

УДК 691-419:534.1

*Е. А. ЛАЧУГИНА*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЯТИСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ С ЛЕГКИМИ ЗАПОЛНИТЕЛЯМИ**

Рассматриваются свободные колебания круговой пятислойной пластины, симметричной по толщине. Предполагается, что для трех тонких несущих слоев справедливы гипотезы Кирхгофа. Описание деформирования относительно толстых заполнителей осуществляется с применением гипотезы Тимошенко о прямолинейности и сохранении длины деформированной нормали. Уравнения свободных колебаний получены с помощью вариационного метода Лагранжа. Выведены формулы для вычисления собственных чисел и частот колебаний для случая заделки контура пластины. Проведен численный параметрический анализ частот собственных колебаний.

**Ключевые слова:** пятислойная пластина круглой формы, свободные колебания, собственные частоты.

**Введение.** Область применения многослойных конструкций, в частности, пятислойных, которые находят применение во многих областях современной техники, постоянно расширяется. Это требует создания новых и развития известных методов их расчета. Поэтому исследование динамики пятислойных элементов конструкций является актуальным.

Основные методы расчета и постановки различных краевых задач для слоистых элементов конструкций приведены в монографиях [1–4]. Влияние облучения нейтронным потоком на деформирование слоистых балок и пластин рассмотрено в работах [5, 6]. Публикации [7–9] содержат информацию об изгибе трехслойных пластин для случаев сжимаемого заполнителя, взаимодействия с упругим основанием Пастернака, а также растяжения-сжатия в своей плоскости. В статьях [10–12] содержатся результаты исследований динамики неоднородных слоистых оболочек. Пятислойные элементы конструкций ранее рассматривались в публикациях [13, 14].

Целью рассмотренной работы стало получение аналитического решения начально-краевой задачи о свободных колебаниях симметричной по толщине пятислойной пластины с легкими заполнителями.

**Постановка начально-краевой задачи.** Исследуется пластина круглой формы, симметричная по толщине, которая набрана из пяти слоев, в том числе двух легких заполнителей, не воспринимающих тангенциальные нагрузки (рисунок 1). Используется цилиндрическая система координат, которая связана со срединной поверхностью внутреннего несущего слоя  $l$ . Деформирование тонких несущих слоев  $1, 2, 4$  соответствует гипотезам Кирхгофа, согласно которым нормали не изменяет своей длины и остается нормальной к срединной поверхности. Для сравнительно толстых легких

заполнителей 3, 5 справедлива гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости нормали, которая поворачивается на подлежащий определению дополнительный угол  $\psi(r, t)$ , где  $r$  – радиальная координата;  $t$  – время.

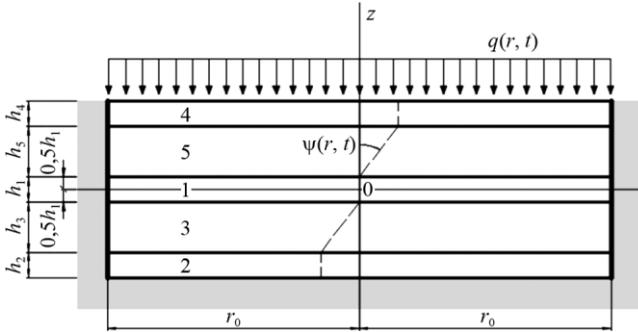


Рисунок 1 – Пятислойная пластина

Предполагается, что имеющаяся на контуре пластины жесткая диафрагма предотвращает относительный сдвиг слоев  $\psi(r_0, t) = 0$ . Радиальные перемещения  $u_r^{(k)}$  в слоях пластины ( $k$  – номер слоя) выражаются через прогиб  $w(r, t)$  и относительный сдвиг  $\psi(r, t)$ :

$$u_r^{(4)} = -zw_{,r} + h_3\psi, \quad (0,5h_1 + h_3 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3 + h_2);$$

$$u_r^{(5)} = -zw_{,r} + (z - 0,5h_1)\psi, \quad (0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1 + h_3);$$

$$u_r^{(1)} = -zw_{,r}, \quad (-0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1);$$

$$u_r^{(3)} = -zw_{,r} + (z + 0,5h_1)\psi, \quad (-0,5h_1 - h_3 \leq z \leq -0,5h_1);$$

$$u_r^{(2)} = -zw_{,r} - h_3\psi, \quad (-0,5h_1 - h_3 - h_2 \leq z \leq -0,5h_1 - h_3),$$

где  $z$  – координата рассматриваемого волокна; запятая в индексе обозначает производную по последующей координате.

Уравнения, описывающие осесимметричные колебания пластины в случае жестких заполнителей, были выведены в [15]:

$$\begin{aligned} L_2(a_1\psi - a_2w_{,r}) - 2h_3G_3\psi &= 0, \\ L_3(a_3\psi - a_4w_{,r}) - M_0\ddot{w} &= -q, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $L_2, L_3$  – дифференциальные операторы,

$$L_2(g) \equiv \left( \frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2};$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

$a_i$  – коэффициенты,

$$a_1 = \left[ 2K_2^+ h_2 h_3^2 + 2K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right]; a_2 = \left[ K_2^+ h_2 h_3 (h_1 + 2h_3 + h_2) + 2K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right];$$

$$a_3 = \left[ 2K_2^+ h_2 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right];$$

$$a_4 = \left[ 2K_2^- h_2 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^- \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^- h_3 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right];$$

$$K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k; \quad K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3} G_k,$$

$G_k, K_k$  – модули сдвига и объемного деформирования материала  $k$ -го слоя;  $M_0 \ddot{w}$  – инерционные поперечные силы,  $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 + \rho_4 h_4 + \rho_5 h_5) r_0^2$ ,  $\rho_k$  – плотность материала  $k$ -го слоя;  $q(r, t)$  – внешняя нагрузка.

Начальные прогиб и скорость движения принимаются нулевыми. Контур пластины предполагается заделанным, то есть должны выполняться следующие условия:

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = r_0. \quad (2)$$

**Уравнения свободных колебаний.** Легким считается заполнитель, работой касательных напряжений в котором можно пренебречь. Тогда при отсутствии внешней нагрузки  $q = 0$  система (1) приводится к виду:

$$L_2(a_1 \psi - a_2 w_{,r}) = 0; \quad L_3(a_3 \psi - a_4 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} = 0.$$

С помощью первого уравнения избавляемся от переменной  $\psi$  во втором. Далее, после двукратного интегрирования первого уравнения, получим

$$\psi = b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r; \quad L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} = 0. \quad (3)$$

где  $C_1, C_2$  – константы интегрирования;  $b_1, M, D$  – коэффициенты,

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1}; \quad M^4 = M_0 D; \quad D = \frac{a_1}{a_1 a_3 - a_2^2}.$$

Относительный сдвиг в центре пластины ограничен, поэтому  $C_2 = 0$ . Решение дифференциального уравнения для прогиба принимается в виде

$$w(r, t) = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (4)$$

где  $v(r)$  – некоторая искомая функция;  $\omega$  – частота колебаний пластины;  $A$  и  $B$  – константы, следующие из начальных условий задачи.

После подстановки прогиба (4) во второе уравнение системы (3), получим дифференциальное уравнение для определения функции  $v(r)$ :

$$L_3(v_{,r}) - \beta^4 v = 0 \quad (5)$$

или, с учетом оператора  $L_3$ , записанного в развернутом виде,

$$v_{,rrrr} + \frac{2}{r} v_{,rrr} - \frac{1}{r^2} v_{,rr} + \frac{1}{r^3} v_{,r} - \beta^4 v = 0,$$

где  $\beta^4 = M^4 \omega^2$ .

Решение дифференциального уравнения (5) таково:

$$v(\beta r) = C_3 J_0(\beta r) + C_4 I_0(\beta r) + C_5 Y_0(\beta r) + C_6 K_0(\beta r),$$

где  $C_3, \dots, C_6$  – искомые константы интегрирования;  $J_0, I_0, Y_0, K_0$  – функции Бесселя, Бесселя (модифицированная), Неймана и Макдональда соответственно.

Следует заметить, что функции  $Y_0(\beta r)$  и  $K_0(\beta r)$  имеют особенность типа логарифма в начале координат, поэтому необходимо принять  $C_5 = C_6 = 0$ .

В итоге решение системы уравнений (3) записываем в виде

$$\varphi(r, t) = b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r; \quad w(r, t) = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)),$$

$$v(r) = C_3 J_0(\beta r) + C_4 I_0(\beta r).$$

Удовлетворяя граничным условиям (2), получим систему алгебраических уравнений относительно констант интегрирования  $C_3, C_4$ :

$$C_3 J_0(\beta r_0) + C_4 I_0(\beta r_0) = 0; \quad -C_3 J_1(\beta r_0) + C_4 I_1(\beta r_0) = 0.$$

Полученная однородная система имеет ненулевое решение при условии равенства нулю определителя:

$$I_1(\beta r_0) J_0(\beta r_0) + I_0(\beta r_0) J_1(\beta r_0) = 0. \quad (6)$$

Решениями трансцендентного уравнения (6) являются собственные числа  $\beta_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), после получения которых частоты собственных колебаний пластины определяются по формуле

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}.$$

**Численные результаты.** Первые 10 собственных чисел  $\beta_n$  и собственных частот колебаний  $\omega_n$  для пятислойной пластины ( $r_0 = 1$ ), несущие слои которой – из алюминиевого сплава Д16Т, а наполнитель – фторопласт-4, приведены в таблице 1. Модули упругости материалов взяты из [2]. Толщины слоев, отнесенные к радиусу пластины, приняты следующими:  $h_2 = h_4 = h_1 = 0,02, h_3 = h_5 = 0,2$ .

Также выполнен анализ влияния толщины  $h_1$  слоя пластины, остальные размеры которой аналогичны указанному случаю, на частоты колебаний.

Таблица 1 – Собственные числа и собственные частоты пятислойной пластины

Номер $n$	$\beta_n$	$\omega_n$	Номер $n$	$\beta_n$	$\omega_n$
0	3,196	166,779	5	18,857	5805,944
1	6,306	649,252	6	21,997	7900,499
2	9,439	1454,721	7	25,138	10317,847
3	12,577	2582,746	8	28,279	13057,371
4	15,716	4032,846	9	31,378	16076,006

Графики (рисунок 2), построенные для различных несущих слоев: 1 – Д16Т – фторопласт – Д16Т – фторопласт – Д16Т; 2 – титан – фторопласт – титан – фторопласт – титан; 3 – кордиерит – фторопласт – Д16Т – фторопласт – кордиерит; показывают, что частоты  $\omega_0$  нелинейно зависят от толщины внутреннего несущего слоя  $h_1$ . При расчетах приняты следующие характеристики материалов: Д16Т –  $K = 92,14$  ГПа,  $G = 30,75$  ГПа,  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>; титан –  $K = 104$  ГПа,  $G = 41$  ГПа;  $\rho = 4500$  кг/м<sup>3</sup>; кордиерит –  $K = 558$  ГПа;  $G = 258$  ГПа;  $\rho = 2660$  кг/м<sup>3</sup>. То есть рост собственной частоты  $\omega_0$  связан с увеличением жесткости несущих слоев.

На рисунке 3 представлены аналогичные зависимости для различных материалов заполнителя: 1 – фторопласт; 2 – пенополиуретан; 3 – пенопласт – и несущих слоях из дюралюминия. При уменьшении модуля упругости заполнителя значение коэффициента  $D$  изменяется незначительно (в третьей значащей цифре), однако уменьшение плотности существенно увеличивает параметр  $M_0$ , что приводит к росту частоты собственных колебаний  $\omega_0$ .

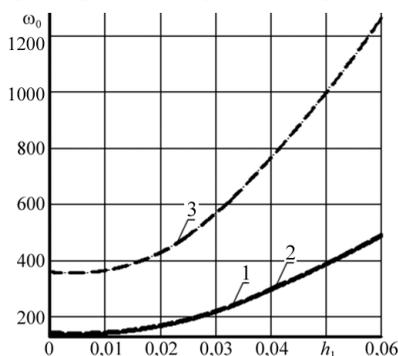


Рисунок 2 – Зависимость собственных частот  $\omega_0$  от размера  $h_1$  при различных материалах несущих слоев

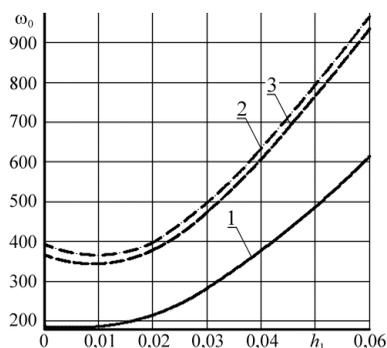


Рисунок 3 – Зависимость собственных частот  $\omega_0$  от толщины внутреннего несущего слоя  $h_1$  при различных заполнителях

**Заключение.** Построенная в работе математическая модель деформирования симметричной по толщине пятислойной круговой пластины позволила оценить влияние геометрических и физических параметров слоев на частоты собственных колебаний конструкции и подтвердить, что их рост достигается увеличением жесткости несущих слоев и уменьшением плотности заполнителей.

*Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-25».*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.
- 2 Журавков, М. А. Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.
- 3 Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : Ideal Press, 2023. – 381 с.

4 **Zhuravkov, M. A.** Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Y. Lyu, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2023. – 308 p.

5 **Vakhneev, S.** Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol. 18, is. 4. – P. 699–704.

6 **Pronina, P. F.** Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects / P. F. Pronina, O. V. Tushavina, E. I. Starovoitov // Periódico Tchê Química. – 2020. – Vol. 17, no. 35. – P. 753–764.

7 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в упругой круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Теоретическая и прикладная механика. – 2020. – Вып. 35. – С. 61–69.

8 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

9 **Нестерович, А. В.** Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

10 **Tarlakovskii, D. V.** Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.

11 **Fedotenkov, G. V.** Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovskiy, Y. A. Vahterova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 40, no. 4. – P. 439–447.

12 **Леоненко, Д. В.** Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических оболочек / Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2010. – № 3 (12). – С. 53–56.

13 **Лачугина, Е. А.** Задача о свободных колебаниях пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XII Междунар. науч.-практ. конф. : в 2 ч. – Гомель : БелГУТ, 2022. – Ч. 2. – С. 202–204.

14 **Лачугина, Е. А.** Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими наполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.

*E. A. LACHUGINA*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

### **FREE VIBRATIONS OF A FIVE-LAYER CIRCULAR PLATE WITH LIGHTWEIGHT FILLERS**

Free vibrations of a five-layer circular plate, symmetrical in thickness, are considered. It is assumed that the Kirchhoff's hypotheses are valid for the three thin load-bearing layers. The deformation of relatively thick fillers is described using Timoshenko's hypotheses on straightness and conservation of the length of the deformed normal. The free vibrations equations are obtained using Lagrange's variational method. The formulas are derived for calculating the eigenvalues and oscillation frequencies for the case of the plate contour fixing. A numerical parametric analysis of natural oscillation frequencies is carried out.

**Keywords:** five-layer circular plate, free vibrations, natural frequencies.

Получено 11.09.2023