

УДК 531.3:530.1

*С. А. ФОМЕНКО*

*Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, Макеевка*

## **СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ И ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АНАЛОГИЙ**

При решении многих задач в различных областях техники в нелинейной постановке возникает необходимость составления уравнений движения. Существуют различные способы составления этих нелинейных уравнений. Цель данной статьи – представить методику составления нелинейных уравнений движения механических систем, основанную на методе аналогий.

**Ключевые слова:** нелинейная механика, метод аналогий, нелинейные уравнения движения.

**Введение.** При выполнении научных исследований приходится сталкиваться с задачами, решение которых в линейной постановке [1–4] приводит к большим погрешностям или, более того, полученные результаты могут вообще не отражать реальное поведение рассматриваемого технического объекта или отдельных его звеньев. Например, отдельные звенья различных стационарных и нестационарных установок (в частности, клетки и скипы рудничных подъёмных установок) при работе в реальных условиях подвергаются в основном движению воздействиям нелинейных активных сил и реакций связей и могут совершать дополнительные конечные самовозбуждающиеся периодические или почти периодические перемещения. Для расчёта кинематических и динамических параметров периодических процессов, решения вопросов устойчивости и прочности линейная теория колебаний в этих случаях может оказаться неприменимой.

При экспериментальном исследовании движения газожидкостных сред в эрлифтах были зарегистрированы автоколебательные режимы, описываемые нелинейным уравнением Релея [5]. Неучёт нелинейностей в точных станках может привести к значительному искажению обрабатываемой поверхности, а в станках с адаптивным управлением – к невозможности управлять процессом обработки деталей. Таких примеров можно привести очень много из различных областей техники.

Динамические процессы в упомянутых задачах описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, для решения которых необходимо знание методов нелинейной механики.

Целью данной статьи является ознакомление с методами составления нелинейных математических моделей технических устройств и освоение способов решения нелинейных дифференциальных уравнений.

**Методы решения задач.** Первым этапом изучения влияния нелинейных характеристик на поведение технических объектов является составление математической модели, т. е. описание рассматриваемого объекта нелинейными дифференциальными уравнениями. Второй этап – решение этих уравнений (аналитический или численно с помощью компьютерных программ). Третий этап – анализ полученных результатов и составление технических рекомендаций.

Многие методы решения нелинейных уравнений ориентированы на специальную форму записи этих уравнений. Поэтому необходимо уравнения движения выбранного механического объекта записать в различных возможных формах. Объект следует выбрать такой, чтобы нелинейные уравнения, его описывающие, допускали аналитическое точное решение. Многие методы решения нелинейных уравнений приближенные, а знание точного решения даёт возможность оценить точность метода. К тому же модель простейшего объекта можно использовать в качестве контрольного примера при расчёте более сложных технических объектов. Полезно подбирать задачи, допускаемые аналогии. Здесь имеется в виду, что уравнения, описывающие движение выбранного механического объекта, в точности совпадают с уравнениями, описывающими поведение немеханических объектов или других механических устройств (примером здесь могут служить электромеханические аналогии, которые достаточно подробно отражены в литературе [6]).

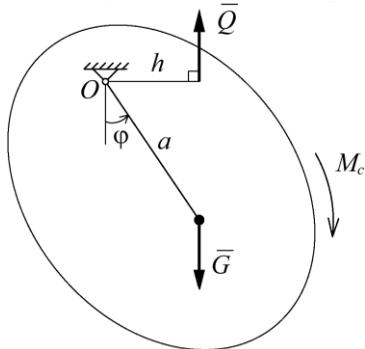


Рисунок 1 – Физический маятник

Одним из примеров механического объекта, удовлетворяющего всем перечисленным ранее требованиям, является физический маятник (рисунок 1). Получим нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее движение маятника. Пусть  $m$  – масса маятника;  $a$  – расстояние от центра масс до его точки подвеса;  $I$  – момент инерции относительно оси вращения;  $M_c$  – момент пары сил сопротивления движению;  $\bar{Q}$  – равнодействующая вынуждающих сил;  $h$  – расстояние от точки  $O$  до линии действия силы  $\bar{Q}$ .

Положение маятника определим углом  $\varphi$ , отсчитываемым от вертикали. Уравнение движения маятника составим с помощью теоремы об изменении кинетического момента системы [6]:

$$\frac{dL}{dt} = \sum M_O(\bar{F}).$$

Момент количества движения маятника  $L = I\dot{\varphi}$ , а сумма моментов внешних сил

$$\sum M_O(\bar{F}) = -mga \sin \varphi - M_c + Qh.$$

Тогда уравнение движения маятника примет вид

$$I\ddot{\varphi} = -mga \sin \varphi - M_c + Qh.$$

В общем случае момент пары сил сопротивления движению – функция угла поворота маятника  $\varphi$  и его угловой скорости  $\omega = \dot{\varphi}$ , т. е.  $M_c = M_c(\varphi, \dot{\varphi})$ . Если маятник движется в некоторой среде (жидкости, воздухе), то  $M_c$  – функция только угловой скорости  $M_c = M_c(\dot{\varphi})$ .

На практике, как правило, при расчётах пользуются либо линейной зависимостью ( $M_c = \alpha\dot{\varphi}$ ), либо квадратичной ( $M_c = \alpha\dot{\varphi} + \beta\dot{\varphi}^2$ ); квадратичный закон сопротивления среды применяют при рассмотрении движения механических объектов под действием аэродинамических и гидравлических сил.

Часто в технике для демпфирования движения вращающихся тел ставят спиральные упругие пружины. В этом случае  $M_c$  зависит только от угла  $M_c = M_c(\varphi)$ . В простейшем виде такая зависимость – аналог закона Гука:

$$M_c = c\varphi,$$

где  $c$  – коэффициент жёсткости спиральной пружины. Однако этим линейным законом можно пользоваться лишь в определённых пределах. У ряда материалов момент упругости растёт быстрее, чем по линейному закону (кривая 1 на рисунке 2). Соответствующая характеристика изменения момента упругости называется «жёсткой». Этой характеристике соответствует момент, определяемый соотношением

$$M_c = -c\varphi - c_3\varphi^3 - c_5\varphi^5 - \dots$$

В некоторых системах момент упругости растёт медленнее, чем по линейному закону (кривая 2 на рисунке 2). В этом случае характеристика называется «мягкой», а выражение  $M_c$  имеет вид

$$M_c = c\varphi - c_3\varphi^3 - c_5\varphi^5 - \dots$$

Вынуждающая сила  $\bar{Q}$  может иметь различную природу. Обычно это функция времени:  $\bar{Q} = \bar{Q}(t)$ . Наиболее простой пример силы  $\bar{Q}$  – возбуждающая колебания сила, которая изменяется по гармоническому закону

$$Q = Q' \sin pt.$$

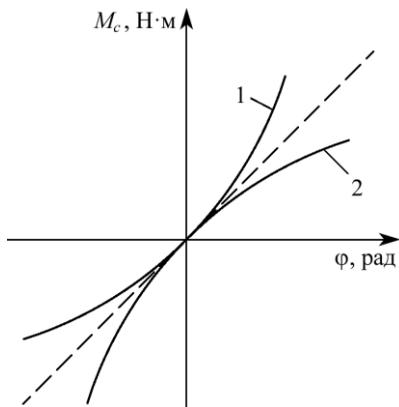


Рисунок 2 – Зависимость упругого момента упругости  $M_c$  от угла поворота  $\varphi$ : 1 – жёсткая; 2 – мягкая характеристика

Запишем уравнения движения маятника в виде

$$\ddot{\varphi} = f(t, \varphi, \dot{\varphi}), \quad (1)$$

где 
$$f(t, \varphi, \dot{\varphi}) = -k^2 \sin \varphi - \frac{1}{I} M_c(\dot{\varphi}, \varphi) + \frac{h}{I} Q(t); \quad k^2 = \frac{mg\alpha}{I}.$$

Так как в общем виде функция  $f$  нелинейная, то дифференциальное уравнение (1) описывает нелинейное поведение выбранного механического объекта – физического маятника. Известно, что источником нелинейности могут быть, в частности, большие угловые перемещения  $\varphi$  маятника (в этом случае имеют место нелинейные его колебания), нелинейные законы сопротивления среды, в которой движется маятник, и нелинейные законы демпфирования.

В случае если маятник движется в сопротивляющейся среде и присутствует демпфирующая движение нелинейная спиральная пружина, момент сопротивления движению имеет вид

$$M_c = \alpha \dot{\varphi} + \beta \dot{\varphi}^2 \pm c\varphi \pm c_3 \varphi^3 \pm c_5 \varphi^5 \pm c_7 \varphi^7 \dots,$$

следовательно,

$$f(t, \varphi, \dot{\varphi}) = -k^2 \sin \varphi - 2n_1 \dot{\varphi} - n_2 \dot{\varphi}^2 - k_1 \varphi - c'_3 \varphi^3 - c'_5 \varphi^5 + \frac{h}{I} Q(t),$$

где 
$$n_1 = \frac{\alpha}{2I}; \quad n_2 = \frac{\beta}{I}; \quad k_1 = \frac{c}{I}; \quad c'_3 = \frac{\mp c_3}{I}; \quad c'_5 = \frac{\mp c_5}{I}.$$

Таким образом, нелинейное дифференциальное уравнение движения маятника имеет вид

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi + 2n_1 \dot{\varphi} + n_2 \dot{\varphi}^2 + k_1 \varphi + c'_3 \varphi^3 + c'_5 \varphi^5 + \dots = q(t),$$

где 
$$q(t) = \frac{h}{I} Q(t).$$

Рассмотрим теперь частные случаи движения маятника.

1 Вынужденные нелинейные колебания без учёта сопротивления среды ( $n_1 = 0, n_2 = 0$ ):

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi + k_1 \varphi + c'_3 \varphi^3 + c'_5 \varphi^5 + \dots = q(t).$$

2 Вынужденные колебания при отсутствии демпфирующей пружины и сопротивления среды ( $n_1 = 0, n_2 = 0, c = 0, c'_3 = 0, c'_5 = 0$ ):

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = q(t).$$

3 Свободные колебания с учётом сопротивления среды ( $q = 0$ ):

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi + 2n_1 \dot{\varphi} + n_2 \dot{\varphi}^2 + k_1 \varphi + c'_3 \varphi^3 + c'_5 \varphi^5 + \dots = 0.$$

4 Свободные колебания без учёта сопротивления среды ( $q = 0, n_1 = 0, n_2 = 0$ )

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi + k_1 \varphi + c'_3 \varphi^3 - c'_5 \varphi^5 + \dots = 0.$$

5 Свободные движения маятника без учёта сопротивления среды и при отсутствии демпфирующей пружины ( $q = 0, n_1 = 0, n_2 = 0, k_1 = 0, c'_3 = 0, c'_5 = 0$ )

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = 0.$$

Рассмотрим теперь некоторые уравнения нелинейных колебаний маятника. Для этого функцию  $\sin \varphi$  в окрестности  $\varphi = 0$  разложим в ряд Тейлора:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots$$

Для примера ограничимся только членами, содержащими  $\varphi$  и  $\varphi^3$ :

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{6}.$$

1 Вынужденные нелинейные колебания маятника с учётом сопротивления среды

$$\ddot{\varphi} + k_0^2 \varphi + 2n_1 \dot{\varphi} + n_2 \dot{\varphi} + k_1 \varphi + c''_3 \varphi^3 + c'_5 \varphi^5 + \dots = q(t), \quad (2)$$

где

$$k_0^2 = k^2 + k_1, \quad c''_3 = c'_3 - \frac{k^2}{6}.$$

2 Вынужденные нелинейные колебания маятника без учёта сопротивления среды ( $n_1 = 0, n_2 = 0$ )

$$\ddot{\varphi} + k_0^2 \varphi + c''_3 \varphi^3 + c'_5 \varphi^5 + \dots = q(t). \quad (3)$$

3 Вынужденные нелинейные колебания маятника без учёта сопротивления среды и при отсутствии демпфирующей пружины

$$\ddot{\varphi} + k_0^2 \varphi - \frac{\varphi^3}{6} = q(t). \quad (4)$$

Соответствующие уравнения, описывающие свободные нелинейные колебания маятника, получаются из уравнений (2)–(4) при  $q(t) = 0$ .

Рассмотрим теперь случаи линейных колебаний маятника.

1 Вынужденные колебания с учётом сопротивления движению

$$\ddot{\varphi} + 2n_1 \dot{\varphi} + k_0^2 \varphi = A \sin pt.$$

(здесь вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону  $q(t) = A \sin pt$ ).

2 Вынужденные колебания без учёта сопротивления движению ( $n_1 = 0$ )

$$\ddot{\varphi} + k_0^2 \varphi = A \sin pt.$$

3 Свободные колебания с учётом сопротивления движению

$$\ddot{\varphi} + 2n_1\dot{\varphi} + k_0^2\varphi = 0.$$

4 Свободные колебания без учёта сопротивления движению

$$\ddot{\varphi} + k_0^2\varphi = 0.$$

Согласно принятой в теории нелинейных колебаний классификации [7] нелинейные колебания подразделяются на свободные, вынужденные, параметрические и автоколебания (в отличие от линейных, где колебания могут быть только свободными и вынужденными). В уравнениях (2)–(4) параметры  $k_0$ ,  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $c'_3$ ,  $c'_5$  могут быть функциями времени. Наличие переменных коэффициентов даёт возможность описания этими уравнениями параметрических колебаний физического маятника.

Приведём ещё пример ситуации, при которой возникают установившиеся автоколебания. Пусть физический маятник 1 посажен на вал 2, который вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . При этом между маятником 1 и валом 2 возникает момент сил трения  $M_c$  (рисунок 3, а).

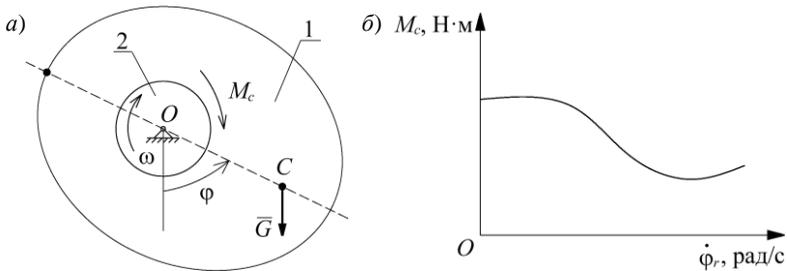


Рисунок 3 – Схема физического маятника при установившихся автоколебаниях (а) и зависимость момента силы трения от относительной угловой скорости вращения маятника по отношению к валу (б)

Зависимость момента силы трения  $M_c$  от относительной угловой скорости вращения  $\dot{\varphi}_r$  маятника по отношению к валу  $M_c = f(\dot{\varphi}_r)$  представлена на рисунке 3, б. Записав дифференциальное уравнение вращательного движения маятника, получим

$$\ddot{\theta} + k^2\theta = -2n_1\dot{\theta} - n_3\dot{\theta}^3, \quad (5)$$

где 
$$2n_1 = \frac{f'(\omega)}{I}, \quad n_3 = \frac{f'''(\omega)}{6I}, \quad k^2 = \frac{mga}{I}, \quad \theta = \varphi - \gamma,$$

$\gamma$  – значение угла  $\varphi$  в положении статического равновесия маятника.

Так как в уравнении (5)  $n_1 < 0$ ,  $n_3 > 0$ , то маятник совершает автоколебания.

Рассмотрим ещё одну нелинейную задачу механики – задачу об изгибе и кручении концевыми нагрузками упругого тонкого стержня при больших перемещениях его оси. Под большими перемещениями оси стержня будем понимать перемещения, соизмеримые с радиусом кривизны оси.

Пусть тонкий прямолинейный упругий стержень деформируется в плоскости только нагрузками, приложенными на его концах. Под действием концевых нагрузок ось стержня принимает некоторую форму равновесия, достаточно сильно отличающуюся от прямолинейной (стержень подвержен конечным деформациям (рисунок 4)). Пусть материал, из которого изготовлен стержень, изотропный,  $E$  – его модуль Юнга. Полагаем, что поперечное сечение стержня постоянно по его длине.  $I$  – момент инерции поперечного сечения. Запишем уравнения равновесия стержня [8]:

$$\frac{d\bar{M}}{ds} + \bar{\tau} \times \bar{F} = 0, \quad (6)$$

где  $\bar{F}$ ,  $\bar{M}$  – главный вектор и главный момент внутренних усилий в поперечном сечении стержня;  $\bar{\tau}$  – единичный вектор касательной к деформированной оси стержня;  $s$  – длина дуги оси.

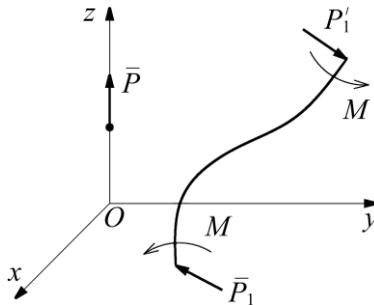


Рисунок 4 – Стержень, подверженный конечным деформациям

Приведём концевые нагрузки к центральной оси и обозначим через  $\bar{P}$  равнодействующую этих нагрузок. Выберем неподвижную систему координат  $xuz$ , ось  $z$  направим по центральной оси. Угол между касательной к оси стержня в любой точке и центральной осью концевых сил обозначим  $\varphi$ . Как

известно из математики,  $\frac{d\varphi}{ds} = \aleph$  – кривизна оси стержня. Главный момент внутренних усилий  $M$  в поперечном сечении стержня связан с кривизной его оси  $\aleph$  известным соотношением Бернулли – Эйлера [8]:

$$M = EI\aleph = EI \frac{d\varphi}{ds}, \quad (7)$$

Так как на стержень действуют только концевые нагрузки, то соотношение (6) можно записать в виде

$$\frac{d\bar{M}}{ds} + \bar{\tau} \times \bar{P} = 0.$$

Записав это уравнение в проекциях на плоскость  $xz$ , получим

$$\frac{dM}{ds} + P \sin \varphi = 0.$$

Используя выражение для  $M$ , данное соотношением (7), последнее уравнение представим в виде

$$EI \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + P \sin \varphi = 0,$$

или 
$$\varphi'' + k^2 \sin \varphi = 0, \quad k^2 = \frac{P}{EI} \quad (8)$$

(штрихами обозначено дифференцирование по  $s$ ).

Как видим, уравнение, описывающее конечные деформации тонкого упругого стержня в плоскости (8), по форме совпадает с уравнением свободного движения физического маятника без учёта сил сопротивления. Этот эффект носит название кинетической аналогии Кирхгофа [5, 8, 9].



Рисунок 5 – Нелинейный колебательный контур

Приведём также один пример из радиотехники – нелинейный колебательный контур, имеющий аналогию с задачей о движении маятника. Рассмотрим колебательный контур, состоящий из катушки индуктивностью  $L$ , железного сердечника и конденсатора ёмкостью  $C$  (рисунок 6).

Пусть  $\Phi$  – магнитный поток,  $i$  – сила тока. Тогда уравнение, описывающее протекание тока в этом контуре

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0. \quad (9)$$

Зависимость между силой тока и индуктивным потоком в катушке при наличии железного сердечника описывается экспериментальным соотношением

$$i = a\Phi - b\Phi^3.$$

Тогда уравнение (9) имеет вид

$$\ddot{\Phi} + \frac{a\Phi}{C} - \frac{b}{C} \Phi^3 = 0.$$

Полученное нелинейное уравнение, описывающее протекание тока в рассматриваемом колебательном контуре, по форме совпадает с уравнением нелинейных свободных колебаний физического маятника без учёта сопротивления движению. Таким образом, имеем пример одной из электромеханических аналогий [6].

Многие методы решения нелинейных уравнений физики (в частности, механики) ориентированы на их специальную запись. В настоящее время очень хорошо развиты методы решения гамильтоновых систем уравнений, в частности, методы теории возмущений [10]. С этой целью запишем нелинейные уравнения свободного движения физического маятника без учёта сил сопротивления движению в гамильтоновой форме. Вычислим для этого кинетическую и потенциальную энергии маятника:

$$T = 0,5I\dot{\varphi}^2; \quad \Pi = Qa(1 - \cos\varphi).$$

Введём обобщённый импульс [10]

$$p_{\varphi} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I\dot{\varphi},$$

откуда 
$$\dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{I}.$$

Вычислим теперь функцию Гамильтона физического маятника

$$H = \frac{p_{\varphi}^2}{2I}.$$

Уравнения движения маятника в гамильтоновой форме

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}}; \quad \frac{dp_{\varphi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}.$$

Заметим, что все полученные соотношения справедливы и для математического маятника (в уравнении для физического маятника необходимо положить  $k^2 = \frac{g}{l}$ ,  $l$  – длина нити маятника).

**Заключение.** В работе представлены уравнения движения физического маятника при наличии нелинейностей различного вида. Рассмотрена методика составления нелинейных уравнений движения механических систем, основанная на методе аналогий. Приведены нелинейные уравнения движения физического маятника, тонкого прямолинейного упругого стержня, нелинейного колебательного контура. Представлены примеры, демонстрирующие одинаковый вид уравнений, описывающих различные физические процессы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Вульфсон, И. И. Краткий курс теории механических колебаний / И. И. Вульфсон. – М. : ВНТР, 2017. – 241 с.
- 2 Яковенко, Г. Н. Краткий курс теоретической механики : учеб. пособие / Г. Н. Яковенко. – М. : Лаборатория знаний, 2015. – 117 с.
- 3 Денисов, Ю. В. Теоретическая механика : учеб. / Ю. В. Денисов, Н. А. Клиньских ; науч. ред. С. А. Берестова. – Екатеринбург : УрФУ, 2013. – 474 с.
- 4 Фоменко, С. А. Рациональные способы демпфирования изгибных колебаний балочных конструкций (на примере жесткой ошиновки открытых распределительных устройств) : дис. канд. техн. наук : 05.23.01 / С. А. Фоменко. – Макеевка : ДонНАСА, 2017. – 163 с.
- 5 Логвинов, Н. Г. Самовозбуждающиеся колебания в воздушных подъемниках / Н. Г. Логвинов // Разработка месторождений полезных ископаемых : респ. межвед. науч.-техн. сб. – Киев : Техника, 1973. – Вып. 31. – С. 88–98.
- 6 Яблонский, А. А. Курс теоретической механики. Ч. II. Динамика / А. А. Яблонский. – М. : Высш. шк., 1984. – 430 с.
- 7 Вибрации в технике : справ. : в 6 т. Т. 1. Колебания линейных систем / В. В. Болотин [и др.] ; под ред. В. В. Болотина. – М. : Машиностроение, 1999. – 504 с.
- 8 Попов, Е. П. Нелинейные задачи статики стержней / Е. П. Попов. – Л.–М. : ОГИЗ, 1948. – 178 с.
- 9 Кирхгоф, Г. Механика. Лекции по математической физике / Г. Кирхгоф ; пер. с нем. под ред. А. Т. Григорьяна и Л. С. Полака. – М. : Изд. АН СССР, 1962. – 443 с.
- 10 Тер Хаар, Д. Основы гамильтоновой механики : пер. с англ. / Д. тер Хаар. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 224 с.

S. A. FOMENKO

*Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeevka*

## MOTION EQUATIONS FORMULATION FOR SOME PROBLEMS OF NONLINEAR MECHANICS AND APPLICATION OF ANALOGIES METHOD

The need to compile motion equations appears at solving many problems in various fields of technology in a nonlinear formulation. There are various ways to write these nonlinear equations. The purpose of this paper is to present a methodology for composing nonlinear motion equations for the mechanical systems, based on the method of analogies.

**Keywords:** nonlinear mechanics, method of analogies, nonlinear motion equations.

Получено 12.11.2022