УДК 517.956.22+517.956.3

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАССА

С. А. ДУДКО, И. М. ДЕРГАЧЕВА, А. И. ПРОКОПЕНКО
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

В прикладных задачах теории колебаний как в системах с сосредоточенными параметрами (необходимо решать системы обыкновенных дифференциальных уравнений), так и в непрерывных системах (требуется решать уравнения и системы уравнений в частных производных), необходимо уметь решать задачи, связанные с воздействием на систему периодических и импульсных сил. Рассмотрим классическую модельную задачу продольных колебаний стержня под воздействием импульсной силы, т. е. силы, имеющей характер мгновенных толчков, периодически действующих на систему.

Понятие импульсной функции введем на элементарно-графическом уровне [1]. Рассмотрим функцию $\delta_h(t)$ (рисунок 1)

$$\delta_h(t) = \begin{cases} 0, t < 0, t > h, \\ \dfrac{1}{h}, 0 \le t \le h. \end{cases}$$

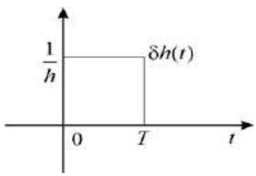

Рисунок 1

Она представляет собой величину, которая действует на отрезке [0; h], где имеет постоянное значение $\dfrac{1}{h}$, суммарный эффект действия $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t)dt = \int\limits_{0}^{h} \dfrac{dt}{h} = 1.$

Предполагая, что $h \to 0,$ введем условную функцию $\delta(t),$ которую будем считать пределом семейства функций $\delta(t) = \lim\limits_{h\to 0} \delta_h(t)$ и называть импульсной функцией или, короче, σ-функцией. Импульсная функция $\delta(t)$ равна нулю всюду, кроме точки $t = 0,$ где она равна $\infty,$ и тем не менее для нее считается справедливым соотношение $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t)dt = 1,$ которое является предельным соотношением для семейства функций $\delta_h(t).$

Лаплас-образ σ-функции имеет вид [1]: $\delta(t) \risingdotseq 1.$

На σ-функцию распространяются основные правила операционного метода, в частности, теорема запаздывания дает: $\delta(t-\tau) \risingdotseq e^{-\rho\tau}.$

Рассмотрим продольные колебания стержня под действием периодической импульсной силы $f(t)$ с периодом T и амплитудой F_0 (рисунок 2). Явную зависимость $f(t)$ задаем с помощью σ-функции:

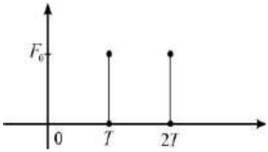

Рисунок 2

$$f(t) = F_0 \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT).$$

Стержень имеет длину l, левый конец стержня $x = 0$ закреплен, на правый конец $x = l$ действует сила $f(t)$. Краевая задача для продольных колебаний стержня имеет вид [2]

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

граничные условия

$$u(0, t) = 0, \; \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \frac{f(t)}{ES}, \tag{2}$$

где $u(x, t)$ – амплитуда продольного смещения сечения стержня с координатой x за время t, коэффициент $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$, где E – модуль Юнга; ρ – объемная плотность материала стержня; S – площадь поперечного сечения стержня.

Начальные условия задачи полагаем нулевыми, т. е.

$$u(x, 0) = 0, \; \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Лаплас-образ $F(p) \risingdotseq f(t)$ имеет вид

$$F(p) = F_0 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\rho kT} = F_0 \frac{1}{1 - e^{-\rho T}} = F_0 \frac{e^{\frac{\rho T}{2}}}{e^{\frac{\rho T}{2}} - e^{-\frac{\rho T}{2}}} = F_0 \frac{e^{\frac{\rho T}{2}}}{2\operatorname{sh}\dfrac{\rho T}{2}}.$$

Вводим лаплас-образ неизвестной функции $u(x, t) \risingdotseq U(x, p)$, переходим к лаплас-образам в уравнении (1) и граничных условиях (2). С учетом нулевых начальных условий и лаплас-образа $F(p)$ получаем следующую краевую задачу

$$\frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} - \left(\frac{p}{a}\right)^2 U(x, p) = 0, \; U(0, p) = 0, \; \frac{dU(l, p)}{dx} = \frac{F(p)}{ES}. \tag{3}$$

Решение уравнения запишем в виде $U(x,p)=c_1\operatorname{ch}\frac{px}{a}+c_2\operatorname{sh}\frac{px}{a}$.

С учетом граничных условий находим коэффициенты c_1 и c_2 и получаем решение краевой задачи (3)

$$U(x,p)=\frac{aF_0}{2ES}\frac{e^{\frac{pT}{2}}\operatorname{sh}\frac{px}{a}}{p\operatorname{sh}\frac{pT}{2}\operatorname{ch}\frac{pl}{a}}=\frac{aF_0}{2ES}\frac{e^{\frac{pT}{2}}\operatorname{sh}\frac{px}{a}}{B(p)}. \tag{4}$$

Далее находим функцию-оригинал, отвечающую лаплас-образу (4). Функция $B(p)=p\operatorname{sh}\frac{pT}{2}\operatorname{ch}\frac{pl}{a}$ имеет бесконечно много нулей в точках $p=p_n$, являющихся решениями уравнения

$$\operatorname{sh}\frac{pT}{2}=0,\ \frac{p_nT}{2}=i\pi n,\quad p_n=i\frac{2\pi}{T}n=i\omega n\left(\omega=\frac{2\pi}{T}\right),\ \ n=1,\ 2\ \ldots$$

(мы рассматриваем комплексные нули функции $B(p)$, лежащие в верхней полуплоскости). Нулю функции $B(p)$ в точке $p=p_n$ отвечает простой полюс функции $U(x,p)$. Вычет функции $U(x,p)e^{pt}$ в простом полюсе $p=p_n$ находим по формуле [3]

$$\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left(U(x,p)e^{pt}\right)=\frac{aF_0}{2ES}\frac{e^{\frac{p_nT}{2}}\operatorname{sh}\frac{p_nx}{a}e^{p_nt}}{B'(p_n)}. \tag{5}$$

Находим производную функции $B(p)$

$$B'(p)=\frac{pT}{2}\operatorname{ch}\frac{pT}{2}\operatorname{ch}\frac{pl}{a}+\operatorname{sh}\frac{pT}{2}\left(p\operatorname{ch}\frac{pl}{a}\right)'_p,$$

поэтому (с учетом равенства $p_n=i\omega n$)

$$B'(p_n)=i\pi n\operatorname{ch}i\pi n\operatorname{ch}\frac{i\omega nl}{a}=i\pi n(-1)^n\cos\frac{\omega nl}{a}.$$

Подставляем производную $B'(p_n)$ в равенство (5) и получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left(U(x,p)e^{pt}\right)=\frac{aF_0}{2ES}\frac{e^{i\pi n}\operatorname{sh}\dfrac{i\omega nx}{a}e^{i\omega nt}}{i(-1)^n\pi n\cos\dfrac{\omega nl}{a}}=$$

$$=\frac{aF_0}{2ES}\frac{i(-1)^n\sin\dfrac{\omega nx}{a}\left(\cos\omega nt+i\sin\omega nt\right)}{i(-1)^n\pi n\cos\dfrac{\omega nl}{a}}=$$

$$=\frac{aF_0}{2ES}\frac{\sin\dfrac{\omega nx}{a}\left(\cos\omega nt+i\sin\omega nt\right)}{\pi n\cos\dfrac{\omega ln}{a}}.$$

В полученном выражении выделяем действительную часть

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=i\omega n}\left(U(x,p)e^{pt}\right)=\frac{aF_0}{2ES}\frac{\sin\dfrac{\omega nx}{a}\cos\omega nt}{\pi n\cos\dfrac{\omega ln}{a}}. \qquad (6)$$

Разлагая гиперболические синусы в ряд Маклорена, находим, что точка $p=0$ также является простым полюсом функции $U(x,p)$:

$$U(x,p)=\frac{aF_0}{2ES}\frac{e^{\frac{pt}{2}}\dfrac{px}{a}\left(1+\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{px}{a}\right)^2+\mathrm{K}\right)}{p\cdot\dfrac{pT}{2}\left(1+\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{pT}{2}\right)^2+\mathrm{K}\right)\operatorname{ch}\dfrac{pl}{a}}=\frac{F_0x}{EST}\frac{e^{\frac{pt}{2}}\left(1+\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{px}{a}\right)^2+\mathrm{K}\right)}{p\left(1+\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{pT}{2}\right)^2+\mathrm{K}\right)\operatorname{ch}\dfrac{pl}{a}}.$$

Поэтому получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=0}\left(U(x,p)e^{pt}\right)=\frac{F_0x}{EST}\lim_{p\to0}\left(p\frac{e^{\frac{pt}{2}}\left(1+\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{px}{a}\right)^2+\mathrm{K}\right)e^{pt}}{p\left(1+\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{pT}{2}\right)^2+\mathrm{K}\right)\operatorname{ch}\dfrac{pl}{a}}\right)=\frac{F_0x}{EST}. \qquad (7)$$

Частоты собственных колебаний стержня даются корнями уравнения

$$\operatorname{ch}\frac{pl}{a}=0,\ \frac{p_nl}{a}=i\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\quad p_n=\frac{i\pi a(2n+1)}{2l},\quad n=0,\ 1,\ 2\ \mathrm{K}$$

Перезаписав производную функции $B(p)$ в виде

$$B'(p)=\frac{pl}{a}\operatorname{sh}\frac{pl}{a}\operatorname{sh}\frac{pT}{a}+\operatorname{ch}\frac{pl}{a}\left(p\operatorname{sh}\frac{pT}{2}\right)'_p,$$

вычисляем вычет в полюсе $p_n=\dfrac{i\pi a(2n+1)}{2l}$, получаем

$$\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left(U(x,p)e^{pt}\right)=\frac{aF_0}{2ES}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{p_n x}{a}e^{p_n\left(t+\frac{T}{2}\right)}}{\dfrac{p_n l}{a}\operatorname{sh}\dfrac{p_n l}{a}\operatorname{sh}\dfrac{p_n T}{2}}=$$

$$=\frac{aF_0}{ES}\frac{i\sin\dfrac{\pi(2n+1)x}{2l}}{i(-1)^{n+1}\pi(2n+1)\sin\dfrac{\pi a(2n+1)T}{4l}}e^{i\frac{\pi a(2n+1)}{2l}\left(t+\frac{T}{2}\right)}=$$

$$=\frac{aF_0}{\pi ES}\frac{(-1)^{n+1}\sin\dfrac{\pi(2n+1)x}{2l}\left(\cos\dfrac{\pi a(2n+1)\left(t+\frac{T}{2}\right)}{2l}+i\sin\dfrac{\pi a(2n+1)\left(t+\frac{T}{2}\right)}{2l}\right)}{(2n+1)\sin\dfrac{\pi a(2n+1)T}{4l}}.$$

Выделяя действительную часть, находим требуемое соотношение

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left(U(x,p)e^{pt}\right)=\frac{aF_0}{\pi ES}\frac{(-1)^{n+1}\sin\dfrac{\pi(2n+1)x}{2l}\cos\dfrac{\pi a(2n+1)\left(t+\frac{T}{2}\right)}{2l}}{(2n+1)\sin\dfrac{\pi a(2n+1)T}{4l}}. \quad (8)$$

Суммируем результаты формул (6), (7), (8) и по основной теореме обращения лаплас-образа [4] находим функцию-оригинал, отвечающую нашему лаплас-образу (4)

$$u(x,t)=\operatorname*{Res}_{\rho=0}\left(U(x,p)e^{\rho t}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{\rho=i\omega n}\left(U(x,p)e^{\rho t}\right)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{\rho=\rho_n}\left(U(x,p)e^{\rho t}\right)=\frac{F_0 x}{EST}+\frac{aF_0}{\pi ES}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\omega n x}{a}\sin\omega n t}{n\cos\dfrac{\omega l n}{a}}+$$

$$+\frac{2aF_0}{\pi ES}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2l}\cos\frac{\pi a(2n+1)\left(t+\frac{T}{2}\right)}{2l}}{(2n+1)\sin\frac{\pi aT(2n+1)}{4l}}.$$

В полученном соотношении для функции $u(x, t)$ второе слагаемое описывает вынужденные колебания стержня со спектром частот импульсной силы, третье слагаемое – собственные колебания стержня, наличие первого слагаемого – статический сдвиг сечения стержня, обусловлено периодическим характером внешней импульсной силы.

Список литературы

1 *Ершова, В. В.* Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / В. В. Ершова. – Минск : Выш. шк., 1976. – 255 с.

2 *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самар ский. – М. : Наука, 1972. – 736 с.

3 *Пчелин, Б. К.* Специальные разделы высшей математики. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление / Б. К. Пчелин. – М. : Высш. шк., 1973. – 464 с.

4 *Свешников, А. Г.* Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – М. : Наука, 1967 – 304 с.

УДК 517.925:51-7

ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ. НЕКОНСЕРВАТИВНАЯ СИСТЕМА С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВЫНУЖДАЮЩЕЙ СИЛЫ

С. А. ДУДКО, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

При рассмотрении процессов колебаний в реальных механических системах необходимо учитывать, что подавляющее число систем являются неконсервативными, т. е. колебательные процессы в них происходят с диссипацией (потерей) энергии. Прежде всего, потери энергии вызываются влиянием среды на механическую систему. В целом ряде случаев, однако, влияние среды на систему можно учесть достаточно простым образом, полагая, что на тело действует сила трения. Обычно силу трения, действующую на систему, совершающую одномерные малые колебания с обобщен-