575
К93

Си 42/3
13.164

# МЕТОДЪ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХЪ ПРОЕКЦІЙ.

СЪ ПРИЛОЖЕНІЕМЪ ОБРАЗЧИКА ИЗОМЕТРИЧЕСКОЙ КЛѢТЧАТКИ.

СОСТАВИЛЪ
В. КУРДЮМОВЪ,
инженеръ Путей Сообщенія.

ИНСТ. ИНЖЕН. ПУТ. ... ИМПЕРАТ. АЛЕКСАНДРА I
ПОГАШЕНО

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
1885.

1991

Аддзелфонд навукова-тэхнічнай літаратуры
Дата 2007

# МЕТОДЪ

# ИЗОМЕТРИЧЕСКИХЪ ПРОЕКЦІЙ.

## СЪ ПРИЛОЖЕНІЕМЪ ОБРАЗЧИКА ИЗОМЕТРИЧЕСКОЙ КЛѢТЧАТКИ.

СОСТАВИЛЪ
В. КУРДЮМОВЪ,
инженеръ Путей Сообщенія.

ИНСТ. ИНЖЕН. ПУТ. СООБЩ.
БИБЛІОТЕКА
ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I
ОБМЕНЪ

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
1885.

1975

# Оглавленіе.

ИНСТ. ИНЖЕН. ПУТ. СООБЩ.
БИБЛІОТЕКА
ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I.

# МЕТОДЪ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХЪ ПРОЕКЦІЙ.

Инженера **В. Курдюмова**.

---

«Безъ сомнѣнія всѣмъ строителямъ случалось разсматривать чертежи сложныхъ приборовъ, машинъ, сооруженій и т. п. и соображать взаимное расположеніе ихъ составныхъ частей. Имъ должны быть, поэтому, знакомы и затрудненія, представляемыя обыкновенными, *перпендикулярными* проекціями. Не смотря на всю опытность и совершенное знаніе начертательной геометріи, мы часто прибѣгаемъ къ пособію *перспективнаго* изображенія, дающаго болѣе ясное понятіе о взаимномъ расположеніи частей сооруженій, машинъ и т. п., представленныхъ на чертежѣ.

Замѣтимъ здѣсь, что перпендикулярныя проекціи, не представляя чертежа столь ясно какъ *перспектива*, имѣютъ, наоборотъ, то преимущество, что всѣ части предмета, изображеннаго на нихъ, могутъ быть непосредственно измѣрены.

Стремленіе соединить *выгоды* перспективнаго изображенія *съ удобствами* перпендикулярной проекціи, т. е. съ возможностью измѣрять его части, привело къ употребленію особаго рода наклонной проекціи, извѣстной подъ названіемъ *изометрической*.

Проэкціи подобнаго рода издавна были уже употребляемы техниками, не подчиняясь однако никакимъ *общимъ правиламъ*, на которыхъ бы можно было основать способъ построенія чертежей.

Поэтому они служили, большею частью, только для поясненія *сложныхъ* рисунковъ и не представляли возможности измѣрять величину частей изображеннаго предмета.

Изъ всего изложеннаго выше видно, до какой степени важно *изученіе средствъ* соединить удобство, простоту и ясность чертежа съ строгою математическою точностью, подчиненною *общимъ правиламъ* начертательной геометріи....»

Такъ начинаетъ Инж. А. Х. Редеръ свою статью «объ изометрической проекціи», появившуюся въ Январѣ 1855 года въ журналѣ Главнаго Управленія Путей Сообщенія и Публичныхъ Зданій.

Теперь, по истеченіи 30 лѣтъ со времени появленія статьи Инж. Редера, посмотримъ въ какомъ положеніи находится затронутый имъ вопросъ.

За это время была выстроена почти вся сѣть нашихъ желѣзныхъ дорогъ; одна эта работа должна была потребовать составленія нѣсколькихъ милліоновъ чертежей, но можно съ увѣренностью сказать, что за немногими только, можетъ быть, исключеніями всюду употреблялся способъ ортогональной, или какъ называетъ его Инж. Редеръ, перпендикулярной проекціи, а не изометрической.

Причина этого обстоятельства лежитъ въ самихъ свойствахъ изометрическихъ проекцій. Дѣйствительно: построеніе проекцій изометрическихъ сложнѣе построенія проекцій ортогональныхъ при наивыгоднѣйшемъ положеніи плоскостей проекцій, которое обыкновенно и избирается вслѣдствіе простоты построеній; изометрическая проекція допускаетъ непосредственное измѣреніе линій имѣющихъ только три опредѣленныхъ направленія, тогда какъ въ проекціи ортогональной можно измѣрять непосредственно линіи всѣхъ направленій, если онѣ параллельны плоскости проекцій; непосредственное измѣреніе угловъ въ изометрическихъ проекціяхъ невозможно (кромѣ угловъ прямыхъ, образуемыхъ линіями трехъ опредѣленныхъ направленій).

Указанные недостатки, въ связи съ пріобрѣтеннымъ нами навыкомъ представлять себѣ предметъ по двумъ или тремъ его изображеніямъ, заставляютъ насъ отдавать предпочтеніе проекціямъ ортогональнымъ, хотя и менѣе нагляднымъ и требующимъ *иногда* поясненій рисункомъ. Другими словами, для лицъ со спеціальною подготовкою, наглядность чертежа имѣетъ второстепенное значеніе, а потому изометрическія проекціи, имѣющія одно только это преимущество, не могутъ войти въ употребленіе при составленіи чертежей, предназначенныхъ къ обращенію среди образованныхъ техниковъ.

Если чертежъ долженъ попасть въ руки рабочаго, десятника, то въ большемъ числѣ случаевъ наглядность его пріобрѣтаетъ серьезное значеніе.

Ортогональныя проекціи зачастую остаются непонятыми или понятыми невѣрно; это влечетъ за собою ошибки въ работѣ, напрасную трату матеріала, времени, труда. На рабочихъ чертежахъ всѣ размѣры бываютъ обыкновенно надписаны и рабочему рѣдко когда приходится измѣрять предметъ по чертежу; рабочіе чертежи составляются въ большемъ масштабѣ; часто представляютъ не весь предметъ, а одну какую либо часть его или взаимное положеніе двухъ, трехъ его частей. При такихъ условіяхъ пользованія и построенія чертежа преимущество слѣдуетъ отдавать проекціи изометрической, какъ болѣе наглядной. Составленіе простыхъ рабочихъ чертежей въ изометрической проекціи едвали требуетъ больше работы чѣмъ съ проекціей ортогональной, такъ какъ вмѣсто двухъ-трехъ проекцій (планъ, фасадъ, боковой видъ) довольно бываетъ одной, а потому это обстоятельство не должно препятствовать болѣе широкому употребленію изометрическихъ проекцій при составленіи *рабочихъ чертежей*.

Къ сожалѣнію, у насъ этотъ способъ составленія рабочихъ чертежей въ маломъ употребленіи; причину этого, мнѣ кажется, слѣдуетъ искать въ томъ, что наши чертежники не знакомы съ методомъ изометрическихъ проекцій, а у инженеровъ не хватаетъ, можетъ быть, времени объяснять имъ, или же они, сойдя со школьной скамьи и не имѣя дѣла съ изометрическими проекціями, сами успѣли забыть тѣ или другіе пріемы построеній, возстановить же ихъ въ своей памяти не могутъ, не имѣя подъ рукою подходящей книги, такъ какъ книга Инж. Редера стала библіографическою рѣдкостью, а другой подобной нѣтъ.

Цѣль настоящей статьи пополнить пробѣлъ въ новѣйшей технической литературѣ краткимъ изложеніемъ сущности метода изометрическихъ проекцій.

Имѣя въ виду приложенія этого метода исключительно къ составленію простѣйшихъ, рабочихъ чертежей, я ограничиваюсь только тѣми вопросами, которые могутъ встрѣтиться на практикѣ, оставляя въ сторонѣ всѣ другіе; такъ напр. построеніе тѣней не входитъ въ мою программу. Рѣшеніе болѣе сложныхъ задачъ въ проекціяхъ изометрическихъ представляетъ почти исключительно теоретическій интересъ и не имѣетъ значенія практическаго, такъ какъ тѣ-же задачи сравнительно легче могутъ быть рѣшены по способу проекцій ортогональныхъ, а конечные результаты ихъ сообщены рабочимъ въ видѣ шаблоновъ, лекалъ и т. п. или, въ случаѣ надобности, представлены въ проекціяхъ изометрическихъ, что всегда бываетъ легче, чѣмъ самое рѣшеніе задачъ въ этихъ проекціяхъ.

При высказанномъ взглядѣ на практическое значеніе метода изометрическихъ проекцій, книга Инж. Редера послужила мнѣ только программою, которой я слѣдовалъ въ порядкѣ изложенія предмета. Съ цѣлью облегченья построенія изометрическихъ проекцій предлагаю употребленіе особой *изометрической клѣтчатки*, образецъ которой приложенъ въ концѣ статьи.

**Инж. В. Курдюмовъ.**

6 Января 1885 г.
Царское Село.

# Основныя положенія метода изометрическихъ проекцій.

§ 1. Ортогональныя проекціи имѣютъ слѣдующія свойства:

1) Линіи и углы, расположенные въ плоскостяхъ, параллельныхъ плоскости проекцій, проектируются на эту послѣднюю въ свою натуральную величину.

2) При всѣхъ другихъ положеніяхъ линій и угловъ въ пространствѣ, они искажаются въ своихъ проекціяхъ, причемъ степень искаженія зависитъ отъ угла наклоненія линій въ пространствѣ къ плоскости проекцій.

Избирая, при составленіи чертежа, плоскость проекцій параллельно тѣмъ или другимъ линіямъ, является возможность представлять нѣкоторыя измѣренія предмета въ его проекціи въ неискаженномъ видѣ; слѣдовательно, по такимъ проекціямъ, можно измѣрять предметъ по тѣмъ или другимъ направленіямъ. Такое положеніе плоскости проекцій называется наивыгоднѣйшимъ.

Для полной опредѣленности заданія, т. е. для возможности по проекціи предмета опредѣлить всѣ его размѣры и положеніе въ пространствѣ, необходимо имѣть двѣ проекціи его на плоскостяхъ непараллельныхъ между собою. Двѣ плоскости проекцій могутъ быть избраны произвольно, но, для простоты рѣшенія задачъ, обыкновенно избираются двѣ взаимно перпендикулярныя плоскости. Всякій предметъ имѣетъ три измѣренія попарно перпендикулярныя между собою. Иногда нѣкоторыя линіи, входящія въ очертаніе предмета, могутъ быть приняты за направленія измѣреній, такъ напр. въ прямоугольномъ параллелепипедѣ три ребра, сходящіеся въ вершинѣ одного триграннаго угла, могутъ быть приняты за направленія измѣреній. Въ другихъ случаяхъ двѣ или одна только линія предмета совпадаетъ съ направленіями его измѣренія, третье же, перпендикулярное къ двумъ первымъ не совпадаетъ ни съ одною изъ линій, входлщихъ въ очертаніе предмета; такъ напр. въ наклонномъ прямоугольномъ параллелепипедѣ два смежныя ребра основанія совпадаютъ съ направленіями измѣреній площади основанія, третье же измѣреніе—высота параллелепипеда не совпадаетъ ни съ одной изъ линій его.

Размѣры призмы или пирамиды опредѣляются площадью основанія и ихъ высотою; направленья измѣреній площади основанія могутъ быть избраны произвольно, лишь бы они лежали въ плоскости основанія и были взаимно перпендикулярны. Въ послѣднемъ случаѣ направленіе двухъ измѣреній опредѣляется положеніемъ плоскости основанія. Линіи и плоскости, опредѣляющія направленія измѣреній предмета, можно назвать *направленіями главнѣйшихъ измѣреній*, а самыя измѣренія *главнѣйшими* въ отличіе отъ другихъ измѣреній, какъ напр. периметръ основанія, апоѳема и т. д.

При построеніи ортогональныхъ проекцій предмета плоскости проекцій избираются обыкновенно параллельно двумъ направленіямъ главнѣйшихъ измѣреній, напр. вертикальная плоскость параллельно первому и второму или первому и третьему, а горизонтальная параллельно второму и третьему измѣренію. При этомъ въ двухъ проекціяхъ предмета всѣ три измѣренія его являются неискаженными, а потому могутъ быть измѣряемы непосредственно, т. е. не прибѣгая ни къ какимъ новымъ геометрическимъ построеніямъ. При такомъ выборѣ плоскостей проекцій достигается *наивыгоднѣйшее заданіе* предмета въ его проекціяхъ. Вслѣдствіе удобоизмѣряемости проекцій при наивыгоднѣйшемъ заданіи и простоты ихъ построеній, такое заданіе употребляется по преимуществу. Но съ другой стороны это заданіе отличается меньшею наглядностью изображенія, происходящею отъ того, что на каждой изъ проекцій одно изъ трехъ главнѣйшихъ измѣреній, не параллельное плоскости проекцій, пропадаетъ, обращается въ точку, булучи перпендикулярно данной плоскости проекцій. Такъ напр. при наивыгоднѣйшемъ заданіи проекціи призмы въ вертикальной проекціи ея пропадаетъ одно изъ измѣреній площади основанія, а въ горизонтальной проекціи—высота призмы.

При всѣхъ другихъ заданіяхъ, т. е. при иномъ положеніи плоскостей проекцій, ни одно изъ измѣреній не пропадаетъ, а потому наглядность изображенія выигрываетъ, но за то главнѣйшія измѣренія предмета дѣлаются не параллельными плоскостямъ проекцій и являются въ искаженномъ видѣ. Послѣднее обстоятельство, дѣлая проекціи неудобоизмѣряемыми, затрудняетъ самое построеніе ихъ.

Изъ безконечнаго числа возможныхъ положеній плоскостей проекцій всегда можно найти такія, при которыхъ главнѣйшія измѣренія предмета по тремъ попарно перпендикулярнымъ направленіямъ будутъ искажаться въ своихъ проекціяхъ одинаково, равномѣрно, т. е. проекціи всѣхъ трехъ главнѣйшихъ измѣреній на такой плоскости будутъ въ одинаковое число разъ меньше самихъ измѣреній. Плоскость, удовлетворяющая условію одинаковой или равномѣрной искажаемости трехъ главнѣйшихъ измѣреній предмета, называется *плоскостью изометрическихъ проекцій*, самыя проекціи на такую плоскость—*изометрическими*, а способы построенія ортогональныхъ проекцій при условіи выбора плоскости, удовлетворяющей требованію равномѣрной искажаемости трехъ главнѣйшихъ измѣреній предмета—*методомъ изометрическихъ проекцій.*

Изометрическія проекціи имѣютъ слѣдующія свойства:

1) Предметъ видѣнъ по направленію трехъ его измѣреній.

2) Главнѣйшія измѣренія искажаются равномѣрно, а потому, опредѣливъ степень (коеффиціентъ) искаженія ихъ, можно по проекціи измѣрять предметъ по тремъ направленіямъ.

Какъ увидимъ ниже, коеффиціентъ искаженія главнѣйшихъ измѣреній есть величина постоянная, принимаемая во вниманіе при выборѣ масштаба, чѣмъ достигается возможная простота, какъ построенія проекцій или перехода отъ проекцій ортогональныхъ къ изометрическимъ, такъ и самое измѣреніе по нимъ предмета.

Наглядность изображенія предмета въ проекціи изометрической и удобоизмѣряемость его по направленіямъ трехъ главнѣйшихъ измѣреній устраняютъ надобность въ двухъ проекціяхъ для возможности дать *ясное понятіе* о предметѣ. Но по одной проекціи нѣ какую-бы то ни было плоскость нельзя опредѣлить всѣхъ размѣровъ и положенія предмета въ пространствѣ, такъ какъ безчисленное множество линій могутъ имѣть одну и ту-же проекцію на данной плоскости. Ввиду этого необходимо, чтобы изометрическая проекція предмета, кромѣ линій входящихъ въ очертаніе предмета, заключала въ себѣ проекціи вспомогательныхъ точекъ и линій, которыя, въ совокупности съ условіями избранія плоскости проекцій, давали бы возможность устранить неопредѣленность заданія предмета его единственною проекціею.

§ 2. Докажемъ, что проекція предмета на плоскость перпендикулярную діагонали куба, ребра котораго параллельны тремъ главнѣйшимъ измѣреніямъ предмета, есть проекція изометрическая, т. е. что главнѣйшія измѣренія въ своихъ проекціяхъ на эту плоскость равномѣрно искажены.

Пусть AC, BC и DC (чер. 1) будутъ направленія главнѣйшихъ измѣреній предмета, причемъ углы ACB, BCD и DCA прямые. Задача конечно не измѣнится если направленія этихъ измѣреній примемъ за направленія реберъ куба. Пусть EC будетъ направленіе діагонали куба, построеннаго на направленіяхъ главнѣйшихъ измѣреній. Плоскость PQ, перпендикулярную къ EC, проведемъ чрезъ точку C. Пусть aC, bC, dC будутъ проекціи AC, BC и DC на плоскости PQ.

Такъ какъ EC діагональ куба, ребра котораго направлены по AC, BC и DC, то углы ECA, ECB и ECD равны между собою.

Вслѣдствіе перпендикулярности EC къ PQ углы ECa, ECb и ECd прямые.

Вычитая изъ равныхъ угловъ:

$$ECa = ECb = ECd$$

равные же углы $\quad ECA = ECB = ECD \quad$ получимъ равныя

разности $\quad ACa = BCb = DCd$

Углы эти лежатъ въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ плоскости PQ, а потому служатъ мѣрою наклоненія линій AC, BC и DC къ плоскости PQ.

Обозначимъ $ACa = BCb = DCd$ буквою $\omega$, а углы $ECA = ECB = ECD$ буквою $a$.

Между проекціями линій и самими линіями должна существовать слѣдующая зависимость:

$$AC\ \mathrm{Cos}\omega = aC$$

$$BC\ \mathrm{Cos}\omega = bC$$

$$DC\ \mathrm{Cos}\omega = dC$$

откуда

$$\frac{aC}{AC} = \frac{bC}{BC} = \frac{dC}{DC} = \mathrm{Cos}\omega$$

Уголъ $\omega$, какъ разность двухъ постоянныхъ величинъ, величина постоянная, слѣдовательно и $\mathrm{Cos}\omega$ тоже величина постоянная, изъ чего заключаемъ, что проекціи главнѣйшихъ измѣреній на плоскость перпендикулярную діогонали куба, построеннаго на направленіяхъ этихъ измѣреній, есть проекція изометрическая и степень равномѣрной искажаемости главнѣйшихъ измѣреній въ ихъ проекціяхъ есть величина постоянная.

Если между главнѣйшими измѣреніями предмета существуетъ соотношеніе

$$AC\colon BC\colon DC = m\colon n\colon p.$$

то оно остается неизмѣннымъ при помпоженій его на $\mathrm{Cos}\omega$, т. е.

$$AC.\ \mathrm{Cos}\omega\colon BC.\ \mathrm{Cos}\omega\colon DC.\ \mathrm{Cos}\omega = m\colon n\colon p.$$

откуда слѣдуетъ, что и

$$aC\colon bC\colon dC = m\colon n\colon p.$$

Въ каждомъ кубѣ можно провести четыре діогонали, а потому существуетъ для каждаго предмета четыре положенія плоскостей, удовлетворяющихъ условію изометричности проекцій, построенныхъ на этихъ плоскостяхъ. Такъ какъ лучъ зрѣнья, параллельный одной изъ діагоналей куба можетъ имѣть два направленія, отъ E къ C или отъ C къ E, то па каждой изъ плоскостей изометрическихъ проекцій можно построить *двѣ* проекціи одного и того же предмета въ зависимости *отъ направленія луча зрѣнья* или положенья точки зрѣнья относительно предмета и плоскости проекцій. Такимъ образомъ въ зависимости отъ направленія избранной діагонали куба и положенія точки зрѣнья, можно построить восемь различныхъ изометрическихъ проекцій одного и того же предмета. Выборъ плоскости проекцій и положенія точки зрѣнья зависитъ отъ того, съ которой стороны удобнѣе представить предметъ, съ какой стороны изображеніе его будетъ нагляднѣе.

§ 3. Опредѣлимъ величину Cos$\omega$. Пусть ABCDEFGH (чер. 2) будетъ кубъ, величина реберъ котораго равна единицѣ. Проведемъ діогональную плоскость ACGE, которая пересѣкетъ грани ABCD и EFGH по діогоналямъ этихъ граней AG и EG. Линія AG, лежащая въ плоскости ACGE будетъ діогональ куба. Въ треугольникѣ AEG уголъ AEG прямой; уголъ EAG — уголъ между діогональю куба и его ребромъ, мы его обозначили буквою $a$; уголъ EGA, между діогональю куба AG и діогональю грани куба EG, служитъ дополненіемъ углу $a$ до прямаго.

Выше было доказано, что уголъ наклоненія направленій главнѣйшихъ измѣреній предмета къ плоскости изометрическихъ проекцій

$$\omega = 90^\circ - a$$

но $$EGA = 90^\circ - a$$ слѣдовательно

$$\omega = EGA$$

Построимъ геометрическую величину угла $EGA = \omega$. На сторонахъ прямаго угла MFN (чер. 3) отложимъ отъ вершины его F отрѣзки EF и GF, равные величинѣ реберъ куба ABCDEFGH, т. е. равные единицѣ. Соединимъ E съ G, линія EG опредѣлитъ величину діогонали квадратныхъ граней куба. Возставимъ изъ E перпендикуляръ къ EG, положимъ на немъ EA равное ребру куба, т. е. единицѣ. Соединимъ A съ G, линія AG опредѣлитъ величину діагонали куба, а уголъ AGE будетъ равенъ $\omega$.

$$\text{Cos } AGE = \text{Cos}\omega = \frac{EG}{AG} = \frac{\sqrt{GF^2 + FE^2}}{\sqrt{EG^2 + EA^2}} = \frac{\sqrt{GF^2 + FE^2}}{\sqrt{GF^2 + FE^2 + EA^2}}$$

Но $GF = FE = EA = 1$

слѣдовательно $\text{Cos}\omega = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = 0{,}81651\ldots$

Величина 0,81651 выражающая отношеніе величины проекціи главнѣйшихъ измѣреній къ величинѣ самихъ измѣреній можетъ быть названа *изометрическимъ коеффиціентомъ*.

Изъ теоріи ортогональныхъ проекцій извѣстно, что линіи параллельныя между собою въ пространствѣ имѣютъ параллельныя же между собою проекціи и степень искаженія этихъ линій въ проекціяхъ одинакова; изъ этого слѣдуетъ, что всѣ линіи въ пространствѣ, параллельныя главнѣйшимъ измѣреніямъ предмета, въ своихъ проекціяхъ искажаются одинаково съ самими измѣреніями и коеффиціентъ ихъ искаженья $= 0{,}81651$.

На томъ же чер. 3 показано слѣдующее построеніе угла $\omega$: На произвольной прямой $ab$ изъ произвольной точки $c$, произвольнымъ радіусомъ $ac$ описывается полуокружность и возставляется перпендикуляръ $cd$. Точка $e$ есть вершина вписаннаго квадрата, другія вершины котораго лежатъ въ $a$ и $f$. Изъ $f$ возставляется перпендикуляръ $fg$ а на немъ откладывается величина $fh$, равная $fe$, т. е. сторонѣ квадрата. Линія $af$ есть діогональ квадрата, слѣдовательно уголъ $haf$ и есть искомый — $\omega$.

§ 4. Докажемъ теперь, что прямые углы, образуемые направленіями главнѣйшихъ измѣреній предмета, въ ихъ изометрическихъ проекціяхъ искажаются двояко, такъ что одни углы измѣряются 120°, а другіе 60°.

Пусть AC, BC, DC (черт. 4) будутъ направленья главнѣйшихъ измѣреній, EC направленіе діогонали куба, построеннаго на направленіяхъ AC, BC и DC, плоскость PQ—плоскость изометрическихъ проекцій.

Отложимъ отъ точки C, на линіяхъ AC, BC и DC равные между собою отрѣзки FC, GC и HC и соединимъ точки F, G и H прямыми FG, GH и HF.

Пусть aC, bC, dC, fg, gh и hf будутъ проекціи соотвѣтственныхъ линій въ пространствѣ.

Вслѣдствіе равенства $FC=GC=HC$ слѣдуетъ равенство ихъ проекцій $fC=gC=hC$. Углы $ACa=BCb=DCd=\omega$, а потому треугольники FCf, GCg и HCh равны между собою, слѣдовательно существуетъ равенство $Ff=Gg=Hh$. Послѣднимъ равенствомъ обусловливается параллельность линій FG, GH и HF къ плоскости проекцій PQ. Линіи FG, GH и HF равны какъ гипотенузы равныхъ равнобедренныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ FCG, GCH и HCF, а потому и проекціи ихъ $fg=gh=hf$. Вслѣдствіе существующихъ равенствъ сторонъ слѣдуетъ равенство треугольниковъ fCg, gCh и hCf и угловъ при общей вершинѣ C. Сумма угловъ при C въ плоскости $PQ=360°$, а потому каждый изъ нихъ$=120°$.

И такъ прямые углы ACB, BCD и DCA въ своихъ проекціяхъ измѣряются 120°.

Проведемъ въ плоскости FCH чрезъ точки F и H линіи FJ и HJ параллельно CH и CF; вслѣдствіе равенства CH=CF, при углѣ FCH=90°, фигура FCHJ будетъ квадратъ. Cfih будетъ проекція квадрата, причемъ Cf=Ch=fi=hi, слѣдовательно Cfih будетъ ромбъ, въ которомъ углы fCh=hif=120° а углы Cfi=Chi должны быть=60°.

И такъ прямые углы въ пространствѣ CFJ и CHJ, въ своихъ проекціяхъ измѣряются 60°.

Если провести въ квадратѣ CFJH діагонали FH и CJ и построить ихъ проекціи fh и Ci, причемъ какъ въ пространствѣ такъ и въ проекціяхъ діагонали будутъ дѣлить по поламъ соотвѣтствующіе углы, нетрудно заключить слѣдующее: Въ прямыхъ углахъ, образуемыхъ направленіями главнѣйшихъ измѣреній, и измѣряющихся въ своихъ проекціяхъ 120° (углы FCH и HJF) линія дѣлящая ихъ по поламъ (CJ) *непараллельна* плоскости проекцій, а въ углахъ измѣряющихся въ своихъ проекціяхъ 60° (углы CFJ и CHJ) линія дѣлящая ихъ пополамъ (FH) *параллельна* плоскости проекцій и проектируется въ свою натуральную величину.

§ 5. Для большей простоты и опредѣленности въ выраженіяхъ въ дальнѣйшемъ изложеніи будемъ пользоваться слѣдующею терминологіею:

Направленія трехъ главнѣйшихъ измѣреній предмета или вообще три направленья попарно перпендикулярныя между собою, относительно которыхъ избирается плоскость изометрическихъ проекцій, будемъ называть *изометрическими направленіями*.

Три линіи, проведенныя изъ какой либо точки въ пространствѣ параллельно изометрическимъ направленіямъ, будемъ называть *изометрическими осями*, а точку изъ которой онѣ проведены *началомъ изом. осей*. Изометрическія оси проектируются въ три линіи сходящіяся въ одной точкѣ и образующія между собою углы въ 120°; эти три линіи будемъ называть *проекціями изометрическихъ осей*, а точку ихъ схода—*проекціею начала*.

Всѣ линіи, входящія въ очертаніе предмета и параллельныя главнѣйшимъ его измѣреніямъ или другимъ какимъ либо направленіямъ относительно которыхъ избирается плоскость проекцій, будемъ называть *изометрическими линіями*.

Всѣ вспомогательныя линіи, служащія для опредѣленія положенія точекъ въ пространствѣ относительно избранныхъ изометрическихъ осей и параллельныя послѣднимъ, будемъ называть *изометрическими координатами* *).

Проекціи изометрическихъ линій и координатъ очевидно параллельны проекціямъ изометрическихъ осей и искажены въ одинаковой съ ними степени.

Плоскости параллельныя или проходящія чрезъ какія либо изометрическія, не параллельныя между собою, линіи будемъ называть *изометрическими плоскостями*.

Положеніе плоскости изометрич. проекцій, избранной относительно главнѣйшихъ измѣреній предмета будемъ называть наивыгоднѣйшимъ, а проекцію на такую плоскость *наивыгоднѣйшимъ заданіемъ предмета въ изометрической его проекціи*.

Изометрическую проекцію можно построить на плоскости, избранной относительно трехъ, произвольно взятыхъ попарно перпендикулярныхъ направленій, не параллельныхъ главнѣйшимъ измѣреніямъ предмета, но такая проекція нисколько не отличается отъ всякой ортогональной, на произвольно избранную плоскость проекцій; по ней нельзя судить объ относительныхъ размѣрахъ предмета, измѣрять его. Эти проекціи, собственно говоря, не слѣдовало бы и называть изометрическими, такъ какъ онѣ не удовлетворяютъ основному требованію этого метода—удобоизмѣряемости.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи будемъ разсматривать только наивыгоднѣйшія заданія.

§ 6. Прежде чѣмъ приступить къ изложенію способовъ построенія изометрическихъ проекцій слѣдуетъ условиться относительно масштаба.

Въ большинствѣ случаевъ предметъ представляется на чертежѣ не въ натуральную величину, а въ нѣкоторую долю натуральной, напр. $^1/_5$, $^1/_{10}$, $^1/_{100}$ и т. п.

Построить ортогональную проекцію предмета въ извѣстную долю натуральной величины значитъ: представить себѣ мысленно предметъ въ 5, 10, 100 разъ меньшимъ его дѣйствительной величины,

---

*) Изом. коор. служатъ въ тоже время координатами точки относительно прямоугольной системы координатныхъ осей въ пространствѣ, если послѣднія совпадаютъ съ осями изометрическими.

избрать наивыгоднѣйшее положеніе плоскостей проекцій и опредѣлить на нихъ величину проекцій линій и угловъ, входящихъ въ очертаніе предмета. Главнѣйшія измѣренія мысленно представленнаго предмета, параллельныя избранной плоскости, будутъ проектироваться въ свою натуральную величину, не искажаясь, т. е. равняться своимъ проекціямъ; а такъ какъ главнѣйшія измѣренія мысленно представлены въ 5, 10, 100 разъ меньше настоящихъ линій, то и проекціи будутъ въ 5, 10, 100 разъ меньше самихъ линій. Измѣривъ длину проекціи какой либо линіи, завѣдомо параллельной плоскости проекцій и, увеличивъ ее въ 5, 10, 100 разъ, будемъ знать дѣйствительную длину самой линіи.

При построеніи проекціи изометрической, представляя себѣ мысленно предметъ въ 5, 10, 100 разъ меньше его дѣйствительной величины и избирая извѣстнымъ образомъ плоскость проекцій, мы получили бы искаженныя проекціи главнѣйшихъ измѣреній, мысленно представленнаго предмета, при чемъ проекціи были бы меньше воображаемыхъ линій въ отношеніи $1:\mathrm{Cos}\omega$ или $1:0{,}8165$.

Если предметъ былъ мысленно представленъ въ 10 разъ меньшимъ, то единица длины каждаго изъ главнѣйшихъ измѣреній его представляетъ въ проекціи длину $^1/_{10}.\ \mathrm{Cos}\omega$ т. е. 0.08165 натуральной величины. Очевидно какъ построеніе такъ и измѣреніе такихъ проекцій неудобно. Чтобы не имѣть дѣла съ несоизмѣримыми величинами ($\mathrm{Cos}\omega$) можно поступить такимъ образомъ: представимъ себѣ мысленно предметъ не въ 10 или 100, а въ 10 $\mathrm{Cos}\omega$ или 100 $\mathrm{Cos}\omega$ разъ меньшимъ; въ такомъ случаѣ величина главнѣйшихъ измѣреній воображаемаго предмета будутъ составлять $\frac{1}{10\ \mathrm{Cos}\omega}$ или $\frac{1}{100\ \mathrm{Cos}\omega}$ долю натуральной ихъ величины (больше чѣмъ $^1/_{10}$ или $^1/_{100}$); эти уменьшенные размѣры предмета въ своихъ проекціяхъ исказятся, будутъ меньше самихъ воображаемыхъ линій въ отношеніи $1:\mathrm{Cos}\omega$, такъ что единица длины линіи въ своей проекціи будетъ имѣть величину $\frac{1}{10\ \mathrm{Cos}\omega}.\ \mathrm{Cos}\omega$ или $\frac{1}{100\ \mathrm{Cos}\omega}\ \mathrm{Cos}\omega$ т. е. составлять $^1/_{10}$ или $^1/_{100}$ натуральной величины. Измѣривъ длину изометрической проекціи какого либо изъ главнѣйшихъ измѣреній и увеличивъ ее въ 10 или 100 разъ, получимъ дѣйствительную длину самой линіи.

Собственно говоря масштабъ такого чертежа $\frac{1}{nCos\omega}$, длина же проекцій составляетъ $^1/_n$ долю натуральной величины, почему и принято считать за масштабъ величину $^1/_n$, который, въ отличіе отъ обыкновеннаго масштаба, слѣдуетъ называть *изометрическимъ масштабомъ*.

Часто изометрическую проекцію приходится строить по проекціямъ ортогональнымъ. Если ортогональная проекція составлена въ масштабѣ $^1/_n$, то, избирая для проекціи изометрической масштабъ $\frac{1}{nCos\omega}$, т. е. изометрическій масштабъ тоже въ $^1/_n$, абсолютная величина проекцій главнѣйшихъ измѣреній въ обоихъ проекціяхъ будетъ одинаковая, это обстоятельство въ значительной степени облегчаетъ построеніе изометрическихъ проекцій.

# Построеніе изометрическихъ проекцій предметовъ съ прямолинейными очертаніями *).

§ 7. Приступая къ построенію изометрической проекціи надо опредѣлить, съ какой стороны данный предметъ можетъ быть удобнѣе разсмотрѣнъ. Опредѣливъ такимъ образомъ приблизительно точку зрѣнія, сообразно этому избираютъ главныя изометрическія оси параллельно главнѣйшимъ измѣреніямъ и, по возможности, по направленію какихъ либо линій, входящихъ въ очертаніе предмета. Діагональ куба построеннаго на избранныхъ главныхъ осяхъ опредѣлитъ направленіе лучей зрѣнья и положеніе плоскости проекцій.

Способъ построенія изометрическихъ проекцій не зависитъ конечно отъ того, опредѣляемъ ли мы размѣры предмета непосредственнымъ измѣреніемъ его или же заимствуемъ ихъ изъ имѣющихся ортогональныхъ проекцій предмета.

§ 8. Пусть ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ $A_{11}B_{11}C_{11}D_{11}$ (чер. 5), будутъ дан-

*) Изометрическая проекція, какъ частый случай проекціи ортогональной, можетъ быть получена перемѣною плоскостей проекцій, но рядъ геометрическихъ построеній, связанныхъ съ такою перемѣною (перемѣнять плоскости проекцій для перехода отъ наивыгоднѣйшаго заданья въ ортогональныхъ проекціяхъ къ проекціямъ на изометрическую плоскость, приходится два раза) дѣлаетъ этотъ путь затруднительнымъ, а потому обыкновенно изометрическія проекціи строятъ непосредственно.

ныя ортогональныя проекціи прямоугольнаго параллелепипеда и требуется построить изометрическую его проекцію.

Точку зрѣнія изберемъ такимъ образомъ, чтобы въ сторону смотрящаго были обращены ребра параллелепипеда, сходящіеся напр. въ точкѣ $B_{11}$.

Ребра $A_{11}B_{11}$, $C_{11}B_{11}$ и $B_1B_{11}$ попарно перпендикулярны между собою и составляютъ главнѣйшія измѣренія параллелепипеда, такъ что ихъ можно принять за главныя изометрическія оси.

Плоскость бумаги, на которой требуется построить проекцію, принимаемъ за плоскость проекцій, избираемъ на ней произвольную точку $B''$ (чер. 6), проводимъ чрезъ нее три линіи $aa_1$, $bb_1$, $cc_1$, составляющія между собою углы въ 60°; линіи эти и примемъ за проекціи главныхъ изометрическихъ осей. Проекціи всѣхъ другихъ изометрическихъ линій будутъ параллельны проекціямъ осей.

Примемъ точку $B''$ за проекцію точки $B_{11}$. Проекція ребра $B_{11}$ $B_1$ направится отъ точки $B''$ къ $b_1$. Принимая изометрическій масштабъ одинаковымъ съ тѣмъ, въ которомъ дана проекція ортогональная, можемъ величину ортогон. пр. $B_{11}$ $B_1$ отложить отъ точки $B''$ по направленію изометрической его проекціи $B''$ $b_1$; пусть $B'$ будетъ проекція точки $B_1$. Откладывая отъ $B''$ по направленіямъ $B''a$ и $B''c$ величины изом. пр. реберъ $B_{11}$ $A_{11}$ и $B_{11}$ $C_{11}$ получимъ точки $A''$ и $C''$—изометрическія проекціи точекъ $A_{11}$ и $C_{11}$. Для построенія проекцій реберъ $A_{11}$ $D_{11}$, $A_{11}$ $A_1$ и $C_{11}$ $C_1$ проводимъ линіи $A''$ d, $A''$ e, и $C''$ f параллельно направленіямъ проекцій соотвѣтственныхъ главныхъ изом. осей. На этихъ линіяхъ откладываемъ величину реберъ $A_{11}$ $D_{11}$, $A_{11}$ $A_1$ и $C_{11}$ $C_1$. Точки $D''$, $A'$ и $C'$ будутъ изом. пр. соотвѣтственныхъ точекъ параллелепипеда. Соединяемъ $D''$ съ $C''$, $A'$ съ $B'$, $C'$ съ $B'$.

$A''$ $B''$ $C''$ $D''$ $A'$ $B'$ $C'$ будетъ изометрическая проекція видимой части параллелепипеда. Для построенія невидимыхъ частей проводимъ пунктиромъ линію $D''$ $D'$, откладываемъ на ней величину ребра $D_{11}$ $D_1$ и соединимъ $D'$ съ $A'$ и $C'$.

Еслибы точка зрѣнія была избрана иначе, напр. такимъ образомъ, чтобы къ смотрящему были обращены ребра сходящіяся въ точкѣ $B_1$ проекція приняла бы видъ показанный на чер. 7.

Изометрическая проекція куба представлена на чер. 8 и 9. Всѣ ребра куба равны и изометричны, а потому равны и въ проекціи, контуръ которой имѣетъ поэтому фигуру правильнаго шестиугольника.

§ 9. По данной ортогональной проекціи пирамиды построить изометрическую ея проекцію (чер. 10).

Направленія главнѣйшихъ измѣреній пирамиды будутъ: высота ея $S_{11}$ S и два произвольно взятыя направленія въ плоскости основанія. Въ периметрѣ основанія нѣтъ двухъ сторонъ, которыя были бы взаимно перпендикулярны, а потому за главныя изометрическія оси можемъ принять только одну изъ сторонъ пирамиды, за другія же два приходится взять какія либо линіи перпендикулярныя первой, при чемъ одна изъ нихъ должна лежать въ плоскости основанія пирамиды, другая быть параллельна высотѣ ея. Пусть AF, FG и $F_1$F будутъ ортогональныя проекціи изометрическихъ осей. Приступимъ къ построенію изометрической проекціи.

На бумагѣ, какъ на плоскости изом. пр. беремъ какую либо точку F′, которую и принимаемъ за проекцію начала изометрическихъ осей. Чрезъ эту точку проводимъ направленія проекцій изометрическихъ осей.

Построимъ изом. пр. пирамиды такимъ образомъ, чтобы зрителю видны были грани сходящіеся въ точкѣ B, т. е. грани $AS_{11}B$, $BS_{11}C$ и основаніе.

Откладываемъ отъ точки F′ по направленію F′a, какъ направленію проекціи изом. оси FA, изометрическія координаты точекъ B и A, т. е. отрѣзки FB и FA. Точки B′ и A′ будутъ изом. проекціи точекъ B и A *). Для построенія проекцій остальныхъ точекъ у насъ не имѣется данныхъ. Изъ точекъ C, D и E въ горизонтальной проекціи опустимъ перпендикуляры на линію FA. Перпендикуляры эти, будучи параллельны FG—второй изометрической оси, очевидно будутъ линіями изометрическими и могутъ служить вмѣстѣ съ разстояніями ихъ основаній, точекъ $C_1$, $D_1$ и $E_1$ отъ начала изом. осей, точки F—координатами точекъ C, D и E. Имѣя изом. координаты точекъ, легко построить изом. проекціи ихъ. Для этого отъ точки F′ на линіи F′a откладываемъ отрѣзки $F'C'_1$, $F'D'_1$ и $F'E'_1$ равные $FC_1$, $FD_1$ и $FE_1$. Чрезъ точки $C'_1$, $D'_1$ и $E'_1$ проводимъ направленія проекцій ординатъ $CC_1$, $DD_1$ и $EE_1$ параллельно направленію

*) Изометрическій маштабъ будемъ всегда принимать одинаковымъ съ тѣмъ, въ которомъ даны проекціи ортогональныя.



9826

БИБЛИОТЕКА Белорусского института инженеров железнодорожного транспорта

$Fg$, проекціи второй изометрической оси $FG$ и откладываемъ на нихъ отъ точекъ $C'_1$, $D'_1$ и $E'_1$, величины ординатъ $CC_1$, $DD_1$ и $EE_1$. Точки $C'$, $D'$ и $E'$ будутъ изометрическія проекціи точекъ $C_1$ $D_1$ и $E_1$. Соединяя точки $B'$, $C'$, $D'$, $E'$ и $A'$ прямыми линіями получимъ изометрическую проекцію периметра основанія пирамиды.

Такимъ же образомъ опредѣлится изом. проекція точки $S$, основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины $S_{11}$. Пусть $S'$ будетъ эта проекція. Чрезъ точку $S'$ проводимъ направленіе проекціи высоты пирамиды $SS''$ параллельно $F'f$—проекціи третьей изометрической оси $FF_1$ и откладываемъ на немъ отъ точки $S'$ высоту пирамиды $SS''$. Точка $S''$ будетъ изом. проекція вершины пирамиды. Соединивъ ее съ точками $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ и $E'$ получимъ изом. проекцію всей пирамиды $S$ $A$ $B$ $C$ $D$ $E$.

§ 10. Изъ этихъ двухъ примѣровъ видно, что построеніе изометрической проекціи какого либо предмета сводится къ построенію изом. пр. точекъ по ихъ изометрическимъ координатамъ, которыя мы всегда можемъ опредѣлить по ортогональной проекціи того же предмета. На чертежахъ 11 по 14 приведенъ рядъ примѣровъ построенія изом. проекцій, причемъ пунктиромъ обозначены всѣ вспомогательныя линіи. Точка зрѣнія избиралась различнымъ образомъ, чтобы достигнуть большей наглядности.

Построеніе изометрической проекціи начинается съ опредѣленія направленій проекцій изометрическихъ осей или направленій проекцій главнѣйшихъ измѣреній. Три линіи показывающія это направленіе составляютъ между собою углы по 60°, слѣдовательно для построенія ихъ достаточно начертить кругъ (чер. 15), взять на немъ одну произвольную точку, изъ нее какъ изъ центра радіусомъ того же круга засѣчь окружность въ двухъ точкахъ и провести чрезъ центръ и три точки на окружности линіи. Точки на окружности будутъ соотвѣтствовать вершинамъ вписаннаго правильнаго шестиугольника. Стороны шестиугольника будутъ параллельны тремъ вышеупомянутымъ линіямъ. Ими можно пользоваться для построенія другихъ параллельныхъ линій.

Построеніе тѣхъ же направленій можно сдѣлать пользуясь чертежнымъ шестиугольникомъ, одинъ изъ острыхъ угловъ котораго долженъ равняться 60° *). Проводимъ по линейкѣ $ab$ линію $AB$.

*) При этомъ меньшій катетъ равенъ половинѣ гипотенузы.

(чер. 16). Прикладывая къ линейкѣ треугольникъ cde и проводимъ линію CD. Линейку прикладываемъ къ треугольнику вдоль стороны cd и проводимъ линію CF (чер. 17). Треугольникъ перекладываемъ въ положеніе (чер. 18) и проводимъ линію CE, которую можемъ продолжить до CG по линейкѣ, положенной вдоль стороны треугольника cd.

При построеніи изом. проекцій приходится проводить цѣлый рядъ линій параллельныхъ тремъ опредѣленнымъ направленіямъ и откладывать на нихъ величины, выражающіяся болѣе или менѣе простыми числами. Напр. при построеніи проекцій каменной кладки, деревянныхъ сопряженій и т. п. приходится откладывать величины выражающіяся въ сотыхъ доляхъ сажени, дюймахъ и т. п. Масштабъ избирается такимъ образомъ чтобы напр. въ проекціи 0,001 сж. выражала собою 0,01 или 0,1 сж., восьмая или двѣнадцатая доля дюйма—одинъ дюймъ, футъ и т. п. Построеніе проекцій должно въ значительной степени облегчиться, если имѣть бумагу съ назначенными уже на ней направленіями проекцій и нанесенными на нихъ дѣленіями, напр. въ 0,001 сж., въ $^1/_8$ долю дюйма и т. п. Подобная бумага будетъ играть роль обыкновенній клѣтчатки, почему ее и можно назвать *изометрическою клѣтчаткою*, такъ какъ она служитъ для упрощенія построенія проекцій изометрическихъ. Такая клѣтчатка должна бы заключать въ себѣ три ряда параллельныхъ линій, углы между направленіями которыхъ равны 60°, при чемъ клѣтки имѣли бы форму ровностороннихъ треугольниковъ, но можно ограничиться всего двумя рядами параллельныхъ линій, пересѣкающихся подъ углами 60° и 120° и образующими клѣтки въ формѣ ромбовъ. Направленія проекцій линій параллельныхъ третьему измѣренію опредѣляются точками пересѣченій этихъ двухъ рядовъ параллельныхъ линій и совпадаютъ съ направленіями малыхъ діагоналей ромбовъ. Малая діагональ этихъ ромбовъ равна сторонѣ (ромбъ этотъ состоитъ изъ двухъ равностороннихъ треугольниковъ), а потому точки пересѣченія, расположенныя по направленію малыхъ діагоналей служатъ точками дѣленія проекцій линій, параллельныхъ третьему измѣренію, на такія же части, на какія раздѣлены проекціи линій, параллельныхъ двумъ другимъ направленіямъ. Точки пересѣченія линій по направленію большихъ діагоналей ромба опредѣляютъ положеніе перпендикуляра къ направленію малыхъ діагоналей это облегчаетъ построеніе прямыхъ угловъ, при различныхъ вспомогательныхъ построеніяхъ, къ которымъ приходится прибѣгать при составленіи изометрическихъ проекцій.

## Измѣреніе предмета по его изометрической проекціи.

§ 11. Измѣреніе длины линій изометрическихъ дѣлается непосредственно по ихъ проекціямъ; для измѣренія же линій не изометрическихъ приходится прибѣгать къ особымъ построеніямъ. Кромѣ линій можетъ явиться надобность измѣрять углы.

Вообще длина линіи не изометрической равна діагонали прямоугольнаго параллелепипеда, ребра котораго равны разностямъ проекцій—изометрическихъ координатъ крайнихъ точекъ.

Пусть AB (чер. 19) будетъ проекція не изометрической линіи. Проекціи изометрическихъ координатъ крайнихъ точекъ ея намъ извѣстны. Такъ проекціи координатъ точки A: параллельная оси CF—линія Ca, параллельная оси CD—ab, параллельная оси CE—bA проекціи координатъ точки B: параллельная оси CF—линія Cc, параллельная оси CD—cd, параллельная оси CE—dB. Длина координатъ измѣряется непосредственно по ихъ проекціямъ.

Если построить точки G, H, J, K, L, M, по различнымъ возможнымъ комбинаціямъ координатъ точекъ A и B, и соединить ихъ прямыми AG, GH, HJ, KA, AL, GM, HB, JK, LM, MB, BK и KL, получимъ прямоугольный параллелепипедъ AGHJBKLM въ которомъ линія AB будетъ діагнолью. Проведемъ діагнольную плоскость ALBH, которая пересѣкетъ грани AGHJ и BKLM по прямымъ AH и BL. Плоскость ALBH, какъ діагональная, перпедикулярна къ основаніямъ прямоугольнаго параллелепипеда, а потому углы ALB и AHB въ треугольникахъ ALB и AHB прямые и AB, какъ гипатенуза

$$\text{будетъ} = \sqrt{AL^2+LB^2}$$

но LB діагноль прямоугольника LMBK или гипотенуза треугольниковъ LKB и LMB, а потому

$$LB^2 = LK^2 + KB^2$$

$$\text{слѣдовательно } AB = \sqrt{AL^2+LK^2+KB^2}$$

Величины же AL, LK и KB ничто иное какъ разности изометрическихъ координатъ точекъ A и B.

Построеніе настоящей величины линіи AB будетъ слѣдующее:

На сторонѣ KP прямаго угла PKQ (чер. 20) отъ вершины его K откладываемъ разность координатъ Cc и Ca, равную ac или KL; на сторонѣ KQ—разность координатъ aƀ и cđ, равную KB и соединяемъ точки K и B прямою LB, которая и выражаетъ дѣйствительную величину діагонали нижняго основанія параллелепипеда, такъ какъ въ дѣйствительности уголъ LKB прямой. Изъ точки L возставляемъ перпендикуляръ къ линіи LB, на которомъ откладываемъ разность координатъ Aƀ и Bđ, равную AL. Соединяя A съ B получимъ дѣйствительную длину линіи AB.

Измѣреніе не изометрическихъ линій упрощается, если они лежатъ въ изометрическихъ плоскостяхъ, т. е. плоскостяхъ параллельныхъ двумъ какимъ либо направленіямъ главнѣйшихъ измѣреній, такъ какъ тогда разность между координатами паралелльными третьему измѣренію равна нулю. Въ этомъ случаѣ длина не изометрической линіи равна гипотенузѣ треугольника, построеннаго на разностяхъ двухъ только координатъ крайнихъ точекъ.

На чер. 21 и 22 показано построеніе дѣйствительной длины реберъ пирамиды На двухъ взаимно перпендикулярныхъ линіяхъ ac и ƀđ отъ точки ихъ пересѣченья $B'$ отложены отрѣзки $B'A$, $B'C$ и $B'B$. Линіи AB и BC представляютъ дѣйствительную длину реберъ AB и BC, лежащихъ въ изометрической плоскости, проходящей чрезъ оси AC и CD.

Возставляя перпендикуляръ $S'S$ къ прямой ac изъ точки $S'$, взятой въ разстояніи $CS'$ отъ C и откладывая на немъ $S'S$ разность координатъ точекъ $S^{\circ}$ и C (или A - все равно) параллельныхъ оси CD и соединяя S съ A и C, получимъ дѣйствительную величину линій SA и SC.

Возставляя изъ S перпендикуляры къ линіямъ SC и SA и откладывая на нихъ $S_oS$ получимъ двѣ точки $S_o$. Соединяя одну точку $S_o$ съ A, другою съ C получимъ дѣйствительную величину реберъ $S_oA$ и $S_oC$. Подобнымъ образомъ построена дѣйствительная величина ребра $S_oB$.

Если изъ точекъ A, B и C радіусами, равными дѣйствительной длинѣ реберъ $AS_o$, $BS_o$, $CS_o$ описать окружности до взаимнаго ихъ пересѣченія, то получатся точки $S_1$, $S_2$, $S_3$. Соединяя ихъ съ точками A,B,C получимъ три треугольника $AS_1B$, $BS_2C$ и $CS_3A$, которые будутъ представлять дѣйствительную величину граней пирамиды. На этихъ треугольникахъ можетъ быть опредѣлена дѣйствительная величина всѣхъ плоскихъ угловъ пирамиды.

§ 12. Такимъ образомъ для опредѣленія дѣйствительной величины угла нужно построить дѣйствительную величину треугольника, построеніе же дѣйствительной величины треугольника сводится къ построенію дѣйствительной величины его сторонъ, т. е. линій. Опредѣленіе величины сторонъ треугольника или вообще какихъ бы то ни было линій, заданныхъ въ изометрическихъ проекціяхъ возможно только въ томъ случаѣ, если извѣстны изометрическія координаты крайнихъ точекъ или разности этихъ координатъ.

§ 12. На проекціяхъ предмета не всегда обозначаются всѣ проекціи координатъ различныхъ его точекъ, а только нѣкоторыя, безусловно необходимыя для опредѣленности самаго заданія. Если заданіе вполнѣ опредѣленно, то всегда имѣется возможность найти проекціи координатъ любой точки.

Общихъ правилъ опредѣленія проекцій координатъ нельзя дать, такъ какъ задача въ каждомъ частномъ случаѣ можетъ быть рѣшаема различно, въ зависимости отъ условій заданья.

Въ нижеслѣдующихъ примѣрахъ показаны нѣкоторые пріемы опредѣленія проекцій координатъ.

1) Положимъ требуется опредѣлить изометрическія координаты (собственно говоря проекціи координатъ, величина которыхъ равна величинѣ самихъ координатъ) точки K, лежащей на грани BSC пирамиды SABC (Чер. 23).

Проведемъ чрезъ точку K линію SK. Такъ какъ S и K лежатъ въ плоскости грани BSC, то линія S K пересѣкаетъ линію BC въ точкѣ G, т. е. въ точкѣ пересѣченія проекцій линій BC и SK. Соединимъ точку H (данную для опредѣленности заданія), основаніе перпендикуляра SH, съ точкою G. Линія HG очевидно лежитъ въ плоскости основанія пирамиды ABC. Чрезъ точку K проведемъ KJ параллельно SH. Линія KJ, имѣя съ плоскостью SGH общую точку K, будетъ очевидно лежать въ плоскости SGH, а потому пересѣкаетъ линію GH въ точкѣ J. По условію наивыгоднѣйшаго заданія SH принято за одно изъ направленій главнѣйшихъ измѣренiй, а плоскость ABC параллельна двумъ другимъ направленiямъ DC и CF; но одна изъ сторонъ периметра основанiя принята за ось изометрiи, слѣдовательно и другiя лежатъ въ плоскости основанiя пирамиды. Въ такомъ случаѣ KJ есть проекцiя одной изъ координатъ точки K, параллельной оси CE. Если изъ J провести двѣ линiи JL и JM параллельно осямъ CD и CF, то онѣ будутъ лежать въ плоскости основанiя пирамиды и пересѣкутъ проекцiи осей CD и CF въ точкахъ L и M. Отрѣзки LJ и MJ и будутъ проекцiи остальныхъ двухъ координатъ точки K.

2) Положимъ, что задана проекцiя усѣченой пирамиды A B C G H F, (чер. 24), проекцiями всѣхъ ея реберъ и проекцiею HJ, ординаты одной изъ вершинъ H, и требуется опредѣлить проекцiи координатъ остальныхъ вершинъ, т. е. точекъ F и G.

Проводимъ чрезъ точку H линiю HK параллельно ребру BC. Линiя HK, какъ имѣющая съ плоскостью BCHG общую точку и параллельныя линiи BC лежащей въ той же плоскости, сама лежитъ въ плоскоскости BCHG, а потому пересѣкаетъ ребро GB въ точкѣ K. Проекцiя линiи HK на плоскости основанiя пирамиды ABC будетъ параллельна самой линiи HK или BC и проходитъ чрезъ точку J. Проводимъ направленiе проекцiи линiи HK на плоскости ABC. Пусть JL будетъ это направленiе. Проекцiя точки K будетъ находиться на линiи JL и опредѣлится, если изъ K проведемъ линiю KM параллельно HJ (или EC) до пересѣченья съ JL. Такимъ образомъ имѣемъ на плоскости ABC, перпендикулярной къ EC двѣ точки B и M, опредѣляющiя направленiе проекцiи ребра GB на ту же плоскость. Проводимъ чрезъ B и M прямую. Проекцiи всѣхъ точекъ ребра BG лежатъ на этой прямой, слѣдовательно и проекцiя точки G. Чтобы получить эту проекцiю проводимъ чрезъ точку G линiю GN параллельно KM (или EC) до пересѣченiя съ BM. Точка N будетъ проекцiя точки G, и GN проекцiя изометрической ея координаты, параллельной EC. Для опредѣленiя остальныхъ двухъ координатъ проводимъ въ плоскости ABC прямыя NO и NP параллельно AC и CD до пересѣченiя съ ними въ точкахъ O и P.

Подобнымъ образомъ получимъ координаты точки F, съ тою только разницею, что сперва надо продолжить линiю AF, такъ какъ иначе HK не пересѣкаетъ ребра AF.

## Построеніе изометрическихъ проекцій кривыхъ линій.

§ 13. Чаще всего приходится строить проекціи круга, а потому разсмотримъ этотъ вопросъ по подробнѣе.

Построеніе проекціи круга значительно облегчается, если онъ лежитъ въ изометрической плоскости. Два взаимно перпендикулярные діаметра, параллельные изометрическимъ направленіямъ, проектируются въ двѣ прямыя, пересѣкающіяся подъ угломъ 120° и 60 и искажаются равномѣрно, слѣдовательно проекціи ихъ имѣютъ одинаковую длину. Эти діаметры будемъ называть изометрическими. Всѣ хорды параллельныя этимъ діаметрамъ будутъ также проектироваться въ прямыя, параллельныя изометрическимъ осямъ, и искажаться одинаково съ діаметрами. Хорды эти будемъ называть тоже изометрическими.

Пусть точка C (чер. 25) будетъ проекція центра круга лежащаго въ плоскости параллельной осямъ OS и OT и требуется построить проекцію окружности круга радіуса R.

Начертимъ по заданному масштабу, въ сторонѣ, кругъ радіуса R (черт. 26) и проведемъ въ немъ какіе либо два взаимно перпендикулярные діаметра AB и DE. Такъ какъ всѣ діаметры круга равны, то любые изъ нихъ, взаимно перпендикулярные, можно принять за параллельные изометрическимъ осямъ. Чрезъ данную точку C проводимъ направленія проекцій этихъ діаметровъ, параллельно проекціямъ изометрическихъ осей и откладываемъ на нихъ величину радіуса R по тому же масштабу, въ которомъ начерченъ кругъ ABDE (вслѣдствіе принятаго соотношенія масштабовъ изометрическихъ и ортогональныхъ проекцій).

Точки a, b, d и e будутъ принадлежать проекціи круга. Четырехъ точекъ недостаточно для опредѣленія проекціи круга, а потому надо построить еще нѣсколько. Проведемъ въ кругѣ ABDE на одинаковомъ разстояніи CP отъ центра C хорды FG, HJ, KL, и MN. Хорды эти, какъ равно удаленныя отъ центра, будутъ равны между собою. Хорды эти параллельныя избраннымъ діаметромъ AB и DE, а разстоянья ихъ отъ центра, измѣряются по направленіямъ тѣхъ же діаметровъ, слѣдовательно абсолютныя величины изометрическихъ проекцій этихъ хордъ и разстояній, какъ линій изометрическихъ, будутъ одинаковы съ ортогональными проекціями тѣхъ же линій. Для построенія изометрическихъ проекцій точекъ F, K, M, G, J, N, L и H на проекціяхъ изометрическихъ діаметровъ отъ точки C откладываемъ величину Cp, чрезъ точки p, p, p, p, проводимъ направленья проекцій хордъ параллельно проекціямъ діаметровъ, а на нихъ откладываемъ въ обѣ стороны отъ точекъ p, p .. длину полухордъ PF, PG и т. д. Точки f, g, h, i, k, l, m, и n будутъ принадлежать проекціи круга. Если бы этихъ точекъ почему либо оказывалось мало для опредѣленія кривизны проекцій, можно было бы подобнымъ же образомъ построить еще 8, 16 и т. д. точекъ. Въ большинствѣ же случаевъ вполнѣ достаточно имѣть 12 точекъ, чтобы по нимъ можно было вычертить плавную кривую.

Вышеуказанное построеніе упрощается, если разстояніе CP брать равнымъ половинѣ радіуса, такъ какъ въ этомъ случаѣ, для опредѣленія величины изометрическихъ хордъ нѣтъ надобности строить вспомогательный кругъ. Соединимъ точки C и B съ точками $M_1$ и $N_1$. Если $CP_1$ = половинѣ CB, то $CP_1 = P_1B$. Углы $M_1P_1C$ и $M_1P_1B$ прямые, катетъ $M_1P_1$—общій, слѣдовательно прямоугольные треугольники $M_1CP_1$ и $M_1BP_1$ равны, откуда заключаемъ о равенствѣ угловъ $M_1CP_1$ и $M_1BP_1$ и гипотенузъ $M_1C$ и $M_1B$. Линія $M_1C$ есть радіусъ круга, слѣдовательно $M_1B$ тоже равна радіусу круга. Сумма катетовъ $P_1C$ и $P_1B$ тоже равна радіусу круга, изъ чего слѣдуетъ, что треугольникъ $M_1CB$ равносторонній и уголъ $M_1CP_1 = 60°$. Тоже самое относится и до треугольниковъ $N_1CP_1$ и $N_1BP_1$, т. е уголъ $BCN_1 = 60°$, откуда $M_1CN_1 = 120°$.

Такимъ образомъ хорда, проведенная на разстояніи полурадіуса отъ центра круга равна разстоянію между точками $M_1$ и $N_1$ концами діаметровъ, проведенныхъ подъ угломъ 120° одинъ къ другому.

Выше было уже объяснено, что два взаимно перпендикулярные діаметра въ своихъ изометрическихъ проекціяхъ пересѣкаются подъ угломъ 120° и 60°. Измѣряя разстоянье между концами полудіаметровъ, сходящихся подъ угломъ въ 120°, получаемъ дѣйствительную длину хорды круга, приведенной на разстояніи половины радіуса отъ центра.

На основаніе вышесказаннаго построеніе круга радіуса R будетъ слѣдующее (чер. 27).

Проводимъ чрезъ c направленія проекцій изометрическихъ діаметровъ и откладываемъ на нихъ отъ точки c величину радіуса R.

Получимъ точки a, b, d и e. Дѣлимъ ca, cb, cd и ce пополамъ и черезъ точки дѣленья p, p... проводимъ линіи параллельныя проекціямъ діаметровъ, это будутъ направленія проекцій хордъ. Измѣряемъ разстояніе ad, или be дѣлимъ его пополамъ (половина ad=as=ds). Половину ad откладываемъ въ обѣ стороны отъ точекъ p, p... по направленіямъ проекцій хордъ. Точки f, g, h, i, k, l, m и n будутъ принадлежать проекціи круга.

Имѣя 12 точекъ, проведеніе плавной кривой проекціи круга не представитъ затрудненія. На изометрической клѣтчаткѣ, если радіусъ круга выражается цѣлымъ числомъ дѣленій клѣтчатки, никакихъ вспомогательныхъ линій проводить не приходится. Вышеприведенное построеніе проекціи круга имѣетъ еще ту выгоду, что точки a, b, d, e, f, g .. суть проекціи точекъ, дѣлящихъ окружность круга на двѣнадцать *равныхъ* частей.

§ 14. Проекція круга на плоскости изометрическихъ проекцій, если послѣдняя не параллельна и не перпендикулярна плоскости круга, представляетъ эллипсъ. Поэтому, зная оси или какіе-либо сопряженные діаметры эллипса – проекціи круга, можно построить самую проекцію круга. Если кругъ расположенъ въ какой либо изометрической плоскости, проекція его представляетъ нѣкоторыя особенности. Изслѣдуемъ эллипсъ — проекцію круга, лежащаго въ изометрической плоскости. Проекціи двухъ взаимноперпендикулярныхъ изометрическихъ діаметровъ, какъ видѣли выше, равны между собою; эти проекціи представляютъ собою два равныхъ сопряженныхъ діаметра эллипса.

Обозначимъ полу-оси эллипса буквами a и b, а два какихъ либо сопряженныхъ полудіаметра буквами $a_1$ и $b_1$.

Изъ аналитической геометріи извѣстно, что

$$a^2 + b^2 = a^2_1 + b^2_1$$

а sinus угла между $a_1$ и $b_1$

$$\operatorname{Sin} \theta = \frac{ab}{a_1 b_1},$$

$$\text{откуда } ab = a_1\, b_1 \operatorname{Sin} \theta$$

Для равныхъ полудіаметровъ эллипса, представляющихъ проекціи изометрическихъ полудіаметровъ круга, величину которыхъ обозначимъ буквою r, приведенныя формулы примутъ видъ:

$$a^2 + b^2 = 2r^2$$

$$ab = r^2 \operatorname{Sin}\theta$$

Но $\operatorname{Sin}\theta = \operatorname{Sin} 120^\circ = \operatorname{Sin} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, слѣдовательно $ab = r^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 2r^2 + r^2\sqrt{3} = (a + b)^2$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = 2r^2 - r^2\sqrt{3} = (a - b)^2$$

откуда

$$a + b = \pm r\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$a - b = \pm r\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$(a + b)(a = b) = a^2 - b^2 = r^2\sqrt{4-3} = r^2 = c^2$ т. е. $c = \pm r$

гдѣ c линейный эксцентриситетъ, т. е. разстояніе фокуса отъ центра.

Пользуясь этимъ свойствомъ, легко опредѣлить фокусы эллипса: (чер. 28). Дѣлимъ уголъ въ $60^\circ$ между проекціями изометрическихъ діаметровъ пополамъ; биссектриса опредѣлитъ направленіе большой оси эллипса; откладываемъ на направленіи большой оси по обѣ стороны отъ центра эллипса C отрѣзки равные r—т. е. длинѣ проекцій двухъ изометрическихъ полудіаметровъ, точки $F_1$ и $F_2$ будутъ фокусы.

Опредѣлимъ величину $\rho_1$ и $\rho_{11}$, радіусовъ векторовъ точекъ A, B, D и $\rho$ лежащихъ на концахъ діаметровъ AB и DE.

Соединяемъ A съ $F_1$ и $F_2$

$$AT_1^{\,2} = AC^2 + CF_1^{\,2} - 2AC \times CF_1 \times \operatorname{Cos} 30^\circ$$

или $$\rho_1^{\,2} = r^2 + r^2 - 2r^2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2r^2 - r^2\sqrt{3}$$

такимъ же образомъ $\rho^2_{\,2} = r^2 + r^2 + 2r^2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2r^2 + r^2\sqrt{3}$

откуда

$$\rho_1 = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\rho_2 = r\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Но по даказанному выше

$$r\sqrt{2-\sqrt{3}} = a - b$$

$$r\sqrt{2+\sqrt{3}} = a + b$$

слѣдовательно

$$\rho_1 = a - b$$

$$\rho_2 = a + b$$

откуда $2a = \rho_1 + \rho_2$ $2b = \rho_2 - \rho_1$

Продолжимъ $F_2A$ и засѣкемъ изъ A, какъ изъ центра, радіусомъ $=\rho_1$ точки P и R.

$F_2P = \rho_2 - \rho_1 = 2b =$ малой оси.

$F_2R = \rho_2 + \rho_1 = 2b =$ большой оси.

Зная положеніе фокусовъ и длину большой оси можно начертить эллипсъ непрерывнымъ движеніемъ.

Нетрудно убѣдиться въ томъ, что большая ось представляетъ собою дѣйствительную длину діаметра круга въ неискаженномъ видѣ *) въ масштабѣ $\frac{1}{n\cos\omega}$ (а не въ изометрическомъ масштабѣ $\frac{1}{n}$), а малая ось представляетъ собою наиболѣе искаженную проекцію діаметра, направленную по линіи наибольшаго уклона плоскости круга. Величина a можетъ быть выражена въ r, дѣйствительно: изъ (1) слѣдуетъ: $2a = r\sqrt{2-\sqrt{3}} + r\sqrt{2+\sqrt{3}}$

возвышая въ квадратъ получимъ:

$$4a^2 = r^2(2-\sqrt{3}) + r^2(2+\sqrt{3}) + 2r^2\sqrt{4-3} = 4r^2 + 2r^2$$

откуда $a^2 = r^2\,\frac{6}{4}$ или $a = r\sqrt{\frac{3}{2}}$ т. е. $a = \frac{r}{\cos\omega}$ такъ какъ $\cos\omega = \sqrt{\frac{2}{3}}$

§ 15. Если плоскость круга не изометрична, то въ такомъ кругѣ нельзя провести двухъ взаимно перпендикулярныхъ діаметровъ, параллельныхъ двумъ изометрическимъ осямъ, а потому вы-

*) Каково бы ни было положеніе круга относительно плоскости изометрическихъ проекцій, всегда одинъ изъ діаметровъ будетъ параллеленъ плоскости проекцій, слѣдовательно во всякой проекціи круга одинъ изъ діаметровъ будетъ представлять настоящую его длину; это и будетъ большая ось эллипса. Изъ этого слѣдуетъ, что во всѣхъ проекціяхъ одного и того же круга большія оси равны.

шеприведенное построеніе эллипса, проекціи круга, невозможно. Въ этомъ случаѣ приходится строить эллипсъ по двумъ сопряженнымъ діаметромъ, проекціямъ двухъ какихъ либо завѣдомо взаимно перпендикулярныхъ между собою діаметровъ круга.

Изъ различныхъ способовъ построенія эллипса избираемъ тотъ, который даетъ возможность имѣть произвольное число точекъ въ любой части эллипса, независимо одна отъ другой. Это удобно въ томъ отношеніи, что можетъ быть достигнута произвольная точность постоенія кривой и той только ея части, которая нужна для чертежа.

Способъ этотъ можетъ быть названъ способомъ описанныхъ квадратовъ. Сущность его состоитъ въ слѣдующемъ:

Строимъ квадратъ ABDE (черт. 29), сторона котораго равна діаметру круга—2R. Дѣлимъ стороны его по поламъ въ точкахъ F, G, H, J и соединяемъ G съ F и H съ J. Дѣлимъ AG на произвольное число равныхъ частей, пусть, a, b, c... будутъ точки дѣленія. Дѣлимъ GC на такое же число равныхъ частей, пусть $a_1$, $b_1$, $c_1$.... будутъ точки дѣленія. Соединяемъ точку J съ точками a, b, c.... прямыми Ja, Jb, Jc.... Проводимъ чрезъ точку H и точки $a_1$, $b_1$, $c_1$ ... линіи $Ha_1$, $Hb_1$, $Hc_1$.... до пересѣченія съ линіями Ja, Jb, Jc въ точкахъ, $k_1$, $k_2$, $k_3$.... Геометрическое мѣсто точекъ $k_1$, $k_2$, $k_3$...., построенныхъ указаннымъ способомъ, есть кругъ, діаметръ котораго$=2R$, т. е. сторонѣ квадрата ABDE.

Докажемъ это. Разсмотримъ треугольники JAb и $HCb_1$. Въ нихъ стороны $HC=AJ$ какъ половины равныхъ сторонъ JH и AB; $Ab=Cb_1$ какъ равное число одинаковой длины частей, на которыя раздѣлены линіи AG и CG; углы при A и C прямые, слѣдовательно треугольники Jab и $HCb_1$ равны между собою, откуда слѣдуетъ равенство угловъ AJb и $CHb_1$.

Въ треугольникахъ $JHk_2$ и $HCb_1$ углы $JHk_2$ или $CHb_1$ общіе. Уголъ $Cb_1H=90°-CHb_1$. Уголъ $HJk_2=HJA-AJb=90°-AJb=90-CHb_1$ т. е. $HJk_2=Cb_1H$. Слѣдовательно треугольники $JHk_2$ и $CHb_1$, имѣющіе по два равныхъ угла, подобны, а третьи ихъ углы равны т. е. $Jk_2H=HCb_1=90°$. Изъ этого слѣдуетъ что $Hk_2$ перпендикулярно Jb. Подобнымъ образомъ доказывается перпендикулярность остальныхъ линій Ja, Jb. Jc.... къ линіямъ $Ha_1$, $Hb_1$.... И такъ углы $Jk_1H$, $Jk_2H$, $Jk_3H$.... прямые, стороны ихъ проходятъ чрезъ двѣ постоянныя точки J и H, изъ чего слѣдуетъ, что вершины этихъ угловъ лежатъ на окружности круга, построеннаго на JH какъ на діаметрѣ или, другими словами, что окружность круга, построеннаго на JH, какъ на діаметрѣ есть геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія $k_1$, $k_2$.... Положимъ, что всѣ вышеприведенныя построенія точекъ круга сдѣланы въ нѣкоторой плоскости въ пространствѣ. Проекція такого круга на какую либо плоскость, не параллельную и не перпендикулярную, плоскости этого круга, будетъ эллипсъ; квадратъ ABDE, описанный около круга, будетъ проэктироваться въ нѣкоторый параллелограммъ; линіи FG и HJ въ своихъ проекціяхъ будутъ параллельны проекціямъ соотвѣтственныхъ сторонъ параллелограмма; проекціи точекъ дѣленія a, b, c.... $a_1$, $b_1$, $c_1$.... будутъ лежать на проекціяхъ соотвѣтственныхъ линій, разстоянія между этими проекціями исказятся, но число и равенство разстояній между проекціями этихъ точекъ сохранятся. Проекціи линій Ja, Jb, Jc.... $Ha_1$, $Hb_1$, $Hc_1$.... будутъ пересѣкаться въ проекціяхъ точекъ $k_1$, $k_2$, $k_3$.... но прямые углы между этими линіями исказятся въ своихъ проекціяхъ. Проекціи точекъ $k_1$, $k_2$, $k_3$.... будутъ принадлежать проекціи круга, т. е. лежать на эллипсѣ. Отсюда вытекаетъ слѣдующій способъ построенія эллипса—проекція круга, по проекціямъ двухъ завѣдомо взаимно перпендикулярнымъ діаметромъ: Строимъ параллелограмъ, $A_1$ $B_1$ $D_1$ $E_1$ (чер. 30), стороны котораго параллельны даннымъ проекціямъ діаметровъ $F_1G_1$ и $J_1H_1$ и проходятъ чрезъ конечныя ихъ точки $F_1$, $G_1$, $H_1$ и $J_1$: линіи $A_1G_1$ и $G_1C_1$ дѣлимъ на одно и то же произвольное число равныхъ частей, чрезъ точки дѣленія $a^1$, $b^1$, $c^1$.... и $a_1{}^1$, $b_1{}^1$, $c_1{}^1$.... проводимъ линіи $J_1a^1$, $J_1b^1$.... и $H_1a_1{}^1$, $Hb_1{}^1$.... до взаимнаго пересѣченія въ точкахъ $k^1$, $k^2$, $k^3$.... Точки $k^1$, $k^2$, $k^3$.... будутъ опредѣлять искомую проекцію круга.

Если бы оказалось нужнымъ построить проекціи какихъ либо другихъ промежуточныхъ точекъ, напр. между $k^1$ и $k^2$, дѣлимъ разстояніе $a^1$ $b^1$ и $a_1{}^1$ $b_1{}^1$ пополамъ, чрезъ точки f и $f_1$ проводимъ линіи $J_1f$ и $J_1f_1$, точка ихъ пересѣченія $k_\circ$ будетъ проекціею промежуточной точки.

§ 16. Построимъ изометрическую проекцію круга радіуса R, лежащаго въ плоскости грани ASB пирамиды SABD (чер. 31), и центръ котораго лежитъ въ точкѣ C.

Проекція пирамиды, положимъ, задана проекціями реберъ и проекціею ординаты точки C. (Если бы дана была ордината точки S, то мы могли бы опредѣлить ординату точки C).

Задача сводится къ опредѣленію проекціи двухъ взаимно перпендикулярныхъ діаметровъ, такъ какъ по нимъ мы умѣемъ уже построить эллипсъ, проекцію круга.

Такъ какъ грань SAB не лежитъ въ изометрической плоскости, то расположенный въ ней кругъ не имѣетъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ діаметровъ, которые были бы параллельны изометрическимъ осямъ, а потому мы можемъ взять два какіе нибудь взаимно перпендикулярные діаметры и опредѣлить ихъ проекціи. Рѣшеніе задачи будетъ слѣдующее.

Строимъ неискаженную величину грани SAB. На произвольно взятой прямой откладываемъ отъ точки D координаты точекъ A и B параллельныя оси DY (черт. 32). Возставляемъ изъ $A_1$ перпендикуляръ и откладываемъ на немъ $A_1$ A, ординату точки A, параллельную оси DX. Ордината точки B параллельныя оси DX равна нулю. Линія AB представитъ дѣйствительную длину ребра AB.

Откладываемъ $DS_1$, ординату точки S, параллельную оси DY, возставляемъ перпендикуляръ $S_1$ $S_0$ и откладываемъ на немъ орд. $S_1$ $S_0$ точки S, параллельную оси DX. Соединимъ A съ $S^\circ$, линія $A_0S$ представитъ дѣйствительную величину разстоянія вершины угла A отъ основанія перпендикуляра $SS_0$, опущеннаго изъ S на плоскость основанія пирамиды ABD. Возставляемъ изъ $S_0$ перпендикуляръ $S_0S$ и откладываемъ на немъ ординату $SS_0$ точки S, параллельную оси DU. Соединяя S съ A, получимъ дѣйствительную величину ребра SA. Подобнымъ же образомъ строимъ дѣйствительную величину линіи $S_0B$ и ребра SB. Описывая изъ точекъ A и B радіусами AS и BS дуги, получимъ точку пересѣченія ихъ З′. Соединяя S′ съ A и B, получимъ неискаженную величину грани SAB. Для опредѣленія положенія точки C, проводимъ на изометрической проекціи пирамиды линіи AC и BC до пересѣченія ихъ съ проекціями реберъ BS и AS въ точкахъ E и F. Проекціи этихъ линій на плоскости основанія пирамиды ABD пройдутъ чрезъ точки A и $C_0$ и B и $C_0$. Проекціи точекъ E и F будетъ лежать на пересѣченіи линій $AC_0$ и $BC_0$ съ линіями $EE_0$ и $FF_0$, проведенными параллельно оси OU. $EE_0$ и $FF_0$ будутъ проекціи ординатъ этихъ точекъ, параллельныя оси DU. Ординаты тѣхъ же точекъ, параллельныя другимъ осямъ получимъ проведя $E_0 E_1$ и $F_0 F_1$ параллельно оси OX до пересѣченія съ OY.

По проекціямъ координатъ точекъ E и F опредѣляемъ ихъ положеніе на неискаженной величинѣ реберъ SB и SA (чер. 32). Соединяя точки A съ E и B съ F на неискаженной грани, получимъ дѣйствительное положеніе точки C. Одну изъ линій AE и BF, напр. BF примемъ за направленіе одного изъ діаметровъ круга, тогда перпендикулярный къ нему пойдетъ по направленію линіи HG, перпендикулярной къ BF. Линія HG пересѣкаетъ ребро AB въ точкѣ G. Засѣкемъ линіи BF и HG дугою круга радіоса R изъ C, какъ изъ центра. Пусть точки J и K будутъ точки этого круга. Проводимъ чрезъ нихъ линіи KL и JM параллельно AB, до пересѣченія съ S′ B.

Теперь по точкамъ G, L и M остается опредѣлить положеніе проекцій точекъ J и K, или другими словами величину проекцій ихъ изометрическихъ координатъ. Построенія эти сдѣланы на эпюрѣ (чер. 32). Опредѣливъ проекціи точекъ G, L и M проводимъ чрезъ проекціи точекъ C и G (чер. 31) линію GH — это будетъ направленіе проекціи діаметра, перпендикулярнаго къ діаметру, идущему по линіи BF; чрезъ проекціи точекъ L и M проводимъ линіи параллельныя проекціи ребра AB до пересѣченія ихъ съ проекціями BF и GH въ точкахъ K и J. Отрѣзки CK и CJ будутъ проекціи двухъ взаимно перпендикулярныхъ полудіаметровъ. Откладывая отъ C по направленію CH величину $CJ_1$ а по направленію CF величину $CK_1$ получимъ четыре точки K, J, K′ и J′ — проекціи концовъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ діаметровъ. Строимъ параллелограмъ NOPQ, а въ немъ, извѣстнымъ уже способомъ вписываемъ эллипсъ.

Таже задача можетъ быть рѣшена иначе. Вмѣсто линій AE и BF, взятыхъ для опредѣленія положенія точки C, можно взять линію проходящую чрезъ точки S и C. Опредѣливъ положеніе точки C на неискаженной грани SAB, линію CS можно было бы принять за направленіе одного изъ діаметровъ круга.

§ 17. При построеніи изометрическихъ проекцій зубчатыхъ колесъ и въ другихъ подобныхъ случаяхъ, приходится дѣлить проекцію круга, т. е. эллипсъ на части, соотвѣтствующія равнымъ частямъ окружности круга.

Дѣлается это слѣдующимъ образомъ (чер. 39).:

Пусть эллипсъ ADBE будетъ проекція нѣкотораго круга. Опредѣлимъ величину большой его оси. Для этого изъ C какъ изъ центра описываемъ произвольнымъ радіусомъ дугу и замѣчаемъ точки a и b пересѣченія ея съ эллипсомъ. Дѣлимъ уголъ aCb пополамъ, линія BCA будетъ большая ось. Описываемъ изъ C радіусомъ равнымъ большой полуоси окружность, которую и дѣлимъ на требуемое число частей. Опуская изъ точекъ дѣленія окружности перпендикуляры на большую ось получимъ точки пересѣченія ихъ съ эллипсомъ, которыя и будутъ искомыя.

Еслибы нужно было дѣленіе проекціи круга начать отъ какой либо опредѣленной точки F на эллипсѣ, то изъ этой точки опускаемъ перпендикуляръ на большую ось и продолжаемъ его до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ $F_1$. Начиная дѣленіе окружности отъ точки $F_1$ достигнемъ требуемаго.

§ 18. Построеніе изометрической проекціи эллипса сводится къ опредѣленію проекцій его осей. Зная проекціи осей строимъ параллелограмъ, и вписываемъ въ него эллипсъ, какъ было указано выше. Если эллипсъ имѣетъ оси параллельныя изометрическимъ осямъ, построеніе проекцій немного упрощается.

§ 19. Для построенія изометрической проекціи какой либо плоской кривой, избираютъ, въ плоскости этой кривой, двѣ какія либо пересѣкающіяся прямыя, и опредѣляютъ относительно ихъ ординаты разныхъ точекъ кривой; затѣмъ строятъ изометрическія проекціи избранныхъ линій и проекціи координатъ точекъ кривой. Построеніе такихъ проекцій упрощается, если кривыя лежатъ въ изометрической плоскости.

Построеніе изометрическихъ проекцій кривыхъ двоякой кривизны дѣлается слѣдующимъ образомъ: избираютъ какую либо плоскость, если возможно, изометрическую и опредѣляютъ проекцію кривой на эту плоскость и ординаты разныхъ точекъ кривой относительно этой плоскости. Затѣмъ строютъ, какъ указано выше, проекцію отъ проекціи кривой на избранную плоскость, а затѣмъ проводятъ направленія проекцій ординатъ кривой относительно этой плоскости и откладываютъ на нихъ длину самихъ ординатъ.

Вообще построеніе изометрическихъ проекцій кривыхъ пользованіе такими проекціями крайне затруднительно, и употребляется по этому рѣдко.

На чер. 34, 35 показано построеніе изометрической проекціи винтовой линіи при наивыгоднѣйшимъ заданіи.

## Построеніе изометрическихъ проекцій цилиндрическихъ и коническихъ поверхностей.

§ 20. Методъ изометрическихъ проекцій даетъ возможность строить проекціи упомянутыхъ поверхностей при различныхъ положеніяхъ ихъ относительно изометрическихъ осей, но подобныя проекціи не представляютъ никакихъ преимуществъ предъ ортогональными, на произвольно избранныхъ плоскостяхъ; а потому не имѣютъ никакого практическаго значенія.

Такъ какъ построеніе проекцій кривыхъ линій упрощается, если послѣднія расположены въ изометрическихъ плоскостяхъ, то при заданіи изометрическихъ проекцій такихъ поверхностей двѣ оси изометріи избираются въ плоскости направляющей кривой. Такое заданіе кривыхъ поверхностей будетъ наивыгоднѣйшимъ.

Цилиндръ задается проекціями двухъ основаній и проекціями двухъ *крайнихъ* производящихъ. На чер. 36 показано заданіе цилиндра.

Конусъ задается проекціями основанія, вершины и двухъ *крайнихъ* производящихъ. На чер. 37 показано заданіе конуса.

Въ обоихъ случаяхъ заданіе оставалось бы неопредѣленнымъ, если бы не были даны проекціи ординатъ вспомогательныхъ точекъ. Показанное на чертежахъ заданіе вполнѣ опредѣленно, такъ какъ по данной проекціи всегда можно опредѣлить координаты любой точки поверхности. Опредѣлимъ напр. координаты точки A лежащей на поверхности цилиндра. Проводимъ чрезъ точку A линію BE параллельно проекціямъ крайнихъ производящихъ, очевидно BE будетъ тоже производящая и пересѣкетъ кривыя верхняго и нижняго основанія; проекція линіи BE на плоскости основанія цилиндра пройдетъ чрезъ точку B и будетъ параллелью проекціи оси цилиндра на ту же плоскость. Послѣднюю проекцію получимъ, соединивъ проекціи центровъ обоихъ основаній O и O'. Пусть BD будетъ направленіе проекціи линіи BE. Проекція точки A должна лежать по линіи BD и получится, если чрезъ точку A провести линію AF параллельную оси изометріи CU до пересѣченія съ BE въ точкѣ $A_0$. Проекціи другихъ ординатъ получатся если провести $A_0$ $A_1$ параллельно CX.

Для опредѣленія проекцій координатъ точки A, лежащей на конусѣ, проведемъ SB чрезъ точку A. Линія SB производящая. Проекція SB на плоскости основанія конуса будетъ $BS_0$, на которой должна лежать проекція точки A. Проводя изъ A линію AF параллельно изом. оси CU, получимъ $A_0$.

Такимъ же способомъ рѣшается и обратная задача—опредѣленіе проекцій точекъ по проекціямъ ихъ изометрическихъ координатъ. Такъ напр. зная проекціи координатъ точки A, лежащей на конусѣ (чер. 37), откладываемъ отъ C по оси CY проекцію координаты $CA_1$, проводимъ затѣмъ $A_1$ $A_0$ параллельно оси CX и наконецъ $A_0A_1$ параллельно оси CU. Еслибы даны были только проекціи двухъ координатъ и условіе, что данная точка лежитъ на производящей SB, построили бы проекцію ея $S_0B$ и опредѣлили на ней положеніе проекціи $A_0$, изъ которой провели бы $A_0A$ параллельно CU до пересѣченія съ SB въ точкѣ A.

Линіи сѣченія кривыхъ цилиндрическихъ поверхностей съ произвольно взятыми плоскостями представляютъ эллипсы; сѣченія конуса плоскостями не параллельными производящей или оси, тоже эллипсы. Построеніе изометрическихъ проекцій такихъ сѣченій сводятся къ опредѣленію проекцій осей эллипсовъ, по которымъ и строится самый эллипсъ, проекція сѣченія.

Всѣ задачи относящіяся до кривыхъ поверхностей, легче рѣшать въ проекціяхъ ортогональныхъ и результаты рѣшеній наносить на проекціи изометрическія по проекціямъ изометрическихъ ординатъ точекъ.

## Построеніе изометрическихъ проекцій поверхностей вращенія.

§ 21. Проекція шара на любую плоскость проекцій имѣетъ видъ круга, слѣдовательно и въ изометрической проекціи шаръ проектируется въ кругъ. Кругъ, какъ проекція шара, есть въ тоже время проекція меридіональнаго его сѣченія, параллельнаго плоскости проекцій; линіи и углы, лежащіе въ плоскости параллельной плоскости проекцій проектируется не искажаясь, а потому кругъ—проекція шара—въ изометрической проекціи долженъ представляться въ неискаженномъ видѣ.

Выше мы видѣли, что діаметръ круга, пареллельный плоскости изометрическихъ проекцій проектируется въ большую ось эллипса; очевидно это большая ось и будетъ діаметромъ круга—проекціи шара. Такимъ образомъ для построенія проекціи шара нужно только опредѣлить большую ось эллипса, одной изъ проекцій какого либо меридіональнаго сѣченія шара и, принявъ ее за діаметръ, описать окружность.

Выше было выведено что $a$ или большая полуось эллипса, проекціи круга лежащаго въ изометрической плоскости, равна $\frac{r}{\cos\omega}$, гдѣ r есть искаженная величина радіуса круга, параллельнаго одной изъ изометрическихъ осей. Такимъ образомъ зная r, длину проекцій радіуса, составляющую n—тую долю дѣйствительной величины радіуса R, длина полуоси можетъ быть опредѣлена графически, слѣдующимъ образомъ: строимъ уголъ ω, (чер. 38) отъ вершины его c откладываемъ $cd = r$ и изъ точки d возставляемъ перпендикуляръ до пересѣченія съ другою стороною угла въ точкѣ b.

Величина cb будетъ искомый радіусъ круга—проекціи шара. Дѣйствительно $cb = cd \frac{1}{\cos\omega} = r \frac{1}{\cos\omega}$

На чер. 39 показана проекція шара и меридіональнаго сѣченія его плоскостью параллельною осямъ CX и CY.

§ 22. Поверхности тѣлъ вращенія опредѣляются видомъ кривой производящей. Въ ортогональныхъ проекціяхъ вертикальную плоскость избираютъ параллельно одному изъ меридіональныхъ сѣченій тѣла, а потому производящія проектируется въ неискаженномъ видѣ.

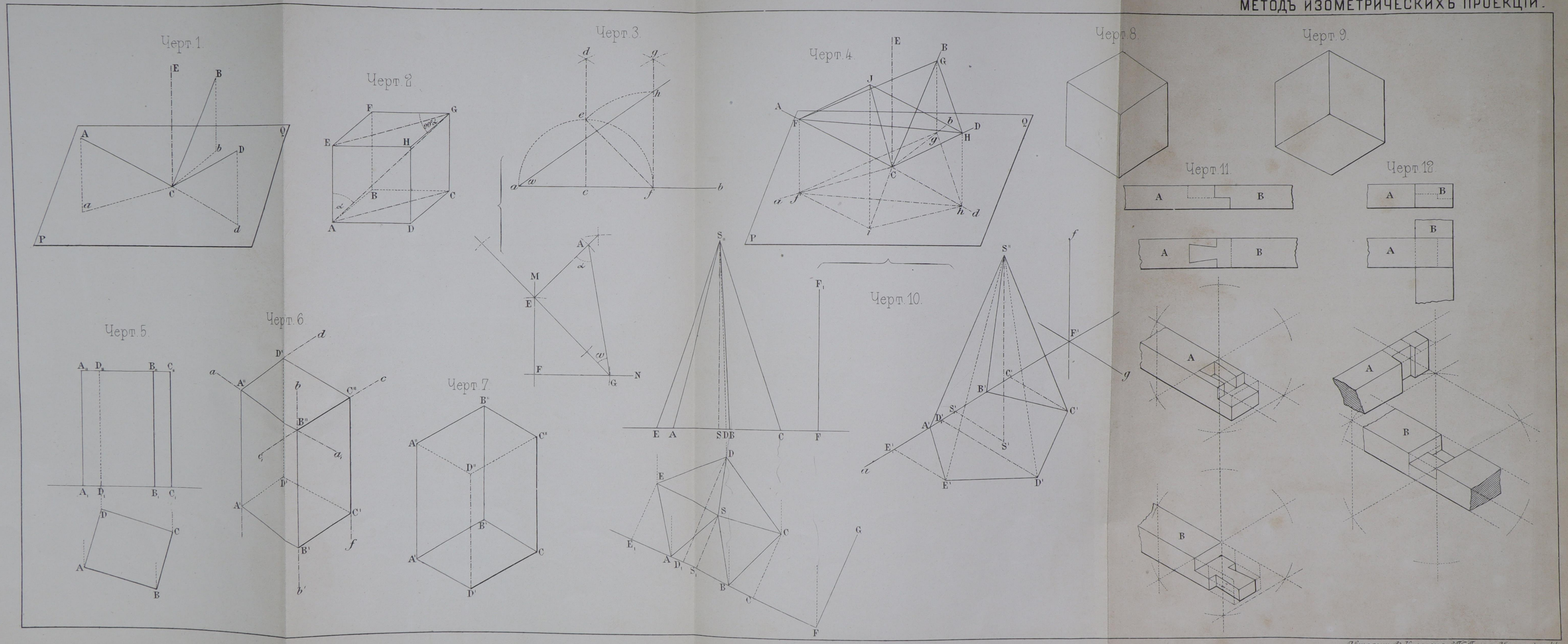
Хотя въ вертикальной проекціи тѣла вращенія третье измѣреніе его, перпендикурное къ этой плоскости, и пропадаетъ, но такъ какъ оно въ дѣйствительности равно другому измѣренію, проектирующемуся въ горизонтальныя линіи и неискажающемуся въ проекціяхъ, то въ этомъ частомъ случаѣ одна только проекція (вертикальная) совершенно достаточна для вполнѣ нагляднаго изображенія предмета (конечно при условіи, что изображаемый предметъ есть тѣло вращенія).

Въ проэкціи изометрической кривая меридіональнаго сѣченія искажается, а потому, по такой проэкціи нельзя себѣ представить истинный видъ этой кривой. Хотя имѣя такую проэкцію всегда можно построить неискаженную фигуру направляющей, но это потребуетъ новыхъ построеній — перехода къ проэкціямъ ортогональнымъ.

Изъ этого заключаемъ, что построеніе изометрическихъ проэкцій тѣлъ вращенія не имѣетъ практическаго значенія: наглядность ихъ уступаетъ наглядности проэкцій ортогональныхъ, а удобоизмѣряемость послѣднихъ ничуть не меньше удобоизмѣряемости проэкцій изометрическихъ. Ввиду же исключительно теоретическаго интереса, представляемаго изометрическими проэкціями тѣлъ вращенія, входить въ разсмотрѣніе способовъ ихъ построенія не будемъ.

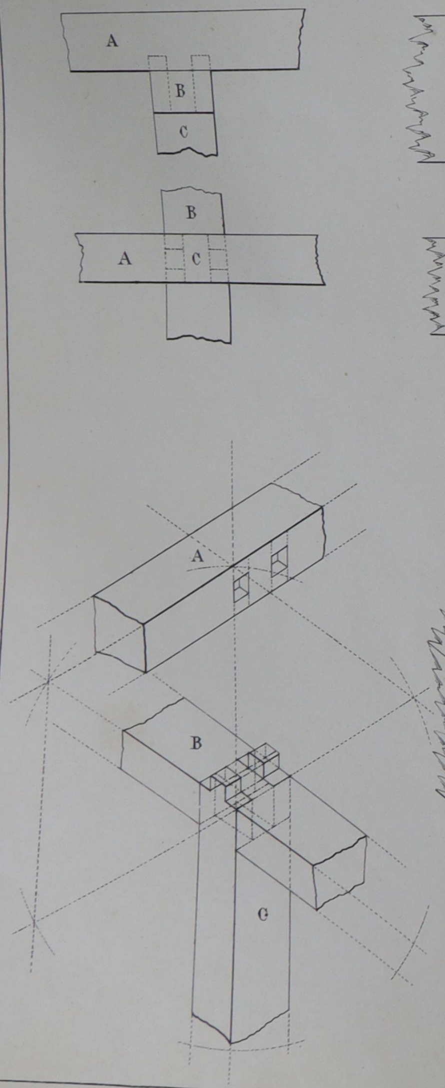
ИНСТ. ИНЖЕН. ПУТ. СООБЩ.
БИБЛІОТЕКА
ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I.

МЕТОДЪ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХЪ ПРОЕКЦІЙ.

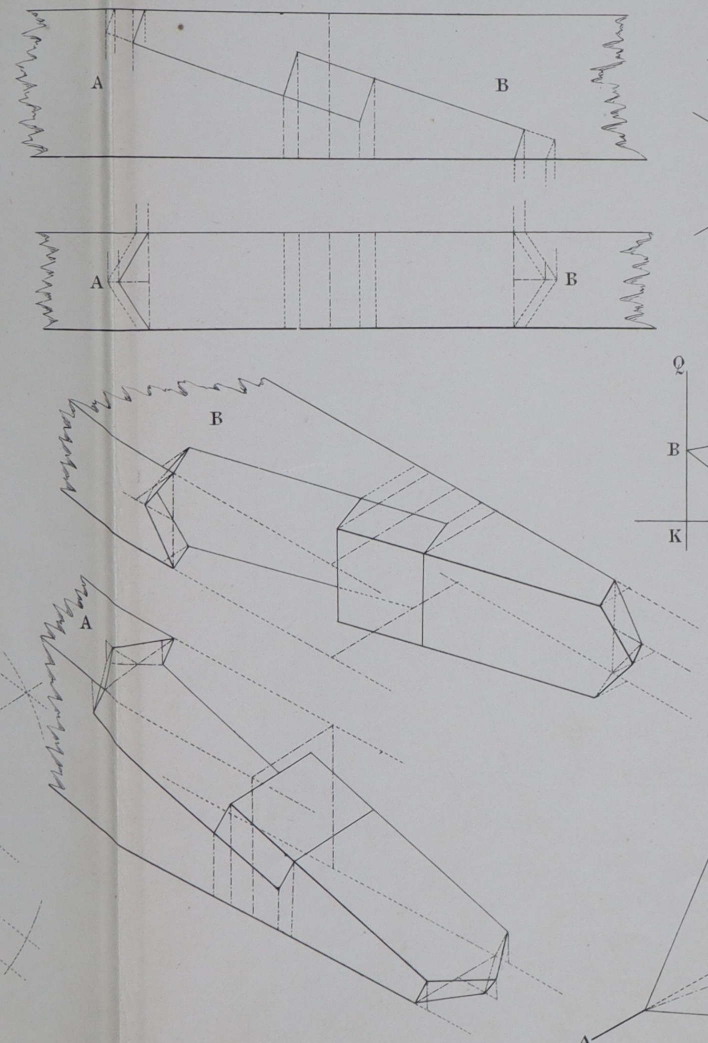



Автолит. Ф. Кремеръ, С.П.б. Пет. ст. Зверинская 44.

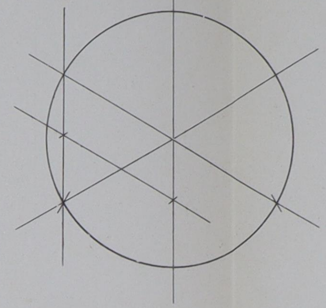
Черт. 13.



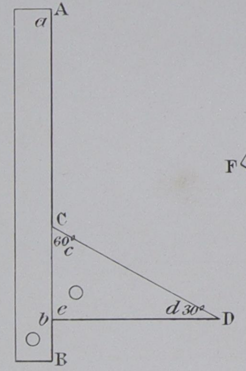

Черт. 14.



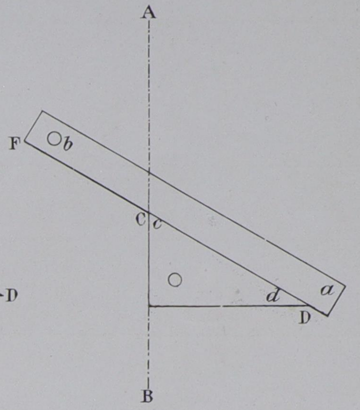

Черт. 15.



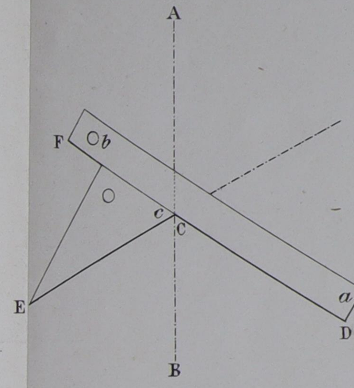
Черт. 16.



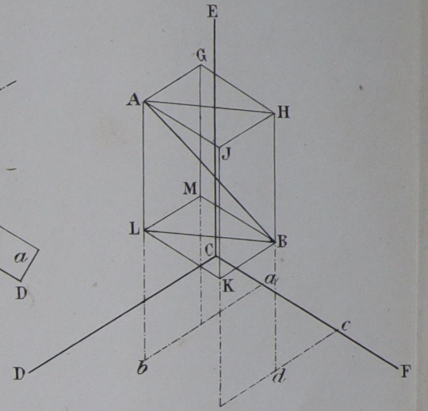

Черт. 17.



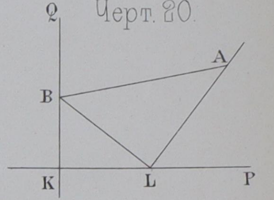

Черт. 18.



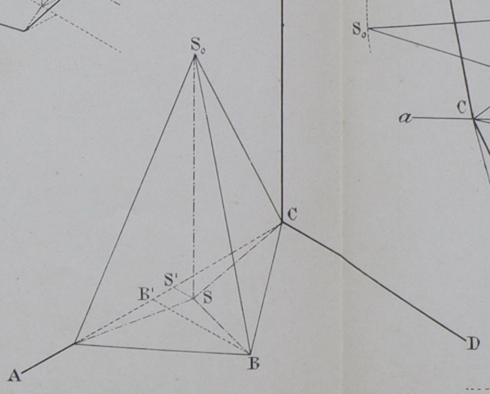

Черт. 19.



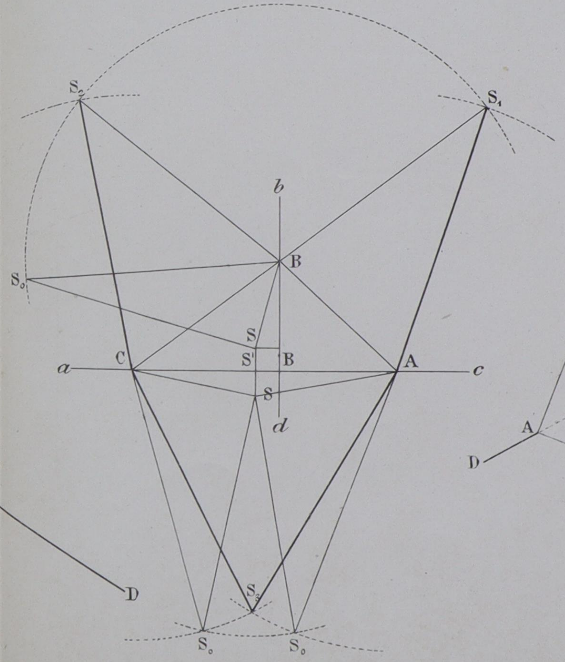

Черт. 20.



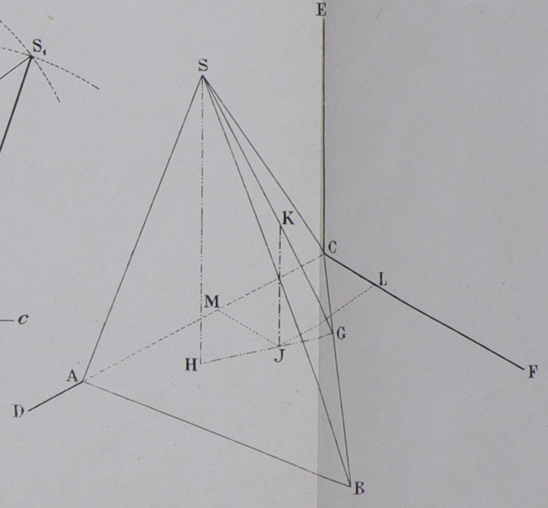

Черт. 21.



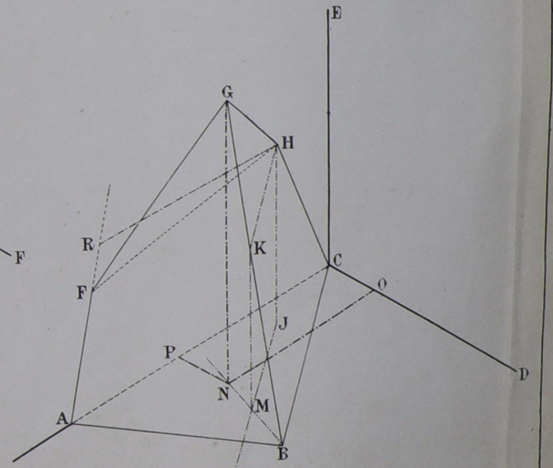

Черт. 22.




Черт. 23.

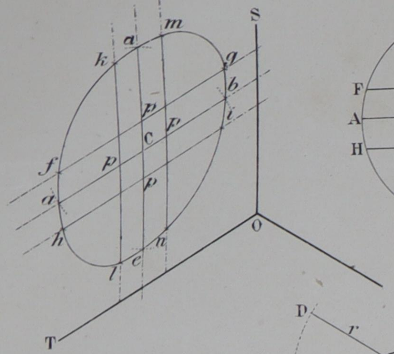



Черт. 24.

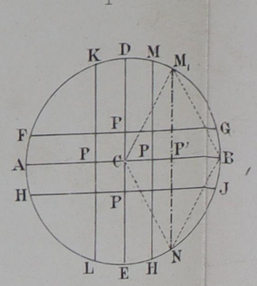



Автолит. Ф. Кремеръ. Пет. ст. Звѣринская 44. СПБ.

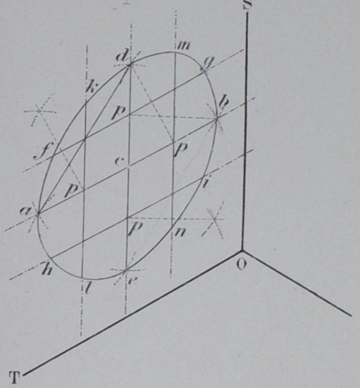
Черт. 25.



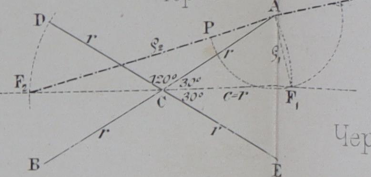
Черт. 26.



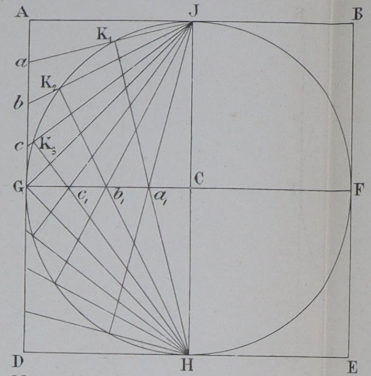
Черт. 27.



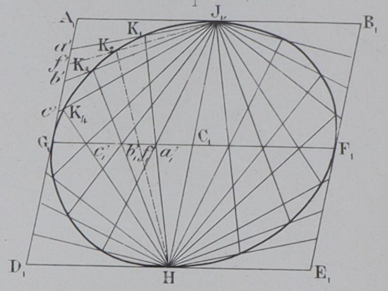
Черт. 28.



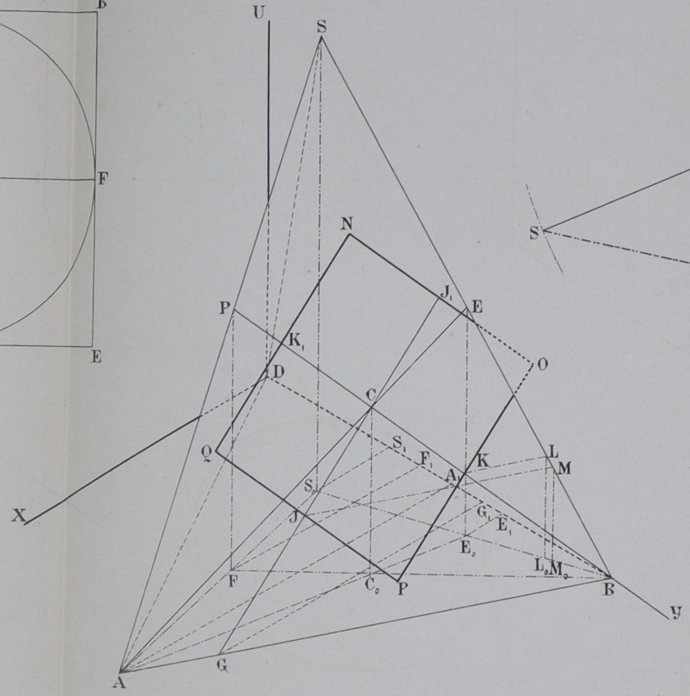
Черт. 29.



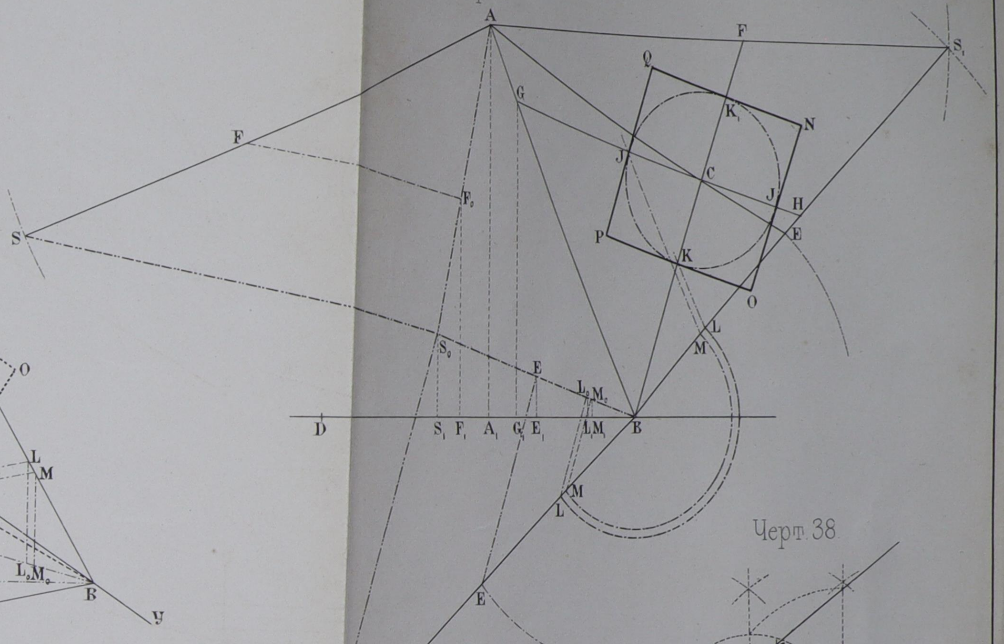
Черт. 30.



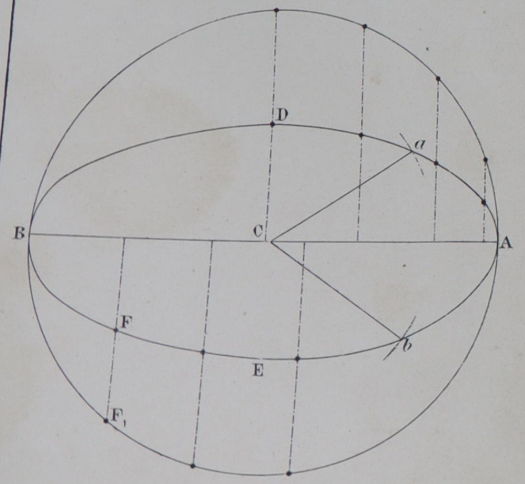
Черт. 31.



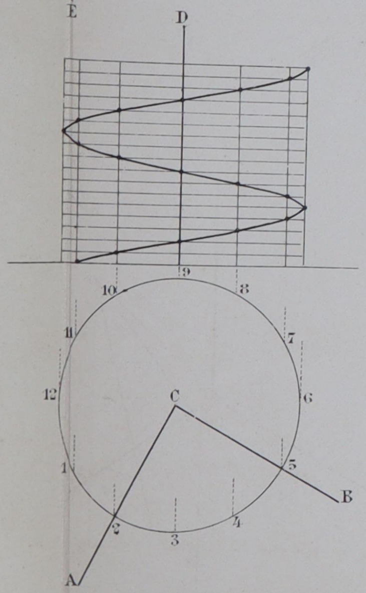
Черт. 32.



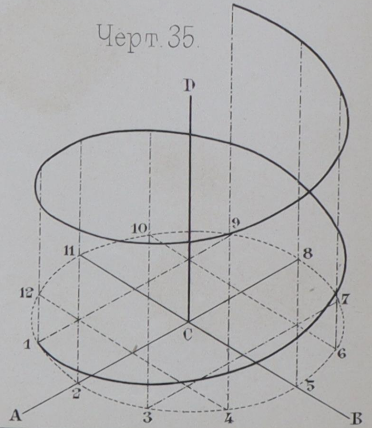
Черт. 33.



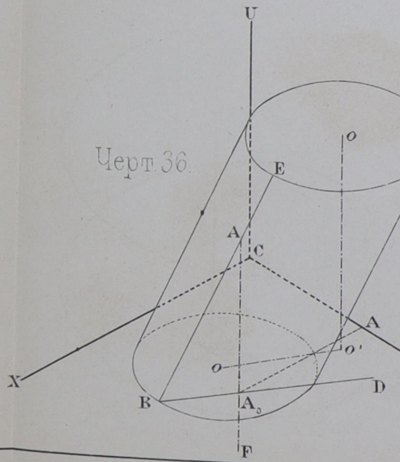
Черт. 34.



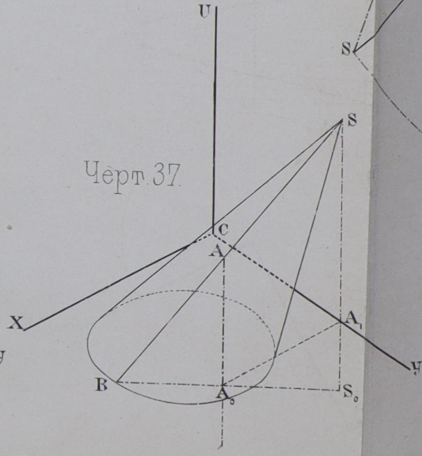
Черт. 35.



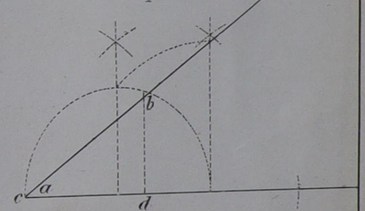
Черт. 36.



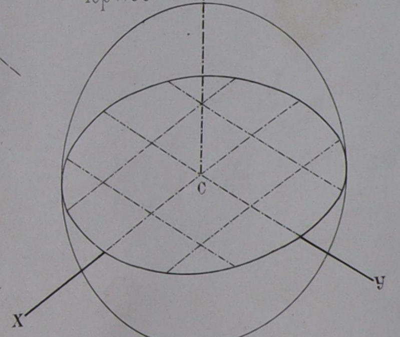
Черт. 37.



Черт. 38.



Черт. 39.



Автолит. Ф. Крамеръ. С.П.Б. Пет. ст. Звѣринская 44.