

$$= \frac{F_0 e^{-\delta t} \sqrt{\sin^2 \frac{\nu T}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{T\delta}{2}} \cos(\nu t + \varphi_0)}{mT\nu\omega_0^2 \frac{\cos \frac{\nu T}{2} + \operatorname{ch} \frac{T\delta}{2}}{2}}, \text{ где } \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{(\delta^2 - \nu^2) \operatorname{sh} \frac{T\delta}{2} + 2\nu\delta \sin \frac{\nu T}{2}}{(\delta^2 - \nu^2) \sin \frac{\nu T}{2} - 2\nu\delta \operatorname{sh} \frac{T\delta}{2}}.$$

Все полученные соотношения для вычетов (5), (6), (8) подставляем в формулу (2) и получаем решение задачи

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\operatorname{Re} \operatorname{Res}(Y(p)e^{pt}) + \operatorname{Res}(Y(p)e^{pt}) + \sum_{n=0}^{\infty} 2\operatorname{Re} \operatorname{Res}(Y(p)e^{pt}) = \\ &= \frac{2F_0}{mT\nu\omega_0^2} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\nu T}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{T\delta}{2}} e^{-\delta t} \cos(\nu t + \varphi_0)}{\cos \frac{\nu T}{2} + \operatorname{ch} \frac{T\delta}{2}} + \frac{F_0}{2m\omega_0^2} + \\ &+ \frac{4F_0}{m\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\omega(2n+1)t + \varphi_n)}{(2n+1)^2 \sqrt{(\omega^2(2n+1)^2 - \omega_0^2)^2 + 4(\delta\omega)^2(2n+1)^2}}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в полученном решении описывает собственные колебания системы, которые из-за экспоненциального множителя быстро затухают со временем. Поэтому в установившемся режиме колебаний (при $t \rightarrow +\infty$) осциллятор совершает вынужденные колебания под действием внешней силы.

Список литературы

- 1 *Голдстейн, Г.* Классическая механика / Г. Голдстейн. – М. : Наука, 1975. – 416 с.
- 2 *Ландау, Л. Д.* Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 216 с.
- 3 *Пчелин, Б. К.* Специальные разделы высшей математики. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление / Б. К. Пчелин. – М. : Высш. шк., 1973. – 464 с.
- 4 *Свешников, А. Г.* Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – М. : Наука, 1974. – 320 с.

УДК 512.76.001.57

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ В БИОМЕХАНИКЕ СПОРТА В СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

М. А. КИРКОР, А. Е. ПОКАТИЛОВ, А. М. ГАЛЬМАК, Ю. В. ВОРОНОВИЧ
Белорусский государственный университет
пищевых и химических технологий, г. Могилев

Во многих видах спорта движение спортсмена является пространственным. При этом сложилось несколько вариантов проведения исследования

такого движения: при одном разрабатывают сложные методики изучения техники спортивного упражнения, привлекая различные технологии захвата движения, например, технологию компьютерного зрения или маркерные технологии [1] и пр. При другом варианте движением в одной из плоскостей пренебрегают. Его считают незначительным. Такая ситуация наблюдается, например, при изучении рывка штанги в тяжелой атлетике. На рисунке 1, *a* показан кадр видеосъемки рывка штанги в фазе подъема из подседа мастером спорта Республики Беларусь, курсантом института МВД г. Могилева. Видеосъемка проводилась одной видеокамерой.

На рисунке 1, *б* представлена схема *i*-го звена биомеханической системы (БМС) в прямоугольных декартовых и сферических координатах.

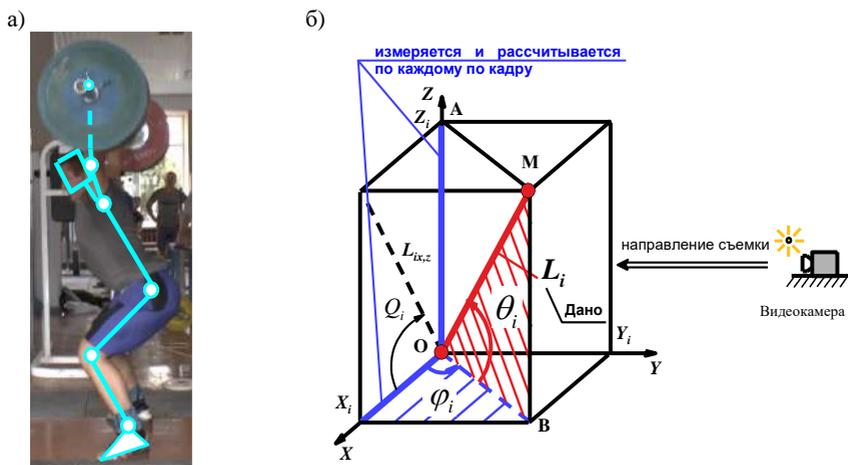


Рисунок 1 – Положения звеньев БМС в пространстве в проекции на сагиттальную плоскость: *a* – кадр видеосъемки; *б* – пространственные координаты звена

Ранее проведенные нами исследования показали значительное движение конечностей спортсмена во всех трех плоскостях: фронтальной, сагиттальной и горизонтальной. На рисунке 2, *б* показана фаза подседа при выполнении рывка. На рисунке 2, *a* и *в* показаны смещения локтевых суставов в % по отношению к длине соответствующего плеча.

По абсолютной величине смещение каждого локтя оказывается равным примерно 30 % с учетом перемещения в обе стороны от первоначального положения сустава в начальной фазе рывка.

Отметим, что после 35-го кадра, смещение локтевых суставов происходит преимущественно в одну сторону, влево. Это означает перемещение самой штанги вместе с локтевыми суставами в горизонтальной плоскости и в одном направлении, без изменения расстояния между локтями.



Рисунок 2 – Рывок штанги. Перемещение локтевых суставов:
a – правый локоть; *б* – фаза подседа; *в* – левый локоть

Таким образом, анализ техники рывка показывает наличие движения звеньев биомеханической системы не только в сагиттальной плоскости, но также во фронтальной и в горизонтальной плоскостях. Данный факт приводит к значительной ошибке в биомеханическом анализе при видеосъемке движения только в сагиттальной плоскости, без расчета или видеофиксации движения звеньев во всех остальных направлениях.

Следующей проблемой является необходимость разработки структуры пространственного движения спортсмена [2]. Здесь необходимо учитывать, что при выполнении спортивных упражнений, движение БМС является сложнокоординированным.

Важны и критичны следующие два момента методики:

- выбор полюса БМС;
- выбор формы уравнений управляющих моментов в сферической системе координат.

По поводу полюса соображения следующие:

- полюсом необходимо выбирать конец стопы;
- перемещение полюса в абсолютной системе координат не учитывается, так как мышечные усилия, как внутренние силы, согласно закону сохранения количества движения, не влияют на перемещение тела.

По форме динамических уравнений анализ показывает следующее:

- все динамические уравнения должны записываться относительно суставов ближайших сопряженных звеньев;
- динамические уравнения записываются относительно движения в сферической системе координат.

Динамические уравнения пространственного движения более сложные, чем в случае плоского движения [3]. Имеем векторное уравнение

$$\bar{M}_{i,i-1} = \bar{M}_{\theta_i} + \bar{M}_{\varphi_i} + \bar{M}_{\alpha_i}. \quad (1)$$

По модулю величина управляющего момента в пространственном движении из уравнения (1) через проекции моментов

$$M_{i,i-1} = \sqrt{\left(M_{\theta_i}^x + M_{\varphi_i}^x + M_{\alpha_i}^x\right)^2 + \left(M_{\theta_i}^y + M_{\varphi_i}^y + M_{\alpha_i}^y\right)^2 + \left(M_{\theta_i}^z + M_{\varphi_i}^z + M_{\alpha_i}^z\right)^2}. \quad (2)$$

Анализ выражения (2) показывает, что проекция момента на ось OZ есть аксиальный управляющий момент мышечной системы, и он равен

$$M_{\varphi_i} = M_{Z_{i,i-1}}. \quad (3)$$

Полярный же управляющий момент проецируется на оси OX и OY

$$M_{\theta_i} = \frac{M_{X_{i,i-1}}}{\sin \varphi_i}. \quad (4)$$

В развернутом виде для любого i -го звена БМС с учетом отсутствия ротации, а значит равенства $I_{L_j}^{(\alpha)} = 0$ и $\ddot{\varphi}_j = 0$, окончательно запишем

$$\begin{aligned} M_{\theta_i} = & - \frac{\sum_{j=i}^N \left(I_j^{(0)} \ddot{\theta}_j \cos \varphi_j \right)}{\cos \varphi_i} + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N \left[B_{jk} \sin \theta_i \left(\ddot{\theta}_k \sin \theta_k + \dot{\theta}_k^2 \cos \theta_k \right) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N \left[B_{jk} \frac{\cos \theta_i}{\cos \varphi_i} \left(\ddot{\theta}_k \cos \theta_k \cos \varphi_k - \dot{\theta}_k^2 \sin \theta_k \cos \varphi_k - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2\dot{\theta}_k \dot{\varphi}_k \cos \theta_k \sin \varphi_k - \ddot{\varphi}_k \sin \theta_k \sin \varphi_k - \dot{\varphi}_k^2 \sin \theta_k \cos \varphi_k \right) \right] + \\ & + g \frac{\sum_{j=i}^N m_j S_j \sin \theta_j \cos \varphi_j}{\cos \varphi_i}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь в уравнениях (3–5) параметры $I_j^{(0)}$ и B_{jk} характеризуют геометрию масс БМС. А углы θ_k , φ_k и их производные $\dot{\theta}_k$, $\dot{\varphi}_k$, $\ddot{\theta}_k$, $\ddot{\varphi}_k$ – это обобщенные координаты и соответствующие им скорости и ускорения.

Тогда имеем управляющий момент относительно оси OZ

$$\begin{aligned} M_{Z_{i,i-1}} = & - \sum_{j=i}^N \left(I_j^{(r)} \ddot{\theta}_j + I_{L_j}^{(\alpha)} \ddot{\varphi}_j \cos \theta_j \right) + \\ & + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N \left[B_{jk} \sin \theta_i \sin \varphi_i \left(\ddot{\theta}_k \cos \theta_k \cos \varphi_k - \dot{\theta}_k^2 \sin \theta_k \cos \varphi_k - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2\dot{\theta}_k \dot{\varphi}_k \cos \theta_k \sin \varphi_k - \ddot{\varphi}_k \sin \theta_k \sin \varphi_k - \dot{\varphi}_k^2 \sin \theta_k \cos \varphi_k \right) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N \left[B_{jk} \sin \theta_i \cos \varphi_i \left(\theta_k^2 \cos \theta_k \sin \varphi_k - \theta_k^2 \sin \theta_k \sin \varphi_k + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\theta_k^2 \cos \theta_k \cos \varphi_k + \theta_k^2 \sin \theta_k \cos \varphi_k - \theta_k^2 \sin \theta_k \sin \varphi_k \right) \right]. \quad (6)$$

Рассмотрим более общий, когда имеется управляющий момент ротации звена вокруг собственной оси (пронация/супинация звена). Имеем

$$M_{\varphi_i} = M_{Z_{i,j-1}} - \left(M_{X_{i,j-1}} + M_{Y_{i,j-1}} \right) \operatorname{ctg} \theta_i, \quad (7)$$

$$M_{\alpha_i} = \frac{M_{X_{i,j-1}} + M_{Y_{i,j-1}}}{\sin \theta_i}, \quad (8)$$

$$M_{\theta_i} = \frac{M_{X_{i,j-1}} (\cos \varphi_i - 1) + M_{Y_{i,j-1}} \cos \varphi_i}{\sin \varphi_i}. \quad (9)$$

Выражения (6)–(9) удобнее решать поэтапно.

Список литературы

- 1 Бегун, П. И. Моделирование в биомеханике : учеб. пособие / П. И. Бегун, П. Н. Афонин. – М. : Высш. шк., 2004. – 390 с.
- 2 Биомеханический анализ пространственного движения на кинематическом уровне / Ю. В. Воронович [и др.] // Актуальные проблемы огневой, тактико-специальной и профессионально-прикладной физической подготовки [Электронный ресурс] : сб. ст. Могилев. института МВД. – 2022. – С. 320–327.
- 3 Сравнительный анализ выходной мощности, развиваемой тяжелоатлетами различной спортивной квалификации в упражнении «рывок» / Ю. В. Воронович [и др.] // Веснік МДУ. – 2022. – № 2 (60). – С. 63–70.

УДК 811.111:004.98

ФОРМИРОВАНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНОГО ИНТЕРЕСА БУДУЩИХ ИТ-СПЕЦИАЛИСТОВ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

О. А. КЛИМОВА, Ю. А. ТЫТЮХА

*Институт информационных технологий
Белорусского государственного университета
информатики и радиоэлектроники, г. Минск*

Стратегическая задача развития современного высшего образования – обновление содержания и достижение нового качества его результатов. В Республике Беларусь происходят глубокие социально-экономические из-