. С этой целью сначала определим независимое начальное условие, т. е. значение тока $i_L(0)$ в катушке в момент коммутации расчетом схемы до коммутации на рисунке 2.25.

$$i_L(0) = i_L(0-) = \frac{U}{\frac{r_2 r_4}{r_2 + r_4} + r_1} \cdot \frac{r_4}{r_2 + r_4} = 2 \text{ А.}$$

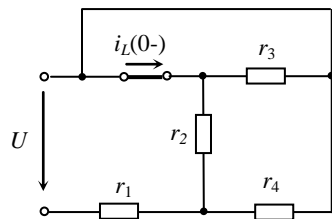


Рисунок 2.25

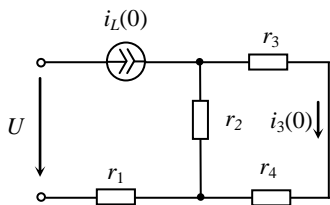


Рисунок 2.26

Значение тока $i_3(0)$ в момент коммутации представляет собой зависимое начальное условие. Его можно найти путем расчета схемы замещения для момента коммутации (рисунок 2.26), в которой катушку заменяют источником тока $i_L(0)$:

$$i_3(0) = i_L(0) \frac{r_2}{r_2 + r_3 + r_4} = \frac{2}{3} \text{ А.}$$

Находим постоянную интегрирования A :

$$i_3(0) = 2/3 = 1,5 + A, \quad \text{откуда } A = -5/6 = -0,833.$$

Корень характеристического уравнения вычислим из выражения для операторного сопротивления схемы замещения свободного процесса (рисунок 2.27)

$$Z(p) = r_1 + Lp + \frac{r_2(r_3 + r_4)}{r_2 + r_3 + r_4} = 0,$$

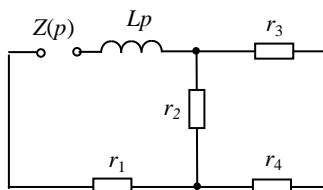


Рисунок 2.27

откуда получаем $p = -80 \text{ с}^{-1}$.

Таким образом, $i_3(t) = 1,5 - 0,833e^{-80t} \text{ А}$.

Пример 2.5 В схеме на рисунке 2.28 с параметрами $E_1 = 10 \text{ В}$, $J = 5 \text{ А}$, $C = 125 \text{ мкФ}$, $r_1 = 10 \text{ Ом}$, $r_2 = 10 \text{ Ом}$, $r_3 = 80 \text{ Ом}$ происходит коммутация. Найти напряжение на конденсаторе и токи ветвей во время переходного процесса.

Решение. Произведем эквивалентные преобразования в схеме с целью ее упрощения и получим схему на рисунке 2.29, где

$$r = r_1 + r_2 = 20 \text{ Ом};$$

$$E = E_1 + r_1 J = 60 \text{ В.}$$

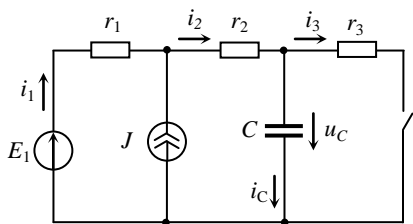


Рисунок 2.28

Найдем напряжение на емкости в момент коммутации

$$u_C(0) = u_C(0-) = E = 60 \text{ В.}$$

В послекоммутационной схеме выполним еще одно преобразование, заменив параллельно соединенные ветви с сопротивлениями r и r_3 эквивалентной (рисунок 2.30) с параметрами

$$E_{\text{эк}} = \frac{Er_3}{r+r_3} = 48 \text{ В; } r_{\text{эк}} = \frac{rr_3}{r+r_3} = 16 \text{ В.}$$

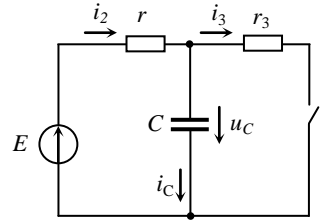


Рисунок 2.29

Составим дифференциальное уравнение относительно напряжения на емкости по второму закону Кирхгофа:

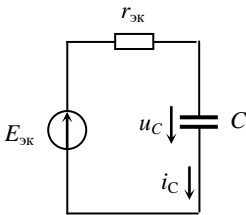


Рисунок 2.30

$$r_{\text{эк}}C \frac{du_C}{dt} + u_C = E_{\text{эк}}$$

и найдем его решение:

$$u_C(t) = u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}} = E_{\text{эк}} + Ae^{pt}.$$

Для определения постоянной интегрирования A приведем полученное решение к начальному условию и подставим найденное выше значение $u_C(0)$:

$$u_C(0) = 60 = 48 + A,$$

откуда получим значение $A = 12$.

Корень характеристического уравнения $p = -1/r_{\text{эк}}C = -500 \text{ с}^{-1}$.

Таким образом, получили закон изменения напряжения на емкости

$$u_C(t) = 48 + 12e^{-500t} \text{ В.}$$

Ток в ветви с емкостью

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0,75e^{-500t} \text{ А.}$$

Остальные токи ветвей найдем по законам Кирхгофа для схем на рисунках 2.29 и 2.28:

$$i_3(t) = \frac{u_C}{r_3} = 0,6 + 0,15e^{-500t} \text{ А;}$$

$$i_2(t) = i_C + i_3 = 0,6 + 0,9e^{-500t} \text{ А;}$$

$$i_1(t) = J + i_2 = 5,6 + 0,9e^{-500t} \text{ А.}$$

Пример 2.6 В схеме на рисунке 2.31 с синусоидальным источником питания $e(t) = E_{1m} \sin(\omega t + \psi)$ происходит замыкание ключа. Параметры элементов схемы: $E_{1m} = 60 \text{ В}$, $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$, $\psi = -30^\circ$, $C = 20 \text{ мкФ}$, $r_1 = 15 \text{ Ом}$, $r_2 = 30 \text{ Ом}$, $r_3 = 10 \text{ Ом}$. Найти напряжение на конденсаторе и токи ветвей во время переходного процесса.

Решение. Составим систему уравнений по законам Кирхгофа для схемы после коммутации.

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0; \\ r_1 i_1 + r_2 i_2 &= e_1; \\ r_2 i_2 - u_C - r_3 i_3 &= 0. \end{aligned}$$

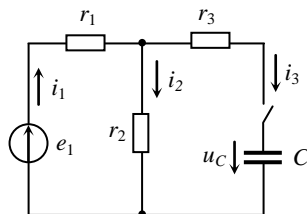


Рисунок 2.31

Конденсатор до коммутации не был заряжен, следовательно,
 $u_C(0) = u_C(0-) = 0$.

Будем искать решение для напряжения $u_C(t)$ в виде

$$u_C(t) = u_{Cпр} + u_{Cсв}.$$

Для определения принужденной составляющей $u_{Cпр}$ применим метод комплексных амплитуд.

Входное комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = r_1 + \frac{r_2 \left(r_3 - j \frac{1}{\omega C} \right)}{r_2 + r_3 - j \frac{1}{\omega C}} = 36,22 - j10,976 \text{ Ом.}$$

Комплексная принужденная составляющая входного тока

$$\underline{I}_{1пр} = \frac{\underline{E}_{1m}}{\underline{Z}} = \frac{60e^{-j30^\circ}}{36,22 - j10,976} = 1,544 - j0,36 \text{ А.}$$

Комплексная принужденная составляющая напряжения на емкости

$$\underline{U}_{C\text{мпр}} = -j \frac{1}{\omega C} I_{1\text{мпр}} \frac{r_2}{r_2 + r_3 - j \frac{1}{\omega C}} = 22,966 - j29,186 = 37,138 e^{-51,8^\circ} \text{ В.}$$

Мгновенное значение напряжения

$$u_{C\text{пр}} = \text{Im}(\underline{U}_{C\text{мпр}} e^{j\omega t}) = 37,14 \sin(1000t - 51,8^\circ) \text{ В.}$$

Методом входного сопротивления составим характеристическое уравнение

$$Z(p) = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + r_3 + \frac{1}{Cp} = 0,$$

корень которого $p = -2500 \text{ с}^{-1}$.

Свободная составляющая напряжения на емкости

$$u_{C\text{св}} = A e^{pt}.$$

Искомая величина

$$u_C(t) = 37,14 \sin(1000t - 51,8^\circ) + A e^{pt}.$$

При $t = 0$ имеем $u_C(0) = 0 = -37,14 \sin 51,8^\circ + A$,

откуда находим постоянную интегрирования $A = 29,19$.

Искомая зависимость

$$u_C(t) = 37,14 \sin(1000t - 51,8^\circ) + 29,19 e^{-2500t} \text{ В.}$$

Токи переходного процесса находим по компонентному уравнению (1.8) и уравнениям законов Кирхгофа, приведенных для рассматриваемой схемы выше:

$$\begin{aligned} i_3(t) &= C \frac{du_C}{dt} = 20 \cdot 10^{-6} \left[37,14 \cdot 10^3 \cos(1000t - 51,8^\circ) - 29,19 \cdot 2500 e^{-2500t} \right] = \\ &= 0,743 \sin(1000t + 38,2^\circ) - 1,46 e^{-2500t} \text{ А.} \end{aligned}$$

$$i_2(t) = \frac{u_C + r_3 i_3}{r_2} = \frac{37,14 \sin(\omega t - 51,8^\circ) + 29,19 e^{pt} + 7,43 \sin(\omega t + 38,2^\circ) - 14,6 e^{pt}}{30} =$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Im}\left[(1,238 e^{-j51,8^\circ} + 0,248 e^{j38,2^\circ})e^{j1000t}\right] + 0,486 e^{-2500} = \\
&= \operatorname{Im}\left[(0,766 - j0,973 + 0,195 + j0,153)e^{j1000t}\right] + 0,486 e^{-2500} = \\
&= \operatorname{Im}\left[1,263 e^{j(1000t - 40,5^\circ)}\right] + 0,486 e^{-2500} = 1,263 \sin(1000t - 40,5^\circ) + 0,486 e^{-2500} \text{ A.} \\
i_1(t) = i_2 + i_3 &= 1,263 \sin(1000t - 40,5^\circ) + 0,486 e^{-2500} + 0,743 \sin(1000t + 38,2^\circ) - \\
&- 1,46 e^{-2500} = \operatorname{Im}\left[(1,263 e^{-j40,5^\circ} + 0,743 e^{j38,2^\circ})e^{j1000t}\right] - 0,974 e^{-2500} = \\
&= 1,585 \sin(1000t - 13,1^\circ) - 0,974 e^{-2500} \text{ A.}
\end{aligned}$$

2.2 Переходные процессы в цепях второго порядка

2.2.1 Переходный процесс в последовательном rLC -контуре

Пусть конденсатор C на рисунке 2.32 предварительно заряженный от источника постоянного напряжения U , коммутируется на rL -цепь. Для исследования последующего за коммутацией переходного процесса составим дифференциальное уравнение для последовательного rLC -контура по второму закону Кирхгофа.

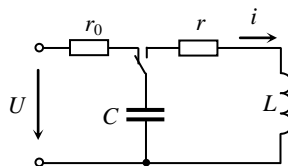


Рисунок 2.32

$$ri + L \frac{di}{dt} + u_C = 0, \quad (2.29)$$

где $i = C \frac{du_C}{dt}$.

Подставляя значение i в уравнение (2.29), получим для u_C однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0. \quad (2.30)$$

При отсутствии источников принужденная составляющая $u_{Cпр} = 0$.

Составим характеристическое уравнение

$$p^2 + \frac{r}{L}p + \frac{1}{LC} = 0 \quad (2.31)$$

и найдем его корни

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Введем следующие обозначения: $\delta = \frac{r}{2L}$ – коэффициент затухания;

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансная частота последовательного rLC -контура.

Таким образом, имеем

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Вид корней, а следовательно, и характер свободного процесса зависит от подкоренного выражения.

Апериодический процесс. *Апериодическим* разрядом конденсатора, заряженного до напряжения U , на последовательную rL -цепь называется разряд, при котором напряжение на конденсаторе монотонно уменьшается от начального значения U до нуля.

Апериодический процесс имеет место, если корни характеристического уравнения (2.31) действительные и различные, т. е. при

$$\frac{r^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \quad \text{или} \quad r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2.32)$$

Назовем *критическим сопротивлением* контура такое его наибольшее значение, при котором свободный процесс имеет еще апериодический характер:

$$r_{\text{кр}} = 2\sqrt{L/C}. \quad (2.33)$$

При выполнении условия (2.32) получаем действительные отрицательные корни $p_1 \neq p_2$, причем $|p_1| < |p_2|$. Общее решение однородного дифференциального уравнения можно записать в виде

$$u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (2.34)$$

Продифференцировав это уравнение по t , получим еще одно уравнение с постоянными A_1 и A_2 :

$$\frac{du_C}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}. \quad (2.35)$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями и законами коммутации. В момент коммутации $i(0) = i(0-) = 0$ и $u_C(0) = u_C(0-) = U$. Обе величины i и u_C связаны между собой соотношением

$$i = C \frac{du_C}{dt}, \quad \text{откуда} \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C} \quad \text{и} \quad \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i(0)}{C} = 0.$$

Подставив начальные условия в соотношения (2.34) и (2.35), получим

$$A_1 + A_2 = U; \quad p_1 A_1 + p_2 A_2 = 0,$$

откуда
$$A_1 = \frac{p_2 U}{p_2 - p_1}; \quad A_2 = \frac{-p_1 U}{p_2 - p_1}. \quad (2.36)$$

Подставив значения постоянных интегрирования в выражение (2.34), получим

$$u_C(t) = \frac{U}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}). \quad (2.37)$$

График изменения напряжения u_C на конденсаторе в функции времени, а также формирующие его экспоненты $A_1 e^{p_1 t}$ (кривая 1) и $A_2 e^{p_2 t}$ (кривая 2) приведены на рисунке 2.33. Ток переходного процесса

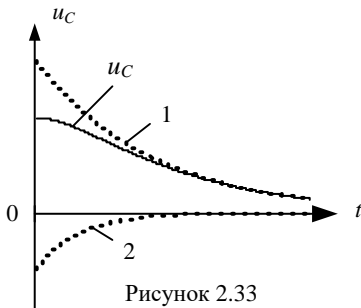


Рисунок 2.33

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{U p_1 p_2}{p_2 - p_1} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

С учетом того, что

$$p_1 p_2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \text{получим}$$

$$i(t) = \frac{U}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (2.38)$$

Находим напряжение на катушке индуктивности:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{U}{p_2 - p_1} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}). \quad (2.39)$$

Графики изменения тока i цепи и напряжения u_L на катушке в функции времени приведены на рисунке 2.34.

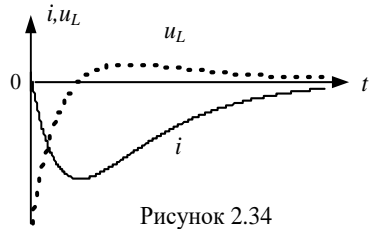


Рисунок 2.34

Критический случай аperiodического процесса. Если $\delta = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, то корни характеристического уравнения одинаковы:

$$p_1 = p_2 = p = -\frac{r}{2L} = -\delta.$$

Выражение (2.37) приводит в этом случае к неопределенности вида 0/0. Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталья дифференцированием числителя и знаменателя по p_1 , получаем:

$$u_C(t) = U \lim_{p_1 \rightarrow p_2 = p} \frac{\frac{d}{dp_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})}{\frac{d}{dp_1} (p_2 - p_1)} = U(1 - pt)e^{pt}. \quad (2.40)$$

Переходный ток $i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -CU p^2 t e^{pt}.$

При $p = -\delta = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$ имеем $i(t) = -\frac{U}{L} t e^{pt}.$ (2.41)

Напряжение на индуктивности

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -U(1 + pt)e^{pt}. \quad (2.42)$$

Тот же результат будет получен, если воспользоваться общим решением однородного дифференциального уравнения с кратными корнями:

$$u_C = (A_1 + A_2 t)e^{pt};$$

$$\frac{du_C}{dt} = (A_1 p + A_2 + A_2 p t)e^{pt}.$$

Используя полученные ранее начальные условия, находим значения постоянных интегрирования:

$$A_1 = U; A_2 = -Up.$$

Получим
$$u_C = U(1 - pt)e^{pt}.$$

Графики изменения u_C , i и u_L в функции времени такие же, как и в предыдущем случае.

Коллебателный процесс. Рассмотрим случай, когда $\delta < \omega_0$, т. е. $r < r_{кр}$. В этом случае корни характеристического уравнения будут комплексными и сопряженными:

$$p_1 = -\delta + j\omega_{св} = \omega_0 e^{-j\gamma}; \quad p_2 = -\delta - j\omega_{св} = \omega_0 e^{-j\gamma},$$

где $\omega_{св} = \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}$ – частота свободных колебаний.

Воспользуемся формулами, полученными в первом случае (для аperiодического процесса), т. к. уравнение для свободной составляющей u_C одно и то же, а следовательно, будут одинаковыми выражения для остальных величин, i и u_L :

$$u_C = \frac{U}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t});$$

$$i = \frac{U}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t});$$

$$u_L = \frac{U}{p_2 - p_1} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}).$$

Подставив в приведенные выше формулы значения корней p_1 и p_2 , получим:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{U}{-2j\omega_{св}} (\omega_0 e^{-j\gamma} e^{-\delta t} e^{j\omega_{св} t} - \omega_0 e^{j\gamma} e^{-\delta t} e^{-j\omega_{св} t}) = \\ &= \frac{-U}{\omega_{св} \sqrt{LC}} e^{-\delta t} \frac{e^{j(\omega_{св} t - \gamma)} - e^{-j(\omega_{св} t - \gamma)}}{2j} = \frac{U}{\omega_{св} \sqrt{LC}} e^{-\delta t} \sin(\omega_{св} t + \pi - \gamma) = \end{aligned}$$

$$= \frac{U}{\omega_{\text{CB}} \sqrt{LC}} e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{CB}} t + \alpha), \quad \text{где } \alpha = \pi - \gamma. \quad (2.43)$$

$$i(t) = \frac{-U}{2j\omega_{\text{CB}} L} (e^{-\delta t} e^{j\omega_{\text{CB}} t} - e^{-\delta t} e^{-j\omega_{\text{CB}} t}) = \frac{U}{\omega_{\text{CB}} L} e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{CB}} t + \pi); \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} u_L(t) &= \frac{U\omega_0 e^{-\delta t}}{-2j\omega_{\text{CB}}} (e^{j\gamma} e^{j\omega_{\text{CB}} t} - e^{-j\gamma} e^{-j\omega_{\text{CB}} t}) = \frac{-U}{\omega_{\text{CB}} \sqrt{LC}} e^{-\delta t} \frac{e^{j(\omega_{\text{CB}} t + \gamma)} - e^{-j(\omega_{\text{CB}} t + \gamma)}}{2j} = \\ &= \frac{U}{\omega_{\text{CB}} \sqrt{LC}} e^{-\delta t} \sin[(\omega_{\text{CB}} t - (\pi - \gamma))] = \frac{U}{\omega_{\text{CB}} \sqrt{LC}} e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{CB}} t - \alpha). \end{aligned} \quad (2.45)$$

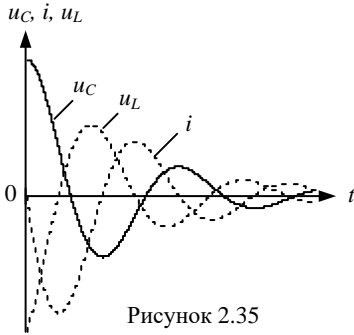


Рисунок 2.35

В соответствии с полученными выше формулами на рисунке 2.35 построены графики изменения тока i , напряжений u_C и u_L в функции времени во время колебательного переходного процесса.

2.2.2 Переходные процессы в разветвленных цепях второго порядка

Расчет переходного процесса классическим методом в разветвленной цепи второго порядка рассмотрим на примере цепи, схема которой приведена на рисунке 2.36.

1 На схеме после коммутации (ключ замкнут) укажем положительные направления токов ветвей и составим систему уравнений по первому и второму законам Кирхгофа:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0; \quad (2.46)$$

$$r_1 i_1 + r_2 i_2 + u_L = E; \quad (2.47)$$

$$r_2 i_2 + u_L - u_C - r_3 i_3 = 0, \quad (2.48)$$

где
$$u_L = L \frac{di_2}{dt}; \quad (2.49)$$

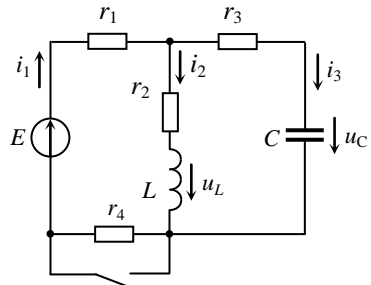


Рисунок 2.36

$$i_3 = C \frac{du_C}{dt}. \quad (2.50)$$

2 Определим независимые начальные условия путем расчета докоммутационной схемы, представленной на рисунке 2.37.

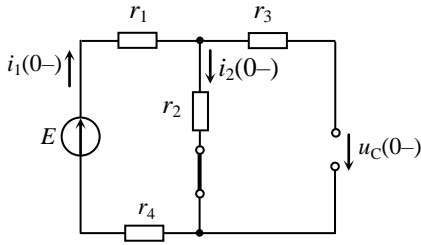


Рисунок 2.37

$$i_1(0-) = i_2(0-) = \frac{E}{r + r_2 + r_4};$$

$$u_C(0-) = r_2 i_2(0-).$$

В соответствии с законами коммутации

$$i_2(0) = i_2(0-);$$

$$u_C(0) = u_C(0-).$$

Зависимые начальные условия найдем, рассчитав схему замещения в момент коммутации (рисунок 2.38) методом узловых потенциалов. Примем потенциал узла 0 равным нулю и составим уравнение для определения потенциала узла 1:

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) \varphi_1(0) = \frac{E}{r_1} - i_2(0) + \frac{u_C(0)}{r_3},$$

откуда

$$\varphi_1(0) = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3} \left[\frac{E}{r_1} - i_2(0) + \frac{u_C(0)}{r_3} \right].$$

Находим токи ветвей:

$$i_1(0) = \frac{-\varphi_1(0) + E}{r_1}, \quad i_3(0) = i_1(0) - i_2(0)$$

и напряжение на катушке

$$u_L(0) = E - r_1 i_1(0) - r_2 i_2(0).$$

Скорость изменения тока катушки во времени в момент коммутации выразим из уравнения (2.49):

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L},$$

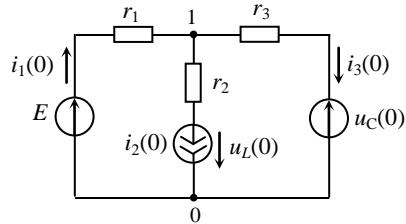


Рисунок 2.38

а скорость изменения напряжения на конденсаторе – из уравнения (2.50):

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_3(0)}{C}.$$

3 Выберем в качестве расчетной величины либо ток i_2 в ветви с катушкой, либо напряжение u_C на конденсаторе. Искомую величину запишем в виде суммы принужденной и свободной составляющих:

$$i_2(t) = i_{2пр}(t) + i_{2св}(t);$$

$$u_C(t) = u_{Cпр}(t) + u_{Cсв}(t).$$

4 Принужденные составляющие искомых величин найдем путем расчета соответствующей схемы замещения (рисунок 2.39). Так как в цепи действует источник постоянной ЭДС, то катушка в этом случае заменяется короткой, а конденсатор – разрывом ветви.

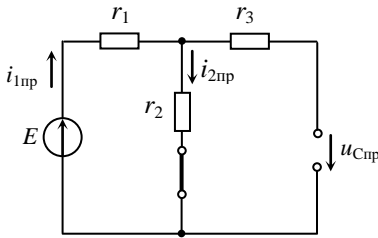


Рисунок 2.39

$$i_{1пр} = i_{2пр} = \frac{E}{r_1 + r_2};$$

$$u_{Cпр} = r_2 i_{2пр}.$$

5 Для определения свободных составляющих $i_{2св}$ и $u_{Cсв}$ найдем корни характеристического уравнения, которое составим по методу приравнивания нулю входного сопротивления в схеме

замещения свободного процесса (рисунок 2.40). Запишем выражение для характеристического сопротивления относительно контактов разрыва третьей ветви:

$$Z(p) = \frac{r_1(r_2 + Lp)}{r_1 + r_2 + Lp} + r_3 + \frac{1}{Cp} = \frac{r_1(r_2 + Lp)Cp + r_3Cp(r_1 + r_2 + Lp) + r_1 + r_2 + Lp}{Cp(r_1 + r_2 + Lp)}.$$

Приравняв нулю числитель формулы для $Z(p)$, получим характеристическое уравнение

$$(r_1 + r_3)LCp^2 + [(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)C + L]p + r_1 + r_2 = 0.$$

Введя обозначения

$$(r_1 + r_3)LC = a,$$

$$(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)C + L = b \text{ и}$$

$$r + r_2 = c,$$

получим: $ap^2 + bp + c = 0$.

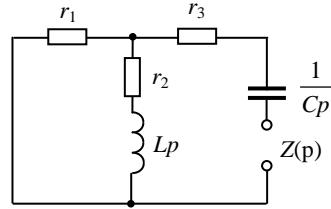


Рисунок 2.40

Решение квадратного уравнения дает два корня p_1 и p_2 :

$$p_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Если подкоренное выражение положительно ($b^2 - 4ac > 0$), то корни p_1 и p_2 будут вещественными, разными и отрицательными. Выражение для $i_{2\text{св}}(t)$ имеет следующий вид:

$$i_{2\text{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Переходный процесс в этом случае будет *апериодическим*.

При условии, что $b^2 - 4ac = 0$, корни будут кратными ($p_1 = p_2 = p$), и выражение для свободного тока запишется так:

$$i_{2\text{св}}(t) = (A_1 + A_2 t) e^{pt}.$$

Это предельный случай аperiодического переходного процесса.

При отрицательном подкоренном выражении ($b^2 - 4ac < 0$) получим пару комплексно-сопряженных корней $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{\text{св}}$, а свободный ток можно выразить в двух формах:

$$i_{2\text{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

или

$$i_{2\text{св}}(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \beta).$$

В последнем случае постоянными интегрирования являются A и β .

Аналогичная структура решения получается и для свободной составляющей напряжения $u_{\text{св}}$.

Соответствующий этому случаю переходный процесс носит название *периодического*, при котором каждая переходная величина (ток или

напряжение) изображаются затухающей синусоидой с коэффициентом затухания δ и периодом свободных колебаний $T_{\text{св}} = 2\pi / \omega_{\text{св}}$.

Постоянные интегрирования A_1 и A_2 (или A и β) определяют следующим образом.

Запишем два уравнения с постоянными A_1 и A_2 : одно для искомой величины, а второе – для ее производной по времени, например:

$$i_2(t) = i_{2\text{нп}} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t};$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} = \frac{di_{2\text{нп}}}{dt} + p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}.$$

Если в цепи действует источник постоянной ЭДС, то $\frac{di_{2\text{нп}}}{dt} = 0$.

Приведем полученную систему уравнений к начальным условиям, которые были найдены ранее, и в результате ее решения определим постоянные интегрирования A_1 и A_2 :

$$i_2(0) = i_{2\text{нп}} + A_1 + A_2;$$

$$\left. \frac{di_2(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_{2\text{нп}}(t)}{dt} \right|_{t=0} + p_1 A_1 + p_2 A_2.$$

Порядок расчета переходных процессов классическим методом

1 В схеме до коммутации определяют независимые начальные условия, т. е. значения токов в индуктивных и напряжений на емкостных элементах схемы.

2 В схеме после коммутации для момента $t = 0+$ находят по законам Кирхгофа или с помощью эквивалентных схем зависимые начальные условия.

3 Записывают для искомых величин решение в виде суммы принужденной и свободной составляющих.

4 Определяют принужденные составляющие искомых величин.

5 Составляют характеристическое уравнение, находят его корни и в зависимости от их вида записывают выражения для свободных составляющих искомых величин.

6 Находят постоянные интегрирования, используя найденные в пп. 1 и 2 независимые и зависимые начальные условия.

Пример 2.7 Найти напряжения на реактивных элементах и токи во всех ветвях цепи, схема которой приведена на рисунке 2.41, во время переходного процесса после подключения к цепи резистора r_2 . Цепь находится под действием источника постоянной ЭДС $E_1 = 600$ В. Параметры элементов схемы: $r_1 = 100$ Ом, $r_2 = 100$ Ом, $r_3 = 200$ Ом, $L = 0,2$ Гн, $C = 100$ мкФ.

Решение. Определим независимые начальные условия. В схеме до коммутации в установившемся режиме катушка представляет собой короткозамкнутый участок, а конденсатор – разрыв ветви. Ток $i_L(0-)$ в катушке и напряжение $u_C(0-)$ до замыкания ключа находим по формулам

$$i_L(0-) = i_3(0-) = \frac{E_1}{r_1 + r_3} = 2 \text{ А}; \quad u_C(0-) = r_3 i_3(0-) = 400 \text{ В}.$$

По законам коммутации

$$i_L(0) = i_L(0-) = 2 \text{ А}; \quad u_C(0) = u_C(0-) = 400 \text{ В}.$$

Расчет зависимых начальных условий произведем для схемы замещения в момент коммутации (рисунок 2.42), в которой катушка заменена источником тока $i_L(0)$, а конденсатор – идеальным источником ЭДС $u_C(0)$.

Ток $i_1(0)$ в момент коммутации определим по методу наложения от действия источников E_1 и $i_L(0)$:

$$i_1(0) = \frac{E_1}{r_1 + r_2} + i_L(0) \frac{r_2}{r_1 + r_2} = 4 \text{ А}.$$

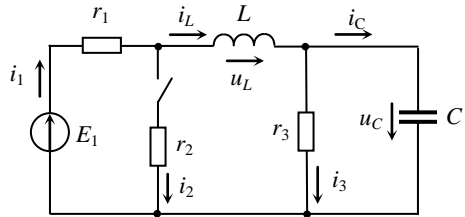


Рисунок 2.41

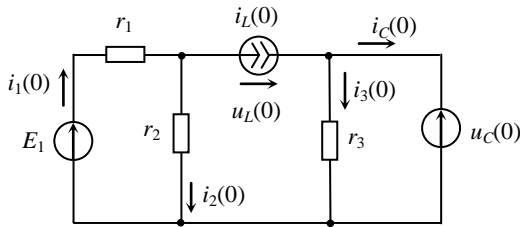


Рисунок 2.42

Остальные токи находим по законам Ома и Кирхгофа

$$i_2(0) = i_1(0) - i_L(0) = 2 \text{ A};$$

$$i_3(0) = \frac{u_C(0)}{r_3} = 2 \text{ A};$$

$$i_C(0) = i_L(0) - i_3(0) = 0;$$

Напряжение на зажимах катушки

$$u_L(0) = r_2 i_2(0) - r_3 i_3(0) = -200 \text{ В.}$$

Скорость изменения во времени тока катушки в момент коммутации

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L} = -50 \text{ А/с,}$$

а скорость изменения напряжения на конденсаторе

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = 0.$$

Произведем в схеме после коммутации (рисунок 2.43) преобразование, заменив параллельно соединенные первую и вторую ветви эквивалентной с параметрами

$$E = \frac{E_1 r_2}{r_1 + r_2} = 300 \text{ В};$$

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 50 \text{ Ом}$$

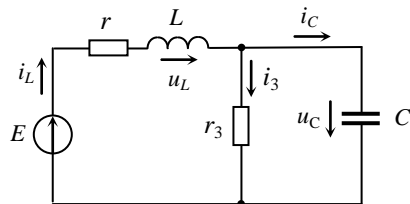


Рисунок 2.43

и составим систему уравнений по законам Кирхгофа, описывающих состояние схемы:

$$\begin{aligned}
 i_L - i_3 - i_C &= 0; \\
 r i_L + u_L + u_C &= E; \\
 r_3 i_3 - u_C &= 0.
 \end{aligned}$$

Выберем в качестве расчетной величины напряжение на конденсаторе и запишем решение в виде

$$u_C(t) = u_{\text{Cпр}}(t) + u_{\text{Cсв}}(t).$$

Принужденную составляющую найдем по формуле

$$u_{\text{Cпр}} = \frac{E}{r + r_3} r_3 = 240 \text{ В.}$$

Для определения свободной составляющей напряжения $u_{\text{Cсв}}(t)$ запишем выражение для входного характеристического сопротивления $Z(p)$ относительно разомкнутых зажимов ветви на рисунке 2.44:

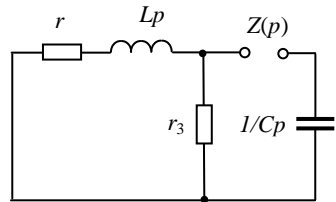


Рисунок 2.44

$$Z(p) = \frac{1}{Cp} + \frac{(Lp + r_1)r_2}{Lp + r_1 + r_2}.$$

При $Z(p) = 0$ имеем

$$r_2 L C p^2 + (L + r_1 r_2 C) p + r_1 + r_2 = 0.$$

После подстановки числовых значений параметров элементов схемы получим характеристическое уравнение

$$4 \cdot 10^{-3} p^2 + 1,2 p + 250 = 0,$$

решение которого дает два комплексно-сопряженных корня:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= -150 + j200 = 250 e^{j126,9^\circ} c^{-1} \quad \text{и} \\
 p_2 &= -150 - j200 = 250 e^{-j126,9^\circ} c^{-1},
 \end{aligned}$$

что указывает на колебательный характер переходного процесса.

Выражение для $u_C(t)$ запишем в следующем виде:

$$u_C(t) = u_{\text{сир}} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Продифференцировав полученное уравнение по t , получим

$$\frac{du_C(t)}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}.$$

Оба уравнения содержат постоянные интегрирования, которые определим, приведя эти уравнения к начальным условиям и подставив значения корней:

$$u_C(0) = 240 + A_1 + A_2 = 400;$$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = A_1 p_1 + A_2 p_2 = 0.$$

В результате решения данной системы уравнений получаем следующие значения постоянных интегрирования:

$$A_1 = 80 - j60 = 100 e^{-j36,9^\circ};$$

$$A_2 = 80 + j60 = 100 e^{j36,9^\circ}.$$

Таким образом, искомое напряжение

$$\begin{aligned} u_C(t) &= 240 + 100 e^{-j36,9^\circ} e^{-150t} e^{j200t} + 100 e^{j36,9^\circ} e^{-150t} e^{-200t} = \\ &= 240 + 2 \cdot 100 e^{-150t} \frac{e^{j(200t-36,9^\circ)} + e^{-j(200t-36,9^\circ)}}{2} = \end{aligned}$$

$$= 240 + 200 e^{-150t} \cos(200t - 36,9^\circ) = 240 + 200 e^{-150t} \sin(200t + 53,1^\circ) \text{ A}.$$

Найдем ток $i_C(t)$ в ветви с конденсатором, воспользовавшись компонентным уравнением,

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C \frac{du_C}{dt} = C(A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}) = \\ &= 10^{-4} (100 e^{-j36,9^\circ} 250 e^{j126,9^\circ} e^{-150t} e^{j200t} + 100 e^{j36,9^\circ} 250 e^{-j126,9^\circ} e^{-150t} e^{-j200t}) = \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot 2,5e^{-150t} \frac{e^{j(200t+90^\circ)} + e^{-j(200t+90^\circ)}}{2} = 5e^{-150t} \cos(200t + 90^\circ) \text{ A.}$$

Находим остальные токи ветвей схемы на рисунке 2.43:

$$i_3(t) = \frac{u_C}{r_3} = 1,2 + e^{-150t} \sin(200t + 53,1^\circ) \text{ A;}$$

$$\begin{aligned} i_L(t) = i_3 + i_C &= 1,2 + e^{-150t} \sin(200t + 53,1^\circ) + 5e^{-150t} \sin(200t + 180^\circ) = \\ &= 1,2 + 4,47e^{-150t} \sin(200t + 169,7^\circ) \text{ A.} \end{aligned}$$

Напряжение на индуктивности

$$\begin{aligned} u_L(t) = E - u_C - r i_L &= 300 - 240 - 200e^{-150t} \sin(200t + 53,1^\circ) - 60 - \\ &- 223,5e^{-150t} \sin(200t + 169,7^\circ) = 223,6e^{-150t} \sin(200t - 63,6^\circ) \text{ В.} \end{aligned}$$

Токи i_1 и i_2 найдем по законам Кирхгофа, применив их к исходной схеме на рисунке 2.42:

$$\begin{aligned} i_2(t) = \frac{u_C + u_L}{r_2} &= \frac{240 + 200e^{-150t} \sin(200t + 53,1^\circ) + 223,5e^{-150t} \sin(200t - 63,4^\circ)}{100} = \\ &= 2,4 + 2,24e^{-150t} \sin(200t - 10,3^\circ) \text{ A;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_1(t) = i_2 + i_L &= 2,4 + 2,24e^{-150t} \sin(200t - 10,3^\circ) + 1,2 + 4,47e^{-150t} \sin(200t + 169,7^\circ) = \\ &= 3,6 + 2,23e^{-150t} \sin(200t + 169,7^\circ) \text{ A.} \end{aligned}$$

Пример 2.8 В цепи на рисунке 2.45, в которой действует источник постоянной ЭДС $E = 200 \text{ В}$, происходит коммутация (размыкание ключа). Найти токи в ветвях и напряжения на реактивных элементах цепи во время переходного процесса. Дано: $r_1 = r_2 = 10 \text{ Ом}$, $L = 0,6 \text{ Гн}$, $C = 10^{-3} \text{ мкФ}$.

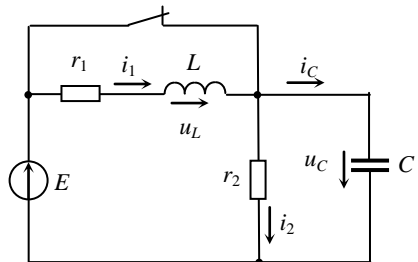


Рисунок 2.45

Решение. Определим независимые начальные условия. В схеме до коммутации в установившемся режиме ток в катушке отсутствует, а конденсатор подключен непосредственно к клеммам источника. Таким образом,

$$i_1(0) = i_1(0-) = 0;$$

$$u_C(0) = u_C(0-) = E = 200 \text{ В.}$$

Зависимые начальные условия находим по схеме замещения цепи для момента коммутации (рисунок 2.46), в которой конденсатор заменен идеальным источником ЭДС $u_C(0)$, а обесточенная катушка – разрывом цепи:

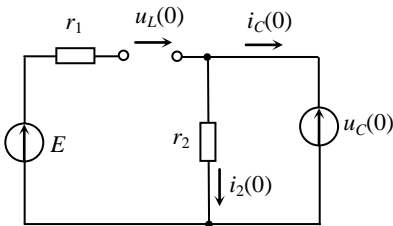


Рисунок 2.46

$$i_2(0) = -i_C(0) = \frac{u_C(0)}{r_2} = 20 \text{ А};$$

$$u_L(0) = E - u_C(0) = 0;$$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = -2 \cdot 10^4 \text{ В/с};$$

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L} = 0.$$

Опишем схему после коммутации с помощью системы уравнений, составленных по законам Кирхгофа:

$$i_1 = i_2 + i_C;$$

$$r_1 i_1 + u_L + u_C + E;$$

$$r_2 i_2 = u_C.$$

Будем искать решение относительно напряжения на емкости в виде

$$u_C(t) = u_{C\text{нр}} + u_{C\text{св}}.$$

Принужденная составляющая напряжения

$$u_{C\text{нр}} = \frac{Er_2}{r_1 + r_2} = 100 \text{ В.}$$

Составим характеристическое уравнение, приравняв нулю входное операторное сопротивление относительно разрыва ветви на схеме замещения свободного процесса, приведенной на рисунке 2.47.

$$Z(p) = \frac{(r_1 + Lp)r_2}{r_1 + r_2} + \frac{1}{Cp} = 0.$$

Подставив числовые значения параметров элементов схемы в формулу, получим характеристическое уравнение

$$6 \cdot 10^{-3} p^2 + 0,7p + 20 = 0.$$

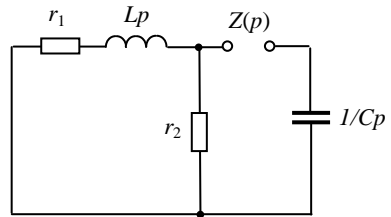


Рисунок 2.47

Решение квадратного уравнения дает два корня:

$$p_1 = -50 \text{ c}^{-1} \quad \text{и} \quad p_2 = -\frac{200}{3} = -666,7 \text{ c}^{-1}.$$

Полученные корни действительные и различные, что указывает на апериодический характер переходного процесса. Свободная составляющая напряжения на конденсаторе

$$u_{\text{Св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Выражение для $u_C(t)$ запишем в следующем виде:

$$u_C(t) = u_{\text{Спр}} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Продифференцируем по t полученное выражение:

$$\frac{du_C}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}.$$

Приведя два последних уравнения к начальным условиям, получим систему алгебраических уравнений для определения постоянных интегрирования A_1 и A_2 :

$$u_C(0) = 200 = 100 + A_1 + A_2;$$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = -2 \cdot 10^4 = p_1 A_1 + p_2 A_2.$$

Решая полученную систему уравнений, получим $A_1 = -800$; $A_2 = 900$. Искомое напряжение на конденсаторе

$$u_C(t) = 100 - 800e^{-50t} + 900e^{-666,7t} \text{ В.}$$

Находим токи в ветвях схемы:

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = 10^{-3} \left(800 \cdot 50e^{-50t} - \frac{200}{3} 900e^{-666,7t} \right) = 40e^{-50t} - 60e^{-666,7t} \text{ А;}$$

$$i_2(t) = \frac{u_C}{r_2} = 10 - 80e^{-50t} + 90e^{-666,7t} \text{ А;}$$

$$i_1(t) = i_2 + i_C = 10 - 40e^{-50t} + 30e^{-666,7t} \text{ А.}$$

Напряжение на катушке

$$u_L(t) = L \frac{di_1}{dt} = 0,6 \left(40 \cdot 50e^{-50t} - 30 \frac{200}{3} e^{-666,7t} \right) = 1200e^{-50t} - 1200e^{-666,7t} \text{ В.}$$

3 ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД

Суть операторного метода расчета переходных процессов состоит в том, что решение системы интегро-дифференциальных уравнений, описывающих переходный процесс, переносится из области функций действительной переменной t в область функций комплексной переменной $p = c + j\omega$, где операции принимают более простой вид.

Операторный метод имеет определенные преимущества перед классическим методом, т. к. не требует определения зависимых начальных условий и постоянных интегрирования. Переходные токи и напряжения по операторным схемам замещения находят сразу в виде сумм принужденных и свободных составляющих.

Пусть $f(t)$ – функция действительной переменной t , заданная в области $t > 0$ и равная нулю при $t < 0$. Переход к функции комплексной переменной осуществляется по формуле прямого преобразования Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (3.1)$$

Подынтегральную функцию $f(t)$ называют *оригиналом*, а функцию $F(p)$ – *изображением* оригинала. Между оригиналом и изображением нет равенства, а есть только взаимное соответствие:

$$f(t) \doteq F(p) \quad \text{или} \quad F(p) \doteq F(p).$$

Каждому оригиналу соответствует вполне определенное изображение, и наоборот. В таблице 3.1 приведены оригиналы простейших функций и их изображения.

Таблица 3.1

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
A	$\frac{A}{p}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\sin(\omega t + \alpha)$	$\frac{p \sin \alpha + \omega \cos \alpha}{p^2 + \omega^2}$
$e^{\mp at}$	$\frac{1}{p \pm a}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{\mp j\omega t}$	$\frac{1}{p \pm j\omega}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

Изображение производной и определенного интеграла

Для определения изображений этих функций воспользуемся формулой (3.1) и методом интегрирования по частям:

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} df(t) = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = pF(p) - f(0). \quad (3.2)$$

При нулевом начальном значении функции, т. е. при $f(0) = 0$, изображение производной оригинала будет равно произведению изображения дифференцируемой функции на оператор p : $pF(p)$.

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(t) dt \right] e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(t) dt \right] d e^{-pt} = -\frac{e^{-pt}}{p} \int_0^t f(t) dt \Big|_0^{\infty} +$$

$$+ \frac{1}{p} \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \frac{F(p)}{p}.$$
(3.3)

Изображение интеграла оригинала $\int_0^t f(t) dt$ равно изображению оригинала, деленному на оператор p .

Таким образом, дифференциальные и интегральные соотношения, связывающие токи и напряжения на элементах цепи, заменяются алгебраическими соотношениями для их изображений. Это позволяет получать эквивалентные операторные схемы замещения для элементов цепи.

Рассмотрим переход от оригиналов к изображениям элементов цепи.

Для резистора с сопротивлением r соотношение между током и напряжением определяется законом Ома:

$$u_r(t) = ri(t).$$

В силу линейности преобразования Лапласа такая же связь имеет место и для изображений:

$$U_r(p) = rI(p).$$
(3.4)

Связь тока и напряжения на катушке

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

преобразуем с использованием правила изображения производной

$$U_L(p) = LpI_L(p) - Li_L(0).$$
(3.5)

Аналогично выполняется переход связи между током и напряжением конденсатора:

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}.$$

$$I_C(p) = CpU_C(p) - Cu_C(0) \quad \text{или}$$

$$U_C(p) = \frac{1}{Cp} I_C(p) + \frac{u_C(0)}{p}. \quad (3.6)$$

В соответствии с формулами (3.4)–(3.6) в таблице 3.2 приведены операторные изображения пассивных элементов цепи: резистора, катушки и конденсатора. Операторные изображения источников ЭДС $E(p)$ или тока $J(p)$ определяются видом функции. При постоянных E и J их изображениями являются $\frac{E}{p}$ и $\frac{J}{p}$ соответственно.

Таблица 3.2

Элемент	Операторное изображение элемента	Соотношения величин
		$u_r(t) = ri(t)$ $U_r(p) = rI(p)$
		$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$ $U_L(p) = LpI_L(p) - Li_L(0)$
		$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt$ $U_C(p) = \frac{u_C(0)}{p} + \frac{I_C(p)}{Cp}$

В формулах (3.5) и (3.6) выражения Lp и $\frac{1}{Cp}$ представляют собой индуктивное и емкостное операторные сопротивления соответственно, а выражения $Li_L(0)$ и $\frac{u_C(0)}{p}$ – внутренние ЭДС, обусловленные запасенной энергией в катушке и конденсаторе к моменту коммутации.

Порядок расчета переходных процессов операторным методом

1 В схеме до коммутации определяют независимые начальные условия: токи в катушках и напряжения на конденсаторах.

2 Составляют операторную схему замещения исследуемой цепи.

3 Применением любого метода расчета находят изображения искомых величин.

4 Определяют оригиналы искомых величин.

Применение теоремы разложения

Переход от изображений к оригиналам – искомым функциям времени – осуществляется либо по таблицам изображений, либо по теореме разложения.

При расчете переходных процессов операторным методом часто изображение искомой величины имеет вид рациональной дроби:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_k p^k + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_k p^k + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (3.7)$$

где $m < n$; a_k и b_k – действительные числа. Если полиномы числителя и знаменателя не имеют общих корней, а p_1, p_2, \dots, p_n – действительные и различные корни полинома $F_2(p)$, то, разложив рациональную дробь на простые дроби, будем иметь

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_k}{p - p_k} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k}. \quad (3.8)$$

Определим коэффициенты разложения A_1, A_2, \dots, A_n . Умножая левую и правую части соотношения (3.8) на $p - p_k$, получим

$$(p - p_k) \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k} = \frac{F_1(p)(p - p_k)}{F_2(p)}.$$

Устремив p к p_k , найдем, что

$$A_k = F_1(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p - p_k}{F_2(p)}.$$

Выражение $\frac{p - p_k}{F_2(p)}$ при $p \rightarrow p_k$ представляет собой неопределенность

типа 0/0, поэтому, применив правило Лопиталья, находим:

$$A_k = F_1(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{\frac{d}{dp}(p - p_k)}{F_2'(p)} = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}.$$

Подставляя A_k в формулу (3.8), получаем разложение рациональной дроби на простые:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k},$$

откуда запишем выражение для оригинала

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (3.9)$$

Если полином $F_2(p)$ имеет один нулевой корень, т. е. $F_2(p) = pF_3(p)$, то

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (3.10)$$

Если полином $F_2(p)$ имеет n пар комплексно-сопряженных корней, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^n 2 \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} \right] \quad (3.11)$$

и при одном нулевом корне

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n 2 \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t} \right]. \quad (3.12)$$

Пример 3.1 Найти оригинал $i(t)$ по его изображению

$$I(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{6,25p^2 + 1760p + 6,25 \cdot 10^4}{p(p^2 + 250p + 10^4)}.$$

Найдем корни полинома знаменателя, приравняв его нулю.

$$F_2(p) = pF_3(p) = 0. \quad p(p^2 + 250p + 10^4) = 0.$$

$$p_0 = 0; \quad p^2 + 250p + 10^4 = 0.$$

$$p_{1,2} = -125 \pm \sqrt{125^2 - 10^4} = -125 \pm 75; \quad p_1 = -50; \quad p_2 = -200.$$

Для нахождения оригинала $i(t)$ применим формулу (3.10).

$$i(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{p_2 F_3'(p_2)} e^{p_2 t}.$$

$$F_1(0) = 6,25 \cdot 10^4; \quad F_3(0) = 10^4; \quad F_3'(p) = 2p + 250;$$

$$F_1(p_1) = 6,25(-50)^2 + 1760(-50) + 6,25 \cdot 10^4 = -9875;$$

$$F_1(p_2) = 6,25(-200)^2 + 1760(-200) + 6,25 \cdot 10^4 = -39500;$$

$$F_3'(p_1) = 2(-50) + 250 = 150; \quad F_3'(p_2) = 2(-200) + 250 = -150;$$

$$i(t) = 6,25 + 1,317e^{-50t} - 1,317e^{-200t}.$$

Пример 3.2 Найти оригинал $u(t)$ по изображению

$$U(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{8p^2 + 100p + 6250}{p(p^2 + 80p + 2500)}.$$

$$F_2(p) = pF_3(p) = 0.$$

$$p(p^2 + 80p + 2500) = 0. \quad p_0 = 0; \quad p^2 + 80p + 2500 = 0.$$

$$p^2 + 80p + 2500 = 0. \quad p_{1,2} = -40 \pm \sqrt{1600 - 2500} = -40 \pm j30;$$

$$p_1 = -40 + j30 = 50e^{j143,1^\circ}; \quad p_2 = -40 - j30 = 50e^{-j143,1^\circ}.$$

Воспользуемся формулой (2.12) для $k = 2$.

$$u(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3'(p_1)} e^{p_1 t} \right].$$

$$F_1(0) = 6250; \quad F_3(0) = 2500 \quad F_3'(p) = 2p + 80;$$

$$F_1(p_1) = 8(-40 + j30)^2 + 100(-40 - j30) + 6250 = 7850 - j16200,$$

$$F_3'(p_1) = 2(-40 + j30) + 80 = j60;$$

$$u(t) = \frac{6250}{2500} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{7850 - j16200}{(-40 + j30)j60} e^{-j40t} e^{j30t} \right] = 2,5 + 0,8e^{-40t} \cos(30t - 27,3^\circ).$$

Пример 3.3 Найти законы изменения токов в ветвях и напряжений на реактивных элементах схемы на рисунке 3.1 во время переходного процесса, вызванного замыканием ключа. Дано: $E_1 = 70$ В, $r_1 = 200$ Ом, $r_2 = 50$ Ом, $r_3 = 100$ Ом, $L = 0,25$ Гн, $C = 50$ мкФ.

Решение. Рассчитаем ток i_L в ветви с индуктивностью L операторным методом. Определим независимые начальные условия из анализа схемы до коммутации, когда ключ был разомкнут:

$$i_L(0) = i_L(0-) = \frac{E_1}{r_1 + r_2 + r_3} = 0,2 \text{ А};$$

$$u_C(0) = u_C(0-) = (r_2 + r_3)i_L(0-) = 60 \text{ В}.$$

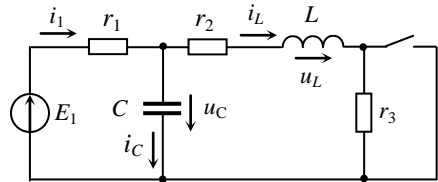


Рисунок 3.1

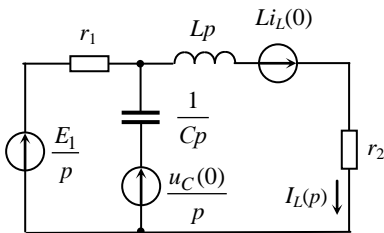


Рисунок 3.2

Операторная схема замещения изображена на рисунке 3.2. Для определения операторного тока $I_L(p)$ произведем в схеме преобразование путем замены левой и средней ветвей, соединенных параллельно,

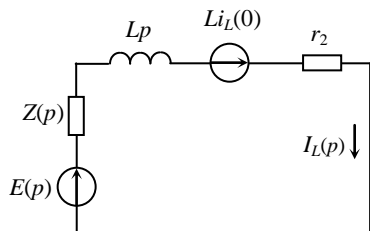


Рисунок 3.3

эквивалентной (рисунок 3.3) со следующими параметрами:

$$Z(p) = \frac{r_1 \frac{1}{Cp}}{r_1 + \frac{1}{Cp}} = \frac{r_1}{r_1 Cp + 1};$$

$$E(p) = \frac{\frac{E_1}{p r_1} + \frac{u_C(0)}{p} Cp}{\frac{1}{r_1} + Cp} = \frac{r_1 u_C(0) Cp + E_1}{p(r_1 Cp + 1)}. \quad \text{Находим операторный ток}$$

$I_L(p)$:

$$I_L(p) = \frac{E(p) + Li_L(0)}{Z(p) + Lp + r_2} = \frac{\frac{r_1 u_C(0) Cp + E_1}{p(r_1 Cp + 1)} + Li_L(0)}{\frac{r_1}{r_1 Cp + 1} + Lp + r_2} =$$

$$= \frac{\frac{r_1 u_C(0) Cp + E_1}{p(r_1 Cp + 1)} + Li_L(0)}{\frac{r_1}{r_1 Cp + 1} + Lp + r_2} = \frac{r_1 LC i_L(0) p^2 + [u_C(0) r_1 C + Li_L(0)] p + E_1}{p[r_1 LC p^2 + (r_1 r_2 C + L) p + r_1 + r_2]}.$$

После подстановки числовых значений величин и небольших преобразований получим выражение для изображения искомого тока в виде отношения двух полиномов

$$I_L(p) = \frac{0,2 p^2 + 320 p + 112000}{p(p^2 + 1200 p + 400000)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(p)}{p F_3(p)}.$$

Отношение полиномов дает правильную несократимую дробь, в силу его для нахождения оригинала $i_L(t)$ можно воспользоваться применением формулы разложения. Найдем корни полинома знаменателя, приравняв его нулю: $p F_3(p) = 0$.

$$\text{Имеем: } p_0 = 0 \text{ и } F_3(p) = p^2 + 1200 p + 400000 = 0.$$

Решение квадратного уравнения дает два комплексно-сопряженных корня:

$$p_1 = -600 + j200 = 632,46 e^{j161,6^\circ} c^{-1};$$

$$p_2 = -600 - j200 = 632,46 e^{-j161,6^\circ} c^{-1}.$$

Применим формулу разложения (3.12).

$$i_L(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3'(p_1)} e^{p_1 t} \right].$$

Определим значение функций $F_1(p)$ и $F_3(p)$ при $p = 0$:

$$F_1(0) = 112000; \quad F_3(0) = 400000.$$

Вычислим производную $F_3'(p)$ и ее значения при $p = p_1$:

$$F_3'(p) = 2p + 1200; \quad F_3'(p_1) = 2(-600 + j200) + 1200 = j400.$$

Определим $F_1(p)$ при $p = p_1$:

$$F_1(p_1) = 0,2(-600 + j200)^2 + 320(-600 + j200) + 112000 = -16000 + j16000.$$

Подставим полученные значения в приведенных соотношениях и определяем ток переходного процесса в индуктивности:

$$i_L(t) = \frac{112000}{400000} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{-16000 + j16000}{(-600 + j200) \cdot j400} e^{(-600 + j200)t} \right] =$$

$$= 0,28 + 2 \operatorname{Re} [0,8944 e^{-600t} e^{j(200t - 116,6^\circ)}] =$$

$$= 0,28 + 0,179 e^{-600t} \cos(200t - 116,6^\circ) = 0,28 + 0,179 e^{-600t} \sin(200t - 26,6^\circ) \text{ В.}$$

Остальные искомые величины рассчитаем по законам Кирхгофа и компонентным уравнениям по схеме на рисунке 3.1.

Напряжение на зажимах катушки

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 0,25 \cdot 0,179 e^{-600t} [-600 \sin(200t - 26,6^\circ) + 200 \cos(200t - 26,6^\circ)] =$$

$$= 8,95 e^{-600t} [3 \sin(200t + 153,4^\circ) + \sin(200t + 63,4^\circ)] =$$

$$= 8,95 e^{-600t} \operatorname{Im} [(3e^{j153,4^\circ} + e^{j63,4^\circ}) e^{j200t}] = 8,95 e^{-600t} \operatorname{Im} [3,16 e^{j(200t + 135^\circ)}] =$$

$$= 28,3 e^{-600t} \sin(200t + 135^\circ) \text{ В.}$$

Напряжение на конденсаторе

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= u_L + r_2 i_L = 28,3e^{-600t} \sin(200t + 135^\circ) + 56 + 35,8e^{-600t} \sin(200t - 26,6^\circ) = \\
 &= 56 + e^{-600t} \operatorname{Im}[(28,3e^{j135^\circ} + 35,8e^{-j26,6^\circ})e^{j200t}] = 56 + e^{-600t} \operatorname{Im}[(12 + j4)e^{j200t}] = \\
 &= 56 + 12,65e^{-600t} \sin(200t + 18,4^\circ) \text{ В.}
 \end{aligned}$$

Ток в ветви с источником ЭДС E_1

$$i_1(t) = \frac{E_1 - u_C(t)}{r_1} = 0,28 - 0,253e^{-600t} \sin(200t + 18,4^\circ) \text{ А.}$$

Ток в ветви с конденсатором

$$\begin{aligned}
 i_C(t) &= i_1(t) - i_L(t) = 0,28 - 0,253e^{-600t} \sin(200t + 18,4^\circ) - 0,28 - \\
 &- 0,179e^{-600t} \sin(200t - 26,6^\circ) = e^{-600t} \operatorname{Im}[-0,253e^{j18,4^\circ} - 0,179e^{-j26,6^\circ})e^{j200t}] = \\
 &= 0,4e^{-600t} \sin(200t + 180^\circ) \text{ А.}
 \end{aligned}$$

Пример 3.4 Трансформатор, схема замещения которого дана на рисунке 3.4, подключается к источнику постоянного напряжения $U = 120 \text{ В}$. Параметры элементов схемы замещения трансформатора: $L_1 = 1 \text{ Гн}$, $L_2 = 4 \text{ Гн}$, $M = 1 \text{ Гн}$, $r_1 = 3,4 \text{ Ом}$, $r_2 = 4,4 \text{ Ом}$. Найти ток переходного процесса $i_1(t)$ в первичном контуре операторным методом.

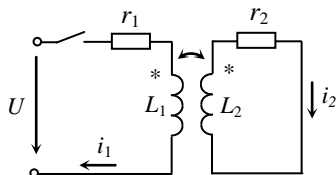


Рисунок 3.4

Решение. Для схемы после коммутации составим уравнения электрического равновесия для первичного и вторичного контуров по второму закону Кирхгофа для мгновенных величин, принимая во внимание встречное включение катушек:

$$\begin{aligned}
 r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} &= U; \\
 -M \frac{di_1}{dt} + r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} &= 0.
 \end{aligned}$$

Перейдем к операторной форме записи этих уравнений с учетом нулевых начальных условий:

$$(L_1 p + r_1)I_1(p) - MpI_2(p) = \frac{U}{p};$$

$$-MpI_1(p) + (L_2 p + r_2)I_2(p) = 0.$$

После подстановки числовых значений величин получим

$$(p + 3,4)I_1(p) - pI_2(p) = \frac{120}{p};$$

$$-pI_1(p) + (4p + 4,4)I_2(p) = 0.$$

Решим полученную алгебраическую систему уравнений относительно операторного тока $I_1(p)$ методом Крамера. Найдем определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p + 3,4 & -p \\ -p & 4p + 4,4 \end{vmatrix} = 3p^2 + 18p + 15;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{120}{p} & -p \\ 0 & 4p + 4,4 \end{vmatrix} = \frac{120(4p + 4,4)}{p}.$$

Изображение тока первичного контура

$$I_1(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{120(4p + 4,4)}{p(3p^2 + 18p + 15)} = \frac{F_1(p)}{pF_3(p)}.$$

Найдем корни уравнения $pF_3(p) = 0$.

$$p_0 = 0; \quad 3p^2 + 18p + 15 = 0.$$

$$p_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 3 \cdot 15}}{6} = \frac{-18 \pm 12}{6}; \quad p_1 = -1; \quad p_2 = -5.$$

Находим значения полинома числителя $F_2(p)$ при $p = p_1$ и $p = p_2$:

$$F_1(p_1) = 48; \quad F_1(p_2) = -1872.$$

Вычислим производную $F_3'(p)$ и ее значения при $p = p_1$ и $p = p_2$:

$$F_3'(p) = 6p + 18; \quad F_3'(p_1) = 12; \quad F_3'(p_2) = -12.$$

По формуле разложения (3.10) находим ток $i_1(t)$:

$$i_1(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{p_2 F_3'(p_2)} e^{p_2 t};$$

$$i_1(t) = \frac{528}{15} + \frac{48}{(-1)12} e^{-t} + \frac{-1872}{(-5)(-12)} e^{-5t} = 35,2 - 4e^{-t} - 31,2e^{-5t} \text{ А.}$$

Примечание – Из рассмотренного примера следует, что наличие индуктивной связи между катушками не увеличивает порядок цепи. Исследуемая цепь имеет второй порядок, т. к. состоит из двух индуктивных элементов.

Определение свободной составляющей функции операторным методом

Классический метод расчета переходных процессов, как видно из рассмотренного выше материала, в общем случае требует нахождения начальных значений функции и ее производных для определения постоянных интегрирования. Это является определенным недостатком классического метода расчета цепей второго порядка и выше.

Операторный метод имеет некоторое преимущество перед классическим, т. к. не требует определения зависимых начальных условий и постоянных интегрирования, а переходные токи и напряжения путем расчета операторных схем замещения находят сразу в виде сумм принужденной и свободной составляющих. Если цепь содержит источники постоянных или гармонических ЭДС (токов), то принужденные составляющие нетрудно рассчитать без применения преобразований Лапласа. В таком случае операторным методом можно воспользоваться лишь для расчета свободных составляющих напряжений и токов.

Свободные составляющие напряжений и токов представляют собой оригиналы изображений этих составляющих. Изображение свободных составляющих искомого величин получают при расчете операторных схем для свободных составляющих. Операторные схемы для свободных составляющих содержат только внутренние (расчетные) ЭДС $Li_{св}(0)$ и $[u_{св}(0)/p]$. Внешние источники при этом отсутствуют, но необходимо учитывать их внутренние сопротивления.

Такой метод целесообразно использовать при наличии в схеме гармонических источников напряжения или тока, т. к. такие источники добавляют по два корня в знаменатель изображения искомого функции.

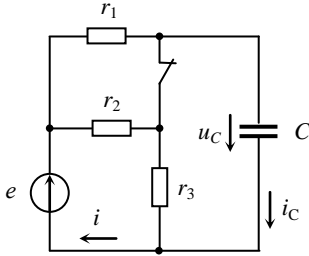


Рисунок 3.5

Пример 3.5 Схема на рисунке 3.5 питается от источника синусоидальной ЭДС $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$, где $E_m = 100$ В, $\psi = -90^\circ$, $\omega = 1000$ с⁻¹. Параметры пассивных элементов схемы: $r_1 = r_2 = 20$ Ом, $r_3 = 10$ Ом, $C = 100$ мкФ. Определить ток i_C и напряжение u_C конденсатора во время переходного процесса.

Решение. Искомые величины i_C и u_C будем, как и ранее, представлять в виде соответствующих сумм принужденных и свободных составляющих:

$$u_C(t) = u_{Cпр}(t) + u_{Cсв}(t); \quad i_C(t) = i_{Cпр}(t) + i_{Cсв}(t).$$

Определим независимое начальное условие, т. е. значение напряжения на емкости в момент коммутации. С этой целью рассчитаем докоммутационную схему методом комплексных амплитуд.

Емкостное сопротивление конденсатора

$$x_C = 1/(\omega C) = 10 \text{ Ом.}$$

Комплексная амплитуда тока в ветви с источником

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_3(-jx_C)}{r_3 - jx_C}} = 2 - j6 = 6,325 e^{-j71,6^\circ} \text{ А.}$$

Комплексная амплитуда напряжения на емкости

$$\underline{U}_{Cm} = \underline{E}_m - \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \underline{I}_m = -20 - j40 = 44,72 e^{-j116,6^\circ} \text{ В.}$$

Мгновенное напряжение на конденсаторе до коммутации

$$u_C(t) = 44,72 \sin(1000t - 116,6^\circ) \text{ В,}$$

напряжение на конденсаторе в момент коммутации

$$u_C(0) = u_C(0-) = 44,72 \sin(-116,6^\circ) = -40 \text{ В.}$$

Рассчитаем принужденные составляющие тока и напряжения на емкости в схеме после коммутации (рисунок 3.6).

$$\underline{I}_{C\text{нпр}} = \frac{\underline{E}_m}{r_1 - j\dot{\chi}_C} = 2 - j4 = 4,47e^{-j63,4^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{U}_{C\text{нпр}} = -j\dot{\chi}_C \underline{I}_{C\text{нпр}} = 44,72e^{-j153,4^\circ} \text{ В};$$

$$i_{C\text{нпр}} = 4,47 \sin(1000t - 63,4^\circ) \text{ A};$$

$$u_{C\text{нпр}} = 44,72 \sin(1000t - 153,4^\circ) \text{ В}.$$

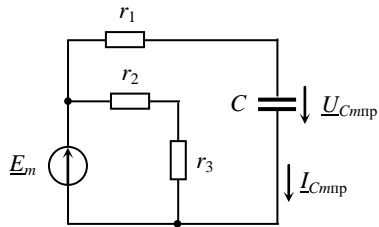


Рисунок 3.6

Найдем значение свободной составляющей напряжения на емкости в момент коммутации:

$$u_{C\text{св}}(0) = u_C(0) - u_{C\text{нпр}}(0) = -40 - 44,72 \sin(-153,4^\circ) = -20 \text{ В}.$$

Изображение свободной составляющей тока ветви с емкостью определим путем расчета операторной схемы замещения для свободного процесса на рисунке 3.7.

$$I_{C\text{св}}(p) = -\frac{u_{C\text{св}}(0)C}{p\left(r_1 + \frac{1}{Cp}\right)} = -\frac{u_{C\text{св}}(0)C}{r_1 Cp + 1} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3} p + 1} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

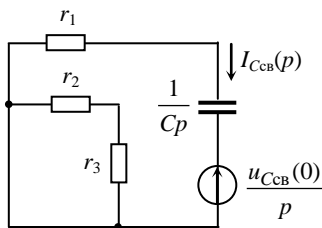


Рисунок 3.7

Полагая $F_2(p) = 0$, находим корень $p = -500 \text{ c}^{-1}$. Применяв формулу разложения (3.9), найдем оригинал свободной составляющей тока

$$i_{C\text{св}} = \frac{F_1(p)}{F_2'(p)} e^{pt} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} e^{-500t} = e^{-500t} \text{ A}.$$

Искомый ток $i_C(t) = 4,47 \sin(1000t - 63,4^\circ) + e^{-500t} \text{ A}.$

Свободная составляющая напряжения на емкости

$$u_{C\text{св}}(t) = -r_1 i_{C\text{св}} = -20e^{-500t} \text{ В}.$$

Переходное напряжение на конденсаторе

$$u_C(t) = u_{C\text{нпр}} + u_{C\text{св}} = 44,72 \sin(1000t - 153,4^\circ) - 20e^{-500t} \text{ В}.$$

4 ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ "НЕКОРРЕКТНЫХ" КОММУТАЦИЯХ

На практике иногда встречаются случаи, когда при анализе переходных процессов в некоторых схемах не соблюдаются законы коммутации. В таких схемах в результате коммутации образуются контуры, состоящие только из емкостей или емкостей и источников ЭДС (емкостные контуры). Аналогично в результате коммутации в схеме могут быть образованы сечения, состоящие только индуктивностей или из индуктивностей и источников тока (индуктивные сечения). В таких случаях приходится решать задачи с так называемыми "некорректными" коммутациями.

При решении задач с такого типа условиями необходимо пользоваться не классическими законами коммутации [$i_L(0) = i_L(0-)$ и $u_C(0) = u_C(0-)$], а принципами непрерывности суммарного потокоцепления Ψ индуктивностей в каждом из контуров и непрерывности суммарного заряда q емкостей, соединенных в каждом из узлов. Эти принципы можно рассматривать в качестве *обобщенных законов коммутации*:

$$\Psi(0) = \Psi(0-); \quad (4.1)$$

$$q(0) = q(0-). \quad (4.2)$$

Пример 4.1 Рассчитать ток переходного процесса в схеме на рисунке 4.1 после коммутации, если $E = 100$ В, $r_1 = r_2 = 50$ Ом, $L_1 = 0,2$ Гн, $L_2 = 0,8$ Гн.

Решение. До коммутации схема находилась в установившемся режиме, токи в ветвях с индуктивностями были соответственно равны:

$$i_1(0-) = \frac{E}{r_1} = 2 \text{ А}; \quad i_2(0-) = 0.$$

В результате коммутации в схеме образуется индуктивное сечение S , состоящее из последовательно соединенных индуктивностей. При этом токи катушек, изменяясь скачком, становятся равными друг другу:

$$i_1(0) = i_2(0) = i_L(0).$$

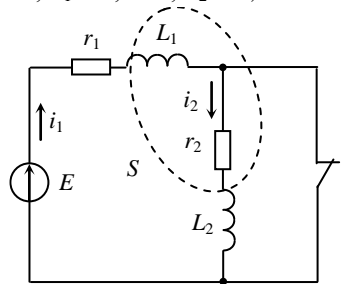


Рисунок 4.1

В соответствии с обобщенным законом коммутации (4.1) можно записать:

$$\psi_1(0-) + \psi_2(0-) = \psi_1(0) + \psi_2(0),$$

где $\psi_1 = L_1 i_1$; $\psi_2 = L_2 i_2$ – потокосцепления индуктивностей L_1 и L_2 .

$$L_1 i_1(0-) + L_2 i_2(0-) = L_1 \frac{E}{r_1} = L_1 i_1(0) + L_2 i_2(0).$$

После коммутации через катушки проходит один и тот же ток

$$i_1 = i_2 = i_L.$$

Значения токов в момент коммутации $i_1(0) = i_2(0) = i_L(0)$ определяются из условия:

$$(L_1 + L_2) i_L(0) = L_1 \frac{E}{r_1},$$

откуда

$$i_L(0) = \frac{L_1 E}{r_1 (L_1 + L_2)} = 0,4 \text{ А.}$$

Из полученного значения тока $i_L(0)$ следует, что в момент коммутации токи в катушках изменяются скачком: в ветви с индуктивностью L_1 уменьшается с 2 до 0,4 А, а в ветви с индуктивностью L_2 увеличивается с 0 до 0,4 А.

Составим дифференциальное уравнение для переходного процесса относительно тока в цепи

$$(L_1 + L_2) \frac{di_L}{dt} + (r_1 + r_2) i_L = E,$$

которое после подстановки числовых значений приобретает следующий вид:

$$\frac{di_L}{dt} + 100 i_L = 100.$$

Характеристическое уравнение $p + 100 = 0$ имеет только один корень $p = -100 \text{ с}^{-1}$, что позволяет записать решение дифференциального уравнения следующим образом:

$$i_L(t) = i_{L\text{пр}} + i_{L\text{св}} = \frac{E}{r_1 + r_2} + A e^{pt} = 1 + A e^{pt}.$$

Постоянную интегрирования найдем из начальных условий

$$i_L(0) = 0,4 = 1 + A, \text{ откуда } A = -0,6.$$

Ток переходного процесса $i_L(t) = 1 - 0,6e^{-100t}$ А.

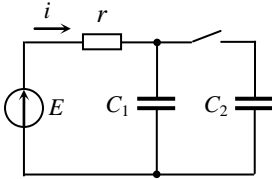


Рисунок 4.2

Пример 4.2 Рассчитать ток $i(t)$ переходного процесса в схеме на рисунке 4.2 после коммутации, если $E = 100$ В, $r = 200$ Ом, $C_1 = 0,5$ мкФ, $C_2 = 2,0$ мкФ.

Решение. До коммутации $u_{C1}(0-) = E$, а $u_{C2}(0-) = 0$. В момент коммутации напряжения на обеих емкостях становятся равными, т. е. $u_{C1}(0) = u_{C2}(0)$. После коммутации в цепи

образовался емкостный контур $C_1 - C_2$. Применим для рассматриваемой схемы принцип непрерывности заряда, который имеет следующий вид:

$$q_1(0-) + q_2(0-) = q_1(0) + q_2(0),$$

где $q_1 = C_1 u_{C1}$, $q_2 = C_2 u_{C2}$ – заряды емкостей C_1 и C_2 .

Из условия непрерывности заряда получим начальные значения напряжений на емкостях:

$$u_{C1}(0) = u_{C2}(0) = u_C(0) = \frac{EC_1}{C_1 + C_2} = 20 \text{ В.}$$

В момент коммутации напряжения на емкостных элементах скачкообразно изменяются: напряжение на емкости C_1 уменьшается со 100 до 20 В, а напряжение на емкости C_2 увеличивается с нуля до 20 В.

Дифференциальное уравнение переходного процесса относительно напряжения на емкости принимает следующий вид:

$$r(C_1 + C_2) \frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

Характеристическое уравнение $r(C_1 + C_2)p + 1 = 0$ имеет один корень

$$p = -\frac{1}{r(C_1 + C_2)} = -2000 \text{ с}^{-1}.$$

Напряжения $u_{C1}(t) = u_{C2}(t) = u_C(t) = u_{Cпр} + Ae^{pt}$, где $u_{Cпр} = E = 100$ В.

Найдем постоянную интегрирования A по начальному условию

$$u_C(0) = 20 = 100 + A, \text{ откуда } A = -80.$$

Получили $u_C(t) = 100 - 80e^{-2000t}$ В.

Ток $i(t)$ вычислим по второму закону Кирхгофа:

$$i(t) = \frac{E - u_C}{r} = 0,4e^{-2000t} \text{ А.}$$

В обоих рассмотренных выше примерах для расчета переходных процессов в цепях с "некорректными" коммутациями был применен классический метод, в котором требовалось определять постоянные интегрирования, путем применения обобщенных законов коммутации, т. к. законы коммутации в классическом виде нарушаются.

Для решения задач подобного вида целесообразно использовать операторный метод, который позволяет рассчитывать переходные процессы в цепях с "некорректными" коммутациями по общей схеме с использованием начальных значений токов $i_L(0-)$ в индуктивностях и

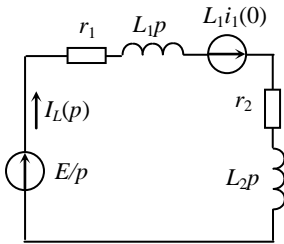


Рисунок 4.3

напряжений $u_C(0-)$ на емкостях, определенных в схемах до коммутации. При этом принципы непрерывности потокоцеплений катушек и зарядов конденсаторов выполняются автоматически.

Рассчитаем искомые переходные величины примеров 4.1 и 4.2 операторным методом. Воспользуемся начальными значениями токов в катушках индуктивности и напряжений на конденсаторах, найденными в схемах до коммутации. Операторная схема примера 4.1

приведена на рисунке 4.3. Находим изображение тока $I_L(p)$:

$$I_L(p) = \frac{E/p + L_1 i_1(0)}{r_1 + r_2 + (L_1 + L_2)p} = \frac{L_1 i_1(0)p + E}{p[(L_1 + L_2)p + r_1 + r_2]} = \frac{0,4p + 100}{p(p + 100)} = \frac{F_1(p)}{pF_3(p)}.$$

Корни полинома знаменателя: $p_0 = 0$; $p_1 = -\frac{r_1 + r_2}{L_1 + L_2} = -100 \text{ с}^{-1}$.

Переходный ток $i_L(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3} e^{p_1 t} = 1 - 0,6e^{-100t}$ А.

Операторная схема примера 4.2 приведена на рисунке 4.4. Произведем в ней эквивалентное преобразование, заменив параллельно соединенные ветви с емкостями эквивалентной (рисунок 4.5) с параметрами:

$$E(p) = \frac{EC_1}{(C_1 + C_2)p}; \quad Z(p) = \frac{1}{(C_1 + C_2)p}.$$

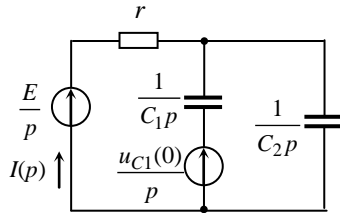


Рисунок 4.4

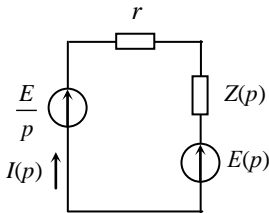


Рисунок 4.5

Найдем операторное изображение тока:

$$I(p) = \frac{E/p - E(p)}{r + Z(p)} = \frac{80}{200p + 400000}.$$

Оригинал тока

$$i(t) = 0,4e^{-2000t}$$
 А.

Примечание – Из приведенных выше примеров следует, что наличие в послекоммутационной цепи емкостных контуров и индуктивных сечений уменьшает число корней характеристического уравнения на число указанных контуров и сечений.

5 ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Классический и операторный методы анализа переходных процессов весьма удобны при внешних воздействиях достаточно простого вида, но мало пригодны, если внешнее воздействие меняется во времени по сложному закону.

Переходный процесс в цепи может быть вызван при воздействии на нее одиночных импульсов или нескольких импульсов, следующих с некоторым периодом повторения.

Импульсом называют электрическую величину (напряжение или ток), которая в течение короткого промежутка времени, соизмеримого с длительностью переходного процесса в цепи, изменяется от одного

постоянного (начального) значения до некоторого другого постоянного значения.

Форма импульсов (рисунок 5.1) может быть достаточно простой: прямоугольной (а), трапецидальной (б), треугольной (в), экспоненциальной (г) и другой.

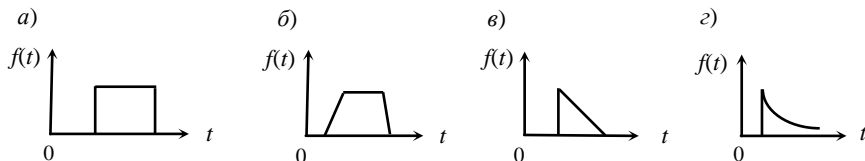


Рисунок 5.1

Импульсы могут иметь и достаточно сложную форму, например, в виде кусочно-непрерывной функции времени с разрывами первого рода.

Для анализа переходных процессов в электрических цепях при сложных формах внешнего воздействия целесообразно использовать принцип суперпозиции (наложения), когда сложный сигнал может быть разложен на элементарные составляющие, для которых реакция цепи легко находится. Реакцию цепи на воздействие импульса сложной формы находят в виде суммы реакций на каждую из элементарных составляющих.

В качестве элементарных сигналов используют единичную функцию Хевисайда $1(t)$.

5.1 Единичная функция и переходная характеристика

Единичным ступенчатым сигналом, единичной функцией, или функцией Хевисайда, называют функцию, удовлетворяющую условию

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

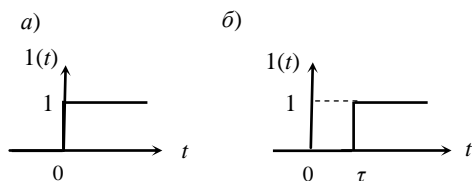


Рисунок 5.2

Единичная функция графически представлена на рисунке 5.2, а.

С помощью единичной функции можно представить любой в функции времени сигнал, воздействие которого на электрическую цепь начинается в некоторый

момент времени. Любая функция времени, умноженная на $1(t)$, становится равной 0 при $t < 0$ и не изменяет своего значения при $t > 0$.

Если скачок от 0 до 1 происходит в некоторый момент времени $t = \tau$ (рисунок 5.2, б), то единичную функцию записывают так: $1(t - \tau)$, где τ – время запаздывания.

С помощью сложения двух ступенчатых функций можно получить прямоугольный импульс длительностью τ (рисунок 5.3):

$$u(t) = U \cdot 1(t) - U \cdot 1(t - \tau).$$

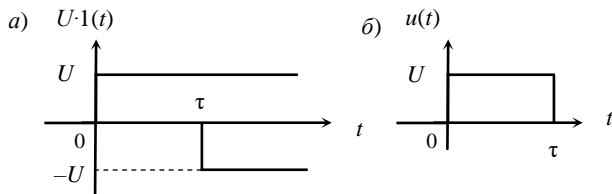


Рисунок 5.3

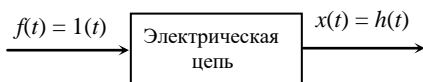


Рисунок 5.4

Реакцию $x(t)$ цепи с нулевыми начальными условиями на единичную функцию (единичный скачок) $f(t) = 1(t)$ называют *переходной функцией*, или *переходной характеристикой*, и

обозначают $h(t)$ (рисунок 5.4).

Переходная характеристика численно равна выходной величине, когда входная изменяется по закону единичного скачка.

Переходная характеристика имеет несколько разновидностей в зависимости от сочетания входных и выходных величин.

Если на вход цепи подается единичный скачок напряжения, то переходная характеристика может быть либо переходной проводимостью $u(t)$ (при определении тока какой-либо ветви), либо переходной функцией напряжения – переходным безразмерным коэффициентом передачи $K_u(t)$ по напряжению (при определении напряжения ветви).

При воздействии скачка тока и реакции в виде напряжения переходная характеристика является переходным сопротивлением $z(t)$. Если же при этом выходная величина – ток, то переходная характеристика безразмерна и является коэффициентом передачи $K_i(t)$ по току.

Пример 5.1 Определить переходные функции по входному току $i_{i1}(t)$ и напряжению $h_{i2}(t)$ на выходе схемы на рисунке 5.5, если даны параметры ее элементов: $r_1 = 10$ Ом, $r_2 = 40$ Ом, $C = 50$ мкФ.

Решение. Пусть на вход схемы подается постоянное напряжение $u_1 = 1$ В. Определим начальные значения искомых величин, принимая во внимание, что незаряженная емкость в момент коммутации представляет собой короткозамкнутый участок:

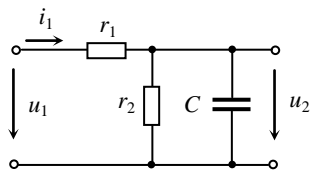


Рисунок 5.5

$$i_1(0) = \frac{1}{r_1} = 0,1 \text{ А}; \quad u_2(0) = 0.$$

Расчет искомых переходных величин проведем классическим методом. Найдем переходный ток $i_1(t)$:

$$i_1(t) = i_{1\text{пр}} + i_{1\text{св}} = \frac{1}{r_1 + r_2} + Ae^{pt} = 0,02 + Ae^{pt}.$$

Корень характеристического уравнения найдем через входное операторное сопротивление:

$$Z(p) = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{1}{Cp} = 0; \quad p = -2500 \text{ с}^{-1}.$$

При $t = 0$ $i_1(0) = \frac{1}{r_1} = 0,1 = 0,02 + A$, откуда $A = 0,08$.

Получаем

$$i_1(t) = 0,02 + 0,08e^{-2500t} \text{ А}.$$

Переходная функция входного тока $h_{i1}(t)$ цепи или переходная проводимость $y(t)$ численно равны переходному току $i_1(t)$:

$$h_{i1}(t) = y(t) = 0,02 + 0,08e^{-2500t} \text{ См}.$$

Напряжение $u_2(t)$ найдем по второму закону Кирхгофа:

$$u_2(t) = u_1 - r_1 i_1 = 1 - 0,2 - 0,8e^{-2500t} = 0,8 - 0,8e^{-2500t} \text{ В.}$$

Переходная характеристика выходного напряжения $h_{u_2}(t)$, равная коэффициенту передачи по напряжению $K_u(t)$, является безразмерной величиной и численно равна переходному напряжению $u_2(t)$:

$$h_{u_2}(t) = K_u(t) = 0,8 - 0,8e^{-2500t}.$$

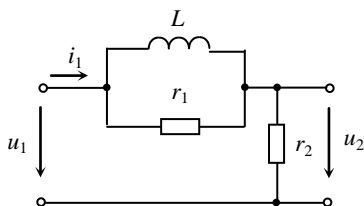


Рисунок 5.6

Пример 5.2 Определить переходные функции по входному току $h_{i_1}(t)$ и напряжению $h_{u_2}(t)$ схемы на рисунке 5.6. Параметры элементов схемы:

$$r_1 = 15 \text{ Ом}, r_2 = 10 \text{ Ом}, L = 0,1 \text{ Гн.}$$

Решение. Определение искомых функций выполним по такому же алгоритму, как и в предыдущем примере. Пусть напряжение, подаваемое на вход схемы, $u_1 = 1 \text{ В}$.

Обесточенная катушка в момент коммутации представляет собой разрыв схемы, откуда начальные значения величин в момент коммутации:

$$i_1(0) = i_2(t) = \frac{1}{r_1 + r_2} = 0,04 \text{ А;}$$

$$u_2(0) = r_2 i_1(0) = 0,4 \text{ В.}$$

Корень характеристического уравнения найдем через входное операторное сопротивление:

$$Z(p) = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + Lp = 0; \quad p = -60 \text{ с}^{-1}.$$

Входной ток переходного процесса

$$i_1(t) = i_{\text{нпр}} + i_{\text{св}} = \frac{1}{r_2} + Ae^{pt} = 0,1 + Ae^{pt}.$$

При $t = 0$ $i_1(0) = 0,04 = 0,1 + A$, откуда $A = -0,06$.

$$i_1(t) = 0,1 - 0,06e^{-60t} \text{ А.}$$

Переходная функция входного тока

$$h_{i1}(t) = 0,1 - 0,06e^{-60t} \text{ См.}$$

Напряжение на сопротивлении r_2

$$u_2(t) = u_{2\text{пр}} + u_{2\text{св}} = 1 + Be^{pt}.$$

Постоянную интегрирования B определим из начальных условий:

$$u_2(0) = 0,4 = 1 + B, \text{ откуда } B = -0,6.$$

Напряжение $u_2(t)$ во время переходного процесса изменяется по закону:

$$u_2(t) = 1 - 0,6e^{-60t} \text{ В.}$$

Переходная функция напряжения на сопротивлении r_2

$$h_{u2}(t) = 1 - 0,6e^{-60t}.$$

Пример 5.3 Определить переходные характеристики входного $h_{u1}(t)$ и выходного $h_{u2}(t)$ напряжений цепи на рисунке 5.7 при коммутации цепи на источник постоянного тока $J = 1 \text{ А}$. Параметры элементов цепи: $r_1 = 4 \text{ Ом}$, $r_2 = 6 \text{ Ом}$, $r_3 = 4 \text{ Ом}$, $C = 25 \text{ мкФ}$.

Решение. Определим искомые функции путем расчета переходного процесса в цепи классическим методом.

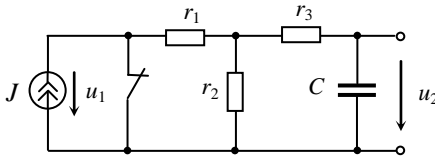


Рисунок 5.7

Вычисляем начальные значения напряжений на входе $u_1(0)$ и выходе $u_2(0)$ цепи, принимая во внимание, что незаряженный конденсатор в момент коммутации равносителен короткозамкнутому участку:

$$u_1(0) = \left(r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3} \right) 1(t) = 6,4 \text{ В}; \quad u_2(0) = 0.$$

$$u_1(t) = u_{1np} + u_{1св} = (r_1 + r_2)I(t) + A^{pt} = 10 + A^{pt};$$

$$u_2(t) = u_{2np} + u_{2св} = r_2I(t) + B^{pt} = 6 + B^{pt}.$$

Корень характеристического уравнения определим методом входного сопротивления по схеме на рисунке 5.8.

$$Z(p) = \frac{1}{Cp} + r_2 + r_3 = 0;$$

$$p = -\frac{1}{(r_2 + r_3)C} = -4000 \text{ c}^{-1}.$$

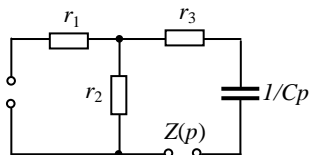


Рисунок 5.8

Постоянные интегрирования A и B находим, приведя выражения для $u_1(t)$ и $u_2(t)$ к начальным условиям:

$$u_1(0) = 6,4 = 10 + A; \quad A = -3,6; \quad u_2(0) = 0 = 6 + B; \quad B = -6.$$

Переходные напряжения:

$$u_1(t) = 10 - 3,6e^{-4000t} \text{ В}; \quad u_2(t) = 6 - 6e^{-4000t} \text{ В}.$$

Искомые переходные характеристики:

$$h_{u1}(t) = 10 - 3,6e^{-4000t} \text{ Ом};$$

$$h_{u2}(t) = 6 - 6e^{-4000t} \text{ Ом}.$$

5.2 Интеграл Дюамеля

Пусть входное воздействие задано непрерывной функцией $f(t)$ при $t > 0$ (рисунок 5.9). Заменяем кривую $f(t)$ ступенчатой функцией с n элементарными прямоугольными импульсами следующими друг за другом. При $t = 0$ первый скачок равен $f(0)$, а последующие скачки через равные интервалы времени Δt равны Δf_i . Элементарные скачки входного воздействия

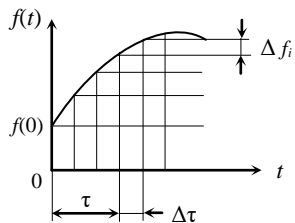


Рисунок 5.9

включаются на интервале от $t = 0$ до момента t , для которого определяется реакция цепи.

Реакцию цепи на первую ступеньку $f(0)$ можно определить в виде произведения $f(0)h(t)$. Реакция цепи на вторую ступеньку равна $\Delta f_1 h(t - \Delta\tau)$, где Δf_1 – высота второй ступеньки. Для i -й ступеньки реакция цепи будет равна $\Delta f_i h(t - i\Delta\tau)$. На основании принципа суперпозиции можно утверждать, что общая реакция на ступенчатое воздействие равна сумме выходных сигналов, обусловленных действием каждого ступенчатого сигнала.

Следовательно, для рассматриваемого момента времени $t = n\Delta\tau$ реакция цепи

$$x(t) \approx f(0)h(t) + \sum_{i=1}^n \Delta f_i h(t - i\Delta\tau) = f(0)h(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta f_i}{\Delta\tau} h(t - i\Delta\tau)\Delta\tau.$$

При уменьшении длительности интервалов $\Delta\tau$ до бесконечно малых, т. е. при $\Delta\tau \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta\tau} = \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=\tau} = f'(\tau)$$

и ступенчатая функция переходит в заданную кривую $f(t)$. Соответственно получим выражение для искомой реакции цепи $x(t)$:

$$x(t) = f(0)h(t) + \int_0^t f'(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (5.5)$$

Полученная формула (5.5) называется *интегралом Дюамеля*.

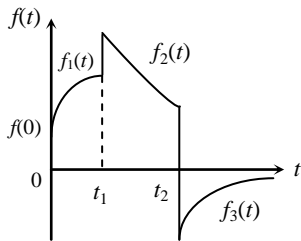


Рисунок 5.10

Если функция воздействия $f(t)$ имеет различные выражения на разных интервалах времени, а также имеет разрывы непрерывности первого рода (рисунок 5.10), то интервал интегрирования разбивают на отдельные участки, а реакцию цепи, рассчитываемую интегралом Дюамеля, записывают для отдельных интервалов времени.

На рисунке 5.10 дана воздействующая

функция в виде следующих выражений:

$$f(t) = f_1(t) \quad \text{при} \quad 0 \leq t < t_1;$$

$$f(t) = f_2(t) \quad \text{при} \quad t_1 \leq t < t_2;$$

$$f(t) = f_3(t) \quad \text{при} \quad t_2 \leq t < \infty.$$

Реакцию цепи на отдельных участках записывают следующим образом.

1 В первом интервале времени от 0 до t_1 , не включая скачок в момент t_1 ,

$$x(t) = f(0) + \int_0^t f_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

2 Во втором интервале времени от t_1 до t_2 , не включая скачок в момент t_2 ,

$$x(t) = f(0) + \int_0^{t_1} f_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + [f_2(t_1) - f_1(t_1)]h(t-t_1) + \int_{t_1}^t f_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

3 В третьем временном интервале от t_2 до ∞

$$x(t) = f(0) + \int_0^{t_1} f_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + [f_2(t_1) - f_1(t_1)]h(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau + \\ + [f_3(t_2) - f_2(t_2)]h(t-t_2) + \int_{t_2}^t f_3'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Порядок расчета переходных процессов методом интеграла Дюамеля

1 Определяют любым способом переходную функцию $h(t)$ цепи или некоторого ее участка, а затем записывают выражение для переходной функции с учетом запаздывания $h(t-\tau)$.

2 Вычисляют производную по времени t от входного воздействия (источника напряжения или тока) и заменяют переменную t на τ .

3 Полученные функции подставляют в формулу интеграла Дюамеля. При этом учитывают возможные скачки входного сигнала (напряжения или тока) на интервалах изменения этого сигнала.

Пример 5.4 На вход цепи, схема которой приведена на рисунке 5.11, *а*, подается одиночный импульс напряжения $u_1(t)$, форма которого дана на рисунке 5.11, *б*. Определить ток $i_1(t)$ переходного процесса в ветви с резистором r_1 . Параметры элементов схемы и импульса напряжения: $r_1 = r_2 = 50$ Ом, $L = 0,1$ Гн, $U_0 = 10$ В.

Решение. Для решения задачи определим сначала переходную функцию по току $h_i(t)$ ветви с резистором r_1 . С этой целью рассчитаем переходный ток $i_1(t)$ классическим методом при коммутации цепи на источник постоянного напряжения в 1 В:

$$i_1(t) = i_{1\text{нр}} + i_{1\text{св}} = 0 + A e^{pt}.$$

В схеме с нулевыми начальными условиями катушка в момент коммутации представляет собой разрыв. В момент коммутации ток

$$i_1(0) = \frac{1}{r_1 + r_2} = 0,01 \text{ А,} \quad \text{и постоянная}$$

интегрирования $A = -0,01$. Записав входное сопротивление относительно точек разрыва ветви с катушкой и приравняв его нулю, получим характеристическое уравнение и найдем его корень:

$$Z(p) = Lp + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 0; \quad p = -125 \text{ с}^{-1}.$$

Получим выражение для переходного тока $i_1(t)$:

$$i_1(t) = 0,01^{-125t} \text{ А.}$$

Переходная функция тока численно равна переходному току $i_1(t)$ и имеет размерность проводимости

$$h_i(t) = 0,01^{-125t} \text{ См.}$$

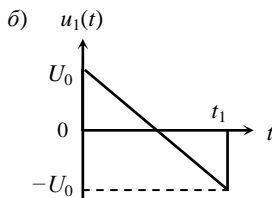
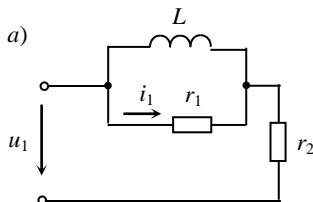


Рисунок 5.11

С учетом запаздывания на время τ $h_i(t-\tau) = 0,01^{-125(t-\tau)}$ См.

Применим формулу (5.5) интеграла Дюамеля для первого интервала времени в диапазоне $0 \leq t < t_1$. Запишем уравнение входного сигнала и его производной по t для этого временного диапазона:

$$u_1(t) = -\frac{2U_0}{t_1}t + U_0, \quad u_1'(t) = -\frac{2U_0}{t_1} = -10^4 \text{ В/с.}$$

При замене переменной t на τ имеем $u_1'(\tau) = -10^4$ В/с.

Находим переходный ток $i_1(t)$:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= u_1(0)h_i(t) + \int_0^t u_1'(\tau)h_i(t-\tau)d\tau = 10 \cdot 0,01e^{-125t} + \int_0^t -10^4 \cdot 0,01e^{-125(t-\tau)}d\tau = \\ &= 0,1e^{-125t} - 100 \int_0^t e^{-125t} e^{125\tau} d\tau = 0,1e^{-125t} - 100e^{-125t} \frac{1}{125} e^{125\tau} \Big|_0^t = \\ &= 0,1e^{-125t} - 0,8e^{-125t}(e^{125t} - 1) = 0,1e^{-125t} - 0,8 + 0,8e^{-125t} = -0,8 + 0,9e^{-125t} \text{ А.} \end{aligned}$$

Для второго временного интервала $t_1 \leq t < \infty$ переходный ток будем определять по формуле

$$\begin{aligned} i_1(t) &= u_1(0)h_i(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h_i(t-\tau)d\tau + [0 - u_1(t_1)]h_i(t-t_1) = 0,1e^{-125t} - \\ &- 100e^{-125t} \int_0^{t_1} e^{125\tau} d\tau + 0,1e^{-125(t-t_1)} = 0,1e^{-125t} - 100e^{-125t} \frac{1}{125} e^{125\tau} \Big|_0^{t_1} + \\ &+ 0,1e^{-125(t-t_1)} = 0,1e^{-125t} - 0,8e^{-125t}(e^{125t_1} - 1) + 0,1e^{-125(t-t_1)} = \\ &= 0,1e^{-125t} - 0,8e^{-125(t-t_1)} + 0,8e^{-125t} + 0,1e^{-125(t-t_1)} = 0,9e^{-125t} - 0,7e^{-125(t-t_1)} \text{ А.} \end{aligned}$$

Пример 5.5 На вход четырехполюсника на рисунке 5.12, *a* подается одиночный импульс напряжения $u_1(t)$, форма которого изображена на рисунке 5.12, *б*. Параметры элементов схемы и импульса: $r_1 = 5$ Ом, $r_2 = 20$ Ом, $C = 500$ мкФ, $U_0 = 20$ В, $t_1 = 4$ мс, $t_2 = 8$ мс. Определить напряжение $u_2(t)$ на выходе четырехполюсника.

Решение. Определим переходную функцию для выходного напряжения $u_2(t)$. С этой целью найдем напряжение на выходе четырехполюсника во время переходного процесса, если на его вход будет подано постоянное напряжение в 1 вольт. Расчет выполним операторным методом.

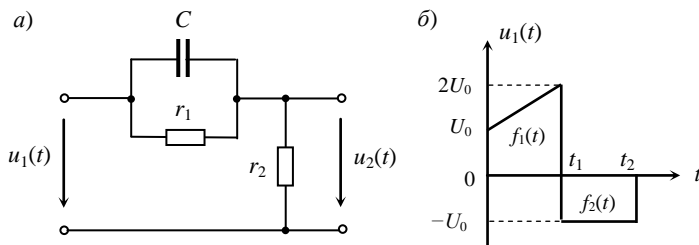


Рисунок 5.12

На рисунке 5.13 приведена операторная схема замещения, где операторное изображение входного напряжения $U_1(p) = 1/p$. Изображение выходного напряжения $U_2(p)$ найдем по закону Ома:

$$U_2(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} r_2, \quad \text{где } Z(p) = \frac{r_1 + 1/(Cp)}{r_1 + 1/(Cp)} + r_2 = \frac{r_1 r_2 Cp + r_1 + r_2}{r_1 Cp + 1}.$$

$$\text{Таким образом, } U_2(p) = \frac{r_1 r_2 Cp + r_2}{p(r_1 r_2 Cp + r_1 + r_2)} = \frac{0,05 p + 20}{p(0,05 p + 25)} = \frac{F_1(p)}{p F_3(p)}.$$

Определим корни знаменателя $p F_3(p) = 0$: $p_0 = 0$; $p_1 = -500 \text{ c}^{-1}$.

Применим формулу разложения (3.10) и найдем оригинал:

$$u_2(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3(p_1)} e^{p_1 t} = \frac{20}{25} + \frac{-5}{(-500)0,05} e^{-500t} = 0,8 + 0,2 e^{-500t} \text{ В.}$$

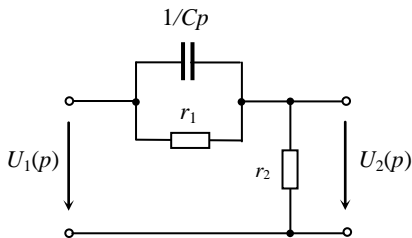


Рисунок 5.13

Получили формулы для переходной функции по напряжению:

$$h_u(t) = 0,8 + 0,2e^{-500t};$$

$$h_u(t - \tau) = 0,8 + 0,2e^{-500(t-\tau)}.$$

Воздействующее на вход схемы напряжение $u_1(t)$ имеет разрывы непрерывности первого рода и характеризуется разными аналитическими зависимостями на разных интервалах времени.

Для первого интервала времени $0 \leq t < t_1$ входной импульс представлен выражением $u_1(t) = f_1(t) = \frac{U_0}{t_1}t + U_0 = 5 \cdot 10^3 t + 20$ В. Находим

производную $f_1'(t)$ и, заменяя переменную t на τ , получаем $f_1'(\tau) = 5 \cdot 10^3$. Напряжение $u_2(t)$ в этом интервале времени без учета скачка при $t = t_1$ находим по формуле интеграла Дюамеля (5.5):

$$u_2(t) = f_1(0)h_u(t) + \int_0^t f_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau = 20(0,8 + 0,2e^{-500t}) +$$

$$+ \int_0^t 5000(0,8 + 0,2e^{-500t}e^{500\tau})d\tau = 16 + 4e^{-500t} + 4000t + 1000e^{-500t} \frac{1}{500} e^{500\tau} \Big|_0^t =$$

$$= 16 + 4e^{-500t} + 4000t + 2e^{-500t}(e^{500t} - 1) = 18 + 4000t + 2e^{-500t}$$
 В.

Запишем решение для второго временного интервала $t_1 \leq t < t_2$, в котором входное напряжение постоянно: $u_1(t) = f_2(t) = -U_0$. Скачок напряжения при $t = t_2$ не включается в этот интервал. При этом учтем, что $f_2'(\tau) = 0$.

$$u_2(t) = f_1(0)h_u(t) + \int_0^{t_1} f_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + [f_2(t_1) - f_1(t_1)]h_u(t-t_1) =$$

$$= 20(0,8 + 0,2e^{-500t}) + \int_0^{t_1} 5000(0,8 + 0,2e^{-500\tau} e^{500\tau})d\tau - 60[0,8 + 0,2e^{-500(t-t_1)}] =$$

$$= -16 - 2e^{-500t} - 10e^{-500(t-t_1)} \text{ В.}$$

В третьем интервале времени $t_2 \leq t < \infty$

$$u_2(t) = f_1(0)h_u(t) + \int_0^{t_1} f_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + [f_2(t_1) - f_1(t_1)]h_u(t-t_1) +$$

$$+ [0 - f_2(t_2)]h_u(t-t_2) = -16 - 2e^{-500t} -$$

$$- 10e^{-500(t-t_1)} + 20[0,8 + 0,2e^{-500(t-t_2)}] =$$

$$= -2e^{-500t} - 10e^{-500(t-t_1)} + 4e^{-500(t-t_2)} \text{ В.}$$

График изменения напряжения $u_2(t)$ приведен на рисунке 5.14.

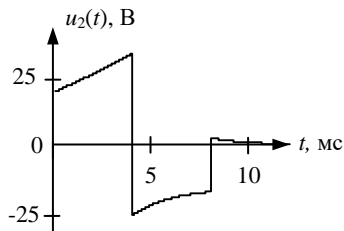


Рисунок 5.14

5.3 Приведение схемы к нулевым начальным условиям

Расчет переходных процессов применением интеграла Дюамеля выполняется для цепей с нулевыми независимыми начальными условиями, т. е. для схем с обесточенными катушками и незаряженными конденсаторами. При расчете переходных процессов операторным методом ненулевые начальные условия усложняют расчетные операторные схемы, т. к. наряду с внешними источниками в них появляются так называемые внутренние, обусловленные накопительными элементами. В ряде случаев для устранения этих неудобств анализируемую цепь целесообразно приводить к нулевым начальным условиям.

Рассмотрим возможность применения этого приема для анализа переходных процессов как при замыкании, так и при размыкании ключа в одной из пассивных ветвей сложной цепи с ненулевыми начальными условиями.

Замыкание ключа. На рисунке 5.15, *a* активный четырехполюсник, к левой паре зажимов которого подключена пассивная ветвь *m*. К правой паре зажимов в момент времени $t = 0$ подключается пассивная ветвь *k*. Определим напряжение $u_x(t)$ на разомкнутых зажимах ключа (в режиме

холостого хода). Напряжение $u_x(t)$ – это напряжение на зажимах ключа до его замыкания, обусловленное всеми источниками активного четырехполюсника. После коммутации включим в ветвь k два источника ЭДС $e(t)$, равные $u_x(t)$ и противоположно направленные (рисунок 5.15, б). Токи в ветвях послекоммутационной схемы при этом не изменятся, т. к. ЭДС компенсируют друг друга.

Применив метод наложения, придем к двум схемам на рисунках 5.15, в и г. В схеме на рисунке 5.15, в токи ветвей те же, что и в исходной схеме. Поэтому ток в ветви ключа после его замыкания остается равным нулю ($i_k' = 0$), а значит, для всей схемы в целом это будет режим до коммутации.

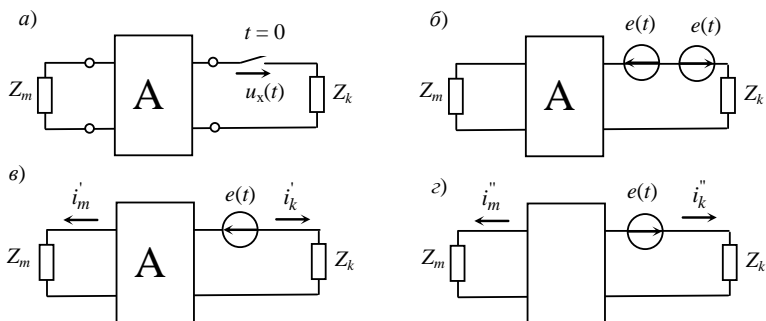


Рисунок 5.15

В схеме на рисунке 5.15, г включается только один источник ЭДС $e(t)$ и рассчитывается переходный процесс при нулевых начальных условиях. Таким образом, переходный ток в ветви k $i_k(t) = i_k''$.

Ток в ветви m во время переходного процесса будет равен сумме двух токов: тока i_m' , существовавшего в этой ветви до коммутации, и тока i_m'' , который возникает в этой ветви после подключения источника ЭДС $e(t)$ к пассивному четырехполюснику.

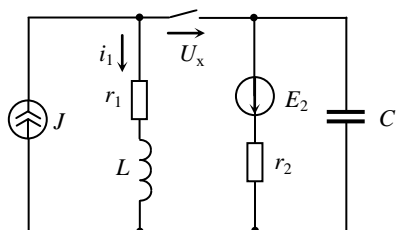


Рисунок 5.16

Пример 5.6 Определить закон изменения тока $i_1(t)$ в схеме на рисунке 5.16 во время переходного процесса. Параметры элементов схемы: $J = 1$ А, $E_2 = 40$ В, $L = 20$ мГн, $C = 25$ мкФ, $r_1 = 80$ Ом, $r_2 = 40$ Ом.

Решение. Решим пример путем приведения схемы к нулевым независимым начальным условиям. Искомый ток $i_1(t)$ найдем методом наложения в виде алгебраической суммы частичных токов:

$$i(t) = i'(t) + i''(t),$$

где $i'(t)$ – ток в установившемся докоммутационном режиме в исходной схеме с разомкнутым ключом (рисунок 5.17, а);

$i''(t)$ – ток, вызванный подключением источника ЭДС E к пассивной схеме на рисунке 5.17, б.

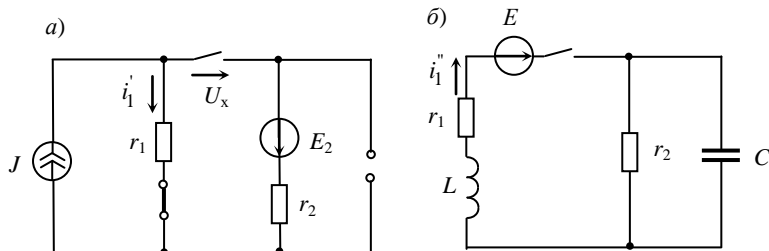


Рисунок 5.17

В схеме на рисунке 5.17, а действуют источники постоянного тока J и постоянной ЭДС E_2 , поэтому в установившемся режиме катушка заменена короткой, а конденсатор – разрывом. Частичный ток $i_1' = J = 1$ А. Напряжение U_x на разомкнутых зажимах ключа находим по второму закону Кирхгофа:

$$U_x = r_1 i_1' + E_2 = 120 \text{ В.}$$

В схеме на рисунке 5.17, б переходный процесс обусловлен подключением к пассивной схеме с нулевыми начальными условиями источника, ЭДС E которого равна напряжению U_x . Расчет переходного процесса в этой схеме произведем операторным методом, используя операторную схему на рисунке 5.18. Операторный частичный ток $I_1''(p)$ найдем по закону Ома:

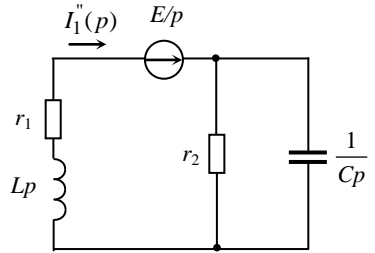


Рисунок 5.18

$$I_1''(p) = \frac{E/p}{Z(p)},$$

где $Z(p) = \frac{r_2/Cp}{r_2 + 1/Cp} + r_1 + Lp = \frac{r_2 L C p^2 + (r_1 r_2 C + L)p + r_1 + r_2}{r_2 C p + 1}$.

$$I_1''(p) = \frac{E(r_2 C p + 1)}{p(r_2 L C p^2 + (r_1 r_2 C + L)p + r_1 + r_2)} = \frac{0,12 p + 120}{p(2 \cdot 10^{-5} p^2 + 0,1 p + 120)} = \frac{F_1(p)}{p F_3(p)}.$$

Найдем корни полинома знаменателя: $p F_3(p) = 0$. $p_0 = 0$;

$$2 \cdot 10^{-5} p^2 + 0,1 p + 120 = 0; \quad p_1 = -2000 c^{-1}; \quad p_2 = -3000 c^{-1}.$$

Найдем оригинал $i''(t)$ по формуле разложения:

$$i_1''(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{p_2 F_3'(p_2)} e^{p_2 t}.$$

$$F_1(0) = 120; \quad F_3(0) = 120; \quad F_1(p_1) = -120; \quad F_1(p_2) = -240;$$

$$F_3'(p) = 4 \cdot 10^{-5} p + 0,1; \quad F_3'(p_1) = 0,02; \quad F_3'(p_2) = -0,02.$$

$$i_1''(t) = \frac{120}{120} + \frac{-120}{(-2000)0,02} e^{-2000t} + \frac{-240}{(-3000)(-0,02)} e^{-3000t} =$$

$$= 1 + 3e^{-2000t} - 4e^{-3000t} \text{ А.}$$

Искомый ток переходного процесса

$$i(t) = i'(t) - i''(t) = -3e^{-2000t} + 4e^{-3000t} \text{ А.}$$

Размыкание ключа. На рисунке 5.19, а представлен случай коммутации в цепи путем размыкания ключа в ветви k . Пусть ток, протекающий по этой ветви до коммутации, равен $i_k(t)$.

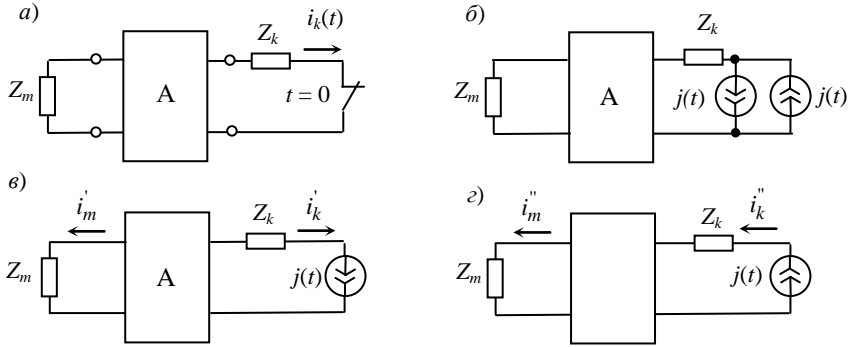


Рисунок 5.19

Включим в послекоммутационной схеме на рисунке 5.19, б параллельно разомкнутому ключу два источника тока противоположного направления с токами $j(t)$, равными $i_k(t)$. Применив принцип наложения, перейдем к схемам на рисунках 5.19, в и г. В схеме на рисунке 5.19, в учитываются все источники активного четырехполюсника и источник тока, действующий в направлении тока $i_k(t)$. В этой схеме распределение токов то же, что и в исходной схеме. В схеме на рисунке 5.19, г действует только один источник тока $i_k(t)$.

Таким образом, *переходный процесс при размыкании ветви находится в результате наложения тока предшествующего режима (при замкнутой ветви), условно продолженного на время $t > 0$, на распределение токов, получаемое в результате включения в пассивную цепь источника тока $i_k(t)$.*

Получаем, что ток в ветви k равен нулю ($i'_k - i''_k = 0$), а ток в ветви m

$$i'_m(t) = i'_m + i''_m.$$

Напряжения в исследуемом переходном режиме также находятся методом наложения, т. е. алгебраическим сложением напряжений на одинаковых участках цепи.

Пример 5.7 Цепь на рисунке 5.20 подключена к источнику синусоидальной ЭДС $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$. Найти закон изменения тока $i(t)$ ветви с ЭДС во время переходного процесса. Дано: $E_m = 100$ В, $\psi = 6,8^\circ$, $r_1 = 75$ Ом, $r_2 = 25$ Ом, $C = 31,8$ мкФ, $f = 50$ Гц.

Решение. Решим задачу путем приведения схемы к нулевым начальным условиям.

Искомый ток находим, используя метод наложения, в виде алгебраической суммы частичных токов:

$$i(t) = i'(t) + i''(t),$$

где $i'(t)$ – ток в установившемся докоммутиционном режиме в исходной схеме с замкнутым ключом (рисунок 5.21, а);

$i''(t)$ – ток, вызванный источником тока $j_k(t)$, в схеме на рисунке 5.21, б.

Расчет схемы на рисунке 5.21, а в установившемся режиме выполним методом комплексных амплитуд. Определим частичный ток $i'(t)$ и равный

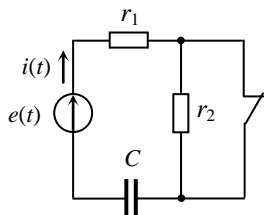


Рисунок 5.20

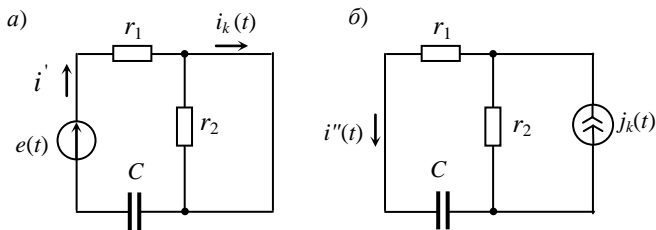


Рисунок 5.21

ему ток $i_k(t)$, проходящий через ключ.

$$\underline{I}'_m = \underline{I}_{km} = \frac{\underline{E}_m}{r_1 - j/\omega C} = 0,8e^{j60^\circ} = 0,4 + j0,693 \text{ А.}$$

$$i(t) = i_k(t) = 0,8 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ А.}$$

Частичный ток переходного $i''(t)$ режима найдем классическим методом.

$$i''(t) = i''_{\text{пр}} + i''_{\text{св}}.$$

Принужденная составляющая тока

$$i''_{\text{пр}} = \text{Im} \left[\underline{I}_{\text{пр}} \frac{r_2}{r_1 + r_2 - j/\omega C} e^{j\omega t} \right] = \text{Im} \left[(0,4 + j0,693) \frac{25}{100 - j100} e^{j\omega t} \right] = 0,141 \sin(\omega t + 105^\circ) \text{ А.}$$

Свободная составляющая тока $i''_{\text{св}} = A e^{pt}$,

где A – постоянная интегрирования.

Корень p характеристического уравнения найдем по формуле

$$Z(p) = r_1 + r_2 + \frac{1}{Cp} = 0, \text{ откуда } p = -314,5 \text{ с}^{-1}.$$

$$i''(t) = i''_{\text{пр}} + i''_{\text{св}} = 0,141 \sin(\omega t + 105^\circ) + A e^{pt}.$$

Для определения постоянной интегрирования A приведем полученное уравнение к начальному условию. С этой целью определим значение тока i'' в момент коммутации. Так как в схеме на рисунке 5.21, б конденсатор C не заряжен, он может быть заменен короткозамкнутым участком.

$$i''(0) = i_k(0) \frac{r_2}{r_1 + r_2} = 0,8 \sin(60^\circ) \frac{25}{100} = 0,173 \text{ А.}$$

$$i''(0) = 0,173 = 0,141 \sin(105^\circ) + A, \text{ откуда } A = 0,037 \text{ А.}$$

$$i''(t) = i''_{\text{пр}} + i''_{\text{св}} = 0,141 \sin(\omega t + 105^\circ) + 0,037 e^{-314,5t} \text{ А.}$$

Таким образом, искомый ток переходного процесса $i(t)$ найдем в виде алгебраической суммы частичных токов:

$$i(t) = i'(t) - i''(t) = 0,8 \sin(\omega t + 60^\circ) - 0,141 \sin(\omega t + 105^\circ) - 0,037 e^{-314,5t} = 0,707 \sin(\omega t + 51,8^\circ) - 0,037 e^{-314,5t} \text{ А.}$$

6 ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 6.1 Электрическая цепь на рисунке 6.1.1 имеет в своем составе идеальный источник постоянной ЭДС E , источник постоянного тока J , один накопительный элемент (катушка индуктивности L или конденсатор C) и четыре резистора. В момент $t = 0$ в цепи происходит коммутация. Определить токи ветвей цепи и напряжение на реактивном элементе во

время переходного процесса. Параметры источников заданы в таблице 6.1.1, а параметры резисторов и накопительных элементов – в таблице 6.1.2.

Таблица 6.1.1

Параметр источников	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$E, В$	40	20	45	50	30	60	55	35	30	40
$J, А$	2	3	4,5	3,5	4	2	3	4	2,5	5

Таблица 6.1.2

Параметр элементов	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$r_1, Ом$	12	16	10	20	18	21	16	15	21	16
$r_2, Ом$	20	18	14	17	16	10	12	17	18	22
$r_3, Ом$	17	14	18	21	20	12	11	12	15	18
$r_4, Ом$	18	12	15	10	21	19	20	13	13	16
$C, мкФ$	60	45	50	80	45	75	40	85	60	70
$L, мГн$	85	60	75	90	50	65	70	60	95	80

Примечание – Исходные расчетные данные выбирают: по первой цифре шифра – из таблицы 6.1.1, по второй – из таблицы 6.1.2; по третьей цифре выбирают номер схемы.

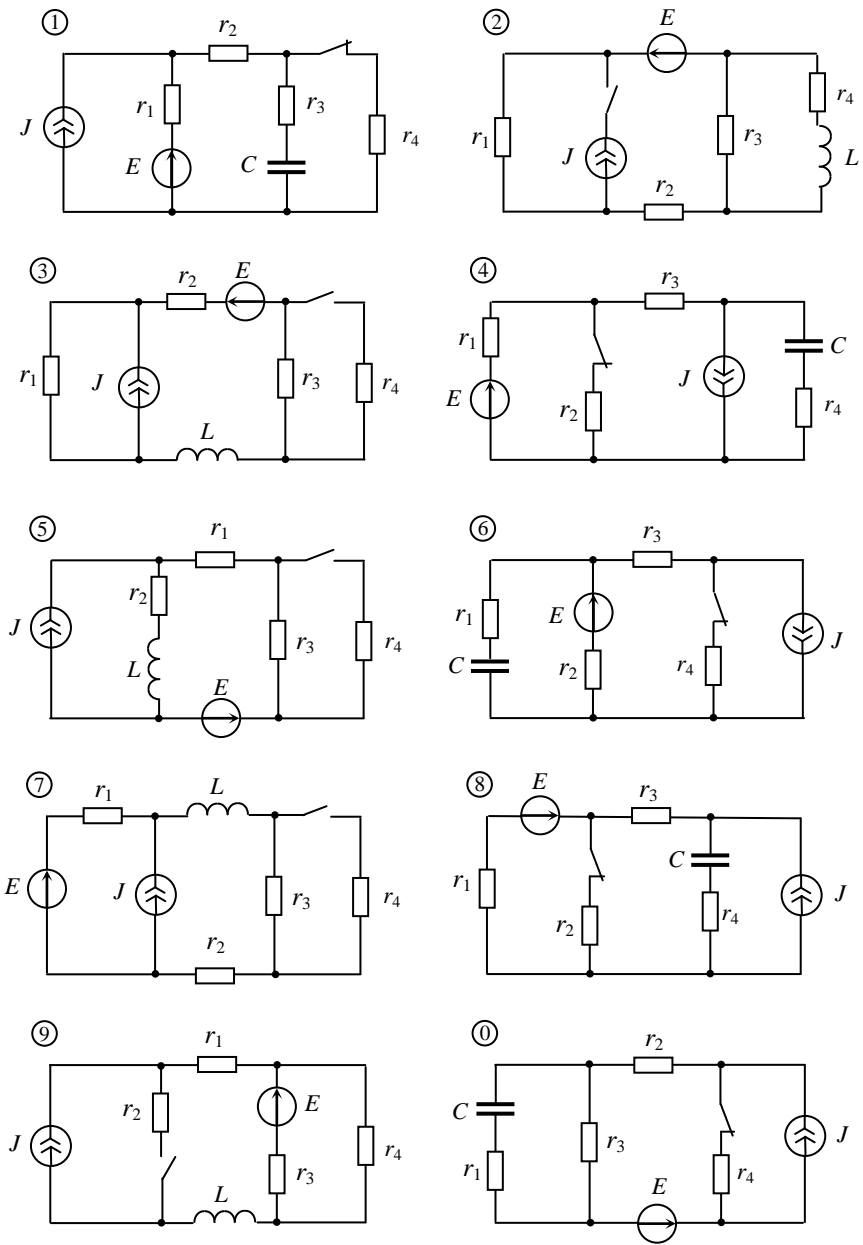


Рисунок 6.1.1

Задача 6.2 В цепи с одним накопителем энергии (рисунок 6.2.1) действует источник синусоидальной ЭДС $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$. В момент $t = 0$ в цепи происходит коммутация. Найти токи ветвей и напряжение на реактивном элементе во время переходного процесса. Параметры источника даны в таблице 6.2.1, а параметры пассивных элементов – в таблице 6.2.2.

Таблица 6.2.1

Параметр источника	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$E_m, \text{В}$	60	50	45	50	30	60	80	35	70	40
$\psi, ^\circ$	30	-30	45	35	-40	-20	60	75	25	-50
$\omega, \text{с}^{-1}$	800	600	500	1000	900	700	600	800	500	950

Таблица 6.2.2

Параметр элементов	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$r_1, \text{Ом}$	24	28	30	16	18	22	25	32	40	36
$r_2, \text{Ом}$	28	20	24	30	34	40	26	24	32	20
$r_3, \text{Ом}$	16	18	22	30	38	36	24	28	30	16
$r_4, \text{Ом}$	22	28	30	26	24	22	20	18	24	28
$C, \text{мкФ}$	50	80	100	60	40	45	40	50	60	80
$L, \text{мГн}$	24	36	32	40	28	30	26	34	36	26

Примечание – Исходные расчетные данные выбирают: по первой цифре шифра – из таблицы 6.2.1, по второй – из таблицы 6.2.2; по третьей цифре выбирают номер схемы.

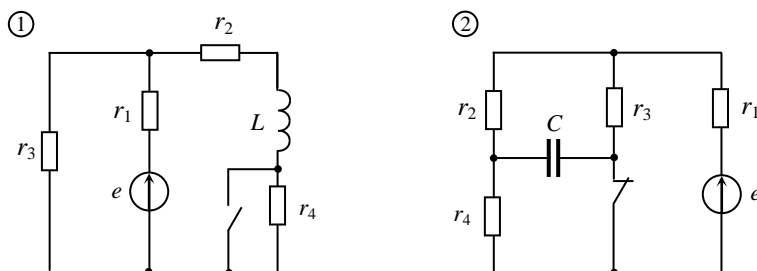


Рисунок 6.2.1 (начало)

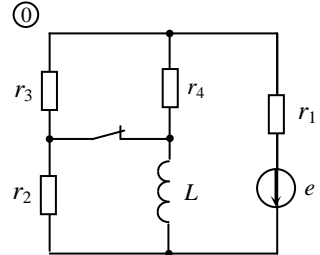
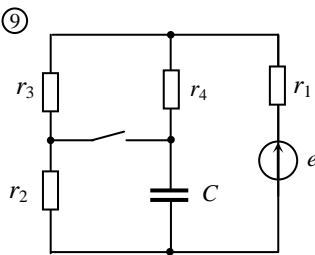
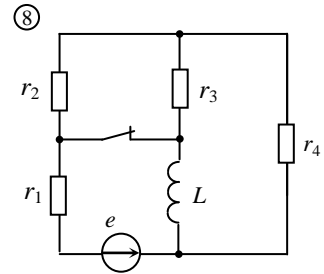
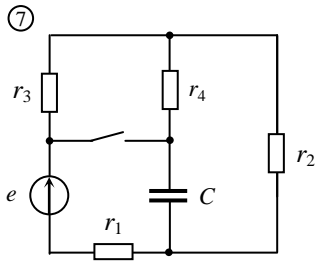
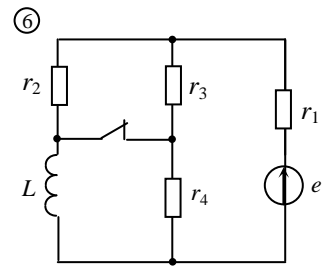
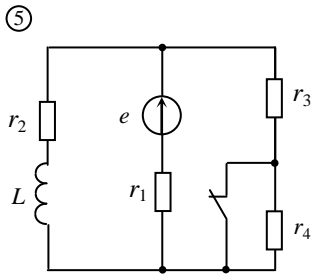
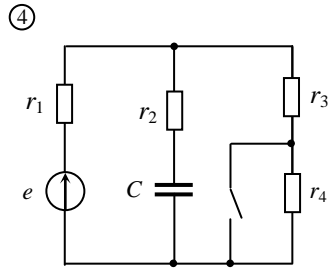
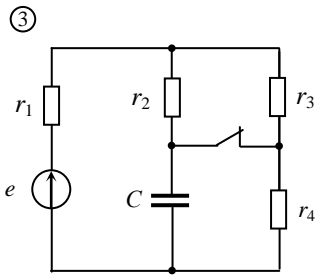


Рисунок 6.2.1 (окончание)

Задача 6.3 В цепи с источником постоянной ЭДС E происходит коммутация. Параметры элементов цепи приведены в таблицах 6.3.1 и 6.3.2.

Для заданной схемы (рисунок 6.3.1):

1) определить значения токов ветвей и напряжений на реактивных элементах схемы в момент коммутации;

2) классическим методом определить законы изменения во времени токов всех ветвей схемы и напряжений $u_L(t)$ на катушке и $u_C(t)$ на конденсаторе во время переходного процесса;

3) построить совмещенные графики изменения во времени тока $i_L(t)$ в катушке и напряжения $u_L(t)$ на её зажимах;

4) операторным методом найти закон изменения во времени тока переходного процесса $i_L(t)$ в катушке или напряжения $u_C(t)$ на конденсаторе.

Таблица 6.3.1

Параметр элементов	Вариант										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
$E, В$	40	20	45	50	30	60	55	35	30	40	
$L, мГн$	250	300	450	350	400	200	300	400	450	500	
$C, мкФ$	200	250	270	175	275	185	240	150	260	255	

Таблица 6.3.2

Сопротивления резисторов, Ом	Вариант										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
r_1	4	6	5	3	5	7	4	6	3	5	
r_2	6	5	7	5	3	3	7	4	7	3	
r_3	7	4	3	7	7	8	5	3	6	4	
r_4	5	7	4	3	8	4	3	8	5	8	
r_5	3	4	6	5	4	5	6	5	4	6	

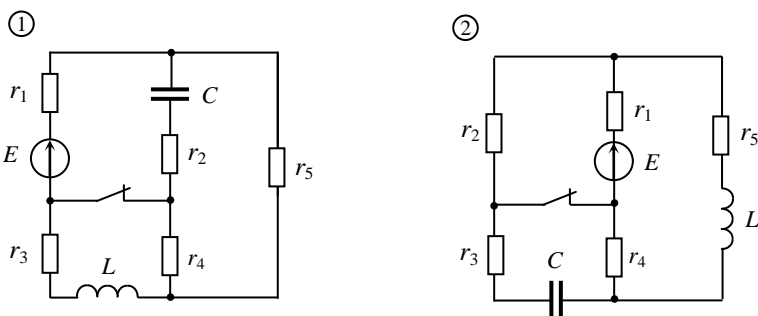
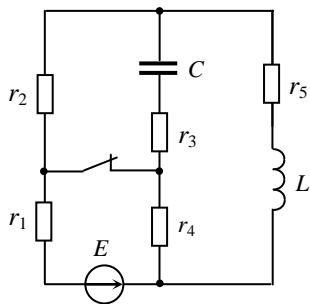
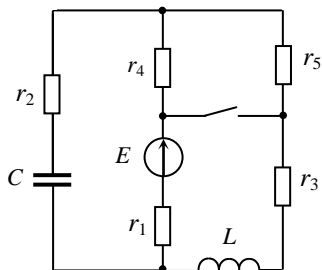


Рисунок 6.3.1 (начало)

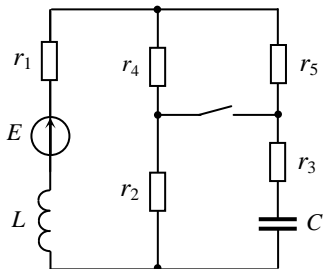
③



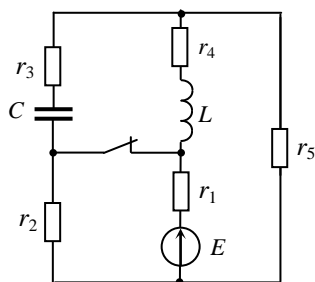
④



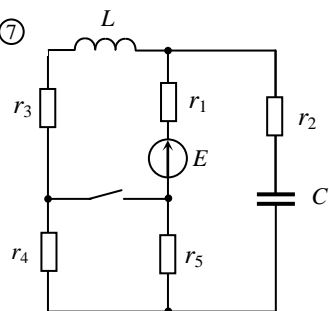
⑤



⑥



⑦



⑧

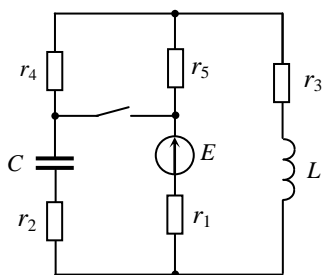


Рисунок 6.3.1 (продолжение)

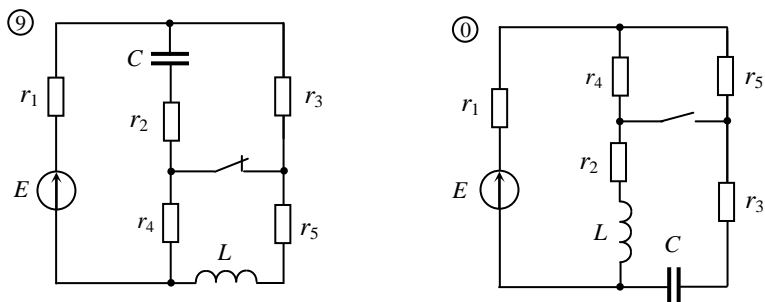


Рисунок 6.3.1 (окончание)

Примечание – Исходные расчетные данные выбирают: по первой цифре шифра – из таблицы 6.3.1, по второй – из таблицы 6.3.2; по третьей цифре выбирают номер схемы.

Задача 6.4 Одиночный импульс напряжения $u_1(t)$ длительностью t_0 (рисунок 6.4.1) подается на вход пассивного четырехполосника (рисунок 6.4.2) с нулевыми начальными условиями. Значения параметров элементов схемы четырехполосника и параметров импульса приведены в таблице 6.4.1. Определить закон изменения во времени напряжения $u_2(t)$ и построить в масштабе его график. Задачу решить с помощью интеграла Дюамеля.

Таблица 6.4.1

Параметры элементов схемы и импульса	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
r_1 , Ом	60	40	42	38	24	36	45	44	48	40
r_2 , Ом	50	55	46	65	48	66	72	63	54	64
r_3 , Ом	40	65	64	53	62	55	68	48	66	56
L , Гн	0,24	0,22	0,32	0,15	0,18	0,16	0,2	0,16	0,15	0,14
C , мкФ	25	40	80	75	60	72	68	75	78	66
U_0 , В	10	12	20	18	14	16	12	18	14	16
t_0 , мс	8	10	9	12	14	10	12	14	10	12

Примечание – Исходные расчетные данные выбирают: по первой цифре шифра – параметры из таблицы 6.4.1, по второй – форма импульса (рисунок 6.4.1), по третьей цифре выбирают номер схемы (рисунок 6.4.2).

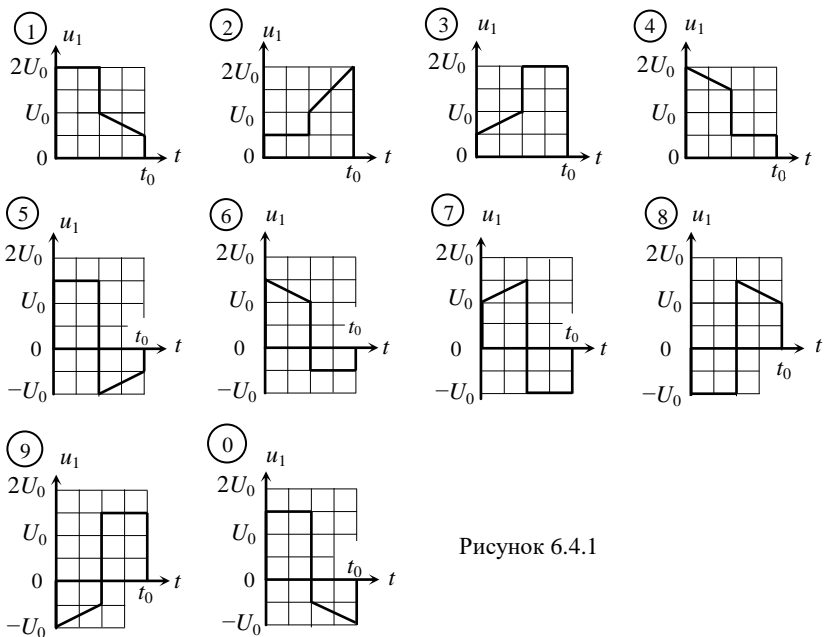


Рисунок 6.4.1

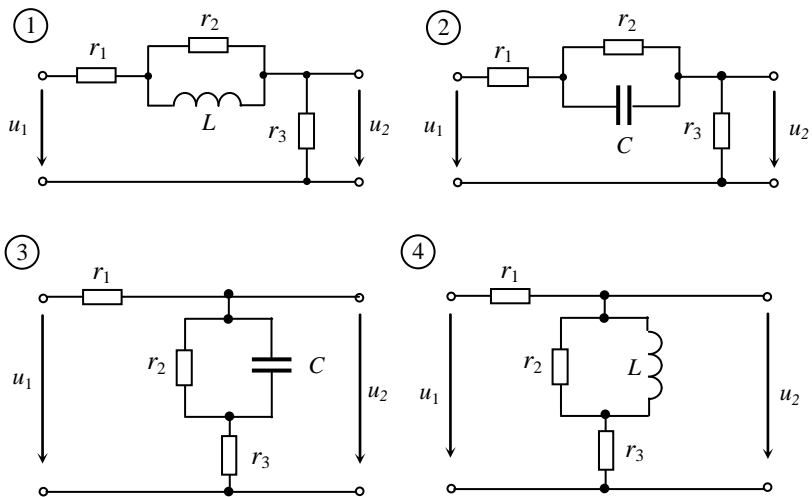


Рисунок 6.4.2 (начало)

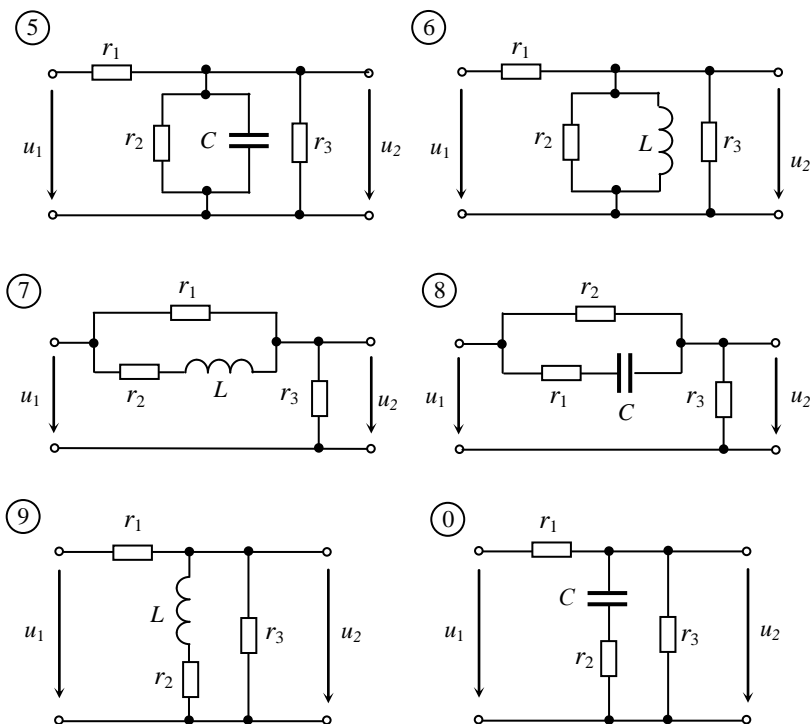


Рисунок 6.4.2 (окончание)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Основы теории цепей / Г. В. Зевеке [и др.]. – 5-е изд., перераб. – М. : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
- 2 Нейман, Л. Р. Теоретические основы электротехники. Т. 1 / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л. : Энергоиздат, 1981. – 536 с.
- 3 Батура, М. П. Теория электрических цепей : учеб. для студ. электротехн. спец. / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулев. – 2-е изд., испр. – Минск : Выш. шк., 2007. – 608 с.
- 4 Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л. А. Бессонов. – М. : Высш. шк., 2006. – 638 с.
- 5 Новгородцев, А. Б. Теоретические основы электротехники. 30 лекций по теории электрических цепей : учеб. пособие / А. Б. Новгородцев. – 2-е изд. – СПб. : Питер, 2006. – 576 с.
- 6 Атабеков, Г. И. Основы теории цепей : учеб. / Г. И. Атабеков. – 3-е изд. – СПб. – М. – Краснодар, 2009. – 264 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Общие представления о переходных процессах	3
1.1 Возникновение переходных процессов	3
1.2 Законы коммутации	4
1.3 Начальные условия	6
2 Классический метод расчета переходных процессов	10
2.1 Переходные процессы в цепях с одним реактивным элементом	11
2.1.1 Переходный процесс в rL -цепи	11
2.1.2 Переходный процесс в rC -цепи	16
2.1.3 Переходные процессы в разветвленных цепях первого порядка	21
2.1.4 Получение характеристического уравнения без составления дифференциального	26
2.2 Переходные процессы в цепях второго порядка	37
2.2.1 Переходный процесс в последовательном rLC -контуре	37
2.2.2 Переходные процессы в разветвленных цепях второго порядка	42
3 Операторный метод	54
4 Особенности расчета переходных процессов при "некорректных" коммутациях	68
5 Переходные процессы в электрических цепях при импульсных воздействиях	73
5.1 Единичная функция и переходная характеристика	74
5.2 Интеграл Дюамеля	79
5.3 Приведение схемы к нулевым начальным условиям	86
6 Задания для самостоятельной работы	92
Список литературы	100

Учебное издание

ВОЛКОВ Николай Петрович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебно-методическое пособие

Редактор А. А. Павлюченкова
Технический редактор В. Н. Кучерова

Подписано в печать 14.08.2015. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 5,81. Уч.-изд. л. 4,29. Тираж 400 экз.
Зак. №. Изд. №.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
Изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
Ул. Кирова, 34, 246653, Гомель