Изданіе Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

НАЧАЛА СТАТИКИ СООРУЖЕНІЙ.

ВВЕДЕНІЕ ВЪ УЧЕНІЯ О ПЛОСКИХЪ СТАТИЧЕСКИ-НЕОПРЕДѢЛИМЫХЪ И О ПРОСТРАНСТВЕННЫХЪ ФЕРМАХЪ.

ГРАФИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНІЕ ДЕФОРМАЦІЙ ПЛОСКИХЪ СКВОЗНЫХЪ ФЕРМЪ И ЦѢПИ УПРУГИХЪ СТЕРЖНЕЙ СЪ ШАРНИРНЫМИ СОЕДИНЕНІЯМИ.

ГРАФИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНІЕ И РАЗЛОЖЕНІЕ СИЛЪ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

СЪ 90 ПОЛИТИПАЖАМИ ВЪ ТЕКСТѢ И 1 ЛИСТ. ЧЕРТЕЖЕЙ.

СОСТАВИЛЪ
С. К. Куницкій,
Профессоръ Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

Цѣна 1 руб. 80 коп.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9.
1902.

Моему Ангелу – Дорогой Тозечке – на память отъ сердечно любящаго С. Куницкаго

8 Декабря 1901.

Изданіе Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

НАЧАЛА СТАТИКИ СООРУЖЕНІЙ.

ВВЕДЕНІЕ ВЪ УЧЕНІЯ О ПЛОСКИХЪ СТАТИЧЕСКИ-НЕОПРЕДѢЛИМЫХЪ И О ПРОСТРАНСТВЕННЫХЪ ФЕРМАХЪ.

ГРАФИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНІЕ ДЕФОРМАЦІЙ ПЛОСКИХЪ СКВОЗНЫХЪ ФЕРМЪ

И

ЦѢПИ УПРУГИХЪ СТЕРЖНЕЙ СЪ ШАРНИРНЫМИ СОЕДИНЕНІЯМИ.

ГРАФИЧЕСКОЕ

СЛОЖЕНІЕ И РАЗЛОЖЕНІЕ СИЛЪ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

съ 90 политипажами въ текстѣ и 1 лист. чертежей.

СОСТАВИЛЪ

С. К. Куницкій,

Профессоръ Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9.

1900.

Цѣна 1 руб. 80 коп.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ГЛАВА II.

Графическое сложеніе и разложеніе силъ въ пространствѣ.

Замѣченная опечатка. На стр. 102, 16 строка сверху, въ концѣ строки, вмѣсто силы, слѣдуетъ читать *оси*.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Настоящій выпускъ составляетъ продолженіе печатаемаго авторомъ по частямъ труда подъ общимъ заглавіемъ: «Начала статики сооруженій», а именно четвертую книжку этого труда. Матеріалы, вошедшіе въ этотъ выпускъ, появились въ первомъ изданіи отдѣльными брошюрами, а также въ видѣ цѣлаго ряда статей въ журналѣ Министерства Путей Сообщенія. Первое изданіе упомянутыхъ брошюръ въ настоящее время совершенно исчерпано, вслѣдствіе чего и возникла необходимость во второмъ ихъ изданіи, составившемъ этотъ выпускъ.

Вопросы, разбираемые въ настоящемъ выпускѣ, представляютъ значительный интересъ для инженеровъ, занимающихся проектированіемъ и расчетомъ металлическихъ сооруженій.

Дѣйствительно, мы видимъ, съ одной стороны, что уже и у насъ нѣкоторыя строительныя конторы новыхъ желѣзнодорожныхъ линій стали въ послѣднее время дополнять расчеты консольно-балочныхъ (системы Гербера) мостовыхъ фермъ, въ особенности при большихъ пролетахъ, графическимъ построеніемъ перемѣщеній узловыхъ точекъ (см. изданіе Общества Юго-Восточныхъ желѣзныхъ дорогъ. Сооруженіе Восточно-Донецкой желѣзной дороги. Мостъ черезъ рѣку Донъ отверстіемъ 300 саж., стр. 125-я. Расчетъ упругаго прогиба фермъ и продольнаго перемѣщенія подвижныхъ опоръ отъ статической нагрузки посредствомъ построенія плана Williot). Между тѣмъ, область примѣненія этихъ построеній вообще весьма обширна, какъ въ случаѣ статически-опредѣлимыхъ, такъ и въ случаѣ статически-неопредѣлимыхъ фермъ.

Съ другой стороны, какъ извѣстно, въ практику проектированія стропильныхъ покрытій все болѣе и болѣе входятъ пространственныя фермы, для расчета коихъ требуется основательное знакомство съ пріемами графическаго сложенія силъ въ пространствѣ.

При изложеніи сего труда авторъ пользовался сочиненіями и трудами по графической статикѣ Müller-Breslau, Föppl'a, Ritter'a и Steiner'a, Mohr'a, а также статьею французскаго инженера Williot: Notions pratiques sur la Statique graphique. Annales du Gènie Civil. 1877.

С. Куницкій.

24 ноября 1901 г.

ЛИТЕРАТУРА.

Müller-Breslau. Die Graphische Statik der Baukonstruktionen. Band II. Erste Abtheilung. Formänderung ebener Fachwerke. Das ebene statisch unbestimmte Fachwerk. Leipzig 1892.

Williot. Notions pratiques sur la statique graphique. Annales du Génie Civil. 1877.

Föppl. Graphische Statik.

W. Ritter. Anwendungen der Graphischen Statik nach Professor D-r Culmann II Theil. 1890.

Steiner. Theorie der eisernen Balkenbrücken. Handbuch der Ingenieurwissenschaften. 1890.

Prof. **Mohr.** Различныя статьи въ журналѣ «Der Civilingenieur», издававшемся въ Дрезденѣ.

ГЛАВА I.

Графическое построеніе деформацій плоскихъ фермъ.

Введеніе въ главу I-ю. Настоящая глава составляетъ прямое и непосредственное продолженіе курса Графической Статики *), изученіе которой должно поэтому предшествовать изученію сей главы.

Въ этой главѣ разсматриваются преимущественно деформаціи плоскихъ фермъ, относительно коихъ въ дальнѣйшемъ изложеніи сохраняютъ свою силу тѣ же самыя разсчетныя предположенія, которыя служатъ вообще основаніемъ обыкновенныхъ статическихъ расчетовъ плоскихъ системъ, а именно:

1) оси всѣхъ стержней фермы и всѣ внѣшнія силы лежатъ въ одной плоскости;

2) внѣшнія силы приложены лишь въ узловыхъ точкахъ фермы, при чемъ собственный вѣсъ фермы разсматривается какъ нѣкоторая внѣшняя нагрузка, распредѣленная на узлы фермы и къ нимъ приложенная;

3) вращеніе стержней фермы около осей шарнировъ можетъ происходить *безъ тренія.*

§ 1. Общія понятія. Умѣніе опредѣлять посредствомъ графическаго построенія или при помощи вычисленій упругія деформаціи, которыя данное сооруженіе получаетъ подъ дѣйствіемъ данной нагрузки, даетъ возможность, прежде всего, заранѣе предсказать величину прогибовъ, которые сооруженіе должно получить подъ дѣйствіемъ пробной нагрузки, и сравнить дѣйствительно измѣренные прогибы съ опредѣленными по расчету.

Сверхъ того, выводъ законовъ, которымъ подчинена деформація сооруженій, составляетъ основаніе для интересующаго насъ расчета статически-неопредѣлимыхъ сооруженій.

Деформація всякой системы упругихъ стержней имѣетъ вообще по-

*) См. Начала Статики сооруженій. Графическая статика и ея приложенія къ расчету сооруженій. С. К. Куницкій. СПб. 1898 г.

слѣдствіемъ нѣкоторое перемѣщеніе (передвиженіе) узловыхъ точекъ системы изъ первоначальнаго ихъ положенія, когда сооруженіе не было нагружено, въ то положеніе, которое соотвѣтствуетъ опредѣленной деформаціи сооруженія подъ дѣйствіемъ данной его нагрузки. Всякое перемѣщеніе какой-либо узловой точки данной системы упругихъ стержней можно вообще разсматривать, какъ геометрическую сумму двухъ перемѣщеній:

1) одного перемѣщенія, зависящаго отъ нѣкотораго вращенія стержней системы, и

2) второго перемѣщенія, зависящаго отъ упругихъ (положительныхъ или отрицательныхъ) удлиненій (или укороченій) стержней системы подъ дѣйствіемъ данныхъ внѣшнихъ силъ.

При разсмотрѣніи перваго изъ сихъ перемѣщеній, стержни системы можно принимать за тѣла неизмѣняемыя (абсолютно-твердыя, жесткія); если же стержни системы соединены между собой такимъ образомъ, что углы, образуемые осями стержней, не могутъ быть измѣнены безъ измѣненія длины стержней (какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто, когда стержни системы образуютъ треугольныя фигуры), то вся система стержней можетъ быть принимаема, при разсмотрѣніи перваго рода перемѣщеній, за неизмѣняемую систему (абсолютно твердое тѣло).

Разсмотримъ отдѣльно вліяніе каждаго изъ упомянутыхъ двухъ родовъ перемѣщеній на окончательное перемѣщеніе узловой точки данной матеріальной системы.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи будемъ разсматривать лишь плоскія системы, движущіяся по плоскости, т. е. такія, въ коихъ оси всѣхъ стержней системы лежатъ въ одной плоскости, именно въ той, по коей передвигается система.

Прежде всего приведемъ нѣкоторыя предложенія изъ геометрическаго (кинематическаго) ученія о движеніи плоской неизмѣняемой системы по плоскости.

§ 2. Предложеніе о мгновенномъ центрѣ вращенія. Представимъ себѣ (фиг. 1), что плоская неизмѣняемая система (плоскій неизмѣняемый дискъ) произвольнаго очертанія (напримѣръ, для упрощенія чертежа, возьмемъ треугольное очертаніе) перемѣщается по нѣкоторой плоскости (напримѣръ, по плоскости чертежа). Пусть первоначальное положеніе данной неизмѣняемой системы было $A_1\ B_1\ C_1$ и пусть затѣмъ эта система, по истеченіи нѣкотораго промежутка времени, перемѣстилась въ положеніе $A_2\ B_2\ C_2$. Соединимъ точки A_1 съ A_2 и B_1 съ B_2 прямыми линіями, затѣмъ изъ срединъ A и B прямыхъ $A_1\ A_2$ и $B_1\ B_2$ возставимъ къ нимъ перпендикуляры и продолжимъ ихъ до взаимнаго пересѣченія въ точкѣ (O).

Легко видѣть, что перемѣщеніе данной неизмѣняемой системы изъ положенія ея $A_1C_1B_1$ въ положеніе $A_2C_2B_2$ можно себѣ представить происшедшимъ отъ вращенія системы около точки (O). Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ въ силу построенія точки (O), отрѣзокъ $A_1(O)$ равенъ отрѣзку $A_2(O)$ и отрѣзокъ $B_1(O)$ равенъ отрѣзку $B_2(O)$, то значитъ точки A_1 и B_1, при перемѣщеніи ихъ въ положеніе A_2 и соотвѣтственно B_2, опишутъ части окружностей, имѣющихъ общій центръ—точку (O).

Точно также легко показать, что всякая точка данной неизмѣняемой системы, при упомянутомъ ея перемѣщеніи, опишетъ часть нѣкоторой окружности, центръ коей будетъ находиться въ точкѣ (O). Разсмотримъ, напримѣръ, перемѣщеніе точки C_1 въ ея новое положеніе C_2. Чтобы показать, что при этомъ перемѣщеніи точка C_1 вращается около центра (O), достаточно убѣдиться въ томъ, что:

$$(O)C_1 = (O)C_2\,;$$

это равенство слѣдуетъ непосредственно изъ равенства треугольниковъ:

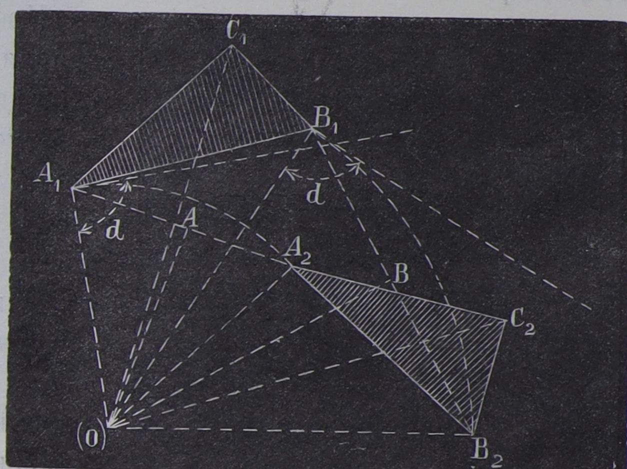
$$\triangle\,(O)C_1B_1 = \triangle\,(O)C_2B_2,$$

имѣющихъ по двѣ равныя между собою стороны:

$$(O)B_1 = (O)B_2$$

и

$$C_1B_1 = C_2B_2$$



Фиг. 1.

и по одному равному углу между означенными сторонами, а именно:

$$\angle\, C_1B_1(O) = \angle\, C_2B_2(O).$$

Равенство этихъ угловъ слѣдуетъ изъ того, что:

$$\angle\, C_1B_1(O) = \angle\, C_1B_1A_1 + \angle\, A_1B_1(O)$$

и

$$\angle\, C_2B_2(O) = \angle\, C_2B_2A_2 + \angle\, A_2B_2(O);$$

но:

$$\angle\, C_1B_1A = \angle\, C_2B_2A_2,$$

такъ какъ относительное положеніе точекъ A_1, C_1 и B_1 данной неизмѣняемой системы при ея перемѣщеніи не измѣняется.

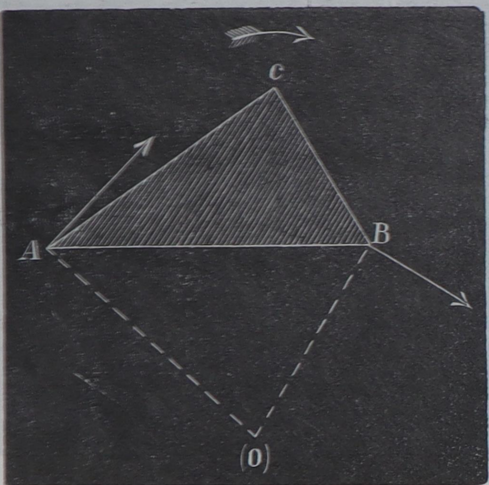
$$\angle\, A_1B_1(O) = \angle\, A_2B_2(O),$$

вслѣдствіе равенства треугольниковъ:

$$\triangle A_1B_1(O) = \triangle A_2B_2(O),$$

у которыхъ соотвѣтствующія стороны равны между собою.

Впрочемъ, можно было сказать a priori, что точка C_1 и всякая иная точка, принадлежащая данной неизмѣняемой системѣ, опишетъ, при перемѣщеніи системы изъ положенія $A_1B_1C_1$ въ положеніе $A_2B_2C_2$ (фиг. 1), нѣкоторую окружность около центра (O). Въ самомъ дѣлѣ, каждую точку данной неизмѣняемой системы можно представить себѣ связанною съ точками A_1 и B_1 двумя неизмѣняемыми стержнями; поэтому, очевидно, что, если точки A_1 и B_1 при своемъ перемѣщеніи описываютъ окружности изъ нѣкотораго центра (O), то и всякая неизмѣнно связанная съ ними точка, при томъ же перемѣщеніи, опишетъ окружность изъ того же центра.

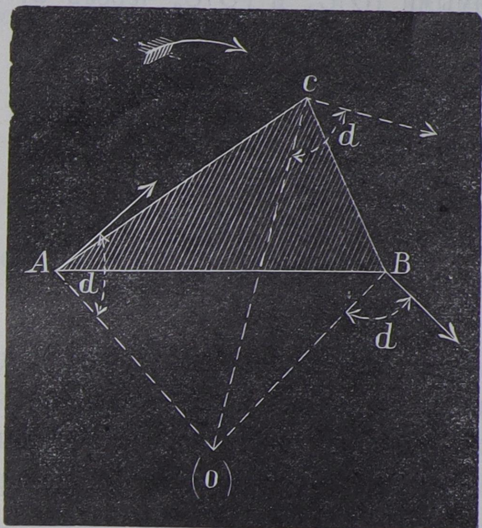


Фиг. 2.

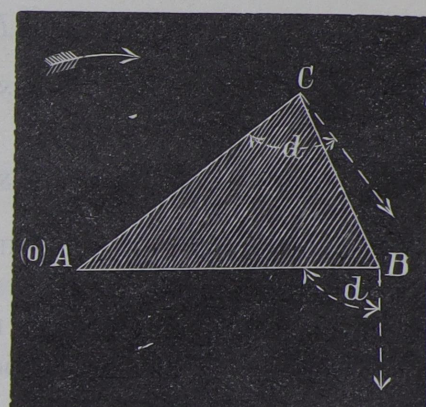
Представимъ себѣ (фиг. 1), что данная неизмѣняемая система (плоскій дискъ) изъ положенія $A_2B_2C_2$ постепенно перемѣщается по плоскости чертежа обратно въ положеніе $A_1B_1C_1$, при этомъ перемѣщеніи точка A_2 будетъ все приближаться къ точкѣ A_1, а также точки B_2 и B_1 будутъ сближаться между собою, разность между длиною отрѣзковъ наклонныхъ линій $A_2\,(O)$ и $A_1(O)$ и длиною нормали (AO), а также между длиною отрѣзковъ наклонныхъ линій $B_2\,(O)$ и $B_1\,(O)$ и длиною нормали $B(O)$ будетъ все уменьшаться и въ предѣлѣ, при безконечно маломъ разстояніи точекъ A_2 и A_1, B_2 и B_1, нормали $A(O)$ и $B(O)$ совпадутъ соотвѣтственно съ направленіями $A_1(O)$ и $B_1(O)$. Эти послѣднія направленія составятъ съ касательными къ траекторіямъ точекъ A_1 и B_1 прямые углы, а такъ какъ при безконечно маломъ перемѣщеніи (т. е. происходящемъ въ безконечно-малый промежутокъ времени при конечныхъ скоростяхъ перемѣщенія) мгновенное направленіе сего перемѣщенія совпадаетъ съ касательной къ траекторіи перемѣщенія, то, если заданы мгновенныя направленія перемѣщеній двухъ точекъ A_1 и B_1 неизмѣняемой системы, — можемъ найти центръ (O) вращенія системы (называемый въ этомъ случаѣ мгновеннымъ центромъ вращенія системы) проведеніемъ изъ точекъ A_1 и B_1 нормалей къ мгновеннымъ направленіямъ движенія сихъ точекъ до взаимнаго пересѣченія сихъ нормалей въ точкѣ (O) (см. фиг. 1 и 2). Итакъ, *всякое перемѣщеніе неизмѣняемой плоской* *системы* (плоскаго диска) *по плоскости можетъ быть разсматриваемо какъ вращенiе ея около* (нѣкоторой неподвижной точки) *нѣкотораго центра, лежащаго въ той же плоскости.*

При разсмотрѣнiи весьма малыхъ перемѣщенiй неизмѣняемой плоской системы по плоскости, будемъ называть этотъ центръ мгновеннымъ центромъ вращенiя (или полюсомъ вращенiя).

Мгновенный центръ вращенiя (или полюсъ вращенiя) опредѣляется взаимнымъ пересѣченiемъ — проведенныхъ черезъ двѣ данныя точки неизмѣняемой системы — нормалей къ мгновеннымъ направленiямъ движенiя этихъ точекъ. Полюсъ вращенiя (или мгновенный центръ вращенiя) будемъ въ дальнѣйшемъ изложенiи обозначать черезъ (O), въ отличiе отъ полюса O, изъ котораго стро-



Фиг. 3.



Фиг. 4.

ятся лучи къ вершинамъ плана силъ при построенiи веревочнаго многоугольника.

Зная центръ вращенiя, опредѣленный, какъ показано выше (фиг. 2), и зная направленiе вращенiя (т. е. происходитъ ли оно въ направленiи движенiя часовой стрѣлки или въ обратномъ направленiи), можемъ для любой точки данной плоской неизмѣняемой системы опредѣлить мгновенное направленiе движенiя. Для этого стоитъ соединить разсматриваемую точку системы съ мгновеннымъ центромъ вращенiя прямою и возставить къ этой прямой въ той же точкѣ нормаль, на которую надо нанести стрѣлку въ сторону вращенiя. На фиг. 3 это построенiе исполнено для точки C данной плоской неизмѣняемой системы.

Разсмотримъ частный случай фиг. 3, а именно, когда полюсъ вращенiя (O) совпадетъ съ точкою A. Этотъ случай имѣетъ мѣсто, когда одна изъ точекъ данной системы, напр. точка A, закрѣплена неподвижно. На фиг. 4 изображенъ разсматриваемый частный случай, причемъ изъ предыдущаго ясно, что мгновенныя направленія движенія точекъ C или B должны быть нормальны къ прямымъ AC или соотвѣтственно AB.

§ 3. Планъ скоростей. Пусть данная неизмѣняемая плоская система $A_1B_1C_1$ (фиг. 1) перемѣстилась въ теченіе какого-либо промежутка времени $t_2—t_1$ изъ положенія $A_1B_1C_1$ въ положеніе $A_2B_2C_2$. Это перемѣщеніе, какъ было показано выше, можно представить себѣ происшедшимъ отъ вращенія системы около точки (O). При этомъ вращеніи каждая точка системы опишетъ нѣкоторую окружность изъ центра (O), причемъ, если обозначить разстояніе разсматриваемой точки, напр. C_1, данной системы отъ центра вращенія черезъ ρ_c, перемѣщеніе той же точки черезъ Δs_c, и уголъ, составляемый прямыми $(O)C_1$ и $(O)C_2$ черезъ ω, то можемъ написать:

$$\Delta s_c = \rho_c \,.\, \omega;$$

точно также для точки A или B можемъ написать:

$$\Delta s_a = \rho_a \,.\, \omega$$

и

$$\Delta s_b = \rho_b \,.\, \omega.$$

Уголъ ω (соотвѣтствующій данному промежутку времени $t_2 - t_1$) для всѣхъ точекъ данной системы одинаковъ, такъ какъ всѣ точки ея неизмѣнно связаны между собою, въ силу условія неизмѣняемости системы. Этотъ уголъ представляетъ собою, очевидно, нѣкоторую функцію времени $\omega = \varphi(t)$.

Въ выраженіяхъ перемѣщеній точекъ системы перемѣнною величиною является ρ, такъ какъ оно различно для разныхъ точекъ (оставаясь постояннымъ для одной и той же точки). Возьмемъ безконечно малый промежутокъ времени, начинающійся въ моментъ времени t и кончающійся въ моментъ времени $t + dt$; въ теченіе этого промежутка времени dt вся система повернется на уголъ $d\omega$ и элементарное перемѣщеніе какой-либо точки C выразится черезъ:

$$ds_c = \rho_c \,.\, d\omega;$$

точно также:

$$ds_a = \rho_a \,.\, d\omega$$

и

$$ds_b = \rho_b \,.\, d\omega.$$

Скорость точки C системы будетъ:

$$v_c = \frac{ds_c}{dt} = \rho_c \,.\, \frac{d\omega}{dt} = \rho_c \,.\, \omega';$$

точно также скорости точекъ A и B системы будутъ:

$$v_a = \frac{ds_a}{dt} = \rho_a \cdot \frac{d\omega}{dt} = \rho_a \cdot \omega'$$

и

$$v_b = \frac{ds_b}{dt} = \rho_b \cdot \frac{d\omega}{dt} = \rho_b \cdot \omega',$$

причемъ:

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega'$$

есть не иное что, какъ угловая скорость вращенія системы около соотвѣтствующаго мгновеннаго центра вращенія или полюса вращенія.

Изъ выраженія для скоростей v_a, v_b, v_c и т. д. точекъ A, B, C и т. д. системы видимъ, что угловая скорость:

$$\omega' = \frac{v}{\rho_a} = \frac{v_b}{\rho_b} = \frac{v_c}{\rho_c} = \ldots\ldots$$

сверхъ того:

$$v_a : v_b : v_c = \rho_a : \rho_b : \rho_c = (O)A : (O)B : (O)C.$$

Направленія мгновенныхъ скоростей точекъ системы совпадаютъ съ мгновенными направленіями движенія этихъ точекъ (направлены по касательной къ траекторіи точки).

Скорости точекъ системы можемъ графически изобразить такимъ же способомъ, какъ изображаются силы, т. е. *отрѣзками прямыхъ линій*. Скорость совершенно опредѣлена, если даны: положеніе на плоскости той точки, которая имѣетъ данную скорость, прямая параллельная мгновенному направленію движенія разсматриваемой точки (эту прямую будемъ называть *линіею скорости*), величина отрѣзка, изображающаго скорость, и направленіе (или знакъ) скорости (т. е. если показана на отрѣзкѣ стрѣлка).

Если даны линіи скоростей двухъ точекъ неизмѣняемой плоской системы, а также величина и знакъ скорости одной изъ точекъ, то можетъ быть найдена мгновенная скорость какой угодно точки той же системы.

Это предложеніе слѣдуетъ непосредственно изъ того соображенія, что нормали къ линіямъ скоростей двухъ точекъ системы опредѣляютъ своимъ пересѣченіемъ мгновенный центръ вращенія системы. Зная мгновенный центръ вращенія, можемъ найти для любой точки системы радіусъ вращенія, а также по нормали къ сему радіусу въ разсматриваемой точкѣ системы линію и направленіе скорости этой точки (въ сторону направленія вращенія системы).

Величина искомой мгновенной скорости точки найдется изъ условія, что *скорости точекъ системы пропорціональны радіусамъ ихъ вращенія.*

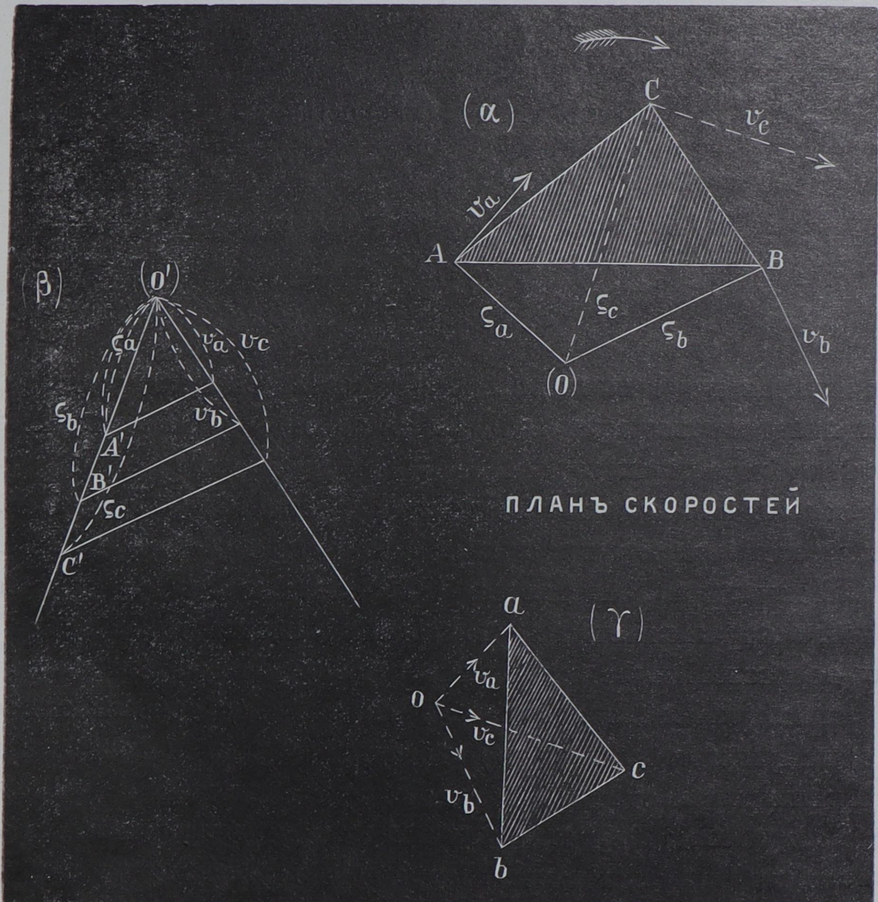
Замѣтимъ, что линіи скоростей точекъ системы нормальны къ соотвѣтствующимъ радіусамъ вращенія, а именно:

$$v_a \perp \rho_a; \quad v_b \perp \rho_b; \quad v_c \perp \rho_c \text{ и т. д.}$$

или:

$$v_a \perp (O)A; \quad v_b \perp (O)B; \quad v_c \perp (O)C \text{ и т. д.}$$

Пользуясь этими замѣчаніями, можемъ построить такъ называемый *многоугольникъ скоростей* или *планъ скоростей* точекъ данной системы (фиг. 5).



Фиг. 5.

Пусть даны: плоская система съ треугольнымъ очертаніемъ и линіи скоростей точекъ A и B, а также величина и направленіе (знакъ) скорости одной изъ сихъ точекъ; требуется построить планъ скоростей точекъ A, B и C. На фиг. (5-α) по даннымъ линіямъ скоростей точекъ A и B системы построенъ мгновенный центръ вращенія системы (O); затѣмъ построенъ радіусъ вращенія ρ_c точки C и по нормали къ сему радіусу въ точкѣ C построена линія скорости сей точки. Величины v_b и v_c скоростей точекъ B и C получены построеніемъ, показаннымъ на фиг. (5-β) по данной величинѣ v_a скорости точки A. Возьмемъ произвольную точку O фиг. (5-γ), проведемъ изъ нея прямыя, соотвѣтственно параллельныя скоростямъ v_a, v_b и v_c, и отложимъ на этихъ прямыхъ въ сторону направленія скоростей отрѣзки, изображающіе величины соотвѣтствующихъ скоростей; полученныя такимъ образомъ точки a, b и c (т. е. концы упомянутыхъ отрѣзковъ) соединимъ между собою прямыми линіями. Легко видѣть (фиг. 5-γ), что эти прямыя образуютъ треугольникъ abc, стороны коего будутъ нормальны къ соотвѣтствующимъ сторонамъ данной треугольной фигуры ABC (фиг. 5-α), т. е.

$$ab \perp AB; \quad bc \perp BC; \quad ac \perp AC;$$

$$\triangle\, abc \sim ABC.$$

Въ самомъ дѣлѣ, сравнивая фиг. (5-α) и фиг. (5-γ), видимъ, что:

$$\triangle\, A(O)B \sim \triangle\, aob,$$

вслѣдствіе того, что:

1) $\angle\, aob = \angle\, A(O)B$ по взаимной перпендикулярности сторонъ этихъ угловъ:

$$oa \perp A(O)$$

и

$$ob \perp B(O)$$

2) сходственныя стороны, заключающія этотъ уголъ, пропорціональны, а именно:

$$oa : (O)A = ob : (O)B.$$

Изъ подобія означенныхъ треугольниковъ слѣдуетъ, между прочимъ, что:

$$\angle\, oab = \angle\, (O)AB,$$

а такъ какъ стороны ихъ $oa \perp (O)A$ по построенію, то должно быть:

$$ab \perp AB.$$

Такимъ же способомъ докажется, что

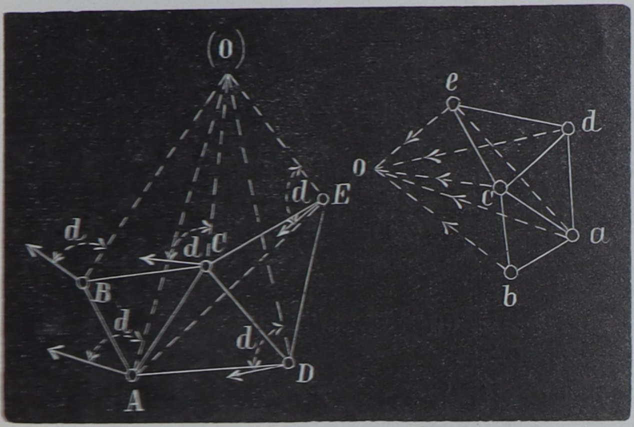
$$ac \perp AC$$

и

$$bc \perp BC.$$

Прямыя oa, ob и oc (фиг. 5-γ) образуютъ, такъ называемый, *планъ скоростей*.

Все, что доказано выше, очевидно, примѣняется и къ случаю, когда очертаніе данной фигуры не треугольникъ, а какой угодно многоугольникъ, какъ это легко видѣть, напримѣръ, изъ фиг. 6. Въ плоскій дискъ съ очертаніемъ произвольнаго вида всегда возможно вписать многоугольникъ, вершины коего будутъ лежать на линіи, представляющей очертаніе даннаго диска. Слѣдовательно, *если въ планѣ скоростей соединить между собою прямыми линіями концы отрѣзковъ, изображающихъ скорости, то получится фигура, подобная данной фигурѣ* (образуемой точками данной неизмѣняемой плоской системы), *причемъ стороны фигуры, полученной въ планѣ скоростей, будутъ нормальны къ соотвѣтствующимъ сторонамъ данной фигуры.*



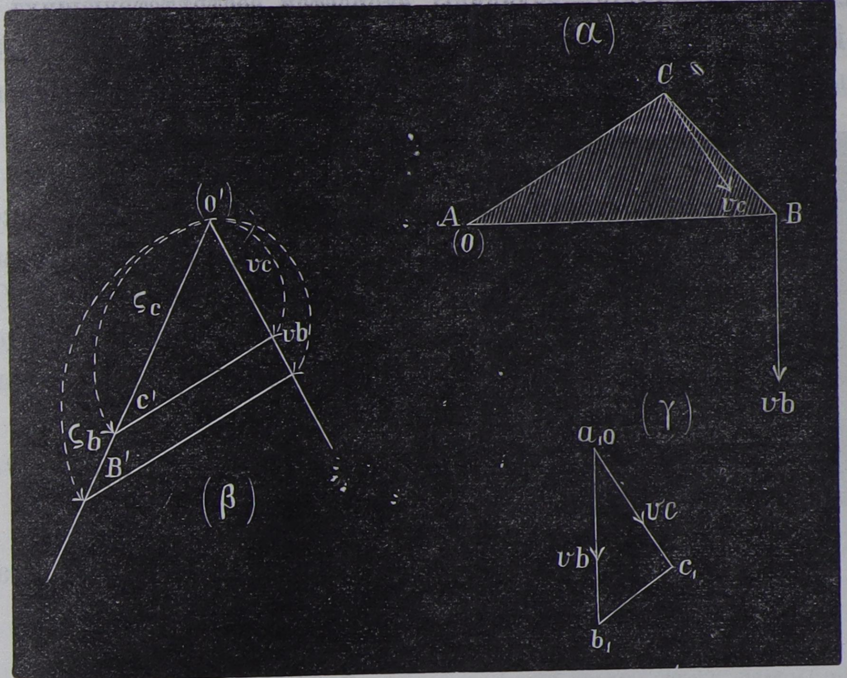
Фиг. 6.

Изъ этого слѣдуетъ, что для построенія плана скоростей достаточно знать скорости двухъ точекъ системы, такъ какъ эти скорости, по построеніи ихъ у произвольной точки O, дадутъ двѣ точки, принадлежащія фигурѣ плана скоростей (т. е. двѣ точки многоугольника $abcde$, фиг. 6). Фигура плана скоростей можетъ быть построена по этимъ двумъ точкамъ, такъ какъ извѣстно, что прямыя, соединяющія между собою вершины фигуры плана скоростей, нормальны къ соотвѣтствующимъ прямымъ, соединяющимъ между собою вершины данной фигуры.

Разсмотримъ одинъ частный случай, встрѣчающійся при построеніи плана скоростей, а именно, когда одна изъ точекъ, принадлежащихъ разсматриваемому плоскому диску (данной плоской неизмѣняемой системѣ), неподвижно закрѣплена на плоскости, по коей происходитъ вращеніе диска. Въ этомъ случаѣ закрѣпленная точка и представляетъ собою мгновенный центръ вращенія (или полюсъ вращенія) диска и скорость этой точки равна нулю.

Такъ какъ центръ вращенія намъ извѣстенъ, то извѣстны и линіи скоростей точекъ системы, а именно для любой точки системы линія скорости ея нормальна къ соотвѣтствующему радіусу вращенія. Если, поэтому, заданы величина и направленіе скорости одной изъ точекъ системы, то могутъ быть опредѣлены величина и направленіе скорости каждой изъ прочихъ точекъ системы.

Пусть (фиг. 7) данъ плоскій дискъ ABC треугольнаго очертанія, могущій двигаться по какой-либо плоскости (напр. по плоскости чертежа); пусть точка A этого диска закрѣплена неподвижно на упомянутой плоскости и пусть даны величина и направленіе скорости точки B, именно v_b. Требуется построить планъ скоростей для данной фигуры ABC. Мгновенный центръ вращенія, по условіямъ заданія, есть точка A; линіи скоростей точекъ B и C нормальны къ радіусамъ AB и AC. Направленіе скорости точки C опредѣлится изъ направленія вращенія



Фиг. 7.

системы, которое найдется въ свою очередь по заданному направленію скорости v_b точки B.

Величина скорости точки C найдется изъ условія пропорціональности:

$$AB : AC = v_b : v_c,$$

откуда:

$$v_c = v_b \cdot \frac{AC}{AB}$$

и можетъ быть опредѣлена графически по фиг. (7-β).

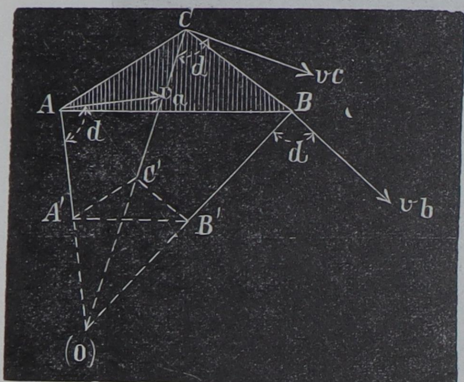
Для построенія плана скоростей возьмемъ (фиг. 7-γ) точку a за полюсъ O и построимъ у этой точки скорости точекъ A, B и C, а именно:

$$v_a = O; \quad v_b \text{ и } v_c.$$

Соединяя концы отрѣзковъ, изображающихъ скорости, получимъ треугольникъ abc, который и изобразитъ фигуру плана скоростей; вершина a

этого треугольника совпадаетъ съ полюсомъ плана скоростей, а стороны его ab и ac будутъ равны соотвѣтственно скоростямъ v_b и v_c точекъ B и C. Треугольникъ abc обладаетъ, сверхъ того, общими свойствами, присущими всякой фигурѣ плана скоростей, т. е. стороны его нормальны къ соотвѣтственнымъ прямымъ, соединяющимъ точки данной фигуры.

§ 4. Фигуры, получаемыя отъ соединенія прямыми линіями концовъ отрѣзковъ, изображающихъ—отложенныя по нормалямъ къ мгновеннымъ направленіямъ движенія—величины скоростей соотвѣтствующихъ точекъ плоской неизмѣняемой системы. Пусть (фиг. 8) для плоской неизмѣняемой системы ABC намъ извѣстны мгновенный полюсъ вращенія (O) и мгновенныя скорости v_a, v_b и v_c точекъ A, B и C. Представимъ себѣ, что мы отложили величины этихъ скоростей по соотвѣтствующимъ радіусамъ вращенія (O) A; (O) B и (O) C (т. е. какъ бы повернули линію каждой скорости на прямой уголъ), тогда получимъ отрѣзки:



Фиг. 8.

$$AA' = v_a;\quad BB' = v_b;\quad CC' = v_c.$$

Соединимъ концы этихъ отрѣзковъ пунктирными прямыми, какъ показано на чертежѣ; тогда получится фигура $A'B'C'$, подобная данной фигурѣ ABC.

Въ самомъ дѣлѣ, какъ извѣстно изъ § 3:

$$v_a : v_b : v_c = (O)A : (O)B : (O)C,$$

откуда непосредственно слѣдуетъ, что:

$$A'B' \parallel AB;\quad B'C' \parallel BC;\quad C'A' \parallel CA.$$

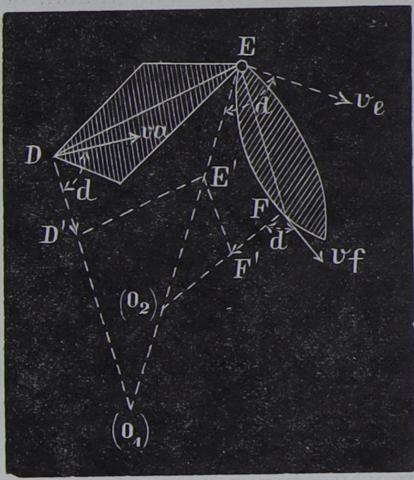
Такимъ образомъ, *по соединеніи прямыми линіями концовъ отрѣзковъ, изображающихъ величины скоростей точекъ системы, отложенныя по нормалямъ къ мгновеннымъ направленіямъ движенія сихъ точекъ, получается фигура подобная и подобно расположенная данной фигурѣ.* Полюсъ вращенія (O) есть полюсъ подобія обѣихъ фигуръ. Основываясь на только что доказанномъ предложеніи, возможно рѣшить задачу, приведенную въ слѣдующемъ §-ѣ и имѣющую нѣкоторое значеніе въ практическихъ примѣненіяхъ.

§ 5. Относительное движеніе плоскихъ дисковъ, находящихся въ одной плоскости. Пусть *даны* (фиг. 9) *два плоскихъ диска DE и EF, движущихся по неподвижной плоскости* (напр. по плоскости чертежа) *и сое-*

диненныхъ между собою идеальнымъ шарниромъ (вращеніе безъ тренія) *въ точкѣ E и пусть извѣстны величины и линіи мгновенныхъ скоростей v_d и v_f точекъ D и F; требуется найти полюсы вращенія (O_1) и (O_2) каждаго изъ данныхъ дисковъ по отношенію къ неподвижной плоскости, по которой они движутся.*

Извѣстно изъ предыдущаго § 4-го, что если отложить величины мгновенныхъ скоростей точекъ данной системы по соотвѣтствующимъ нормалямъ къ мгновеннымъ направленіямъ движенія, то фигура, полученная отъ соединенія концовъ отрѣзковъ, изображающихъ эти скорости, подобна и подобно расположена фигурѣ, изображаемой точками данной системы.

Отложимъ по нормали къ v_d отрѣзокъ $DD^1 = v_d$ и по нормали къ v_f отрѣзокъ $FF^1 = v_f$ и проведемъ черезъ точки D^1 и F^1 прямыя соотвѣтственно параллельныя прямымъ DE и FE. Точка E' пересѣченія проведенныхъ прямыхъ даетъ намъ отрѣзокъ $EE^1 = v_e$, т. е. равный величинѣ скорости точки E, общей двумъ даннымъ дискамъ. Линія скорости v_e точки E будетъ нормальна къ EE^1; направленіе же скорости этой точки будетъ въ ту же сторону, какъ и точекъ D и F.



Фиг. 9.

Изъ ранѣе доказаннаго ясно, что точка (O_1) пересѣченія прямыхъ DD^1 и EE^1, представляющихъ нормали къ мгновеннымъ направленіямъ движенія двухъ точекъ D и E, принадлежащихъ диску DE, опредѣлитъ собою мгновенный полюсъ вращенія сего диска.

Точно также точка (O_2) пересѣченія прямыхъ FF^1 и EE^1, представляющихъ нормали къ мгновеннымъ направленіямъ движенія двухъ точекъ F и E, принадлежащихъ второму диску, а именно диску FE, опредѣлитъ собою мгновенный полюсъ вращенія (O_2) второго диска.

Такимъ образомъ, центръ шарнира E и два полюса (O_1) и (O_2) лежатъ на одной прямой $EE'(O_2)(O_1)$.

Относительное движеніе трехъ плоскихъ дисковъ, находящихся въ одной плоскости.

Если данный дискъ C_1 перемѣщается относительно диска C_2, принимаемаго первоначально за неподвижный, то дискъ C_1 вращается около нѣкотораго неподвижнаго полюса вращенія $(O_{1,2})$, который можно представить себѣ неизмѣнно связаннымъ съ обоими дисками (т. е. съ неподвижнымъ дискомъ C_2 и съ вращающимся C_1) такъ, что оба диска какъ бы соединены между собою идеальнымъ шарниромъ.

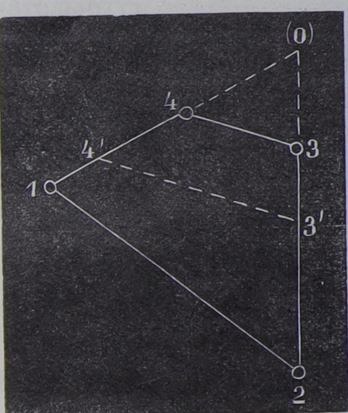
Если затѣмъ сообщить обоимъ дискамъ C_1 и C_2 одновременно нѣкоторое перемѣщеніе относительно третьяго диска C_3, то при этомъ дискъ C_1 будетъ очевидно вращаться около нѣкоторой мгновенной оси $(O_{1,3})$, а дискъ C_2 около нѣкоторой мгновенной оси $(O_{2,3})$. При этомъ вращеніи точка $(O_{1,2})$, принадлежащая обоимъ дискамъ C_1 и C_2, которая первоначально являлась неподвижнымъ полюсомъ вращенія, будетъ двигаться, причемъ нормаль къ мгновенному направленію ея движенія должна непремѣнно пройти какъ черезъ полюсъ $(O_{1,3})$, такъ и черезъ полюсъ $(O_{2,3})$, такъ какъ точка $(O_{1,2})$ можетъ быть разсматриваема, какъ общая точка дисковъ C_1 и C_2. Отсюда слѣдуетъ, что *три полюса* $(O_{1,2})$, $(O_{1,3})$ и $(O_{2,3})$ *должны лежать на одной прямой* [какъ это, между прочимъ, и получилось на фигурѣ 9-й; на этой послѣдней фигурѣ диски DE и EF двигаются по неподвижной плоскости, которую можно разсматривать какъ третій дискъ; точка E фигуры 9-й соотвѣтствуетъ точкѣ $(O_{1,2})$, точка (O_1) — точкѣ $(O_{1,3})$, точка (O_2) — точкѣ $(O_{2,3})$].

§ 6. Несвободная плоская кинематическая цѣпь. Если нѣсколько неизмѣняемыхъ плоскихъ дисковъ, лежащихъ въ одной плоскости, соединены между собою посредствомъ идеальныхъ шарнировъ въ одну систему дисковъ такимъ образомъ, что всѣ точки каждаго даннаго диска этой системы при его движеніи должны описывать относительно каждаго изъ прочихъ дисковъ системы опредѣленныя траекторіи (пути), то такая система дисковъ носитъ названіе *несвободной плоской кинематической цѣпи*.

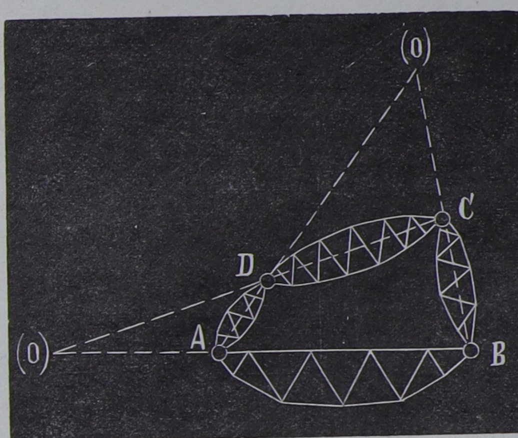
Простой примѣръ такой кинематической цѣпи представляетъ показанный на фиг. 10 шарнирный четыреугольникъ, образуемый четырьмя неизмѣняемыми стержнями, соединенными между собою по концамъ шарнирами, около осей коихъ соотвѣтствующіе стержни могутъ вращаться безъ тренія. Если стержень 1, 2 закрѣпленъ неподвижно на плоскости, то каждая изъ точекъ стержня 1, 4 можетъ перемѣщаться не иначе, какъ по окружности, описанной изъ центра 1, т. е. изъ центра идеальнаго шарнира, помѣщеннаго въ точкѣ 1-й, радіусомъ, соотвѣтствующимъ разстоянію разсматриваемой точки стержня 1, 4 отъ точки 1-й; точно также каждая точка стержня 2, 3 можетъ перемѣщаться, при неподвижности стержня 1, 2, не иначе, какъ по окружности, описанной изъ центра 2 радіусомъ, соотвѣтствующимъ разстоянію разсматриваемой точки стержня 2, 3 до точки 2. На основаніи изложеннаго въ § 2-мъ ясно, что при неподвижности стержня 1, 2 и при какомъ-либо весьма маломъ перемѣщеніи остальныхъ точекъ шарнирнаго четыреугольника мгновенное направленіе движенія точки 3 нормально къ прямой 3, 2, такъ какъ точка 3 должна описывать окружность изъ центра 2, а мгновенное направленіе движенія точки 4 нормально къ прямой 4, 1, такъ какъ точка 4 должна описывать окружность изъ центра 1. Точки 3 и 4 принадлежатъ одному и тому же неизмѣняемому плоскому диску, именно стержню 3, 4; поэтому можемъ, въ силу § 2, найти мгновенный центръ (0) вращенія стержня 3, 4, продолживъ до взаимнаго пересѣченія нормали къ мгновеннымъ направленіямъ движенія точекъ 3 и 4, т. е. прямыя 3, 2 и 4, 1 (см. фиг. 10).

Пусть дана величина мгновенной скорости точки 3; отложимъ ее по нормали къ мгновенному направленію движенія точки 3 въ видѣ отрѣзка $\overline{33'}$; въ такомъ случаѣ, на основаніи § 4-го, можемъ найти величину мгновенной скорости точки 4, проведя прямую $3', 4' \parallel 3, 4$, причемъ отрѣзокъ $\overline{4,4'}$ представитъ величину мгновенной скорости точки 4, отложенную по нормали къ мгновенному направленію движенія этой точки.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ, вслѣдствіе неподвижности прямой 1, 2, скорости точекъ 1 и 2 порознь равны нулю, то фигура скоростей 3′, 4′,



Фиг. 10.



Фиг. 11.

1, 2 (см. фиг. 10) будетъ подобна и подобно расположена данной фигурѣ 3, 4, 1, 2.

Разсматривая, наконецъ, движеніе по плоскости двухъ дисковъ 4, 3 и 4, 1 относительно третьяго неподвижнаго 1, 2, видимъ, что, въ силу § 5-го, полюсъ вращенія стержня 4, 3 относительно стержня 4, 1, т. е. точка 4, и полюсъ вращенія стержня 4, 1 относительно неподвижнаго стержня 1, 2, т. е. точка 1, должны лежать на одной прямой съ третьимъ полюсомъ вращенія, т. е. съ мгновеннымъ центромъ вращенія стержня 4, 3 относительно неподвижнаго стержня 1, 2.

Такимъ образомъ, искомый полюсъ (0) долженъ лежать на прямой 1, 4. Точно также доказывается, что этотъ полюсъ долженъ лежать на прямой 2, 3; слѣдовательно, полюсъ (0) находится на пересѣченіи прямыхъ 1, 4 и 2, 3.

Подобнымъ же образомъ возможно, принимая сторону 2, 3 шарнирнаго четыреугольника за неподвижную, найти полюсъ вращенія стержня 4, 1 относительно стержня 2, 3 и т. д.

Вмѣсто прямолинейныхъ стержней, несвободную плоскую кинематическую цѣпь можно представить себѣ состоящею изъ неизмѣняемыхъ дисковъ какой угодно формы; для примѣра см. фиг. 11.

§ 7. Планъ перемѣщеній точекъ неизмѣняемаго плоскаго диска. Выше, въ § 3-мъ, показано было построеніе плана скоростей точекъ неизмѣняемаго плоскаго диска.

Разсмотримъ перемѣщенія точекъ такого диска, происходящія въ весьма малый промежутокъ времени $\Delta\tau$, причемъ *предположимъ*, что въ теченіе этого *весьма малаго промежутка времени* скорости точекъ диска *постоянны*. Въ такомъ случаѣ перемѣщеніе какой-либо точки диска, напримѣръ точки A, которое мы обозначимъ черезъ Δs_a, выразится, какъ извѣстно, слѣдующимъ образомъ:

$$\Delta s_a = v_a \,.\, \Delta\tau.$$

Подобныя же выраженія получимъ для перемѣщенія въ тотъ же самый весьма малый элементъ времени $\Delta\tau$ прочихъ точекъ диска такъ, напр., для точекъ B и C:

$$\Delta s_b = v_b \,.\, \Delta\tau,$$

$$\Delta s_c = v_c \,.\, \Delta\tau.$$

Замѣчая, что:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta s_a}{v_a} = \frac{\Delta s_b}{v_b} = \frac{\Delta s_c}{v_c} = \ldots\ldots$$

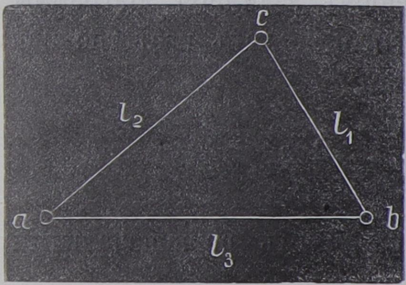
находимъ, что:

$$\Delta s_a : \Delta s_b : \Delta s_c : \ldots = v_a : v_b : v_c : \ldots\ldots$$

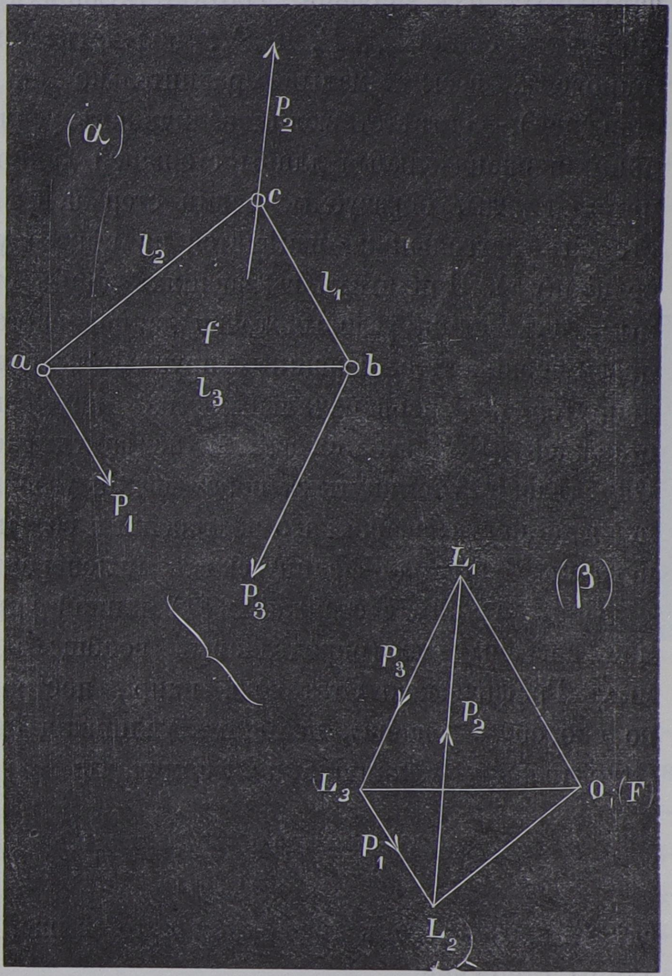
Отсюда слѣдуетъ, что планъ перемѣщеній представитъ многоугольникъ, подобный и подобно расположенный плану скоростей, и что самая *фигура перемѣщеній* подобна и подобно расположена *фигурѣ скоростей*. Самыя же величины перемѣщеній точекъ диска пропорціональны величинамъ скоростей соотвѣтствующихъ точекъ. Этихъ замѣчаній достаточно для того, чтобы возможно было впослѣдствіи, при построеніи плановъ перемѣщеній узловыхъ точекъ системъ упругихъ стержней, т. е. сквозныхъ фермъ, найти перемѣщенія ихъ, зависящія отъ вращенія всей фермы, какъ одного цѣлаго, около нѣкоторой точки, опредѣляемой условіями конструкціи сооруженія.

§ 8. Построеніе по способу Williot — для узловыхъ точекъ системы упругихъ стержней — перемѣщеній, зависящихъ отъ упругихъ удлиненій сихъ стержней. Пусть дана самая простая система *упругихъ* стержней, соединенныхъ между собою по концамъ идеальными шарнирами, а именно треугольная система abc (см. фиг. 12).

Положимъ, что сперва на разсматриваемую систему никакія внѣшнія силы не дѣйствуютъ, она находится въ состояніи такъ называемаго *естественнаго равновѣсія,* причемъ въ этомъ случаѣ длины ея стержней составляютъ соотвѣтственно l_1, l_2 и l_3. Пусть затѣмъ на узловыя точки a, b и c системы (т. е. на центры идеальныхъ шарнировъ) подѣйствуютъ нѣкоторыя внѣшнія силы P_1, P_2 и P_3, взаимно уравновѣшивающіяся и не превосходящія по величинѣ извѣстнаго предѣла, внутри коего упругость матеріала стержней не нарушается. Силы эти предполагаются постепенно возрастающими отъ нуля до окончательныхъ заданныхъ ихъ значеній такимъ образомъ, что въ каждый данный моментъ времени дѣйствіе, производимое ими на каждый изъ упругихъ стержней bc, ac и ab, уравновѣшивается упругимъ сопротивленіемъ, проявляемымъ разсматриваемымъ стержнемъ.



Фиг. 12.



Фиг. 13.

Зададимся на фиг. 13 системою такихъ взаимно-уравновѣшивающихся силъ P_1, P_2 и P_3; возьмемъ величину и линію дѣйствія одной изъ этихъ силъ, напр., силы P_1 произвольно; выберемъ, сверхъ того, произвольно линію дѣйствія силы P_2, тогда величина силы P_2, а также линія дѣйствія и величина силы P_3 опредѣлятся изъ двухъ условій равновѣсія силъ P_1, P_2 и P_3, а именно, чтобы многоугольникъ силъ былъ замкнутъ и веревочный многоугольникъ, построенный на этихъ силахъ, былъ замкнутъ.

Данный треугольникъ abc примемъ за веревочный треугольникъ. При этихъ условіяхъ лучи въ планѣ силъ (см. фиг. 13—β) представятъ усилія въ упругихъ стержняхъ данной системы *abc*, а именно стержень *ab* будетъ сжатъ усиліемъ FL_3; стержень *bc* будетъ вытянутъ усиліемъ FL_1, стержень *ac* будетъ вытянуть усиліемъ LF_2; къ тому же результату привело бы простое разложеніе силъ. Упругіе стержни *ab*, *bc* и *ac* подъ вліяніемъ развивающихся въ нихъ усилій, возрастающихъ постепенно, по мѣрѣ возрастанія внѣшнихъ силъ отъ нуля до вышеприведенныхъ окончательныхъ ихъ значеній, соотвѣтствующихъ окончательнымъ значеніямъ внѣшнихъ силъ P_1, P_2 и P_3, получатъ нѣкоторыя упругія удлиненія (впрочемъ, весьма малыя сравнительно съ первоначальными длинами стержней), соотвѣтствующія величинамъ усилій. Вслѣдствіе этихъ удлиненій первоначальныя длины стержней данной системы нѣсколько измѣнятся и углы, образуемые осями стержней, вслѣдствіе измѣненій длинъ сторонъ треугольника, измѣнятся на нѣкоторую, впрочемъ, весьма малую величину *). При этихъ измѣненіяхъ длинъ стержней и угловъ, образуемыхъ ихъ осями, узловыя точки данной системы *abc* получатъ нѣкоторыя перемѣщенія, т. е. вершины упругаго треугольника соотвѣтственно передвинутся изъ первоначальныхъ ихъ положеній *a*, *b* и *c* и вся система стержней нѣсколько исказится (измѣнитъ свою форму), деформируется. Опредѣленіе упомянутыхъ перемѣщеній узловыхъ точекъ упругой системы посредствомъ графическаго построенія и составляетъ предметъ предложеннаго въ 1877 году французскимъ инженеромъ Williot способа.

Зная усилія въ стержняхъ **) данной упругой статически опредѣлимой системы *abc* (опредѣляемыя вообще однимъ изъ способовъ, даваемыхъ Графическою Статикою, напр., построеніемъ взаимной діаграммы по способу Cremona), находимъ удлиненія стержней, какъ извѣстно изъ Строительной Механики, по формуламъ:

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l_1}{E_1 F_1}; \Delta l_2 = \frac{S_2 l_2}{E_2 F_2}; \Delta l_3 = \frac{S_3 l_3}{E_3 F_3},$$

гдѣ l_1, l_2 и l_3, какъ уже упомянуто выше, означаютъ первоначальныя длины стержней;

S_1, S_2 и S_3—усилія въ стержняхъ.

E_1, E_2 и E_3—модули (коэффиціенты) упругости матеріала стержней.

---

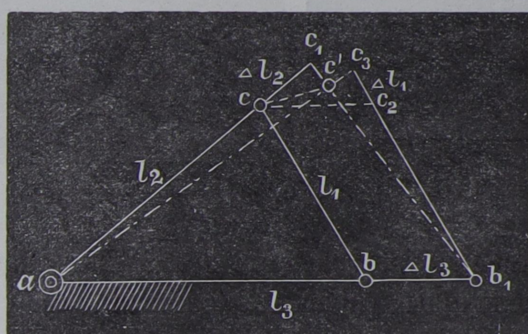
*) Относительно возможности при опредѣленіи усилій въ стержняхъ статически опредѣлимой упругой системы пренебрегать удлиненіями стержней и измѣненіями угловъ, образуемыхъ ихъ осями, см. «Начала статики сооруженій». Основанія графическихъ способовъ расчета сооруженій. С. К. Куницкій 1897 г. (Изданіе 2-е. К. Л. Риккера) стр. 26—29.

**) Какъ увидимъ впослѣдствіи, расчетъ статически неопредѣлимыхъ системъ упругихъ стержней приводится къ разсмотрѣнію деформацій статически-опредѣлимыхъ системъ, въ видѣ главной статически опредѣлимой сѣти стержней, выдѣляемой изъ данной сѣти.

F_1, F_2 и F_3—площади поперечнаго сѣченія стержней.

Если всѣ стержни изготовлены изъ одного матеріала, то $E_1 = E_2 = E_3 = E$.

Пусть (фиг. 14) въ треугольной системѣ упругихъ стержней abc центръ шарнира a закрѣпленъ неподвижно (т. е. прикрѣпленъ къ какой либо другой неподвижной системѣ или къ неподвижному тѣлу такимъ образомъ, что эта узловая точка a не можетъ получить поступательнаго перемѣщенія ни вверхъ, ни внизъ, ни вправо, ни влѣво, но данная система стержней можетъ свободно вращаться около этой точки) и пусть стержень ab сохраняетъ во все время деформаціи данной системы свое положеніе ab (т. е. не можетъ отклоняться въ сторону, напримѣръ вслѣдствіе удерживающихъ его какихъ либо препятствій). При такихъ условіяхъ, въ случаѣ удлиненія стержня ab, длиною l_3, на величину Δl_3, точка b, очевидно, перемѣстится по направленію ab (т. е. въ сторону отъ a къ b) на величину Δl_3 и займетъ новое положеніе b_1. Затѣмъ перемѣщеніе точки c опредѣлится слѣдующимъ образомъ: представимъ себѣ, что сходящіеся въ общей точкѣ c стержни ac и bc на нѣкоторое время разъединены между собою; въ такомъ случаѣ, вслѣдствіе удлиненія Δl_2 стержня $ac = l_2$ точка c этого стержня займетъ новое положеніе c_1. Что касается стержня $bc = l_1$, то таковой, вслѣдствіе удлиненія Δl_3 стержня $ab = l_3$ перемѣстится параллельно самому себѣ въ положеніе b_1 c_2, причемъ, вслѣдствіе удлиненія Δl_1 стержня $bc = b_1c_2 = l_1$ точка c_2 перемѣстится въ положеніе c_3. Представимъ себѣ за тѣмъ, что мысленно разъединенные стержни, по ихъ удлиненіи, т. е. стержни ac_1 и b_1 c_3, поворачиваясь свободно около соотвѣтственныхъ центровъ вращенія, т. е. около точекъ a и b_1, приходятъ въ такое положеніе, при коемъ концы ихъ совпадаютъ въ одну точку и стержни образуютъ замкнутую треугольную фигуру. При этомъ точки c_1 и c_3 опишутъ нѣкоторыя дуги окружностей изъ центровъ a и соотвѣтственно b_1 радіусами ac_1 и соотвѣтственно b_1c_3 до взаимнаго пересѣченія этихъ дугъ окружностей въ нѣкоторой точкѣ, которая и представитъ окончательное положеніе точки c данной системы стержней послѣ ихъ удлиненія.

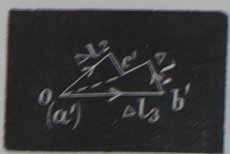


Фиг. 14.

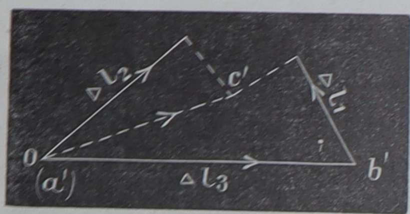
Вслѣдствіе малости удлиненій стержней Δl *), сравнительно съ пер-

*) Эти удлиненія выражаются обыкновенно долями одного миллиметра и въ болѣе рѣдкихъ случаяхъ практики—нѣсколькими миллиметрами.

воначальными длинами l стержней данной треугольной системы, а въ частности, въ данномъ случаѣ, вслѣдствіе малости Δl_3 сравнительно съ l_3, углы отклоненія стержней ac_1 и b_1c_3 отъ первоначальнаго ихъ направленія будутъ весьма малы, а слѣдовательно вмѣсто дугъ окружности, соотвѣтствующихъ этимъ угламъ, можно взять на чертежѣ касательныя къ этимъ дугамъ, причемъ пересѣченіе этихъ касательныхъ, т. е. нормалей въ точкахъ c_1 и c_3 къ соотвѣтствующимъ радіусамъ вращенія ac_1 и $b_1\ c_3$ (см. фиг. 14), и опредѣлитъ искомую точку c', т. е. новое положеніе точки c послѣ удлиненія стержней данной треугольной системы abc. Отрѣзокъ $\overline{cc'}$ и выразитъ по величинѣ, по линіи, по направленію (знаку) и по положенію на плоскости перемѣщеніе точки c; точно также отрѣзокъ $\overline{bb_1}$ представитъ перемѣщеніе точки b; перемѣщеніе же точки a_1 по условію равно нулю. Соединяя (какъ показано на фиг. 14) точку c' съ точками a и b_1 прямыми, получаемъ искаженный или деформированный видъ данной треугольной системы упругихъ стержней, а именно треугольникъ ab_1c'. Такъ какъ, по сдѣланному уже замѣчанію, величины упругихъ удлиненій Δl стержней системы, сравнительно съ первоначальными длинами сихъ стержней, весьма малы, то, откладывая удлиненія стержней въ томъ же масштабѣ, какъ и длины стержней, мы получили бы новыя положенія точекъ системы весьма близко къ первоначальнымъ и не въ состояніи были бы надлежащимъ образомъ измѣрить величины перемѣщеній точекъ системы, ни даже точно опредѣлить линіи перемѣщеній, не говоря уже о томъ неудобствѣ, что построенія пришлось бы производить при этомъ на самомъ чертежѣ данной системы стержней. Во избѣжаніе этихъ неудобствъ, строятъ на отдѣльномъ чертежѣ въ увеличенномъ масштабѣ (т. е. откладывая упругія удлиненія Δl стержней данной системы въ масштабѣ значительно большемъ противъ масштаба разстояній, въ коемъ построена данная система), такъ называемый *планъ перемѣщеній* узловыхъ точекъ данной системы стержней, зависящихъ *отъ упругихъ удлиненій стержней системы*.



Фиг. 15.

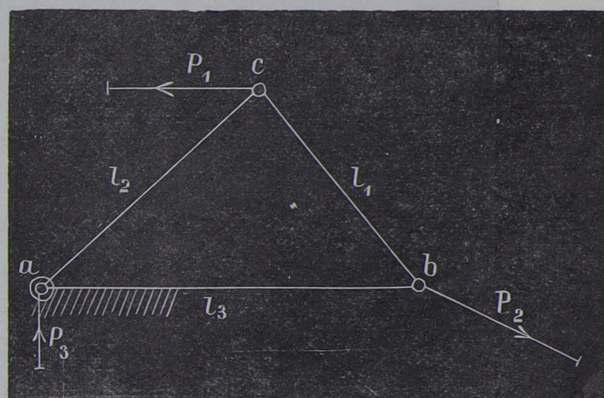


Фиг. 15 bis *).

Для этого (фиг. 15) изъ произвольной точки O, принимаемой за полюсъ плана перемѣщеній, проводятъ прямую $Ob' \parallel$ оси стержня ab и откладываютъ отрѣзокъ $Ob' = \Delta l_3$ въ значительно увеличенномъ масштабѣ, противъ масштаба разстояній, принятаго для чертежа данной фигуры,

*) Масштабъ фиг. 15 bis увеличенъ втрое противъ масштаба фиг. 15.

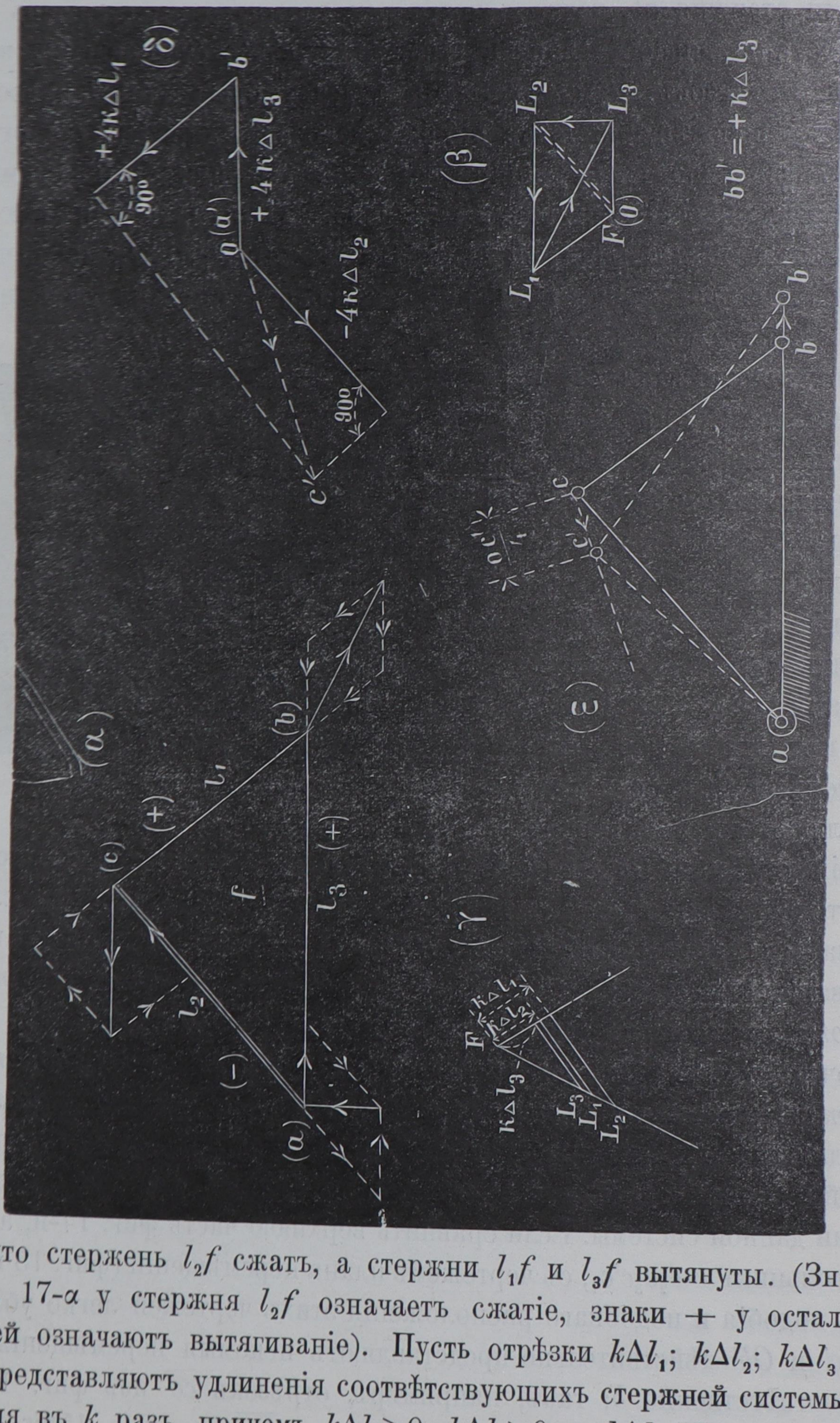
образуемой осями стержней разсматриваемой системы; въ случаѣ, если стержень ab получаетъ положительное удлиненіе, т. е. если въ немъ проявляется вытягивающее усиліе, то Δl_3 слѣдуетъ откладывать отъ точки O вправо, т. е. въ сторону перемѣщенія точки b при дѣйствительномъ удлиненіи стержня ab, точка a коего неподвижна; если стержень ab получаетъ отрицательное удлиненіе, соотвѣтствующее сжимающему въ немъ усилію, то отрѣзокъ Δl_3 слѣдуетъ откладывать отъ точки O влѣво, т. е. въ сторону перемѣщенія точки b при укороченіи стержня ab; отрѣзокъ Ob' изобразитъ по своей линіи, величинѣ и направленію перемѣщеніе точки b данной системы; затѣмъ изъ полюса O проводятъ прямую || оси стержня ac и на этой прямой откладываютъ отрѣзокъ Δl_2; наконецъ, изъ точки b' проводятъ прямую, параллельную оси стержня bc и на этой прямой откладываютъ Δl_1; изъ концовъ отрѣзковъ Δl_2 и Δl_1 возставляютъ къ ихъ линіямъ нормали до взаимнаго пересѣченія ихъ въ точкѣ c'. Отрѣзокъ Oc' изобразитъ по своей линіи, величинѣ и направленію (знаку) перемѣщеніе точки c данной системы; такъ какъ точка a данной си стемы принята за неподвижную, то перемѣщеніе ея равно нулю и въ планѣ перемѣщеній отрѣзокъ $Oa_1 = O$, т. е. точка a_1 совпадаетъ съ полюсомъ O.



Фиг. 16.

При откладываніи въ планѣ перемѣщеній отрѣзковъ Δl_1 и Δl_3 слѣдуетъ поступать по тому же *общему правилу*, какъ мы поступали и при откладываніи отрѣзка Δl_3, т. е. *эти отрѣзки откладываются въ ту сторону отъ соотвѣтствующихъ начальныхъ точекъ* (въ данномъ случаѣ отъ точекъ b_1 и O), *въ которую происходитъ удлиненіе разсматриваемаго стержня, смотря по тому, положительно ли оно или отрицательно*, т. е. удаляется ли или приближается мысленно освобожденный (разъединенный) конецъ стержня къ другому его концу, связанному съ узловыми точками данной системы. Если сравнить верхнюю часть фиг. 14-й, а именно пятиугольникъ $c\,c_2c_3c'c_1$, съ чертежемъ плана перемѣщеній (фиг. 15 и 15bis), то изъ подобія и подобнаго расположенія этихъ чертежей легко убѣдиться, что Oc' и Ob' дѣйствительно представляютъ искомыя перемѣщенія точекъ c и соотвѣтственно b; такъ, напримѣръ, отрѣзокъ $\overline{cc'}$ изъ фиг. 14-й равенъ отрѣзку $\overline{Oc'}$ изъ фиг. 15-й, а отрѣзокъ $\overline{Oc'}$ изъ фиг. 15bis представляетъ по величинѣ утроенное перемѣщеніе точки c, $\overline{Oc'} = \overline{3cc'}$.

Разсмотримъ еще случай, показанный на фиг. 16. Пусть на треугольную систему abc упругихъ стержней дѣйствуютъ взаимно уравновѣшивающіяся силы P_1, P_2 и P_3, приложенныя въ узловыхъ точкахъ данной системы. Изъ діаграммы усилій въ стержняхъ системы (фиг. 17-β) нахо-



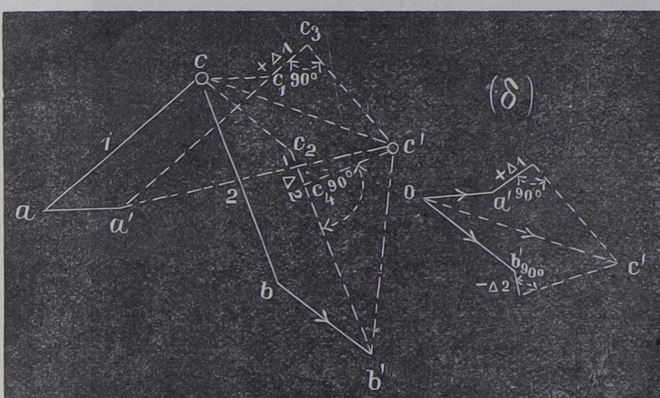
Фиг. 17.

димъ, что стержень l_2f сжатъ, а стержни l_1f и l_3f вытянуты. (Знакъ — на фиг. 17-α у стержня l_2f означаетъ сжатіе, знаки + у остальныхъ стержней означаютъ вытягиваніе). Пусть отрѣзки $k\Delta l_1$; $k\Delta l_2$; $k\Delta l_3$ (фиг. 17-γ) представляютъ удлиненія соотвѣтствующихъ стержней системы, увеличенныя въ k разъ, причемъ $k\Delta l_1 > 0$, $k\Delta l_3 > 0$, а $k\Delta l_2 < 0$.

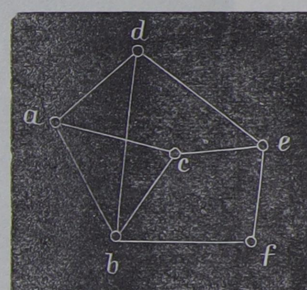
Въ этомъ случаѣ планъ перемѣщеній будетъ имѣть видъ, показанный на фиг. 17-б; на этой фигурѣ величины $k\Delta l$, пропорціональныя удлиненіямъ стержней, увеличены еще въ четыре раза.

Черт. 17-в даетъ понятіе объ искаженномъ видѣ данной треугольной системы послѣ деформаціи, причемъ перемѣщеніе точки c построено на основаніи фиг. 17-б, представляющей планъ перемѣщеній, а именно изъ точки c проведена прямая $cc' \parallel Oc'$ и на этой прямой по направленію $\overline{Oc'}$, т. е. отъ O къ c' отложенъ отрѣзокъ $\overline{cc'} = {}^1/_4\overline{Oc'}$, т. е. равный перемѣщенію точки c, увеличенному въ k разъ. Сравнивая фиг. 15, 15-bis и 17-б видимъ, что стрѣлки на отрѣзкахъ, изображающихъ перемѣщенія узловыхъ точекъ данной системы стержней, зависящія отъ упругихъ удлиненій ихъ, всегда направлены отъ полюса O къ концамъ соотвѣтствующихъ отрѣзковъ, какъ, напримѣръ, $\overline{Oc'}$, $\overline{Ob'}$ и т. п.

Если бы имѣли (фиг. 18а) систему двухъ упругихъ стержней ac и bc,



Фиг. 18.



Фиг. 19.

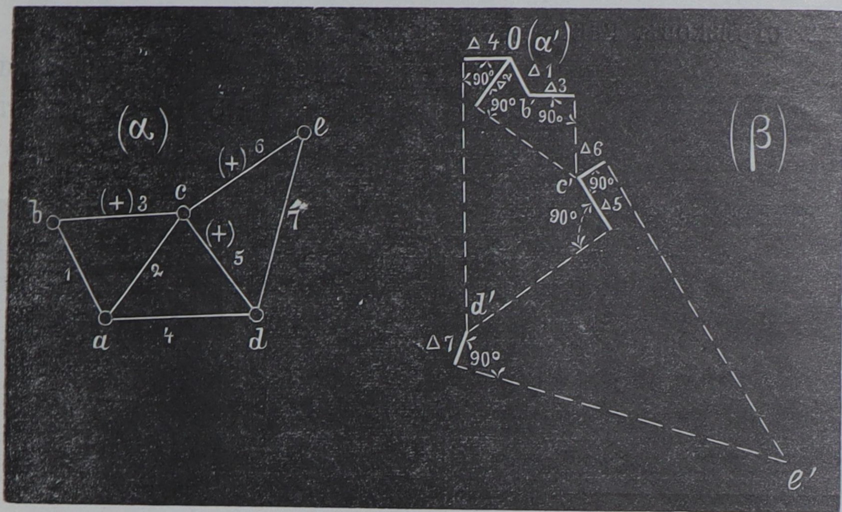
соединенныхъ между собою въ точкѣ c посредствомъ идеальнаго шарнира, и если бы намъ были даны перемѣщенія точекъ a и b, а также упругія удлиненія Δl_1 и Δl_2 стержней ac и cb, то перемѣщеніе точки c нашлось бы на основаніи предыдущаго, какъ показано на фиг. 18-б.

Разсмотримъ теперь зависящія отъ упругихъ удлиненій стержней перемѣщенія узловыхъ точекъ системы упругихъ стержней, состоящей изъ нѣсколькихъ треугольниковъ. Такія системы имѣютъ наибольшее примѣненіе въ практикѣ, въ качествѣ фермъ мостовыхъ или стропильныхъ сооруженій. Образованіе плоской системы стержней, состоящей изъ треугольниковъ, можно себѣ представить такимъ образомъ: къ данной треугольной системѣ abc (фиг 19) присоединяются два новыхъ стержня, соединенныхъ между собою посредствомъ идеальнаго шарнира въ точкѣ d; затѣмъ къ двумъ произвольнымъ узловымъ точкамъ полученной фигуры примыкаютъ опять два новыхъ стержня, соединенныхъ между собою въ узлѣ, и т. д. Построимъ планъ перемѣщеній узловыхъ точекъ системы, показанной на фиг. 20-а, у которой стержни обозначенные знакомъ (+)

испытываютъ удлиненія, а остальные—укороченія. Предположимъ, что узловая точка a неподвижна, и что положеніе стержня 1-го на плоскости остается неизмѣннымъ. При этихъ условіяхъ, поступая послѣдовательно для каждаго изъ узловъ b, c, d и e, какъ мы поступали выше при разсмотрѣніи треугольной системы для узловъ b и c, можемъ легко построить планъ перемѣщеній.

Построеніе исполнено на фиг. 20—β слѣдующимъ образомъ:

Произвольная точка O принята за полюсъ плана перемѣщеній. Такъ какъ узловая точка a принята за неподвижную, то перемѣщеніе ея равно нулю, а потому отрѣзокъ $\overline{Oa'}$ равенъ нулю и точка a' совпадаетъ съ точ-



Фиг. 20.

кою O. Перемѣщеніе $\overline{Ob'}$ точки b равно укороченію Δ 1 стержня 1-го, а потому оно отложено отъ полюса O по прямой, параллельной оси стержня 1-го въ сторону перемѣщенія точки b при укороченіи сего стержня, т. е. въ сторону отъ точки b къ точкѣ a. Узелъ c соединенъ съ узломъ a стержнемъ 2-мъ, а съ узломъ b стержнемъ 3-мъ; узелъ c приближается на Δ 2 къ узлу a и удаляется на Δ 3 отъ узла b. Поэтому, если у точки a' (совпадающей съ O) построить въ направленіи ca отрѣзокъ $\Delta\ 2 \parallel 2$, а въ точкѣ b' построить въ направленіи bc отрѣзокъ $\Delta\ 3 \parallel 3$ и возставить къ этимъ отрѣзкамъ въ ихъ концахъ нормали, то точка пересѣченія этихъ нормалей c' опредѣлитъ собою перемѣщеніе $\overline{Oc'}$ точки c. Узелъ d соединенъ съ узлами a и c стержнями 4-мъ и соотвѣтственно 5-мъ; перемѣщеніе $\overline{Od'}$ узла d найдется, если построить у точки a' (совпадающей въ данномъ случаѣ съ полюсомъ O) отрѣзокъ $\Delta\ 4 \parallel 4$ въ направленіи da и если затѣмъ построить у точки c' въ направленіи cd отрѣзокъ $\Delta\ 5 \parallel 5$; возставляя изъ концовъ упомянутыхъ отрѣзковъ нормали къ нимъ до взаимнаго пересѣченія сихъ нормалей въ точкѣ d', находимъ $\overline{Od'}$ искомое перемѣшеніе точки d. Такимъ же образомъ построится и перемѣщеніе узла e, какъ показано на фиг. 20—β. Этотъ чертежъ представляетъ планъ перемѣщенія узловъ данной фермы $abcde$, вслѣдствіе упругихъ удлиненій ея стержней, и называется иногда, просто *планомъ Williot*, по фамиліи французскаго инженера, предложившаго это построеніе. Въ планѣ *Williot* лучи Ob' ; Oc' ; Od' ; Oe' и т. д. представляютъ по величинѣ, по линіи и по направленію перемѣщенія соотвѣтствующихъ узловыхъ точекъ b ; c ; d ; e и т. д. данной фермы. Перенося эти перемѣщенія въ соотвѣтствующіе узлы и соединивъ между собою точки, изображающія новыя положенія узловъ, прямыми линіями, можемъ получить искаженный или деформированный подъ дѣйствіемъ заданной нагрузки видъ фермы.

§ 9. Сложеніе перемѣщеній, зависящихъ отъ упругихъ удлиненій стержней данной системы съ перемѣщеніями, зависящими отъ вращенія всей системы около неподвижной точки. На основаніи предыдущихъ §§, отъ § 2-го до § 7-го включительно, мы знаемъ, какъ построить планъ перемѣщеній точекъ плоской системы въ зависимости отъ вращенія ея около данной точки. Изъ § 8-го намъ извѣстно, какъ построить планъ перемѣщеній узловыхъ точекъ данной системы упругихъ стержней въ зависимости отъ упругихъ удлиненій сихъ стрежней. Если узловыя точки данной системы упругихъ стержней получаютъ перемѣщенія, зависящія отъ двухъ причинъ, а именно: 1) отъ упругихъ удлиненій стержней системы подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ, и 2) отъ одновременнаго вращенія всей системы около нѣкоторой неподвижной точки, ей принадлежащей, то окончательное общее перемѣщеніе каждой узловой точки найдется геометрическимъ сложеніемъ двухъ частныхъ перемѣщеній той же точки, зависящихъ отъ упомянутыхъ двухъ причинъ. Геометрическое сложеніе перемѣщеній производится такъ же, какъ и сложеніе силъ; такъ что общее (окончательное) перемѣщеніе узловой точки (такъ сказать равнодѣйствующая двухъ перемѣщеній) графически получается такимъ же пріемомъ, какъ равнодѣйствующая двухъ данныхъ силъ.

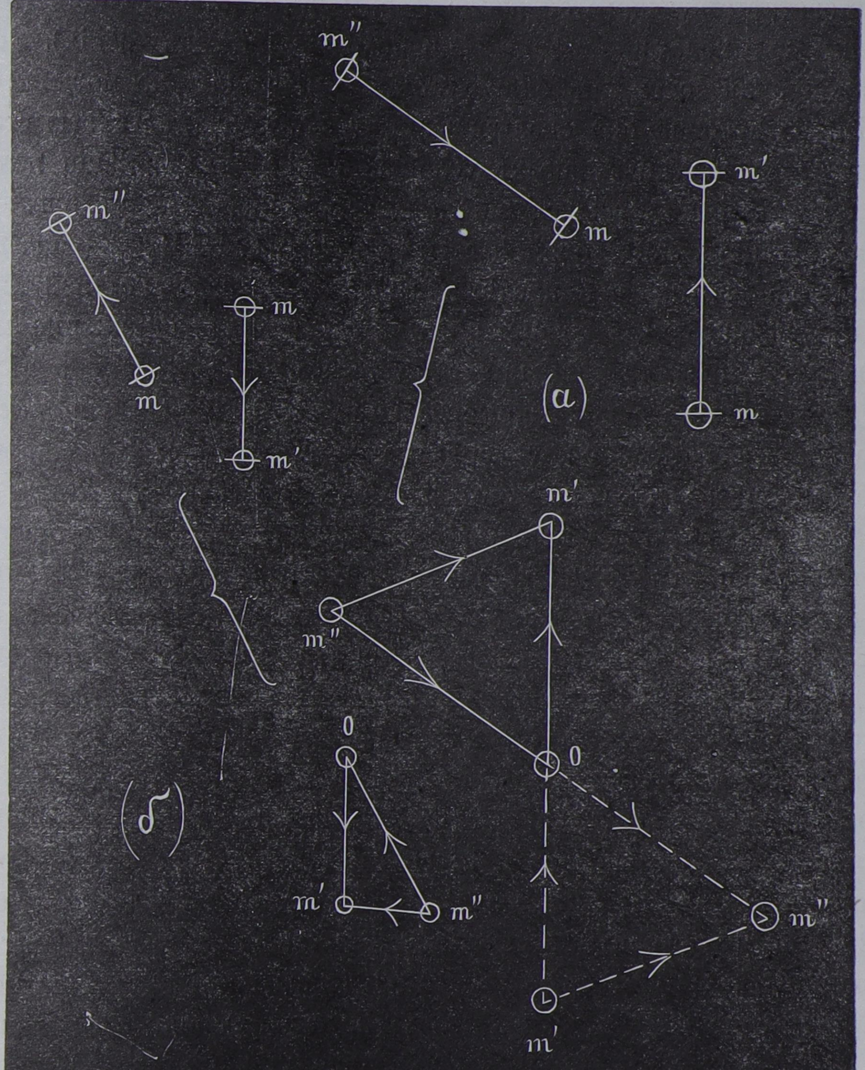
По правилу сложенія силъ отрѣзки, изображающіе силы, откладываются одинъ за другимъ въ сторону направленія, показаннаго стрѣлкою на каждой силѣ такъ, чтобы воображаемая матеріальная точка, движущаяся по многоугольнику силъ могла имѣть непрерывное движеніе. Это же правило необходимо соблюдать и при сложеніи перемѣщеній, т. е. одно перемѣщеніе откладывается за другимъ въ сторону стрѣлокъ, (показывающихъ направленія перемѣщеній) такъ, чтобы матеріальная точка, движущаяся по многоугольнику перемѣщеній могла имѣть непрерывное движеніе. По соединеніи прямою начала отрѣзка, изображающаго перемѣщеніе разсматриваемой точки отъ первой причины съ концомъ отрѣзка, изображающаго перемѣщеніе той же точки отъ послѣдней причины, получимъ отрѣзокъ, изображающій геометрическую сумму перемѣщеній той же точки (общее, окончательное перемѣщеніе, произведенное дѣйствіемъ обѣихъ причинъ, — равнодѣйствующую перемѣщеній); стрѣлка на этомъ отрѣзкѣ (какъ и на равнодѣйствующей силъ) будетъ, очевидно, направлена въ сторону, противоположную стрѣлкѣ, поставленной на послѣдней сторонѣ многоугольника перемѣщеній. Чтобы возможно было, пользуясь этимъ замѣчаніемъ, сразу опредѣлить, въ каждомъ частномъ случаѣ, направленіе (стрѣлку) окончательнаго общаго перемѣщенія (геометрической суммы перемѣщеній) разсматриваемой узловой точки, — условимся держаться опредѣленнаго, разъ навсегда, правила построенія каждаго изъ двухъ частныхъ (геометрическихъ слагаемыхъ) перемѣщеній по отношенію къ избранному нами полюсу O плана перемѣщеній.

Пусть (фиг. 21 — (α)) даны по величинѣ, линіи и направленію два перемѣщенія какой-либо узловой точки m нѣкоторой системы упругихъ стержней, а именно: одно перемѣщеніе $\overline{mm'}$, зависящее отъ упругихъ удлиненій стержней системы, и другое перемѣщеніе $\overline{mm''}$, зависящее отъ вращенія всей системы около нѣкоторой неподвижной точки; требуется найти геометрическую сумму этихъ перемѣщеній.

Для этого возьмемъ произвольную точку O (полюсъ плана перемѣщеній) и построимъ у этой точки оба упомянутыхъ перемѣщенія. Построеніе это можетъ быть сдѣлано или такъ, какъ показано на фиг. (21—α) пунктиромъ, или такъ, какъ показано сплошными линіями; выборъ одного изъ этихъ построеній зависитъ отъ насъ. Замѣтимъ еще, что въ силу построенія перемѣщеній одного за другимъ въ направленіи, показанномъ стрѣлками, всегда будетъ имѣть мѣсто (см. фиг. 21 — (α)) такого рода явленіе, что, если стрѣлка одного изъ двухъ перемѣщеній направлена *къ* полюсу O, то стрѣлка другого перемѣщенія будетъ направлена *отъ* полюса O. Такъ, напримѣръ, въ той части фиг. 21—(α), которая состоитъ изъ сплошныхъ линій, перемѣщеніе $\overline{Om'}$ направлено *отъ* полюса O, а перемѣщеніе $\overline{m''O}$ *къ* полюсу O; въ той же части фиг. 21—(α), которая состоитъ изъ пунктирныхъ линій, стрѣлки по отношенію къ полюсу O расположены обратно, а именно стрѣлка перемѣщенія $\overline{m'O}$ направлена *къ* полюсу O, а стрѣлка перемѣщенія $\overline{m''O}$ направлена *отъ* полюса O.

Соотвѣтственно сему, въ первомъ случаѣ, стрѣлка на отрѣзкѣ $\overline{m''m'}$, изображающемъ дѣйствительное перемѣщеніе точки m (т. е. геометрическую сумму частныхъ перемѣщеній), направлена отъ точки m'' къ точкѣ m', а во второмъ случаѣ отъ точки m' къ точкѣ m''.

Для однообразія выберемъ въ дальнѣйшемъ изложеніи то построеніе, которое показано на чер. 21—(α) сплошными линіями и будемъ помнить, что этому построенію соотвѣтствуетъ направленіе стрѣлки на отрѣзкахъ, изображающихъ дѣйствительныя перемѣщенія узловыхъ точекъ, отъ m'' къ m'. За перемѣщенія такія, какъ $\overline{Om'}$, т. е. направленныя *отъ полюса* плана перемѣщеній—примемъ перемѣщенія, зависящія отъ упругихъ удлиненій стержней системы; за перемѣщенія такія, какъ $\overline{m''O}$, т. е. направленныя *къ полюсу* плана перемѣщеній, примемъ перемѣщенія, зависящія



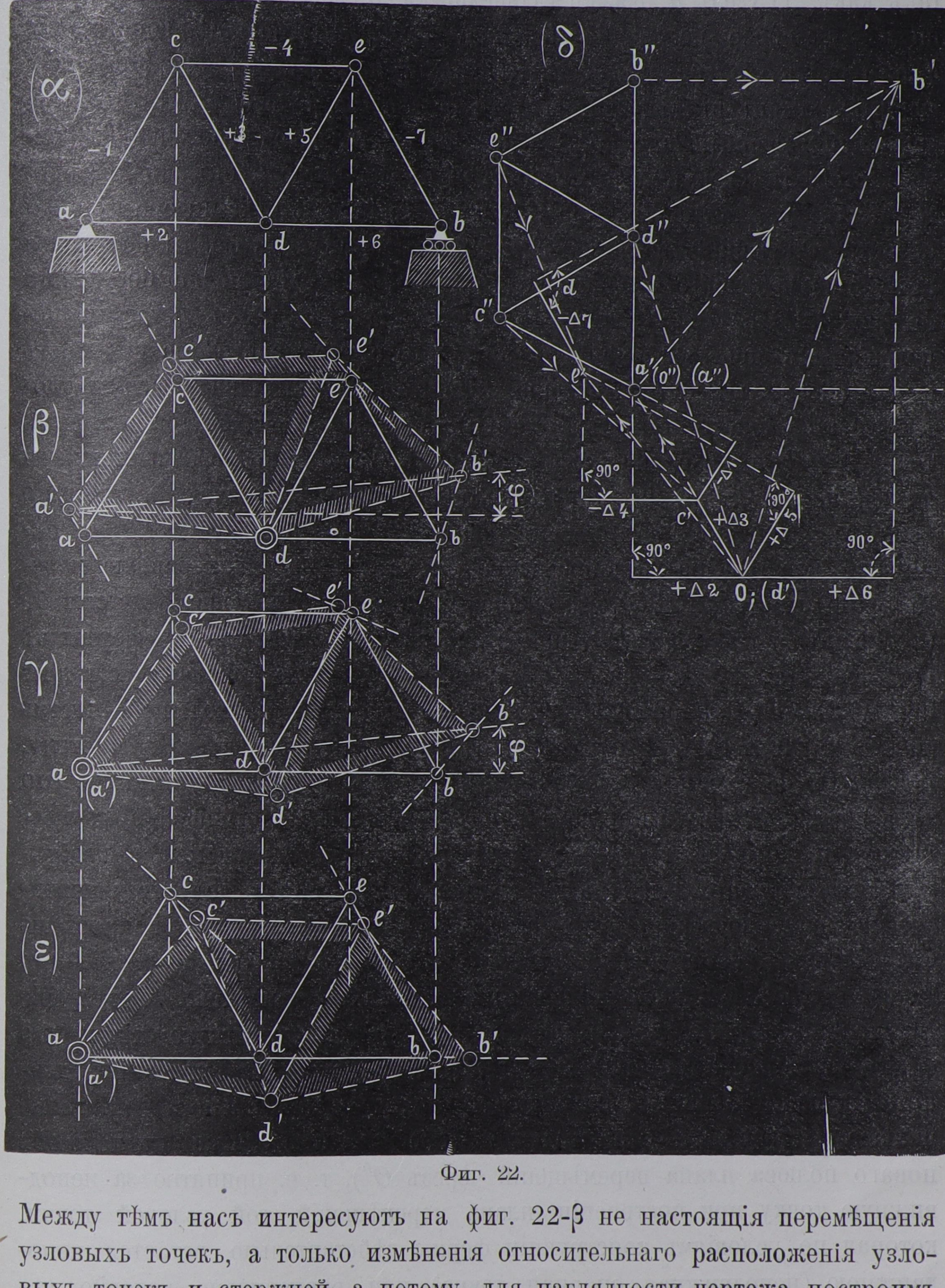
Фиг. 21.

отъ вращенія всей системы около неподвижной точки. На чер. 21—(δ) показано сложеніе перемѣщеній для другого случая направленія стрѣлокъ на двухъ заданныхъ перемѣщеніяхъ.

§ 10. Построеніе плановъ перемѣщеній узловыхъ точекъ статически-опредѣлимыхъ плоскихъ фермъ. Какъ извѣстно изъ предыдущаго выпуска *), всякая статически-опредѣляемая плоская ферма имѣетъ двѣ

*) Начала статики сооруженій. Основанія графическихъ способовъ расчета сооруженій. С. К. Куницкій. 1897 г. (Изданіе 2-е К. Л. Риккера, стр. 29—32).

опорныя точки, изъ коихъ одна неподвижная, т. е. не допускаетъ никакого поступательнаго перемѣщенія фермы ни вверхъ, ни внизъ, ни вправо, ни влѣво, но допускаетъ вращеніе фермы около этой точки (причемъ это вращеніе предполагается происходящимъ безъ тренія), а другая опорная точка—подвижная, т. е. допускающая свободное перемѣщеніе соотвѣтствующаго ей конца фермы по нѣкоторой линіи (это перемѣщеніе предполагается также происходящимъ безъ тренія), но подвижная опорная точка, въ силу условій конструкціи, не можетъ *сойти съ линіи*, по которой она скользитъ ни въ одну, ни въ другую сторону. Въ силу этихъ конструктивныхъ условій—и послѣ деформаціи подобной фермы одна опорная точка ея остается на своемъ мѣстѣ, а другая остается на той линіи, по которой она можетъ скользить. Пусть (фиг. 22—α) дана плоская статически-опредѣлимая ферма $adbec$, у которой опорная точка a неподвижная, а опорная точка b — подвижная, именно можетъ скользить по горизонтальной прямой, такъ что центры шарнировъ a и b всегда находятся на одной горизонтали; пусть стержни ad; db; dc и de, обозначенные знакомъ (+), удлиняются, а стержни ac; ce и eb, обозначенные знакомъ (—), укорачиваются. Положимъ, что величины удлиненій стержней для какой-либо нагрузки данной фермы намъ извѣстны; построимъ планъ перемѣщеній узловъ этой фермы, соотвѣтствующій упомянутымъ удлиненіямъ стержней ея. Съ этою цѣлью возьмемъ сперва (фиг. 22-β) какой-либо узелъ фермы, напримѣръ узелъ d за неподвижную точку для построенія плана перемѣщеній, зависящихъ отъ упругихъ удлиненій стержней системы, и, сверхъ того, положимъ, что стержень cd сохраняетъ неизмѣнно свое положеніе при деформаціи фермы. При этихъ предложеніяхъ и взявши для удлиненій масштабъ, увеличенный противъ масштаба чертежа фермы въ произвольное число разъ (напримѣръ, для наглядности въ 2.000 разъ, чему, примѣрно, соотвѣтствуетъ масштабъ фиг. 22-δ по отношенію къ масштабу фиг. 22-α), построимъ (фиг. 22-δ) изъ произвольно выбраннаго полюса O (совпадающаго съ точкою d') планъ перемѣщеній, зависящихъ отъ упругихъ удлиненій стержней системы, и найдемъ линіи, величины и направленія перемѣщеній узловыхъ точекъ c; a; e и b, а именно: $\overline{Oc'}$; $\overline{Oa'}$; $\overline{Oe'}$ и $\overline{Ob'}$, причемъ увидимъ, что точка b', т. е. конецъ отрѣзка, изображающаго перемѣщеніе точки b, не придется на одной горизонтали съ точкою a'. Зная перемѣщенія узловыхъ точекъ, построимъ на фиг. 22-β искаженный (деформированный), вслѣдствіе сихъ перемѣщеній узловъ, видъ фермы; съ этою цѣлью мы должны были бы привести перемѣщенія, найденныя на фиг. 22-δ, къ масштабу фиг. 22-β, т. е. раздѣлить на 2.000 и полученныя величины перемѣщеній построить у соотвѣтствующихъ узловыхъ точекъ. Очевидно, что при этомъ перемѣщенія получились бы такими малыми, что мы бы не могли ни отложить ихъ, ни составить себѣ понятія объ относительномъ расположеніи стержней фермы въ искаженномъ ея видѣ по отношенію къ расположенію ихъ въ первоначальномъ (заданномъ) видѣ фермы.



Фиг. 22.

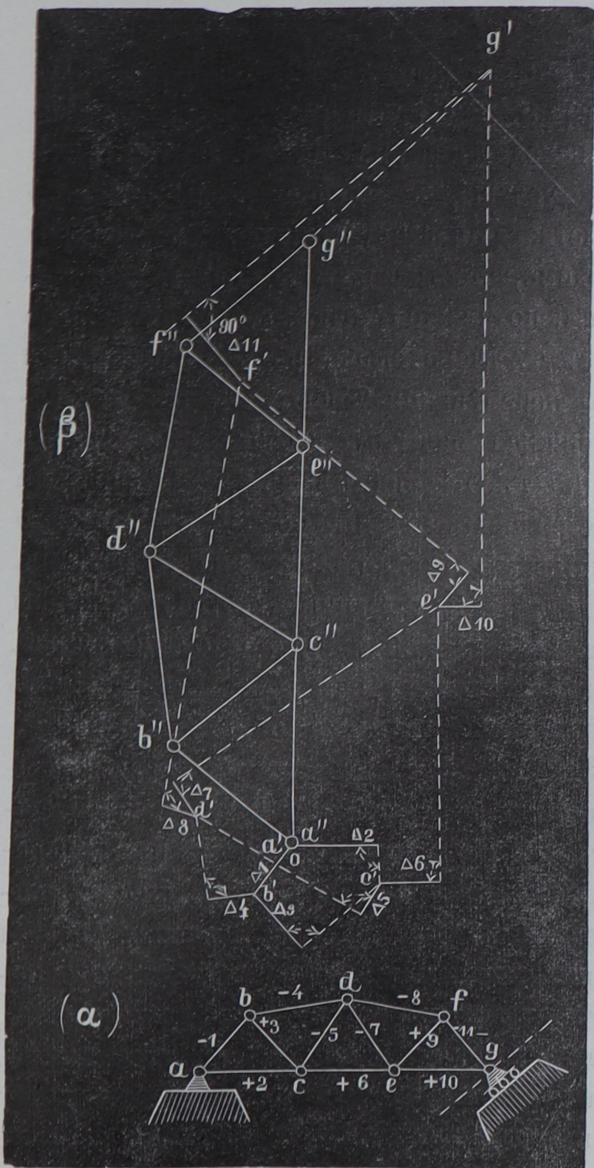
Между тѣмъ насъ интересуютъ на фиг. 22-β не настоящія перемѣщенія узловыхъ точекъ, а только измѣненія относительнаго расположенія узловыхъ точекъ и стержней, а потому, для наглядности чертежа, построимъ на фиг. 22-β перемѣщенія не настоящія, но увеличенныя въ 250 разъ (для чего придется раздѣлить на 8 соотвѣтствующія перемѣщенія, найденныя на фиг. 22-δ). Изъ фиг. 22-β легко видѣть, что изображенный на ней искаженный видъ фермы не соотвѣтствуетъ дѣйствительности, такъ какъ: 1) узелъ a оказался сошедшимъ со своего мѣста и перемѣстившимся въ новое положеніе a', между тѣмъ по условіямъ конструкціи фермы этотъ узелъ, какъ соотвѣтствующій неподвижной опорной точкѣ фермы, долженъ въ дѣйствительности оставаться на своемъ мѣстѣ и при деформаціи фермы; 2) узелъ b перемѣстился въ новое положеніе b', причемъ отошелъ вверхъ отъ горизонтали ab, на которой онъ въ дѣйствительности долженъ оставаться въ силу условій конструкціи фермы. Такой несоотвѣтствующій дѣйствительности искаженный видъ фермы получился вслѣдствіе невѣрнаго предположенія, которое мы сдѣлали при построеніи на фиг. 22-δ плана перемѣщеній, а именно, что узелъ d остается неподвижнымъ при деформаціи фермы и что стержень cd не измѣняетъ своего первоначальнаго положенія. Чтобы искаженный видъ фермы удовлетворялъ конструктивнымъ условіямъ, въ коихъ находятся опорныя точки a и b, необходимо такъ передвинуть ферму въ искаженномъ ея видѣ (см. фиг. 22-β), чтобы: 1) точка a' совпала съ точкою a, дла чего достаточно сообщить всей фермѣ, какъ неизмѣняемой системѣ, поступательное перемѣщеніе по направленію $a'a$ на величину $\overline{a'a}$, равную перемѣщенію $\overline{O'a}$ (фиг. 22-δ), измѣренному въ соотвѣтствующемъ масштабѣ (по масштабу $aa' = {}^1/_8\, Oa'$); при этомъ каждая узловая точка фермы въ искаженномъ ея видѣ (фиг. 22-β) передвинулась бы внизъ на величину $\overline{a'a}$, и 2) точка b' пришлась бы на горизонтали, проходящей черезъ точку a', для чего необходимо всю ферму, какъ неизмѣняемую систему, повернуть на уголъ φ (см. фиг. 22-β). (Здѣсь необходимо замѣтить, что такъ какъ дѣйствительныя величины перемѣщеній по отношенію къ масштабу, въ которомъ построена самая ферма въ 250 разъ менѣе изображенныхъ на чертежѣ, то въ дѣйствительности уголъ φ получится значительно менѣе показаннаго на чертежѣ; но насъ въ данномъ вопросѣ не интересуетъ дѣйствительная величина этого угла, а только фактъ, что таковой уголъ при разсматриваемыхъ условіяхъ образуется). Совпаденіе точки a' съ a (фиг. 22-β) можетъ быть также достигнуто тѣмъ, что ферма въ первоначальномъ ея видѣ, т. е. ферма $adbec$ будетъ передвинута въ направленіи aa' на величину $\overline{aa'}$, что равносильно перемѣщенію полюса O (фиг. 22-δ) въ точку a' (обозначенную также въ качествѣ новаго полюса плана перемѣщеній черезъ O''), т. е. принятію за неподвижную точку при построеніи плана перемѣщеній той узловой точки, которая по условіямъ конструкціи фермы дѣйствительно остается неподвижною (неподвижная опорная точка) или равносильно условію, что отрѣзокъ $\overline{Oa'}$ равенъ нулю: $\overline{Oa'} = 0$. Перемѣщеніе каждой точки фермы измѣнится на величину $\overline{Oa'}$, отсчитываемую отъ O въ направленіи къ a', причемъ новыя перемѣщенія будутъ:

$$
\begin{array}{llll}
\text{вмѣсто} & Ob' \text{ — перемѣщеніе} & O''b' = a'b'; \\
\text{»} & Oc' \text{ — } \quad \text{»} & O''c' = a'c'; \\
\text{»} & Oe' \text{ — } \quad \text{»} & O''e' = a'e'; \\
\text{»} & Od' = o \text{ — } \quad \text{»} & O''d' = a'd'.
\end{array}
$$

Эти новыя перемѣщенія построены на чертежѣ 22-γ, причемъ получился новый искаженный видъ фермы, уже болѣе удовлетворяющій дѣйствительнымъ условіямъ, въ коихъ находится ферма. На фиг. 22-γ остается неудовлетвореннымъ лишь одно условіе, а именно, чтобы точка b лежала на прямой ab. Для удовлетворенія этому условію, какъ усматривается изъ чертежа 22-γ, необходимо, чтобы ферма, вращаясь, какъ неизмѣняемая система, около своей неподвижной точки a, повернулась на нѣкоторый уголъ φ, который, какъ замѣчено выше, въ дѣйствительности весьма малъ по той причинѣ, что перемѣщенія узловыхъ точекъ, зависящія отъ упругихъ удлиненій стержней системы, весьма малы. Такимъ образомъ, узловыя точки фермы получаютъ перемѣщенія, зависящія не только отъ упругихъ удлиненій стержней системы, но и отъ нѣкотораго вращенія всей системы около неподвижной опорной ея точки,—вращенія, обусловливаемаго конструктивными условіями фермы, требующими, чтобы другая опорная ея точка скользила по данной линіи, не сходя съ нея. Дѣйствительное перемѣщеніе каждой узловой точки фермы представитъ геометрическую сумму двухъ упомянутыхъ перемѣщеній.

Изъ предыдущихъ §§ 3 и 7-го извѣстно, какъ строить планъ перемѣщеній точекъ неизмѣняемой системы, получающей весьма малое вращеніе около даннаго мгновеннаго центра вращенія. Фигура плана перемѣщеній совершенно опредѣлена, если извѣстны двѣ ея точки; въ данномъ случаѣ одна изъ сихъ точекъ есть точка a'', совпадающая съ a' и съ O'' (полюсъ плана перемѣщеній, совпадающій съ неподвижною опорною точкою фермы), а вторая точка b'' опредѣлится изъ того условія, что дѣйствительное перемѣщеніе точки b должно быть горизонтально, т. е. точка b'' должна лежать на горизонтали, проходящей черезъ точку a' и одновременно на нормали къ ab, проходящей черезъ точку a', такъ какъ перемѣщеніе точки b, зависящее отъ вращенія ея около точки a, должно быть нормально къ радіусу вращенія, т. е. къ ab. Значитъ точка b'' найдется, какъ точка пересѣченія прямыхъ $b'b''$ и $a'b''$.

По двумъ точкамъ a'', (a') и b'' можно построить фигуру плана перемѣщеній, подобную фигурѣ данной фермы, исходя изъ условія пропорціональности и взаимной перпендикулярности сходственныхъ сторонъ. Такъ какъ точка d дѣлитъ ab пополамъ, то и точка d'' должна раздѣлить $a''b''$ пополамъ; имѣя точки a'', b'' и d'' и проводя нормали къ соотвѣтствующимъ элементамъ фермы, построимъ искомую фигуру плана перемѣщеній $a''d''b''e''c''$. Сложеніе перемѣщеній дѣлается какъ показано въ предыдущемъ § 9. Дѣйствительное перемѣщеніе точки b, увеличенное (сравнительно съ масштабомъ данной фермы) въ 2,000 разъ — есть $b''b'$ и направлено вправо отъ точки b, чего и слѣдовало ожидать a priori, такъ какъ точка a неподвижна, стержни же ad и db оба удлиняются по заданію. На фиг. 22-ε изображенъ искаженный видъ фермы, приблизительно соотвѣтствующій по относительному расположенію частей дѣйствительности, въ зависимости отъ конструктивныхъ условій опорныхъ ея точекъ. При этомъ однако слѣдуетъ замѣтить, что эта фигура даетъ понятіе лишь объ относительномъ расположеніи узловыхъ точекъ и стержней фермы, самыя же перемѣщенія построены на ней въ преувеличенномъ (въ 250 разъ) масштабѣ, сравнительно съ масштабомъ чертежа самой фермы.



Фиг. 23.

§ 11. Построеніе плана перемѣщеній узловъ фермы при наклонной линіи скольженія подвижной опорной ея точки. Пусть (фиг. 23—α) дана ферма, для коей линія скольженія опорной ея точки наклонна къ горизонту (какъ показано на чертежѣ прерванной линіей) и пусть стержни, обозначенные на чертежѣ знакомъ (+) удлиняются, а обозначенные знакомъ (—) укорачиваются. Построеніе плана перемѣщеній для этой фермы исполнено на чертежѣ 23-β, на основаніи разсужденій приведенныхъ выше въ § 10, при чемъ для построенія фигуры перемѣщеній отъ вращенія фермы около неподвижной ея точки a послужили двѣ точки, точка a' (a''), принятая за полюсъ O, и точка g'', полученная отъ пересѣченія прямой $a''g'' \perp ag$ и прямой $g'g''$, представляющей линію дѣйствительнаго перемѣщенія точки $g \parallel$ данной линіи скольженія подвижной опорной точки g фермы. Дѣйствительное перемѣщеніе точки g направлено отъ g'' къ g' по общему правилу; такого направленія сего перемѣщенія слѣдовало ожидать a priori, такъ какъ точка a неподвижна, а стержни $\overline{ac}$, $\overline{ce}$ и $\overline{eg}$ испытываютъ удлиненія.

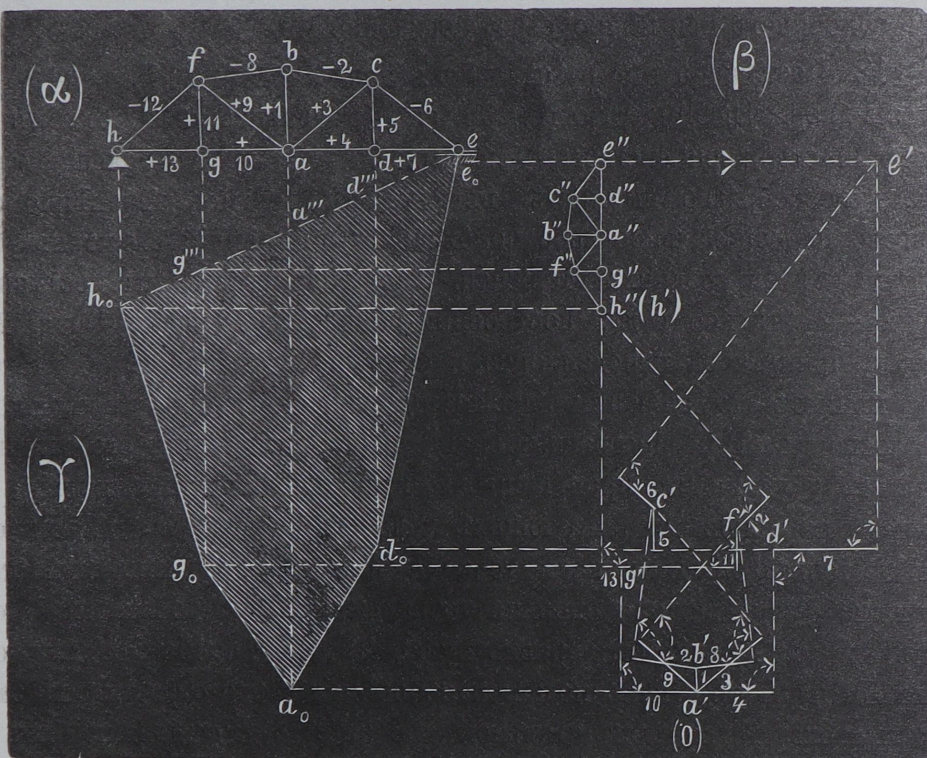
При построеніи плана перемѣщеній, зависящихъ отъ упругихъ удлиненій стержней, за неподвижную точку была принята точка a и при этомъ первоначально предположено было, что стержень ab, обозначенный № 1, сохраняетъ неизмѣнно свое положеніе.

§ 12. Построеніе многоугольниковъ прогиба фермъ. Для того, чтобы чертежъ перемѣщеній узловыхъ точекъ, въ зависимости отъ упругихъ удлиненій стержней системы, — не выходилъ слишкомъ большихъ размѣровъ, цѣлесообразно выбирать—въ качествѣ стержня, неизмѣнно сохраняющаго первоначальное свое положеніе,—не крайній стержень фермы, а одинъ изъ ея среднихъ стержней. Такъ, напримѣръ, мы поступили на фиг. 24—α, въ коемъ для построенія плана перемѣщеній (фиг. 24—β) точка a принята за неподвижную и средній стержень ab, обозначенный № 1, принятъ сохраняющимъ неизмѣнно первоначальное свое положеніе на плоскости. При построеніи плана перемѣщеній, для его упрощенія, значки Δ у удлиненій пропущены. Фигура перемѣщеній на черт. 24-β получена на основаніи слѣдующихъ условій: 1) точка h'' должна совпадать съ точкою h', такъ какъ точка h фермы въ дѣйствительности неподвижна (неподвижная опорная точка фермы), слѣдовательно перемѣщеніе ея $h''h'$ должно быть равно нулю; 2) перемѣщеніе $e''e'$ должно быть горизонтально, такъ какъ подвижная опорная точка e фермы, по заданію можетъ скользить по горизонтальной прямой, и 3) $h''e''$ должно быть $\perp$ he, въ силу свойствъ фигуры перемѣщеній.

Найдя двѣ точки h'' и e'' фигуры перемѣщеній, раздѣляемъ h'' e'' на четыре части по числу панелей данной фермы и строимъ фигуру, подобную фигурѣ данной фермы, при условіи взаимной нормальности сходственныхъ сторонъ этихъ фигуръ. По плану перемѣщеній фиг. 24-β можемъ измѣрить перемещенія $\overline{b''b'}$, $\overline{c''c'}$ и т. д. узловыхъ точекъ b, c и т. д.

Проведемъ черезъ точки h, g, a, d, e данной фермы (фиг. 24-α) пунктиромъ вертикали и спроектируемъ (фиг. 24-γ) на соотвѣтствующія вертикали точки h', g', a', d' и e' плана перемѣщеній (фиг. 24-β), при чемъ назовемъ полученныя проекціи черезъ h_0, g_0, a_0 d_0 и e_0. Соединимъ точки h_0 и e_0 прямою линію, которая пересѣчетъ въ точкахъ g''', a''' и d''' вертикали, проходящія черезъ соотвѣтствующія узловыя точки; тогда отрѣзки упомянутыхъ вертикалей, а именно $g'''g_0$; $a'''a_0$; $d'''d_0$ представятъ не иное что, какъ вертикальныя проекціи перемѣщеній соотвѣтствующихъ узловыхъ точекъ, а именно точекъ: g, a и d. Вертикальныя проекціи перемѣщеній узловыхъ точекъ h и e порознь равны нулю, такъ какъ точка h неподвижна, а точка e, хотя и подвижна, но она скользитъ по горизонтали, а потому вертикальная проекція ея перемѣщенія равна нулю.

Вертикальныя проекціи дѣйствительныхъ перемѣщеній узловыхъ точекъ фермы называютъ *прогибами фермы*, напр. $g'''g_0$ есть *прогибъ фермы въ точкѣ* g. Многоугольникъ $h_0\,g_0\,a_0\,d_0\,e_0$ называется *многоугольникомъ про-*



Фиг. 24.

гиба нижняго пояса фермы (многоугольникомъ изгиба фермы) или *линіей прогиба нижняго пояса фермы*; прямая h_0e называется *замыкающею*.

Заштрихованная на чертежѣ 24-γ площадь называется *площадью прогиба нижняго пояса фермы*.

Если требуется найти лишь иногоугольникъ црогиба $h_0g_0a_0d_0e_0$, какъ это часто случается въ вопросахъ инженерной практики, то, какъ это легко видѣть изъ фиг. 24-β, для фермъ, въ коихъ подвижная опорная точка скользитъ по горизонтали, не требуется строить фигуры перемѣщеній, слѣдовательно, для фермъ, чаще всего встрѣчающихся на практикѣ, построеніе значительно упрощается.

Построеніе многоугольниковъ прогиба для сквозныхъ фермъ имѣетъ большое значеніе для практики, такъ какъ оно даетъ возможность весьма просто получить *точную теоретическую* величину прогиба для каждаго узла, не прибѣгая, какъ это обыкновенно дѣлается, къ вычисленію прогибовъ по формуламъ, которыя относятся къ сплошнымъ балкамъ, а не къ сквознымъ фермамъ и, слѣдовательно, даютъ не *точныя теоретическія* значенія прогибовъ, причемъ ошибка иногда можетъ достигать до 30 проц.

Въ заключеніе слѣдуетъ упомянуть объ одномъ частномъ случаѣ построенія многоугольника прогиба фермы. Этотъ частный случай легко получить по фиг. 24, если предположить на фиг. 24—β, что удлиненія частей фермы, симметрично расположенныхъ относительно средняго стержня ab фермы, равны между собою, а именно: что $\Delta 4 = \Delta 10$; $\Delta 9 = \Delta 3$; $\Delta 2 = \Delta 8$; $\Delta 11 = \Delta 5$; $\Delta 6 = 12$; $\Delta 7 = \Delta 13$.

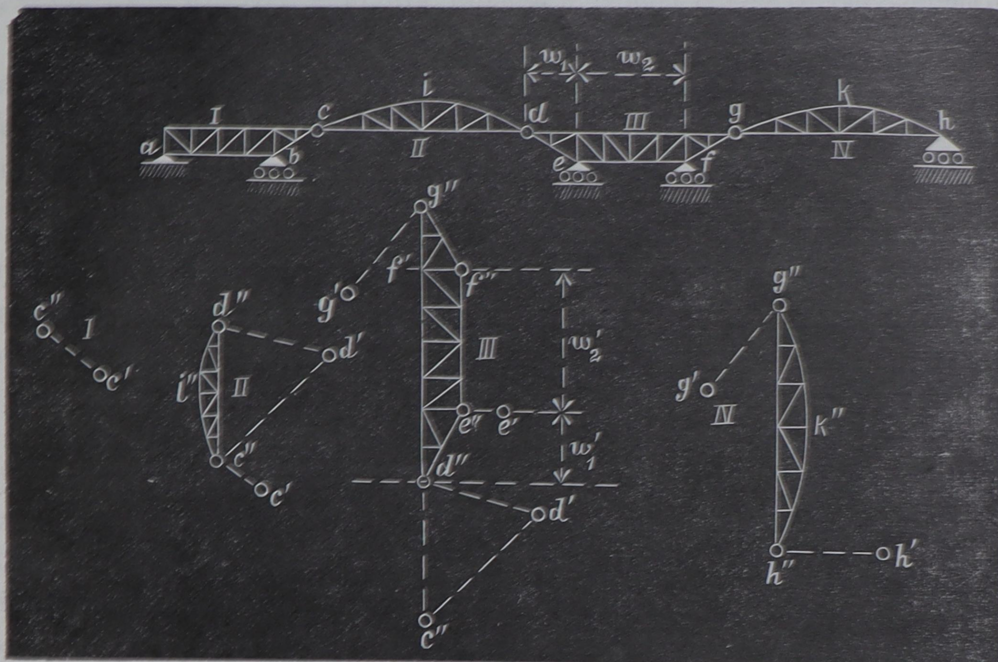
Легко видѣть (фиг. 24-β), что въ этомъ частномъ случаѣ точка e' придется на одной горизонтали съ точкою h' (совпадающею съ точкою h''); отрѣзокъ $h''e''$ обратится въ нуль; фигура плана перемѣщеній обратится въ одну точку и прямая h_0e_0 будетъ горизонтальна.

§ 13. Построеніе плановъ перемѣщеній для сооруженій, состоящихъ изъ отдѣльныхъ фермъ, опирающихся одна на другую или вообще сопряженныхъ между собою по двѣ въ одной точкѣ. Къ числу такого рода сооруженій относятся, между прочимъ, фермы системы Гербера и арочныя фермы съ тремя шарнирами. Въ фермахъ системы Гербера простыя балочныя (подвѣсныя) фермы соединяются съ консолью—балочными фермами или при помощи шарнировъ или непосредственно лежатъ на концахъ консолей; въ арочныхъ трехшарнирныхъ фермахъ среднiй шарниръ соединяетъ между собою двѣ отдѣльныхъ части сооруженія (полуфермы).

1) *Фермы Гербера съ шарнирнымъ соединеніемъ простыхъ балокъ съ консольными.* Пусть дана ферма Гербера, показанная на фиг. 25; эта ферма состоитъ изъ четырехъ отдѣльныхъ частей, а именно изъ двухъ подвѣсныхъ (простыхъ балочныхъ) фермъ I и II, соединенныхъ шарнирами c, d, g съ двумя консольными фермами I и III, опирающимися на опоры a, b, c и f. Опорная узловая точка a неподвижна; опорныя же точки b, e, f и h могутъ скользить (безъ тренія) по горизонтальнымъ линіямъ.

Для построенія плана перемѣщеній фермы Гербера, показанной на фиг. 25, необходимо прежде всего построить отдѣльные планы перемѣщеній для каждой изъ четырехъ фермъ I, II, III и IV, входящихъ въ составъ даннаго сооруженія. Съ этою цѣлью въ каждой изъ названныхъ фермъ принимаютъ произвольный узелъ за неподвижный и, сверхъ того, принимаютъ, что одинъ изъ стержней фермы, выходящихъ изъ этого узла, сохраняетъ неизмѣнно свое положеніе на плоскости и строятъ перемѣщенія узловъ фермы, зависящія отъ упругихъ удлиненій стержней ея. Затѣмъ придаютъ упомянутымъ фермамъ, разсматриваемымъ въ этомъ случаѣ, какъ неизмѣняемыя системы, нѣкоторыя движенія, такія, чтобы были выполнены условія, коимъ должны удовлетворять опорныя точки фермъ и чтобы связь въ точкахъ c, d, g между отдѣльными фермами, входящими въ составъ даннаго сооруженія, была опять возстановлена.

Построеніе плановъ перемѣщеній узловыхъ точекъ фермы, въ зависимости отъ упругихъ удлиненій ея стержней, намъ извѣстно изъ предъидущаго, т. е. мы знаемъ, какъ для какого-либо узла m данной фермы найти въ планѣ перемѣщеній положеніе соотвѣтствующей точки m'; по-



Фиг. 25.

этому на фиг. 25 показаны не всѣ такія точки, какъ m', а только нѣкоторыя наиболѣе важныя для дальнѣйшаго изложенія, а именно:

1) изъ плана перемѣщеній для фермы I, который можетъ быть построенъ безъ затрудненій на основаніи изложеннаго въ предыдущихъ параграфахъ, въ виду того, что въ этой фермѣ одна опорная точка подвижная, а другая неподвижная, можемъ опредѣлить дѣйствительное перемѣщеніе точки c, т. е. отрѣзокъ $\overline{c''c'}$;

2) изъ плана перемѣщеній для фермы II найдемъ точки c' и d';

3) изъ плана перемѣщеній для фермы III найдемъ точки d', e', f' и g';

4) изъ плана перемѣщеній для фермы IV найдемъ точки g' и h'.

Указанныя точки плановъ перемѣщеній достаточны для построенія фигуръ $c''i''d''$, $d''e''f''g''$, $g''k''h''$ плановъ перемѣщеній, подобныхъ фигурамъ cid, $defg$, ghk данныхъ фермъ II, III и IV, такъ какъ извѣстно, что фигуры плановъ перемѣщеній могутъ быть построены по двумъ точкамъ. Замѣтимъ, что такъ какъ точка c есть общая точка фермъ I и II, то въ планѣ перемѣщеній II перемѣщеніе точки c должно быть равно перемѣщенію той же точки, опредѣленному по плану перемѣщеній № I, т. е. должно быть равно отрѣзку $\overline{c''c'}$. Для опредѣленія точки d'' мы знаемъ пока лишь одно условіе, а именно, что прямая $c''d''$ должна быть $\perp cd$, т. е. точка d'' будетъ лежать гдѣ-то на прямой, проходящей черезъ c'' и нормальной къ cd.

Для опредѣленія второго условія, которому должна удовлетворять точка d'', обратимся къ плану III перемѣщеній для фермы III, замѣчая, что точка d есть общая точка для фермъ II и III; слѣдовательно, въ планахъ перемѣщеній для обѣихъ упомянутыхъ фермъ величина, линія и направленіе перемѣщенія точки d должны быть одинаковы. Такъ какъ опорныя точки e и f, въ силу условій конструкціи, могутъ двигаться лишь по горизонтальнымъ линіямъ, то въ планѣ перемѣщеній III точка e'' должна лежать на горизонтали, проходящей черезъ точку e', а точка f'' должна лежать на горизонтали, проходящей черезъ точку f'. Если обозначить черезъ w_1' и w_2' разстоянія по вертикали между точками d'' и e'' и соотвѣтственно между точками e'' и f'', а черезъ w_1 и w_2 горизонтальныя разстоянія между точкаии d и e и соотвѣтственно e' и f (фиг. 25), то, какъ извѣстно изъ предыдущаго, въ силу подобія фигуры плана перемѣщеній и фигуры данной фермы, должно быть;

$$w_1' : w_2' = w_1 : w_2 ;$$

откуда

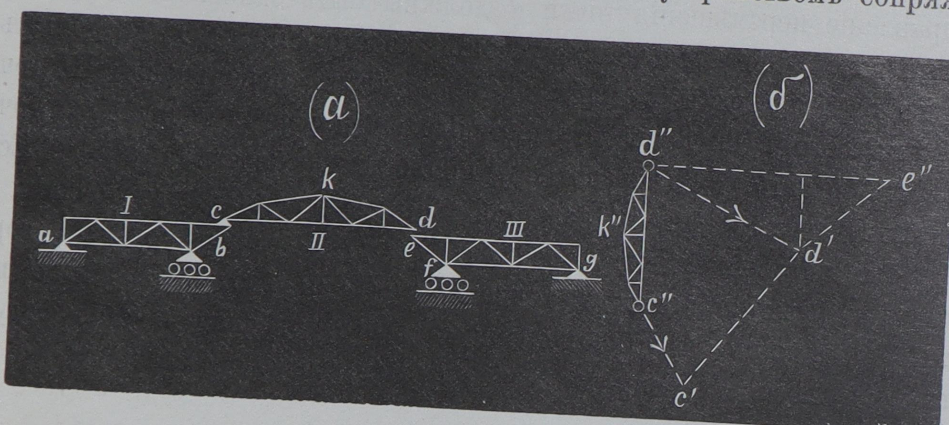
$$w_1' = w_2' \frac{w_1}{w_2} .$$

Величина отрѣзка w_1' опредѣляетъ положеніе—въ планѣ III перемѣщеній—горизонтали (показанной прерванной чертой), на которой должна лежать точка d''. Самое положеніе точки d'' на этой горизонтали найдется, если мы въ планѣ III у точки d' (имѣющейся въ немъ, такъ какъ точка d принадлежитъ также фермѣ III) построимъ отрѣзокъ $c''d'$, взятый изъ плана II перемѣщеній и проведемъ $c''d'' \perp cd$. Замѣчая, что въ планѣ III должно быть $d''e'' \perp de$, найдемъ въ пересѣченіи горизонтали, проходящей черезъ точку e' съ нормалью къ de, проходящею черезъ точку d'' — точку e''. Такимъ образомъ, получимъ двѣ точки d'' и e'' для построенія фигуры $d''e''f''g''$ плана III перемѣщеній, слѣдовательно, можемъ построить эту фигуру. Перенеся затѣмъ изъ плана III перемѣщеній въ планъ II перемѣщеній отрѣзокъ $d'd''$, можемъ построить фигуру плана II перемѣщеній по двумъ точкамъ c'' и d''. Наконецъ, замѣчая, что узловая точка g есть общая точка для фермъ III и IV и выстраивая у точки g' плана

IV перемѣщеній отрѣзокъ $\overline{g'g''}$, равный и параллельный отрѣзку $\overline{g'g''}$, имѣющемуся въ планѣ III перемѣщеній и проводя $g''h'' \perp gh$ до пересѣченія съ горизонталью, проходящею черезъ точку h', найдемъ двѣ точки g'' и h'' для построенія фигуры плана перемѣщеній для фермы IV. Легко видѣть, что построенныя, какъ показано выше, фигуры $c''i''d''$, $d''e''f''g''$, $g''k''h''$ плановъ перемѣщеній удовлетворяютъ какъ конструктивнымъ условіямъ опорныхъ точекъ фермъ, какъ и заданному условію общей связи въ точкахъ c, d и g между фермами I и II, II и III, III и IV.

II. *Ферма Гербера съ подвѣсными балками, опирающимися на концы консолей.*

На фиг. 26 изображена ферма Гербера, отличающаяся отъ фермы той же системы, показанной на фиг. 25, инымъ устройствомъ сопряженія



Фиг. 26.

подвѣсной фермы съ консольными фермами, а также инымъ устройствомъ опорныхъ частей консольныхъ фермъ. Въ точкѣ c (фиг. 26) средняя подвѣсная ферма II-я неизмѣнно связана съ консольною фермою I-ю (напримѣръ посредствомъ шарнира); зато второй конецъ d подвѣсной фермы не связанъ съ концомъ e консольной фермы III-й, а можетъ скользить по горизонтали и свободно перемѣщаться относительно конца e консольной фермы III-й по горизонтали, т. е горизонтальныя проекціи перемѣщеній точекъ d и e могутъ быть различны, причемъ однако вертикальная проекція перемѣщенія точки d должна быть всегда равна вертикальной проекціи перемѣщенія точки e, такъ какъ точка d лежитъ на концѣ консоли фермы III-й. Между тѣмъ на фиг. 25 оба конца подвѣсной фермы были неизмѣнно связаны посредствомъ шарнировъ съ концами консольныхъ фермъ такъ, что каждая изъ проекцій перемѣщеній конца подвѣсной фермы была порознь равна соотвѣтствующей проекціи перемѣщенія подлежащаго конца консольной фермы. На фиг. 26-й каждая изъ консольныхъ фермъ I-й и III-й имѣетъ по одной неподвижной опорной точкѣ, а именно a и соотвѣтственно g и по одной подвижной, скользящей по горизонтали, а именно b и соотвѣтственно f, тогда какъ на черт. 25-мъ все сооруженіе имѣло лишь одну неподвижную опорную точку. Такимъ образомъ, при измѣненіи температуры, напримѣръ при повышеніи ея, все сооруженіе, изображенное на фиг. 25, получаетъ перемѣщеніе отъ опоры a въ сторону опоры h, а сооруженіе, показанное на фиг. 26, при такихъ же условіяхъ получаетъ перемѣщеніе: 1) для фермъ I-й и II-й отъ a къ d и 2) для фермы III-й обратное, т. е. отъ g къ f, причемъ точка d относительно точки e перемѣщается вправо, а точка e относительно точки d перемѣщается влѣво.

Построеніе плановъ перемѣщеній для консольныхъ фермъ I и III не представляетъ никакихъ затрудненій и производится на основаніи изложеннаго ранѣе. Для построенія плана перемѣщеній подвѣсной фермы II, удовлетворяющаго тѣмъ условіямъ: а) что эта ферма связана неизмѣнно въ точкѣ c съ I фермою и б) что вертикальная проекція перемѣщенія точки d фермы II равна вертикальной проекціи перемѣщенія точки e, т. е. конца консоли фермы III, поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Въ фермѣ II принимаютъ сперва произвольный узелъ за неподвижный и направленіе одного изъ стержней, проходящихъ черезъ этотъ узелъ, за неизмѣнное; затѣмъ строятъ планъ перемѣщеній для фермы II, въ зависимости отъ упругихъ удлиненій ея стержней; потомъ всей фермѣ II, какъ неизмѣняемому диску, сообщаютъ такое движеніе по плоскости, при которомъ: 1) связь фермъ I и II въ точкѣ c опять возстановляется, и 2) вертикальныя проекціи перемѣщеній точекъ d и e становятся равными между собою. Послѣ этого можетъ быть построена фигура $c''k''d''$ плана перемѣщеній, подобная фигурѣ данной фермы II (см. фиг. 26). Согласно изложенному выше общему ходу построенія плана перемѣщеній для фермы II, это построеніе на фиг. 16 исполнено слѣдующимъ образомъ.

1) Прежде всего построенъ планъ перемѣщеній, зависящихъ отъ упругихъ удлиненій стержней фермы II, какъ совершенно отдѣльной фермы; изъ этого плана получены на фиг. 26—(δ) точки c' и d'.

2) изъ плана перемѣщеній фермы I извѣстенъ намъ отрѣзокъ $\overline{c''c'}$, выражающій перемѣщеніе точки c фермы I; такъ какъ ферма II неизмѣнно связана въ точкѣ c съ фермою I, то крайній лѣвый узелъ фермы II получитъ такое же перемѣщеніе, какъ точка c. Поэтому, пристраивая къ точкѣ c (фиг. 26-δ) отрѣзокъ $\overline{c''c'}$, получимъ точку c'', т. е. одну точку искомой фигуры $c''k''d''$ полнаго плана перемѣщеній фермы II. Прямая $\overline{c''d''}$ въ фигурѣ плана перемѣщеній будетъ, какъ извѣстно, нормальна къ cd; $c''d'' \perp cd$.

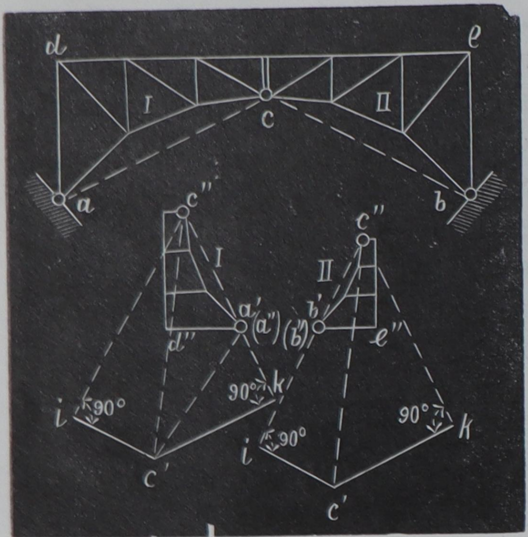
3) Изъ плана перемѣщеній фермы III извѣстенъ намъ отрѣзокъ $\overline{e''e'}$, а слѣдовательно извѣстна и вертикальная проекція сего отрѣзка, которая по условію конструкціи сооруженія должна быть равна вертикальной проекціи перемѣщенія точки d, т. е. вертикальной проекціи отрѣзка $\overline{d''d'}$.

Поэтому, если у точки d' (фиг. 26-δ), пристроить отрѣзокъ $\overline{e''d'}$ и провести черезъ точку e'' горизонталь до встрѣчи съ нормалью къ cd, проходящею черезъ точку c'', то получится искомая вторая точка d'' фигуры $c''k''d''$ плана перемѣщеній, такъ какъ вслѣдствіе построенія вертикальная проекція перемѣщенія $\overline{d''d'}$ будетъ равна вертикальной проекціи перемѣщенія $\overline{e''e'} = \overline{e''d'}$. Построеніе фигуры $c''k''d''$ плана перемѣщеній фермы II не представить засимъ никакихъ затрудненій.

III. *Арочная ферма съ тремя шарнирами.*

Ферма этого рода (фиг. 27) состоитъ изъ двухъ частей: полуфермъ или сочлененныхъ дисковъ I и II, которые соединены между собою среднимъ шарниромъ, помѣщеннымъ въ точкѣ c.

Точка a и соотвѣтственно b представляютъ неподвижныя опорныя точки полуфермъ I и II. Для построенія плана перемѣщеній такой фермы представимъ себѣ сначала, что оба сочлененныхъ диска (обѣ полуфермы) I и II разъединены между собою въ точкѣ c, т. е. представляютъ отдѣльныя (независимыя) фермы. Для каждой изъ такихъ фермъ построимъ отдѣльный планъ перемѣщеній, зависящихъ отъ упругихъ удлиненій стержней системы, для чего возьмемъ произвольную узловую точку въ каждомъ дискѣ за неподвижную и произвольный стержень, проходящій черезъ эту точку, примемъ сохраняющимъ неизмѣнно свое положеніе на плоскости. Затѣмъ, разсматривая сочлененные диски I и II, какъ неизмѣняемыя системы, придадимъ имъ такое движеніе, при которомъ: 1) были бы удовлетворены условія, которымъ подчинена конструкція опорныхъ точекъ a и b дисковъ I и соотвѣтственно II, т. е. что эти опорныя точки не допускаютъ никакого поступательнаго перемѣщенія (ни вверхъ, ни внизъ, ни вправо, ни влѣво), а допускаютъ одно лишь вращеніе полуфермъ, и 2) была бы возстановлена связь между дисками I и II въ точкѣ c. Поступая такимъ образомъ, въ окончательномъ результатѣ получимъ (см. фиг. 27) искомыя фигуры $a''d''c''$ и $b'e''c''$ плановъ перемѣщеній для сочлененныхъ дисковъ (полуфермъ) I и II.



Фиг. 27.

Самое построеніе исполнено на фиг. 27 слѣдующимъ образомъ:

1) Изъ плана перемѣщеній, зависящихъ отъ упругихъ удлиненій стерж-

ней диска I, получимъ точки a' и c'; точно также изъ плана перемѣщеній, зависящихъ отъ упругихъ удлиненій стержней диска II, получимъ точки b' и c', остальныя точки этихъ плановъ перемѣщеній намъ не нужны.

2) Такъ какъ точки a и b дисковъ I и соотвѣтственно II неподвижны, то точка a'' фигуры $a''d''c''$ плана перемѣщеній, подобной фигурѣ acd даннаго сочлененнаго диска I, совпадаетъ съ точкою a', т. е. перемѣщеніе $\overline{a''a'}$ точки a равно нулю; точно также перемѣщеніе $\overline{b''b'}$ точки b равно нулю, а потому точка b'' фигуры $b''e''c''$ плана перемѣщеній, подобной фиг. bec даннаго сочлененнаго диска II, совпадаетъ съ точкою b'. Такимъ образомъ, мы получили по одной точкѣ для каждой изъ двухъ фигуръ перемѣщеній.

3) Еще по одной точкѣ для построенія упомянутыхъ фигуръ получаемъ изъ слѣдующихъ соображеній: *а*) въ планѣ I (см. фиг. 27-I) должно быть $a''c'' \perp ac$; въ планѣ II (см. фиг. 27, II) должно быть $b''c'' \perp bc$; *б*) такъ какъ точка c есть точка общая обоимъ дискамъ I и II (обѣимъ полуфермамъ), то въ планахъ I и II (см. фиг. 27) перемѣщеніе $\overline{c''c'}$ должно имѣть одни и тѣ же: линію, величину и направленіе, или проекціи $\overline{c''c'}$ перемѣщенія на два опредѣленныхъ направленія должны быть одинаковы какъ въ планѣ I, такъ и въ планѣ II.

Для построенія на фиг. 27 взяты проекціи перемѣщенія $\overline{c''c'}$ на направленія: ac и на нормальное къ ac.

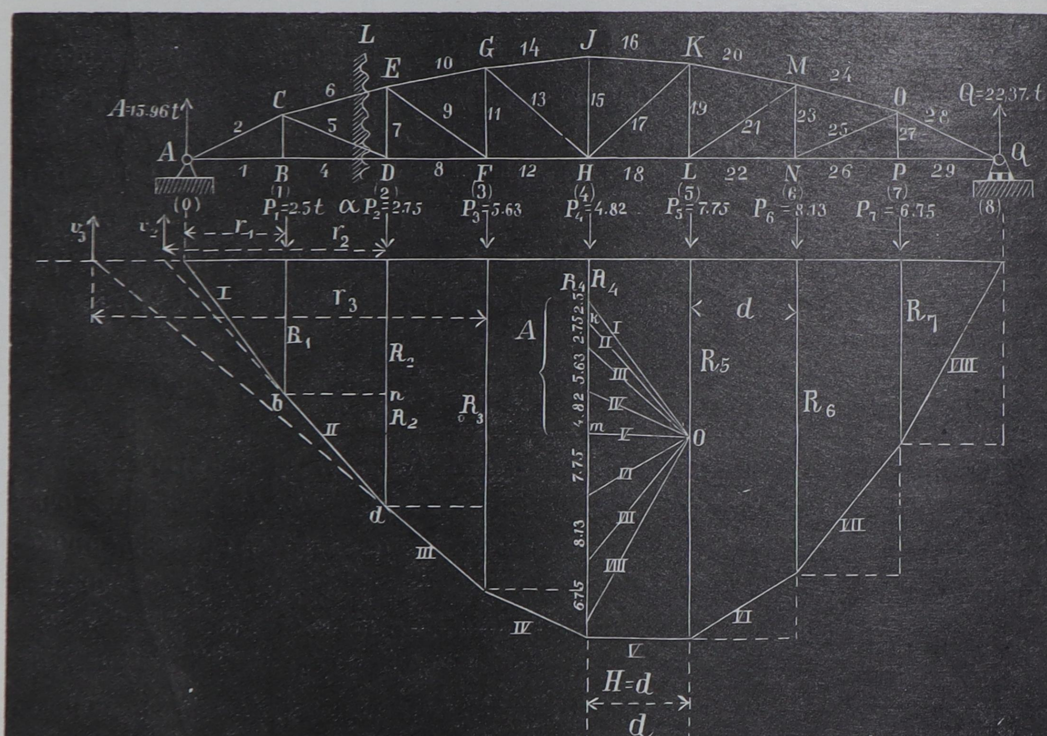
Изъ точки a'' (a') проводимъ въ планѣ I (фиг. 27) прямую нормальную къ ac; на этой прямой должна лежать точка c''; затѣмъ изъ точки c' проводимъ прямую $c'k \parallel ac$ до встрѣчи въ точкѣ k съ прямою, проходящею черезъ точку a'', и нормальною къ ac, отрѣзокъ $\overline{c'k}$ и изобразитъ проекцію перемѣщенія $c''c'$ и направленіе $\parallel ac$.

Перенесемъ эту проекцію въ планѣ II (фиг. 27), т. е. построимъ отрѣзокъ $c'k$ у точки e' въ планѣ II, возставимъ въ этомъ планѣ перпендикуляръ въ точкѣ k къ отрѣзку $c'k$; этотъ перпендикуляръ отсѣчетъ на нормали къ bc, проходящей черезъ точку b'', искомую точку c''. Такимъ образомъ получимъ на планѣ II отрѣзокъ $c''c'$, изображающій величину перемѣщенія точки c. Зная на планѣ II двѣ точки b'' и c'' фигуры $b''e''c''$ плана перемѣщеній, можемъ построить эту фигуру, какъ подобную данной фигурѣ bec сочлененнаго диска II. Такъ какъ перемѣщенія $c''c'$ точки c въ планахъ I и II должны быть одинаковы, то перенесемъ проекцію kc'' сего перемѣщенія на нормаль къ ac изъ плана II въ I, т. е. отложимъ отъ точки k отрѣзокъ kc'' и получимъ точку c''. Зная въ планѣ I двѣ точки a'' и c'' фигуры $a''d''c''$ плана перемѣщеній диска I, легко построить эту фигуру, какъ подобную данной фигурѣ adc диска I.

Точно также можно воспользоваться для построенія плановъ перемѣщеній проекціей ic' отрѣзка $c''c'$ въ планѣ II на cb и перенесеніемъ этой проекціи ic' въ планъ I найти точку c'', возставляя перпендикуляръ ic'' къ ic въ точкѣ i въ планѣ I.

§ 14. Полный примѣръ построенія плана перемѣщеній для балочной фермы. Предварительно приведенія сего примѣра, замѣтимъ, что при пользованіи способовъ Кремона для построенія усилій въ фермахъ, весьма удобною провѣркою правильности построенія можетъ служить пріемъ, предложенный *Mohr*'омъ (профессоромъ Дрезденскаго политехникума, извѣстнымъ своими работами въ области Статики сооруженій).

Этотъ пріемъ состоитъ въ томъ, что предварительно построенія по способу Кремона взаимной діаграммы усилій, проявляющихся въ фермѣ



Фиг. 28.

подъ дѣйствіемъ данныхъ внѣшнихъ силъ (грузовъ, приложенныхъ къ узламъ фермы и опорныхъ ея противодѣйствій), строится веревочный многоугольникъ для грузовъ, приложенныхъ къ узламъ фермы, *причемъ за полюсное разстояніе берется длина d панели фермы*, что и исполнено на фиг. 28; этотъ веревочный многоугольникъ замыкается засимъ извѣстнымъ способомъ и проводится въ планѣ силъ дѣлящій лучъ параллельно замыкающей, причемъ въ планѣ силъ получаются опорныя противодѣйствія фермы, отсѣкаемыя дѣлящимъ лучемъ. Построенный такимъ образомъ веревочный многоугольникъ I, II, III, IV, V, VI, VII и VIII *обладаетъ нѣкоторыми замѣчательными свойствами*.

Разсмотримъ ординаты этого веревочнаго многоугольника, соотвѣтствующія узловымъ точкамъ фермы; какъ извѣстно изъ общихъ свойствъ веревочнаго многоугольника, эти ординаты, будучи помножены на полюсное разстояніе, выразятъ изгибающіе ферму моменты для соотвѣтствующихъ узловыхъ ея точекъ, а именно по общей фомулѣ, даваемой въ Графической Статикѣ, будемъ имѣть:

$$H\eta = M.$$

Въ данномъ случаѣ полюсное разстояніе $H = d$, т. е. длинѣ панели разсматриваемой фермы, выражаетъ величину линейную; ординаты η мы обозначали на черт. 28-мъ буквами R съ соотвѣтствующими числами внизу, указывающими нумеръ узла фермы; эти ординаты представятъ нѣкоторыя силы, такъ какъ полюсное разстояніе, въ данномъ случаѣ, принято выражающимъ нѣкоторую длину.

Такимъ образомъ, найдемъ вообще: изгибающій моментъ

$$M = H\eta = Rd,$$

а въ частности для узла 1-го

$$M_1 = R_1 d$$

Для узла 2-го и т. д. соотвѣтственно можемъ написать:

$$M_2 = R_2 d;$$

$$M_3 = R_3 d;$$

$$M_4 = R_4 d;$$

и т. д.

Слѣдовательно силы, выражаемыя ординатами веревочнаго многоугольника (см. фиг. 28), будутъ имѣть значенія:

$$R_1 = \frac{M_1}{d};$$

$$R_2 = \frac{M_2}{d};$$

$$R_3 = \frac{M_3}{d};$$

$$R_4 = \frac{M_4}{d};$$

и т. д.

гдѣ черезъ M обозначены моменты относительно соотвѣтствующихъ узловыхъ точекъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на ферму. Посмотримъ, чему равна разность двухъ послѣдовательныхъ силъ R.

$$R_0 = 0$$

$$R_1 - R_0 = R_1 = \frac{M_1}{d}$$

но, какъ извѣстно изъ Графической Статики *), $M_1 = V_1 r_1$, гдѣ V_1, есть вертикальная сила для участка AB фермы, а r_1 есть разстоянiе точки приложенiя этой вертикальной силы отъ узла B, относительно котораго берется моментъ M внѣшнихъ силъ; $V_1 = A$, $r_1 = d$, гдѣ A есть опорное противодѣйствiе лѣвой опоры фермы. Слѣдовательно:

$$R_1 - R_0 = \frac{M_1}{d} = A = V_1$$

$$R_2 - R_1 = \frac{M_2}{d} - \frac{M_1}{d} = \frac{M_2 - M_1}{d}$$

$$\text{Но } M_2 = V_2 r_2 \ ; \ M_1 = V_1 r_1.$$

Такимъ образомъ

$$R_2 - R_1 = \frac{V_2 r_1 - V_1 r_1}{d}$$

Вмѣсто момента $M_2 = V_2 r_2$ силы V_2 съ плечомъ r_2 можемъ взять сумму моментовъ составляющихъ ее силъ съ соотвѣтствующими плечами, т. е. разстоянiями точекъ ихъ приложенiя до узла (2) или D фермы, такъ какъ сумма моментовъ составляющихъ V_1 и P_1 равна моменту равнодѣйствующей V_2.

$$V_2 = V_1 - P_1.$$

Плечи же силъ V_1 и P_1 относительно узла (2)-го или D суть соотвѣтственно:

для V_1 . . . . $2d$

и

» P_1 . . . . d (см. фиг. 28).

Такимъ образомъ

$$R_2 - R_1 = \frac{V_1 . 2d - P_1 d - V_1 d}{d}$$

такъ какъ $r_1 = d$;

откуда

$$R_2 - R_1 = V_1 - P_1 = V_2.$$

*) См. «Начала Статики Сооруженiй». Графическая Статика и ея приложенiя къ расчету сооруженiй. С. К. Куницкiй 1898 г., стр. 22 и 23.

Этотъ же выводъ подтверждается прямо изъ подобія треугольниковъ (см. фиг. 28).

$$\Delta\ bnd \backsim \Delta\ mko$$

по параллельности сторонъ, причемъ отношенія основаній къ высотамъ треугольниковъ равны между собою, а именно:

$$R_2 - R_1 : d = V_2 : d.$$

Откуда

$$R_2 - R_1 = V_2.$$

Точно также найдемъ, что

$$R_3 - R_2 = V_3$$

$$V_4 - R_3 = V_4$$

и т. д.,

причемъ, для случая, изображеннаго на фиг. 28 разности, начиная отъ $R_6 - R_5$ становятся отрицательными, а именно

$$R_6 - R_5 = - V_6$$

$$R_7 - R_6 = - V_7$$

$$R_8 - R_7 = - V_8 = - R_7 = - Q,$$

т. е. опорному противодѣйствію лѣвой опоры, взятому со знакомъ минусъ, такъ какъ $R_8 = 0$.

Такъ какъ

$$V_1 - V_2 = P_1$$

$$V_2 - V_3 = P_2$$

$$V_3 - V_4 = P_4$$

и т. д.

то, замѣняя вертикальныя силы V ихъ выраженіями въ функціи силъ R, изображаемыхъ ординатами веревочнаго многоугольника (фиг. 28), можемъ написать:

$$P_1 = R_1 - (R_2 - R_1):$$

$$P_2 = (R_2 - R_1) - (R_3 - R_2)$$

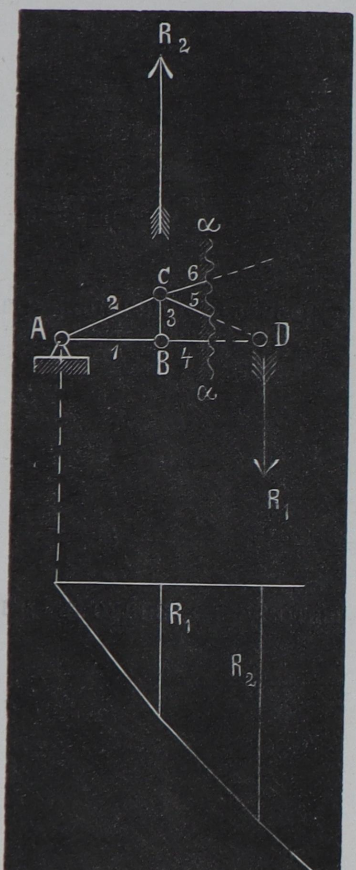
$$P_3 = (R_3 - R_2) - (R_4 - R_3)$$

и т. д.

Поэтому при построеніи діаграммы Кремона усилій въ стержняхъ, можемъ въ планѣ силъ—вмѣсто заданныхъ силъ (нагрузокъ), приложенныхъ въ узлахъ фермы, писать ихъ значенія въ функціи силъ R.

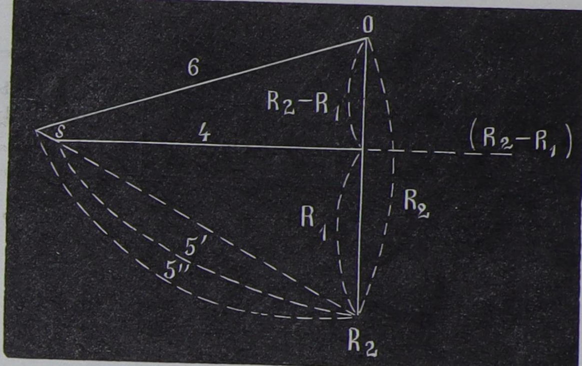
Этими силами R и пользуется *Mohr* для повѣрки правильности построенія діаграммы усилій въ стержняхъ фермы по способу Кремона.

Пусть (фиг. 28) желательно опредѣлить усилія въ элементахъ 6-мъ, 5-мъ и 4-мъ фермы, разсѣченныхъ мысленно сѣченіемъ α-α. Легко видѣть, что всѣ внѣшнія силы (A и P_1), дѣйствующія на лѣвую, мысленно отсѣченную часть фермы, *въ панели BD* можемъ замѣнить двумя силами R_2 и R_1, изъ коихъ сила R_2 приложена въ узлѣ C фермы и направлена вверхъ, а сила R_1 приложена въ узлѣ D фермы и направлена внизъ (см. фиг. 29).



Фиг. 29.

Въ самомъ дѣлѣ, изгибающій моментъ внѣшнихъ силъ R_2 и R_1, приложенныхъ, какъ показано на черт. 29-мъ, относительно узла C фермы (см. фиг. 28 и 29) будетъ R_1d; а изгибающій моментъ относительно узла D фермы будетъ $R_2 d$, т. е. моменты получаются тѣ же, что и изъ веревочнаго многоугольника (фиг. 28). Вертикальная же перерѣзывающая сила для панели BD фермы получится, какъ равнодѣйствующая силъ R_2 и R_1, дѣйствующихъ на эту панель и приложенныхъ въ узлахъ C и D, ограничивающихъ ее; величина этой равнодѣйствующей есть очевидно $R_2—R_1$, а точка приложенія ея опредѣлится построеніемъ веревочнаго треугольника на силахъ R_2 и R_1 (фиг. 29) и получится лѣвѣе силы R_2, т. е. лѣвѣе разсматриваемой панели; откуда слѣдуетъ, что равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ въ предѣлахъ панели BD есть $R_2 - R_1$. Изъ того условія, что, въ случаѣ равновѣсія мысленно отсѣченной лѣвой части фермы,—приложенныя къ ней внѣшнія силы: данныя R_2 и R_1 и силы замѣняющія усилія въ разсѣченныхъ стержняхъ 6-мъ, 5-мъ и 4-мъ должны взаимно уравновѣшиваться, (а именно вслѣдствіе пересѣченія силы R_2 съ осями стержней 6 и 5 въ одной точкѣ C и силы R_1 съ осями стержней 5 и 4 въ одной точкѣ D, — сила R_2 должна уравновѣшиваться съ неизвѣстнымъ намъ усиліемъ въ стержнѣ 6-мъ и съ нѣкоторою силою ($5''$), направленною по оси стержня 5-го; сила R_1 должна уравновѣшиваться съ неизвѣстнымъ намъ усиліемъ въ стержнѣ 4-мъ и съ нѣкоторою силою ($5'$), направленною по оси стержня 5-го), можемъ начертить (см. фиг. 30) многоугольникъ $O—R_2—5—6$, изъ котораго, при посредствѣ силъ R_2 и R_1 можно отыскать неизвѣстныя усилія въ стержняхъ 6-мъ, 5-мъ и 4-мъ данной фермы, причемъ усиліе въ стержнѣ 5-мъ фермы будетъ равно разности отрѣзковъ $\overline{5''} - \overline{5'} = \overline{5}$ *). Изъ фигуры 30 усматривается, что, если въ діаграммѣ Кремона начерчены усилія въ стержняхъ 6-мъ, 5-мъ и 4-мъ, то продолжая линію дѣйствія усилія 5-го до встрѣчи съ планомъ силъ, мы отсѣкаемъ на вертикали, проходящей черезъ точку O (фиг. 30), т. е. черезъ начало плана силъ, отрѣзокъ, равный R_2, т. е. той силѣ R, взятой изъ веревочнаго многоугольника (см. фиг. 28), которая соотвѣтствуетъ нижнему узлу, встрѣчаемому разсматриваемымъ раскосомъ, въ данномъ частномъ случаѣ раскосомъ 5-мъ. Это предложеніе, доказанное впервые Mohr'омъ, относится вообще къ статически опредѣлимымъ фермамъ, состоящимъ изъ треугольниковъ, безразлично, будутъ ли въ рѣшеткѣ вертикали или однѣ лишь наклонныя части (діагонали).



Фиг. 30.

Приведенное предложеніе Mohr'a даетъ возможность не только провѣрить правильность построенія діаграммы Кремона, но служитъ основаніемъ самостоятельнаго способа построенія діаграммъ усилій въ фермахъ, называемаго способомъ Mohr'a. Примѣнимъ этотъ способъ къ примѣру, показанному на листѣ X, заимствованному изъ сочиненія Schäffer & Sonne «Handbuch der Ingenieurwissenschaften». II Band. «Der Brückenbau» 1890, откуда взята и нижеприведенная таблица удлиненій.

Пусть для данной нагрузки фермы, показанной на черт. α отдѣльнаго листа I опредѣлены по способу Mohr'a (см. черт. γ) усилія въ стержняхъ фермы. По этимъ усиліямъ вычислены въ нижеприведенной таблицѣ значенія Δl удлиненій стержней фермы, а именно:

$$\Delta l = \frac{Sl}{EF}$$

$$E = 2000.000\ at\ ^{**}); \quad at = 1\ \frac{\text{кил.}}{\text{см.}^2}$$

Зная величины удлиненій Δl, можемъ построить планъ перемѣщеній. Съ этою цѣлью, замѣчая, что точка A неподвижна, примемъ первоначально, что стержень AB сохраняетъ неизмѣнно свое положеніе на плос-

---

*) См. по сему предмету способъ Циммермана опредѣленія усилій въ сквозныхъ фермахъ. С. К. Куницкій. Начала Статики Сооруженій. Графическая Статика и ея приложенія къ расчету сооруженій 1898 г., стр. 161—163.

**) at = атмосфера, т. е. давленіе одной атмосферы.

кости во время деформаціи фермы. За начало плана перемѣщеній примемъ на чер. δ точку A', точка B' получится, откладывая по горизонтали вправо отъ A' (такъ какъ стержень $A'B'$ вытягивается): $A'B = \Delta l' =$ $= + 0{,}39$ миллиметра. Для того, чтобы отложить такую малую величину, возьмемъ увеличенный масштабъ, а именно будемъ откладывать удлиненія, увеличенныя въ пять разъ противъ натуральной ихъ величины (т. е. одинъ мм. на чертежѣ δ будетъ выражаться пятью миллиметрами). Такой масштабъ для перемѣщеній построенъ на листѣ I внизу. Затѣмъ, по извѣстнымъ изъ предыдущихъ §§ правиламъ, построены точки C', D' и

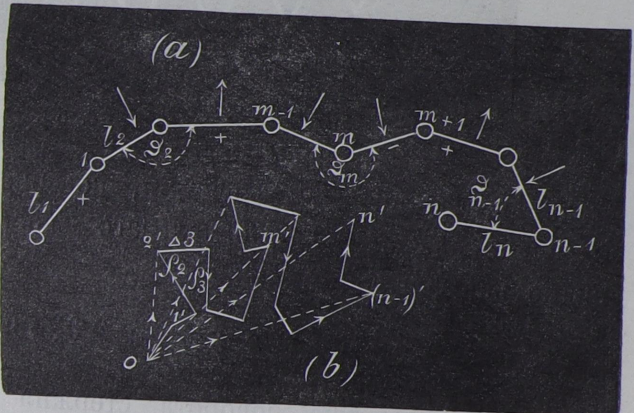
Таблица удлиненій
$\triangle l$.

№№ стержней.	Длина стержня l cm.	Площадь поп. сѣч. F cm.²	Усиліе S въ стержнѣ тон.	Удлиненіе $\triangle l$ въ mm.
1	250	120	+ 37,9	+ 0,39
2	271	128	— 41,1	— 0,43
3	105	56	+ 2,5	+ 0,02
4	250	120	+ 37,9	+ 0,39
5	271	20	+ 2,9	+ 0,19
6	261	128	— 42,3	— 0,43
7	180	56	+ 1,5	+ 0,02
8	250	120	+ 40,5	+ 0,42
9	308	20	+ 4,5	+ 0,34
10	254	128	— 44,9	— 0,45
11	225	56	+ 3,1	+ 0,06
12	250	120	+ 44,2	+ 0,46
13	336	20	+ 3,3	+ 0,28
14	250	128	— 46,7	— 0,46
15	240	56	+ 5,7	+ 0,12
16	250	128	— 46,7	· 0,46
17	336	20	— 4,7	— 0,39
18	250	120	+ 50,1	+ 0,52
19	225	56	+ 9,3	+ 0,19
20	254	128	— 50,9	— 0,50
21	308	20	— 2,9	— 0,22
22	250	120	+ 52,5	+ 0,55
23	180	56	+ 8,5	+ 0,14
24	261	128	— 54,8	— 0,56
25	271	20	— 0,5	— 0,03
26	250	120	+ 52,9	+ 0,55
27	105	56	+ 6,8	+ 0,06
28	271	128	— 57,4	— 0,61
29	250	120	+ 52,9	+ 0,55

т. д. плана перемѣщеній, зависящихъ отъ упругихъ удлиненій стержней системы, и наконецъ, построена фигура плана перемѣщеній подобная фигурѣ данной фермы. На чер. ε листа I у точки A_1, какъ у полюса, построены какъ лучи отрѣзки, взятые изъ черт. δ того же листа, изображающіе въ принятомъ масштабѣ величины, линіи и направленія дѣйствительныхъ (полныхъ) перемѣщеній узловыхъ точекъ данной фермы, а именно $A_1A_1 = O$; $A_1B_1 = B''B'$; $A_1C_1 = C''C'$; $A_1D_1 = D''D'$ и т. д. $A_1Q_1 = Q''Q'$. На черт. ε фигура $A_1B_1 \ldots . Q_1$ изображаетъ въ принятомъ (увеличенномъ въ пять разъ противъ натуральной величины) масштабѣ планъ дѣйствительныхъ (полныхъ) перемѣщеній узловыхъ точекъ данной фермы.

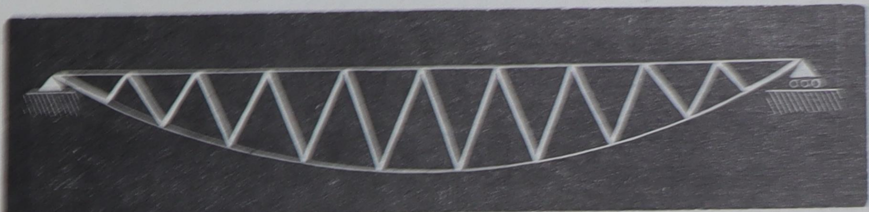
Чертежъ λ изображаетъ увеличенную въ четыре раза деталь части плана перемѣщеній у точки A', взятую изъ чертежа δ.

§ 15. Построеніе деформаціи цѣпи стержней, соединенныхъ между собою посредствомъ шарнировъ. Рядъ прямыхъ стержней, соединенныхъ между собою посредствомъ идеальныхъ шарнировъ послѣдовательно, т. е. такимъ образомъ, что каждый стержень однимъ своимъ концомъ соединяется съ предыдущимъ стержнемъ, а другимъ съ послѣдующимъ называется цѣпью стержней. Обозначимъ фиг. 31 въ подобной цѣпи стержней: узловыя точки черезъ 0; 1; 2; . . . . . $(m-1)$; m; $(m+1)$; . . . . n; длины стержней l_1; l_2; . . . . l_m; . . . . l_n и углы, образуемые между собою осями смежныхъ стержней черезъ ϑ_1; ϑ_2; . . . . . ϑ_m; . . . . . ϑ_{n-1}. Пусть внѣшнія силы приложены лишь къ узловымъ точкамъ цѣпи стержней; въ такомъ случаѣ, такъ какъ шарниры, помѣщенные въ узловыхъ точкахъ предполагаются идеальными, т. е. допускающими вращеніе безъ тренія, то (въ случаѣ равновѣсія всей системы стержней) каждый стержень можетъ подвергаться только направленнымъ по оси стержня вытягивающимъ или сжимающимъ усиліямъ; ось каждаго стержня послѣ деформаціи цѣпи стержней остается прямою, а деформація цѣпи стержней выражается относительными перемѣщеніями узловыхъ точекъ, перемѣщеніями, обусловленными удлиненіями Δl_1; Δl_2 и т. д. стержней системы и измѣненіями $\Delta\vartheta_1$; $\Delta\vartheta_2$ и т. д. угловъ, образуемыхъ между собою осями смежныхъ стержней. Изученіе этихъ перемѣщеній имѣетъ значеніе для теоріи такихъ сквозныхъ фермъ, въ коихъ узловыя точки соединены цѣпью стержней, для которой измѣненія



Фиг. 31.

угловъ $\Delta\vartheta$ могутъ быть легко опредѣлены; это обстоятельство имѣетъ, напримѣръ, мѣсто въ случаѣ сквозныхъ фермъ, составленныхъ изъ однихъ треугольниковъ (см. фиг. 32), при чемъ цѣпью стержней, соединяющею узловыя точки фермы является зигзагообразная линія, изображенная на фиг. 32 толстыми чертами. Допустимъ сначала, что удлиненія Δl для всѣхъ стержней намъ извѣстны и что извѣстны также измѣненія $\Delta\vartheta$ всѣхъ угловъ, образуемыхъ между собою осями смежныхъ стержней цѣпи; предположимъ также, что ось одного изъ стержней сохраняетъ неизмѣнно свое положеніе на плоскости и что одна точка оси этого стержня неподвижна, напримѣръ, примемъ за неподвижную точку узелъ O и положимъ, что стржень l_1 сохраняетъ неизмѣнно свое положеніе на плоскости. Каждый изъ остальныхъ стержней



Фиг. 32.

цѣпи, вслѣдствіе ея деформаціи, повернется на нѣкоторый уголъ Ψ_2; Ψ_3 и т. д. отъ первоначальнаго своего положенія, при чемъ, какъ видно изъ фиг. 31-й,

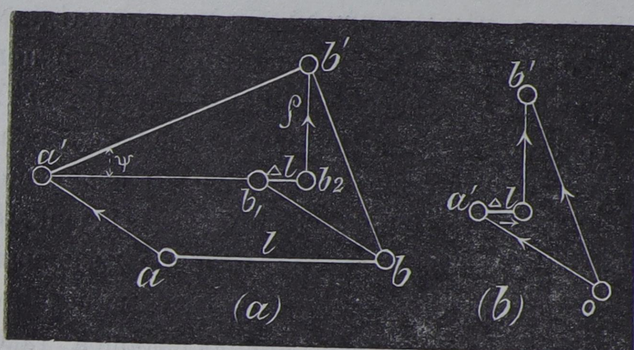
$$\Psi_2 = \Delta\vartheta_1\,;\ \Psi_3 = \Psi_2 + \Delta\vartheta_2\,;\ \Psi_m = \Psi_{m-1} + \Delta\vartheta_{m-1}\,;$$

такъ какъ вслѣдствіе поворота стержня l_2 около узловой точки 1 на уголъ Ψ_2 связанные съ нимъ остальные стержни (если представить себѣ ихъ на время не измѣняющими угловъ $\vartheta_2; \vartheta_3; \ldots\ldots \vartheta_m; \ldots\ldots \vartheta_{n-1}$, т. е. какъ бы жестко скрѣпленными въ этихъ углахъ),—повернутся также на уголъ Ψ_2. Принявъ затѣмъ во вниманіе, что углы ϑ, начиная отъ ϑ_2 до ϑ_{n-1} могутъ также получить нѣкоторыя измѣненія, найдемъ написанныя выше выраженія величинъ Ψ.

Разсмотримъ теперь произвольный стержень длиною l, концы котораго обозначимъ чрезъ a и b (фиг. 33). Пусть перемѣщеніе aa' точки a намъ извѣстно. Для опредѣленія новаго положенія b^1 точки b перемѣстимъ стержень ab параллельно заданному первоначальному его положенію въ новое положеніе $a'b_1$, затѣмъ измѣнимъ длину сего стержня на данную величину его удлиненія $\Delta l = \overline{b_1 b_2}$ и, наконецъ, повернемъ стержень на данный уголъ Ψ. При этомъ конецъ b_2 стержня описалъ бы дугу окружности, равную $(l + \Delta l)\,\Psi$; но такъ какъ мы предполагаемъ, что перемѣщенія узловыхъ точекъ весьма малы, то можетъ замѣнить эту дугу окружности отрѣзкомъ нормали въ точкѣ b_2 къ прямой $a'b_2$, при чемъ длину этого отрѣзка можемъ взять, по малости Δl сравнительно съ l, равною:

$$\overline{b_2 b^1} = \rho = l\Psi;$$

при этихъ допущеніяхъ значительно упрощаются построенія, между тѣмъ достигается совершенно достаточная для практическихъ цѣлей точность построенія. Перемѣщенія узловыхъ точекъ цѣпи стержней цѣлесообразно строить на отдѣльномъ чертежѣ и при томъ въ увеличенномъ масштабѣ отъ произвольно избраннаго полюса O; построеніе это слѣдуетъ производить такъ, чтобы каждое перемѣщеніе по величинѣ, линіи и направленію (знаку) изображалось лучемъ, исходящимъ изъ полюса (со стрѣлкою, направленною отъ полюса). На фиг. [33 — (b)] ... $\overline{Oa^1}$ обозначаетъ заданное перемѣщеніе узловой точки a; къ этому перемѣщенію пристроено удлиненіе Δl стержня l (параллельное оси сего стержня) и затѣмъ къ Δl пристроенъ нормальный къ оси стержня l отрѣзокъ $\rho = l\Psi$, отрѣзокъ $\overline{Ob'}$ представляетъ искомое перемѣщеніе узловой точки b.



Фиг. 33.

Только что приведеннымъ способомъ построены на фиг. [31 — (b)] послѣдовательно перемѣщенія всѣхъ узловыхъ пунктовъ цѣпи стержней, изображенной на фиг. [31 — (а)]. Величины Δl и $\rho = l\Psi$ пристраивались на фиг. [31 — (b)] въ нижеслѣдующемъ порядкѣ:

$$\Delta l_1 ; \Delta l_2 ; \rho_2 ; \Delta l_3 ; \rho_3 ; \ldots . \Delta l_m ; \rho_m ; \ldots . \Delta l_n ; \rho_n$$

по величинѣ, линіи и направленію (знаку, стрѣлкѣ), при чемъ вообще:

$$\Delta l_m \parallel l_m ; \rho_m \perp l_m$$

Вмѣсто обозначеній $\Delta l_1 ; \Delta l_2 ; \Delta l_3$ и т. д. приняты сокращенныя обозначенія $\Delta 1 ; \Delta 2 ; \Delta 3$ и т. д. Лучи $\overline{01'} ; \overline{02'} ; \overline{03'} ; \ldots . \overline{On'}$ (см. фиг. [31 — (b)]) представляютъ по величинѣ, линіи и направленію (знаку, стрѣлкѣ) искомыя перемѣщенія узловыхъ точекъ 1, 2, 3 . . . . . данной цѣпи стержней (фиг. [31 — (a)]).

На фиг. [31 — (a)] маленькія стрѣлки у стержней изображаютъ направленіе вращенія соотвѣтствующаго стержня. Положительному Ψ соотвѣтствуетъ въ разсматриваемомъ случаѣ вращеніе стержня влѣво, а отрицательному Ψ — вращеніе стержня вправо.

Знаки (+) или (—), показанные у стержней, представляютъ знаки соотвѣтствующихъ удлиненій Δl стержней. Знаку (+) соотвѣтствуетъ удлиненіе (вытягиваніе) стержня.

Если цѣпь стержней имѣетъ иное расположенiе неподвижныхъ (опорныхъ) точекъ, чѣмъ то, которое было предположено, то одна изъ узловыхъ точекъ принимается произвольно за неподвижную и одинъ изъ стержней проходящихъ черезъ избранную неподвижную точку принимается сохраняющимъ неизмѣнно свое положенiе на плоскости; затѣмъ строятъ планъ перемѣщенiй, какъ изложено выше, и, наконецъ, разсматривая всю (уже предварительно измѣненную, вслѣдствiе относительныхъ перемѣщенiй узловыхъ точекъ) цѣпь стержней какъ абсолютно-неизмѣняемую или абсолютно-жесткую (съ жесткими соединенiями въ узлахъ) *) систему, придаютъ ей общее движенiе, при которомъ были бы удовлетворены дѣйствительныя условiя, которымъ подчинены (въ силу конструкцiи или по заданiю) опорныя точки цѣпи стержней. Перемѣщенiя, испытываемыя узловыми точками цѣпи стержней при этомъ послѣднемъ ея движенiи изображаются совершенно такъ же, какъ это изложено при разсмотрѣнiи плановъ перемѣщенiй по способу Williot, — лучами $m''O$, направленными къ полюсу (со стрѣлкою къ полюсу); складывая оба перемѣщенiя геометрически, получаемъ полное (окончательно) перемѣщенiе $m''m'$.

Результаты предыдущихъ разсужденiй будемъ примѣнять въ дальнѣйшемъ изложенiи къ разсмотрѣнiю деформацiй фермъ, составленныхъ изъ треугольниковъ. Углы ϑ, образуемые осями смежныхъ стержней въ какой-либо цѣпи стержней, принадлежащей такой фермѣ, представляютъ или сумму угловъ треугольниковъ, образуемыхъ осями стержней фермы, или же сами представляютъ углы треугольника. Поэтому вычисленiе измѣненiй $\Delta\vartheta$ упомянутыхъ угловъ ϑ сводится къ опредѣленiю измѣненiй угловъ треугольника въ зависимости отъ упругихъ удлиненiй его сторонъ.

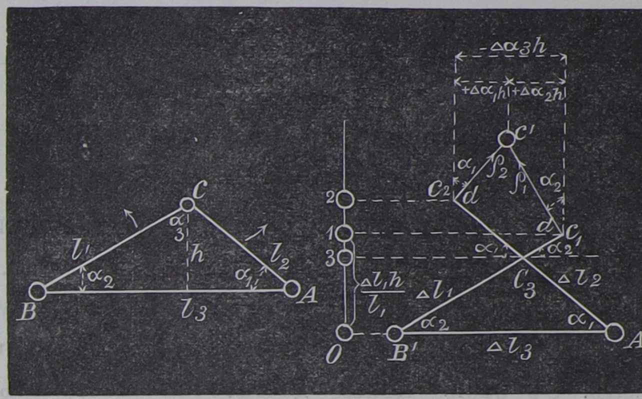
§ 16. Опредѣленiе измѣненiй угловъ треугольной системы упругихъ стержней, соединенныхъ между собою шарнирами, въ зависимости отъ упругихъ удлиненiй сихъ стержней. Пусть даны (фиг. 34) удлиненiя Δl_1; Δl_2; Δl_3 стержней l_1; l_2; l_3 треугольной системы ABC; требуется найти измѣненiя $\Delta\alpha_1$; $\Delta\alpha_2$; $\Delta\alpha_3$ угловъ α_1; α_2; α_3, образуемыхъ осями сихъ стержней.

Построимъ (фиг. 35) планъ перемѣщенiй узловъ данной треугольной системы по способу Williot. Для этого примемъ точку A данной треугольной системы за неподвижную и положимъ, что ось стержня AB сохраняетъ неизмѣнно свое положенiе на плоскости. Въ этомъ случаѣ точка A' (фиг. 35) совпадетъ съ полюсомъ (O) плана перемѣщенiй, и отрѣзокъ $A'B' = \Delta l_3$ дастъ точку B'. Если у точекъ A' и B' построить удлиненiя Δl_2 и Δl_1 стержней l_2 и l_1, изображаемыя отрѣзками $\overline{A'C_2}$

*) При жесткихъ соединенiяхъ въ узлахъ—углы между осями стержней сохраняютъ свою величину (т. е. не измѣняются).

и $\overline{B'C_1}$, и изъ концовъ этихъ отрѣзковъ возставить къ нимъ перпендикуляры до взаимнаго пересѣченія сихъ перпендикуляровъ, то получится точка C', опредѣляющая собою перемѣщеніе $\overline{OC'} = A'C'$ узловой точки C данной треугольной системы. Если представить себѣ, что точка C' найдена по способу, показанному въ предыдущемъ §, а именно посредствомъ удлиненія Δl_2 и перпендикуляра $\rho_2 = l_2 \Psi_2$, то легко видѣть, что отрѣзокъ $\overline{C'C_2} = \rho_2$, такъ какъ $\overline{C'C_2}$ есть длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки C' на Δl_2. При деформаціи разсматриваемой треугольной системы ABC стержень l_2 поворачивается по отношенію къ сохраняющему неизмѣнно свое положеніе на плоскости стержню l_3 на нѣкоторый уголъ $\Delta\alpha_1$; поэтому.

$$C'C_2 = \rho_2 = l_2 \, \Delta\alpha_1.$$



Фиг. 34. Фиг. 35.

Обозначимъ въ планѣ перемѣщеній (фиг. 35) точку пересѣченія отрѣзковъ Δl_1 и Δl_2 черезъ C_3; возставимъ въ произвольной точкѣ продолженія прямой $A'B'$ перпендикуляръ $O2$ и проведемъ черезъ точки C_1; C_2 и C_3 плана перемѣщеній прямыя, параллельныя $A'B'$, которыя пересѣкутъ этотъ перпендикуляръ въ точкахъ 1; 2 и 3.

Изъ подобія треугольниковъ на фиг. 35 и 34 (по параллельности сторонъ) легко найдемъ:

$$\overline{O1} : \Delta l_1 = h : l_1,$$

откуда:

$$\overline{O1} = \frac{\Delta l_1}{l_1} h;$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\overline{O2} = \frac{\Delta l_2}{l_2} h; \quad \overline{O3} = \frac{\Delta l_3}{l_3} h,$$

гдѣ h обозначаетъ высоту треугольника ABC, если принять за основаніе его сторону AB. Затѣмъ проектируемъ отрѣзки $\overline{C_2C'}$ и $\overline{C_1C'}$ на прямую, паралельную $A'B'$ и находимъ для этихъ проекцій значенія:

$$\overline{C_2C'} \sin\alpha_1 = \rho_2 \sin\alpha_1 = l_2 \sin\alpha_1 \Delta\alpha_1;$$

замѣчая, что по фиг. 34-й

$$l_2 \sin\alpha_1 = h,$$

находимъ:

$$\overline{C_2C'}\,sin\,\alpha_1 = \Delta\,\alpha_1\,h.$$

Подобнымъ же образомъ $\overline{C_1C'}\ sin\alpha_2 = \Delta\,\alpha_2\,h.$

Такъ какъ сумма угловъ въ треугольникѣ $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180°$, то

$$\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 + \Delta\alpha_3 = 0,$$

откуда:

$$\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 = -\Delta\alpha_3$$

Слѣдовательно:

$$\Delta\alpha_1\,.\,h + \Delta\alpha_2\,.\,h = -\Delta\alpha_3\,h,$$

т. е.

$$\overline{C_2C'}\,sin\alpha_1 + \overline{C_1C'}\,sin\alpha_1 = -\Delta\alpha_3\,.\,h$$

Если замѣнить на фиг. 35-й удлиненія $\Delta l_1; \Delta l_2; \Delta l_3$ (т. е. линейныя величины) отношеніями $\frac{\Delta l_1}{h}$, $\frac{\Delta l_2}{h}$; $\frac{\Delta l_3}{h}$ (т. е. отвлеченными числами, которыя, *по отдѣльному масштабу чиселъ*, могутъ быть также выражены въ видѣ нѣкоторыхъ отрѣзковъ), то изъ фиг. 35-й можемъ получить численныя значенія измѣненій $\Delta\alpha_1; \Delta\alpha_2; \Delta\alpha_3$ угловъ, выражаемыя также въ видѣ нѣкоторыхъ отрѣзковъ, измѣряемыхъ по упомянутому масштабу чиселъ. Съ этою цѣлью достаточно построить лишь четыреугольникъ $C_1C_3C_2C'$ (см. фиг. 35), опредѣляемый точками 1; 2; 3. Точка 3 выбирается произвольно, точки 1 и 2 находятся отъ точки 3 въ нижеслѣдующихъ разстояніяхъ:

$$\overline{31} = \frac{\Delta l_1}{l_1} - \frac{\Delta l_3}{l_3}\ ;\ \overline{21} = \frac{\Delta l_2}{l_2} - \frac{\Delta l_1}{l_1}$$

Во избѣжаніе ошибокъ при опредѣленіи знаковъ величинъ $\Delta\alpha$ снабжаютъ отрѣзки $\overline{C_2C'}$ и $\overline{C_1C'}$ (фиг. 35) стрѣлками, направленными къ точкѣ C'. Эти стрѣлки покажутъ, въ какую сторону поворачиваются стержни l_1 и l_2 относительно стержня l_3. Въ случаѣ, показанномъ на фиг. 34 и 35-й (какъ обозначено, между прочимъ, на фиг. 34-й небольшими стрѣлками, нормальными къ BC и соотвѣтственно къ AC) стержень l_2 поворачивается вправо, стержень l_1 — влѣво, т. е. углы α_1 и α_2 увеличиваются, поэтому уголъ α_3 долженъ уменьшаться (для того, чтобы и послѣ измѣненія угловъ сумма ихъ осталась равною 180°), слѣдовательно: $\Delta\alpha_1 > O$, знакъ (+); $\Delta\alpha_2 > O$, знакъ (+); $\Delta\alpha_3 < O$, знакъ (—).

Если на фигурѣ 35-й, вмѣсто длинъ, взять отношенія тѣхъ же длинъ къ h (выразивъ найденныя такимъ образомъ отвлеченныя числа нѣкоторыми отрѣзками, по масштабу чиселъ), то возможно, пользуясь этимъ чертежемъ вывести нѣкоторыя простыя соотношенія между величинами $\Delta\alpha$ и $\frac{\Delta l}{l}$. Именно, проектируя отрѣзки $\overline{C_3C_2}$ и $\overline{C_3C_1}$ на горизонталь, получимъ (по фиг. 35-й):

$$-\Delta\alpha_3 = \overline{C_2C_3}\cos\alpha_1 + \overline{C_3C_1}\cos\alpha_2$$

Проектируя тѣ же отрѣзки на вертикаль, найдемъ:

$$\overline{C_2C_3} = \left(\frac{\Delta l_2}{l_2} - \frac{\Delta l_3}{l_3}\right)\frac{1}{sin\alpha_1};$$

$$\overline{C_3C_1} = \left(\frac{\Delta l_1}{l_1} - \frac{\Delta l_3}{l_3}\right)\frac{1}{sin\alpha_2}$$

Подставляя значенія отрѣзковъ $\overline{C_3C_1}$ и $\overline{C_2C_3}$ въ выраженіе $\Delta\alpha_3$, получимъ:

$$\Delta\alpha_3 = \left(\frac{\Delta l_3}{l_3} - \frac{\Delta l_1}{l_1}\right) ctg\alpha_2 + \left(\frac{\Delta l_3}{l_3} - \frac{\Delta l_2}{l_2}\right) ctg\alpha_1 \quad . \; . \; (1)$$

Пользуясь аналогіей и замѣняя послѣдовательно величины $\alpha_3 ; \alpha_2 ; \alpha_1$; $\frac{\Delta l_3}{l_3} ; \frac{\Delta l_2}{l_2} ; \frac{\Delta l_1}{l_1}$ однѣ другими въ томъ порядкѣ, какъ онѣ встрѣчаются часовою стрѣлкою на фиг. 36, можемъ написать:

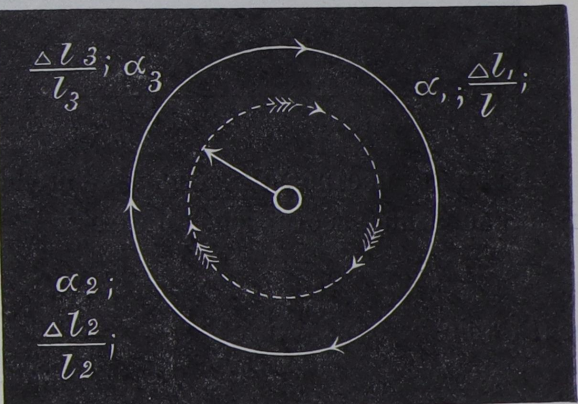
$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= \left(\frac{\Delta l_1}{l_1} - \frac{\Delta l_2}{l_2}\right) ctg\alpha_3 + \left(\frac{\Delta l_1}{l_1} - \frac{\Delta l_3}{l_3}\right) ctg\alpha_2 \\ \Delta\alpha_2 &= \left(\frac{\Delta l_2}{l_2} - \frac{\Delta l_3}{l_3}\right) ctg\alpha_1 + \left(\frac{\Delta l_2}{l_2} - \frac{\Delta l_1}{l_1}\right) ctg\alpha_3 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (1)$$

Если удлиненія стержней зависятъ исключительно отъ усилій $S_1 ; S_2 ; S_3$, которыя вызываютъ напряженія матеріала стержней на единицу площади поперечнаго ихъ сѣченія:

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{F_1} ; \; \sigma_2 = \frac{S_2}{F_2} ; \; \sigma_3 = \frac{S_3}{F_3},$$

то получится:

$$\frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\sigma_1}{E_1} ; \; \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{\sigma_2}{E_2} ; \; \frac{\Delta l_3}{l_3} = \frac{\sigma_3}{E_3}$$



Фиг. 36.

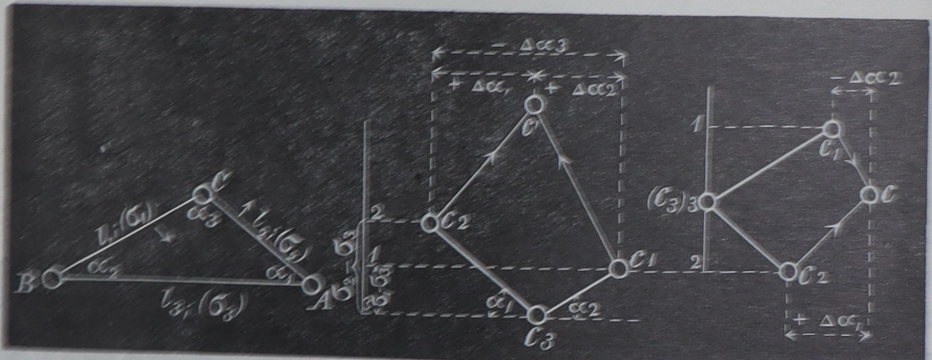
При одинаковомъ для всѣхъ стержней модулѣ (коэффиціентѣ) упругости E найдемъ изъ уравненій (1), выражая $\frac{\Delta l}{l}$ черезъ $\frac{\sigma}{E}$:

$$\left.\begin{aligned} E\,\Delta\alpha_3 &= (\sigma_3 - \sigma_1)\, ctg\alpha_2 + (\sigma_3 - \sigma_2)\, ctg\alpha_1 \\ E\,\Delta\alpha_2 &= (\sigma_2 - \sigma_3)\, ctg\alpha_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)\, ctg\alpha_3 \\ E\,\Delta\alpha_1 &= (\sigma_1 - \sigma_2)\, ctg\alpha_3 + (\sigma_1 - \sigma_3)\, ctg\alpha_2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (2)$$

Въ этомъ случаѣ цѣлесообразно изобразить чертежемъ величины

$E\Delta\alpha$ (взамѣнъ величинъ $\Delta\alpha$), т. е. въ фиг. 35-й замѣнить значенія $\frac{\Delta l}{l} \cdot h$ черезъ σ. Подобная замѣна исполнена на фиг. 37, 38 и 39, которыя, впрочемъ, не требуютъ особыхъ поясненій; слѣдуетъ лишь обратить вниманіе на алгебраическіе знаки разностей $(\sigma_1 - \sigma_3)$ и $(\sigma_2 - \sigma_3)$.

Фиг. 38-я представляетъ случай, когда обѣ эти разности положительны, т. е. имѣютъ знакъ $(+)$; фиг. 39-я представляетъ случай когда разность $(\sigma_1 - \sigma_3)$ положительна, т. е. имѣетъ знакъ $(+)$, а разность $(\sigma_2 - \sigma_3)$ отрицательна, т. е. имѣетъ знакъ $(-)$. Сверхъ того, на фиг. 39-й точка C_3 выбрана совпадающею съ точкою 3. Что касается алгебраическихъ знаковъ измѣненій $\Delta\alpha$ угловъ α, образуемыхъ осями стержней треугольной системы, то въ этомъ отношеніи фиг. 38-я вполнѣ согласуется съ фиг. 35-й. Въ случаѣ, показанномъ на фиг. 39-й, какъ стержень l_1, такъ и стержень l_2 треугольной системы (см. фиг. 37-ю), поворачиваются при деформаціи системы вправо — первый около точки B, а второй около точки A, причемъ уголъ α_2 уменьшается, т. е. $\Delta\alpha_2 < O$, знакъ $(-)$, а уголъ α_1 увеличивается, т. е. $\Delta\alpha_1 > O$, знакъ $(+)$.



Фиг. 37. Фиг. 38. Фиг. 39.

Взамѣнъ построенія возможно вычислить величины $E\Delta\alpha$; для этого цѣлесообразно ввести вспомогательныя величины:

$$\omega_1 = ctg\alpha_1 (\sigma_2 - \sigma_3); \omega_2 = ctg\alpha_2 (\sigma_3 - \sigma_1); \omega_3 = ctg\alpha_3 (\sigma_1 - \sigma_2),$$

вслѣдствіе чего получится:

$$E\Delta\alpha_1 = \omega_2 - \omega_2; E\Delta\alpha_2 = \omega_1 - \omega_3; E\Delta\alpha_3 = \omega_2 - \omega_1$$

§ 17. Построеніе отрѣзковъ ρ. Разсмотримъ (фиг. 40) цѣпь стержней $0-1-2\ldots n$, соединенныхъ между собою шарнирами, причемъ примемъ за неподвижную точку узелъ O и, сверхъ того, примемъ что стержень $0-1$ сохраняетъ неизмѣнно свое положеніе на плоскости. Опредѣлимъ перемѣщенія узловъ этой цѣпи стержней, зависящія исключительно отъ измѣненій $\Delta\vartheta$ угловъ, образуемыхъ осями стержней, т. е. найдемъ перемѣщенія узловъ для случая, когда упругія удлиненія стержней для каждаго стержня порознь равны нулю, т. е. когда $\Delta l = O$.

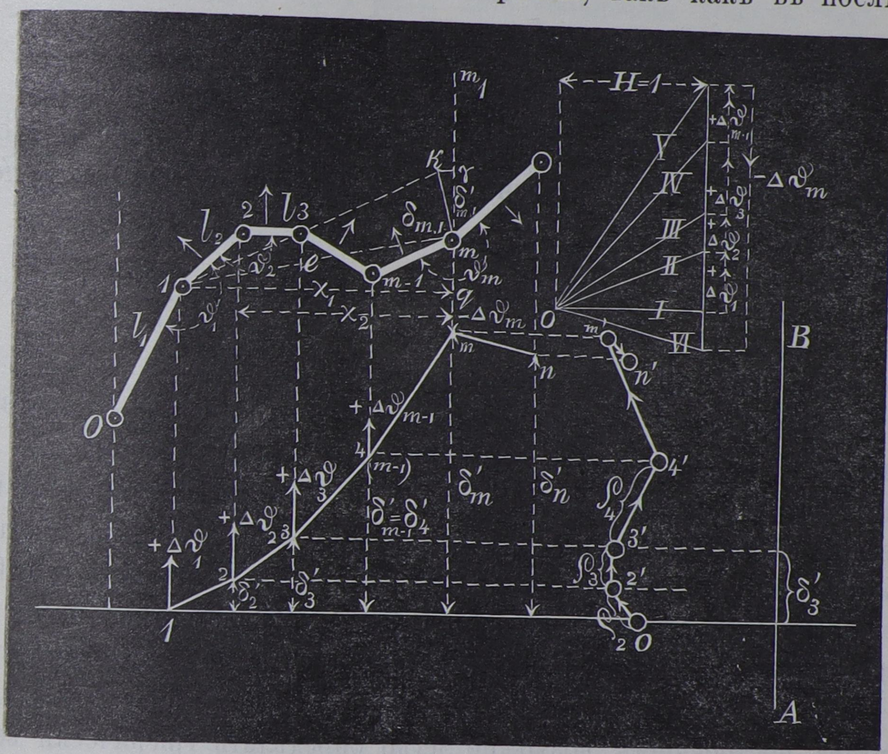
Планъ перемѣщеній узловъ представляетъ въ этомъ случаѣ несомкнутый многоугольникъ $0-2'-3' \ldots n'$, стороны коего $\overline{O2'} = \rho_2 = l_2 \Delta\vartheta_1$;

$$\overline{2'3'} = \rho_3 = l_3\, \Delta\, \vartheta_2$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

и т. д.

нормальны къ осямъ соотвѣтствующихъ стержней l_2; l_3 и т. д. Упомянутый многоугольникъ легко построить, если извѣстны проекціи перемѣщеній узловыхъ точекъ данной цѣпи стержней на какую-либо ось AB, которая однако должна быть выбрана такимъ образомъ, чтобы она не была параллельна ни одному изъ стержней, такъ какъ въ послѣднемъ



Фиг. 40.

случаѣ проекція соотвѣтствующаго перемѣщенія, т. е. соотвѣтствующаго отрѣзка ρ получилась бы равною нулю. Для нахожденія проекцій на избранную ось AB перемѣщеній узловыхъ точекъ цѣпи стержней примемъ сначала, что измѣнился на $\Delta\vartheta_1$ лишь одинъ уголъ, а именно уголъ ϑ_1, остальные же углы ϑ, образуемые осями смежныхъ стержней цѣпи, остались пока безъ измѣненія; очевидно, что такое условіе равносильно повороту части цѣпи стержней $1-2-3 \ldots n$ на уголъ $\Delta\vartheta_1$. При такомъ поворотѣ какая-либо узловая точка m, отстоящая отъ центра вращенія, т. е. отъ узла 1-го на разстояніе e, перемѣстится по направленію, нормальному къ прямой $1m$, соединяющей узлы 1-й и m—ый, на величину

$$\delta_{m-1} = e.\, \Delta\vartheta_1.$$

Проекцiя $\delta_{m.1}$ этого перемѣщенiя на прямую mm_1, параллельную избранной оси AB проекцiй, найдется изъ подобiя (по взаимной перпендикулярности сторонъ) треугольниковъ:

$$\Delta krm \sim \Delta 1mq$$

откуда

$$\delta'_{m.1} : \delta_{m.1} = x_1 : e,$$

гдѣ x_1 представляетъ разстоянiе узла 1-го до прямой mm_1. Слѣдовательно:

$$\delta^1_{m.1} = \delta_{m.1} \cdot \frac{x_1}{e} = e \cdot \Delta\vartheta_1 \cdot \frac{x_1}{e}$$

или

$$\delta'_{m.1} = x_1 \cdot \Delta\vartheta_1$$

Проекцiя δ'_m общаго перемѣщенiя δ_m узловой точки m, которое получится въ зависимости отъ измѣненiй $\Delta\vartheta_1; \Delta\vartheta_2; \Delta\vartheta_3 \ldots \Delta\vartheta_{m-1}$ всѣхъ угловъ $\vartheta_1; \vartheta_2; \vartheta_3 \ldots \vartheta_{m-1}$ выразится суммою проекцiй частныхъ перемѣщенiй, слѣдовательно:

$$\delta'_m = x_1 \Delta\vartheta_1 + x_2 \Delta\vartheta_2 + \ldots + x_{m-1} \Delta\vartheta_{m-1} = \sum_1^{m-1} x\Delta\vartheta.$$

Измѣненiя $\Delta\vartheta_m; \Delta\vartheta_{m+1} \ldots \Delta\vartheta_{n-1}$ угловъ $\vartheta_m; \vartheta_{m+1} \ldots \vartheta_{n-1}$ очевидно не влiяютъ на перемѣщенiе разсматриваемаго узла m, но влiяютъ соотвѣтственно на перемѣщенiе послѣдующихъ узловъ. Выраженiе стоящее въ правой части уравненiя (1) можетъ быть разсматриваемо какъ статическiй моментъ относительно точки (m) воображаемыхъ силъ *) $\Delta\vartheta_1; \Delta\vartheta_2; \ldots \Delta\vartheta_{m-1}$, приложенныхъ въ узлахъ, находящихся по лѣвую сторону точки (m) и имѣющихъ линiи дѣйствiя параллельныя прямой AB.

Изъ Графической Статики намъ извѣстно построенiе статическаго момента данныхъ силъ относительно данной точки, слѣдовательно, пользуясь этимъ построенiемъ, возможно легко опредѣлить графически значенiя ρ, какъ это изложено ниже.

Построимъ для воображаемыхъ грузовъ $\Delta\vartheta_1; \Delta\vartheta_2 \ldots \Delta\vartheta_{n-1}$ веревочный многоугольникъ съ полюснымъ разстоянiемъ равнымъ единицѣ ($H=1$), при чемъ первую сторону этого веревочнаго многоугольника надлежитъ для нашей цѣли выбрать нормальной къ AB. Если черезъ вершины 1, 2, 3, ... m, ... n веревочнаго многоугольника провести прямыя, параллельныя AB и измѣрить отрѣзки этихъ прямыхъ, заключенные между веревочнымъ многоугольникомъ и продолженiемъ I-й его стороны, то, какъ из-

*) Величины $\Delta\vartheta_1; \Delta\vartheta_2 \ldots \Delta\vartheta_{m-1}$ въ дѣйствительности представляютъ нѣкоторыя отвлеченныя числа; чтобы представить эти величины подъ видомъ силъ, т. е. нѣкоторыми отрѣзками прямыхъ линiй, необходимо построить отдѣльный масштабъ чиселъ и по этому масштабу измѣрять отрѣзки, изображающiе величины $\Delta\vartheta$.

вѣстно изъ Графической Статики, полученные отрѣзки и изобразятъ искомыя величины δ'_2; $\delta'_3 \ldots \delta'_m \ldots \delta'_n$. Проведя (черт. 40) черезъ вершины $1, 2, \ldots m \ldots n$ веревочнаго многоугольника прямыя, параллельныя I-й его сторонѣ и построивши многоугольникъ $0'\ 2' \ldots m' \ldots n'$, коего вершины лежатъ на этихъ параллельныхъ прямыхъ, а стороны нормальны къ осямъ соотвѣтствующихъ стержней данной цѣпи, найдемъ окончательно:

$$\rho_2 = \overline{0' - 2'};\ \rho_3 = \overline{2' - 3'};\ \ldots \rho_n = \overline{(n-1)' - n'}.$$

Такъ какъ величины ρ зависятъ отъ величинъ δ', то чтобы получить величины ρ на чертежѣ въ масштабѣ увеличенномъ въ μ разъ, слѣдуетъ увеличить величины δ' въ μ разъ. Это увеличенiе можетъ быть достигнуто или увеличенiемъ въ μ разъ каждаго изъ воображаемыхъ грузовъ $\Delta\vartheta$, сохраняя полюсное разстоянiе веревочнаго многоугольника равнымъ единицѣ, или же уменьшенiемъ полюснаго разстоянiя веревочнаго многоугольника въ μ разъ, сохраняя силы $\Delta\vartheta$ безъ измѣненiя.

Въ самомъ дѣлѣ, величины δ', помноженныя на полюсное разстоянiе H, выражаютъ соотвѣтствующiе статическiе моменты M_s воображаемыхъ силъ $\Delta\vartheta$, а именно:

$$M_s = \delta' . H = \Sigma\, x . \Delta\vartheta$$

откуда

$$\delta' = \frac{\Sigma\, x . \Delta\vartheta}{H}\ ^{*)}.$$

Очевидно, увеличивая воображаемые грузы $\Delta\vartheta$ въ μ разъ, получимъ:

$$\frac{\Sigma x . \mu\Delta\vartheta}{H} = \mu\delta',$$

т. е. увеличенную въ μ разъ величину δ'.

При $H = 1 \ldots$ $\qquad \Sigma x . \mu\Delta\vartheta = \mu\delta'$.

Съ другой стороны, если уменьшить полюсное разстоянiе H въ μ разъ, получится:

$$\frac{\Sigma x . \Delta\vartheta}{\frac{H}{\mu}} = \mu\delta',$$

т. е. опять-таки δ' будетъ увеличено въ μ разъ.

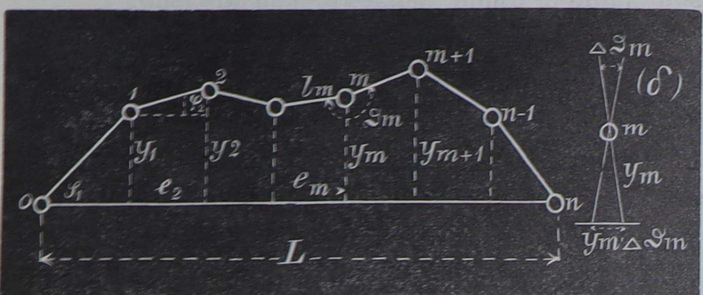
При $H = 1 \ldots$ $\qquad \dfrac{\Sigma x . \Delta\vartheta}{\frac{1}{\mu}} = \mu\delta'$.

---

*) Изъ полученнаго выраженiя очевидно, что величина δ'—линейная, т. е. измѣряемая по масштабу разстоянiй, какъ и величины ρ, такъ какъ $\Delta\vartheta$ и H выражаются въ масштабѣ чиселъ, а x — въ масштабѣ разстоянiй. Такимъ образомъ, величины ρ не зависятъ отъ масштаба чиселъ, въ которомъ изображены $\Delta\vartheta$.

На фиг. 40-й предположено, что уголъ ϑ_m уменьшается, а всѣ остальные углы ϑ напротивъ того увеличиваются.

§ 18. Измѣненіе взаимнаго разстоянія узловъ цѣпи стержней (измѣненіе длины хорды цѣпи стержней). Пусть (фиг. 41) дана цѣпь стержней, соединенныхъ между собою шарнирами; требуется найти измѣненіе взаимнаго разстоянія узловъ O и n этой цѣпи стержней, въ зависимости отъ ея деформаціи или, что то же самое, найти измѣненіе ΔL длины L хорды $\overline{O-n}$, соединяющей два упомянутыхъ узла.

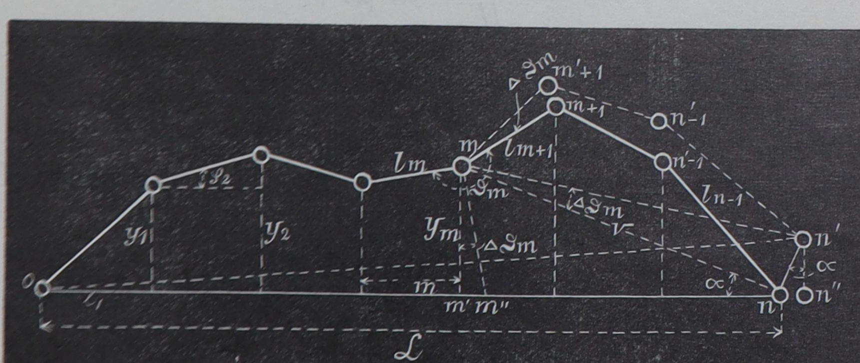


Фиг. 41.

Такъ какъ деформація цѣпи стержней, какъ мы видѣли выше, выражается величинами Δl и $\Delta\vartheta$, то задача сводится къ опредѣленію зависимости между ΔL и величинами Δl и $\Delta\vartheta$.

Обозначимъ разстояніе какого-либо узла m отъ хорды $O-n$ черезъ y_m; уголъ наклоненія оси стержня l_m къ хордѣ $O-n$ черезъ φ_m и положимъ $l_m \cos\varphi_m = e_m$. Легко видѣть, что увеличеніе какого-либо угла ϑ_m, составляемаго осями стержней, на $\Delta\vartheta_m$ имѣетъ послѣдствіемъ удлиненіе хорды $\overline{O-n} = L$ на величину $\Delta L' = y_m \, \Delta\vartheta_m$.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая предварительно случай, когда всѣ углы ϑ, за исключеніемъ угла ϑ_m, сохраняютъ неизмѣнно свои значенія, а



Фиг. 42.

одинъ лишь уголъ ϑ_m измѣняется на величину $\Delta\vartheta_m$ и когда длина каждаго изъ стержней остается безъ измѣненія, по чертежу 42-му видимъ, что вслѣдствіе измѣненія угла ϑ_m на $\Delta\vartheta_m$ оси стержней, расположенныхъ между узлами m и n, отклонятся отъ первоначальнаго своего положенія, при чемъ узловыя точки соотвѣтственно перемѣстятся и узловая точка n займетъ новое положеніе n'. Такъ какъ это перемѣщеніе зависитъ отъ того, что стержень l_{m+1} повернулся около узловой точки m на уголъ $\Delta\vartheta_m$, то прямая mn' (см. черт. 42) составитъ съ прямою mn уголъ $\Delta\vartheta_m$. По малости угла $\Delta\vartheta_m$ перемѣщеніе $\overline{nn'}$ точки n можетъ быть найдено графически, если возставить въ точкѣ n къ прямой mn нормаль до встрѣчи съ прямой mn', проведенною подъ угломъ $\Delta\vartheta_m$ къ прямой mn или что то же, если отложить на нормали nn' отъ точки n отрѣзокъ $\overline{nn'} = r \, . \, \Delta\vartheta_m$, гдѣ $r = \overline{mn}$. Проекція nn'' отрѣзка nn' на направленіе хорды $O—n$ и дастъ искомое удлиненіе $\Delta L'$. Если обозначить черезъ α уголъ, составляемый прямою mn съ прямою $O—n$, то легко видѣть, что, по взаимной перпендикулярности сторонъ $\angle nn'n'' = \angle mnO = \alpha$. Слѣдовательно:

$$nn'' = \Delta L' = r \, . \, \Delta\vartheta_m \, . \, sin\,\alpha.$$

Но изъ прямоугольнаго треугольника $mm'n$ слѣдуетъ, что

$$y_m = r \; sin\,\alpha.$$

Такимъ образомъ, окончательно:

$$nn'' = \Delta L' = y_m \, \Delta\vartheta_m.$$

Къ этому же результату мы пришли бы разсматривая Δ—къ $m'm''m$ (черт. 42), при чемъ, по малости угла $\Delta\vartheta_m$, можно положить: $m'm'' = y_m \, \Delta\vartheta_m$; то же выражено графически на черт. 41 — δ. Легко видѣть, что удлиненію какого-либо стержня l_m на Δl_m соотвѣтствуетъ измѣненіе длины L хорды $O—n$ на $\Delta L''$, при чемъ $\Delta L'' = \Delta l_m \, cos\,\varphi_m$. Общее удлиненіе ΔL хорды $O—n$, зависящее отъ совокупности измѣненій всѣхъ угловъ ϑ и отъ удлиненій всѣхъ стержней цѣпи, представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Delta L = \sum_1^{n-1} y_m \Delta\vartheta_m + \sum_1^{n} \Delta l_m \, cos\,\varphi_m, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

гдѣ

$$\sum_1^{n-1} y_m \Delta\vartheta_m = \sum_{m=1}^{m=n-1} y_m \Delta\vartheta_m$$

выражаетъ сумму значеній

$$y_1 \Delta\vartheta_1; \; y_2 \Delta\vartheta_2 \ldots \text{до} \; y_{n-1} \Delta\vartheta_{n-1}.$$

Замѣчая, что

$$\Delta l = \frac{\sigma l}{E},$$

если температура стержней не измѣняется, (т. е. если $t = O$), получимъ:

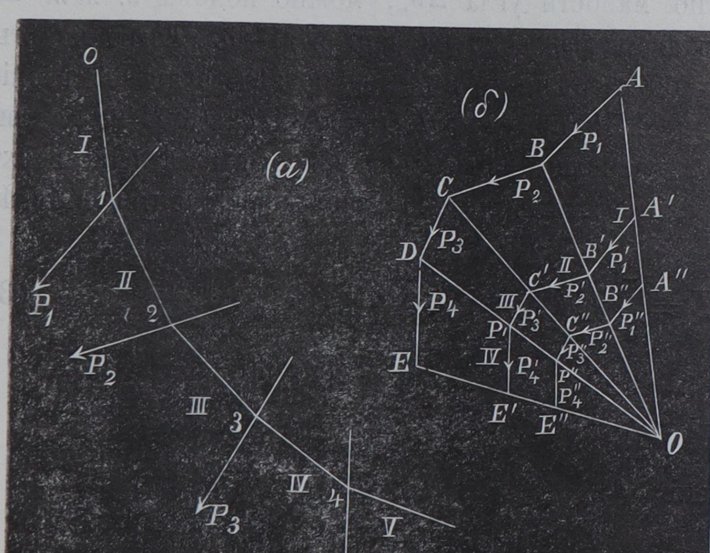
$$\Delta L = \sum_1^{n-1} y_m \Delta\vartheta_m + \sum_1^{n} \frac{\sigma_m}{E} \, l_m, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Если желательно примѣнить уравненіе (4) и для случая, когда происходятъ измѣненія температуры стержней, то необходимо вмѣсто удлиненія $\Delta l = \frac{\sigma l}{E}$ подставить удлиненіе $\Delta l + \Delta l_t = \frac{\sigma l}{E} + \mu l t$, гдѣ μ — коэффиціентъ линейнаго расширенія матеріала стержней, а t — число градусовъ, на которое измѣнилась первоначальная температура стержней цѣпи. Тогда получится окончательно:

$$\Delta L = \sum_{1}^{n-1} y_m \Delta\vartheta_m + \sum_{1}^{n} \frac{(\sigma_m + \mu E t)}{E}\, l_m \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Выраженіе $\Sigma y \Delta\vartheta$ можемъ представить себѣ какъ статическій моментъ относительно оси $O - n$ воображаемыхъ грузовъ: $\Delta\vartheta_1$; $\Delta\vartheta_2$; .... $\Delta\vartheta_{n-1}$, приложенныхъ въ узлахъ 1; 2; ...; $n-1$ цѣпи стержней и параллельныхъ прямой $O - n$. Поэтому, выраженіе $\sum\limits_{1}^{n-1} y_m \Delta\vartheta_m$ можетъ быть построено посредствомъ веревочнаго многоугольника.

§ 19. Многоугольникъ изгиба какъ веревочный многоугольникъ. Разсмотрѣніе произвольнаго многоугольника въ качествѣ веревочнаго многоугольника. Всякій многоугольникъ 0—1—2—3.... (см. фиг. 43—a) можно разсматривать какъ веревочный многоугольникъ, построенный для нѣкоторой системы конечныхъ силъ P_1; P_2; P_3. ..., приложенныхъ въ вершинахъ 1, 2, 3.... сего многоугольника, при чемъ линіи дѣйствія этихъ силъ могутъ быть, въ извѣстныхъ предѣлахъ, выбраны произвольно. Но разъ мы задались линіями дѣйствія упомянутой системы силъ, то величины



Фиг. 43.

ихъ уже будутъ, вообще говоря, непроизвольны. Въ самомъ дѣлѣ, если мы зададимся величиною одной изъ этихъ силъ, напримѣръ величиною силы P_1 (фиг. 43—δ), то проведеніемъ лучей I-го и II-го || сторонамъ I-й и соотвѣтственно II-й даннаго многоугольника опредѣлится полюсъ O; проведя изъ сего полюса лучъ III ‖ III-й сторонѣ веревочнаго многоугольника до встрѣчи съ прямой BC ‖ линіи дѣйствія силы P_2, мы найдемъ *величину* этой силы P_2, которая уже оказывается *независящею отъ нашего произвола*. Точно также убѣдимся, что величина каждой изъ остальныхъ силъ не зависитъ отъ нашего произвола. Изъ сказаннаго ясно, что въ данномъ случаѣ мы поступаемъ обратно тому, какъ поступали въ Графической Статикѣ при построеніи веревочнаго многоугольника, а именно: тамъ по построенному ранѣе плану силъ строили веревочный многоугольникъ; здѣсь *по построенному ранѣе многоугольнику, принимаемому за веревочный многоугольникъ, выстраиваемъ планъ силъ.* Легко видѣть, что данному многоугольнику 0—1—2—3—4.... и избранной (по линіямъ дѣйствія) системѣ силъ P_1; P_2; P_3; P_4.... удовлетворяетъ (фиг. 43—*a*) *безчисленное* множество плановъ силъ, подобныхъ многоугольнику $ABCDE$ (фиг. 43—*б*).

Въ самомъ дѣлѣ точку A сего многоугольника мы можемъ взять произвольно, напримѣръ въ A'; A'' и т. д.; тогда величины силы P_1 и остальныхъ силъ опредѣлятся въ планѣ силъ (фиг. 43—*б*), или обратно можемъ задаться какой-либо другой величиной силы P_1, тогда положеніе точки A, при неизмѣнномъ полюсѣ O_1, опредѣлится само собою или же выбирая и величину силы P_1 и положеніе точки A произвольно, получимъ новый полюсъ O. Во всѣхъ найденныхъ такимъ образомъ планахъ силъ отношеніе между сторонами многоугольниковъ $ABCDE$ остается постояннымъ, т. е.:

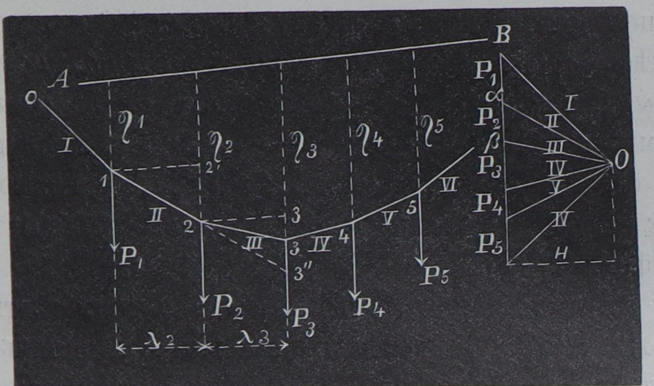
$$\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} : \ldots . = \overline{A'B'} : \overline{B'C'} : \overline{C'D'} \ldots .,$$

а такъ какъ стороны этихъ многоугольниковъ выражаютъ величины силъ P, то имѣемъ:

$$P_1 : P_2 : P_3 : \ldots . = P'_1 : P'_2 : P'_3 : \ldots .$$

Предѣлы, внутри коихъ линіи дѣйствія силъ P могутъ быть избраны произвольно, опредѣляются тѣмъ условіемъ, что каждая изъ силъ P должна имѣть *конечное* значеніе; какъ легко видѣть изъ плана силъ $ABCDE$ (фиг. 43—*б*) для достиженія этой цѣли необходимо, чтобы линіи дѣйствія силъ P не совпадали съ примыкающими къ нимъ сторонами многоугольника 0—1—2—3...., принимаемаго за веревочный многоугольникъ. Такъ, напримѣръ, линія дѣйствія силы P_1 не должна совпадать ни со стороной 0—1, ни со стороной 1—2; линія дѣйствія силы P_2 не должна совпадать ни со стороной 1—2, ни со стороной 2—3 и т. д.

Пусть данный многоугольникъ 0—1—2—3.... (фиг. 44) разсматривается какъ веревочный многоугольникъ, построенный для параллельныхъ силъ; въ такомъ случаѣ можно вывести простую зависимость между полюснымъ разстояніемъ H, силами P и отрѣзками η_1; η_2; η_3. . . ., выражающими разстоянія соотвѣтствующихъ вершинъ 1, 2, 3. . . . даннаго многоугольника отъ произвольной прямой AB, измѣряемыя по линіи дѣйствія силъ P; посредствомъ этой зависимости силы P могутъ быть выражены въ функціи величинъ η. Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ (фиг. 44) черезъ вершину 2 прямую, параллельную AB до пересѣченія съ линіей дѣйствія силы P_3 въ точкѣ $3'$ и продолжимъ сторону 1—2 даннаго многоугольника до точки $3''$. Изъ подобія треугольниковъ: $\Delta\, 122' \infty \Delta\, 3'2\,3''$, по параллельности сторонъ, получится:



Фиг. 44.

$$\overline{3'';3'} : \lambda_3 = \eta_2 - \eta_1 : \lambda_2 ;$$

откуда

$$\overline{3'';3'} = (\eta_2 - \eta_1)\,\frac{\lambda_3}{\lambda_2}$$

Величина же отрѣзка $\overline{3'' ; 3}$ найдется какъ разность отрѣзковъ $\overline{3'';3}$ и $\overline{3;3'}$, а именно

$$\overline{3'';3} = \overline{3'';3'} - \overline{3;3'} = (\eta_2 - \eta_1)\,\frac{\lambda_3}{\lambda_2} - (\eta_3 - \eta_2), \quad . \quad . \quad (6)$$

гдѣ λ_2 и λ_3 выражаютъ проекціи сторонъ 1—2 и 2—3 на направленіе, нормальное къ линіи дѣйствія силъ P. Сравнивая (фиг. 44) веревочный многоугольникъ и планъ силъ, находимъ, изъ подобія треугольниковъ $\Delta 3\,;\,3'';\,2 \infty \alpha\beta O$ (по параллельности сторонъ):

$$\overline{3'';3} : \lambda_3 = P_2 : H$$

откуда:

$$\overline{3'';3} = P_2\,\frac{\lambda_3}{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

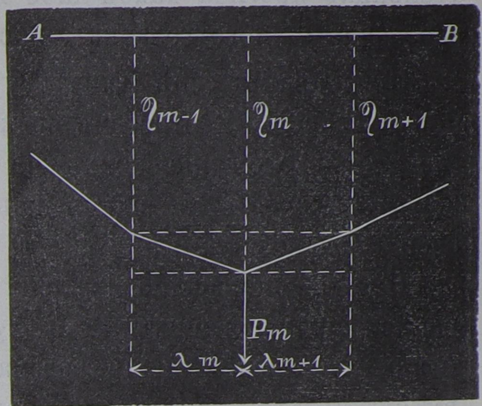
Подставляя значеніе отрѣзка $\overline{3'';3}$ изъ (7) въ уравненіе (6) и опредѣляя значеніе силы P_2, находимъ окончательно:

$$P_2 = H\left[\frac{(\eta_2 - \eta_1)}{\lambda_2} - \frac{(\eta_3 - \eta_2)}{\lambda_3}\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

или вообще:

$$P_m = H\left[\frac{(\eta_m - \eta_{m-1})}{\lambda_m} - \frac{(\eta_{m+1} - \eta_m)}{\lambda_{m+1}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Выраженіе (9) имѣетъ общее значеніе для всякихъ η. Напримѣръ, въ частномъ случаѣ, показанномъ на фиг. 45-й, когда $\eta_{m+1} = \eta_{m-1}$ и $\lambda_m = \lambda_{m+1}$ найдется изъ выраженія (9) подставляя вмѣсто η_{m+1}, равное ему η_{m-1} и вмѣсто λ_{m+1}, равное ему λ_m:



Фиг. 45.

$$P_m = H\left[\frac{(\eta_m - \eta_{m-1})}{\lambda_m} - \frac{(\eta_{m-1} - \eta_m)}{\lambda_m}\right]$$

По раскрытіи скобокъ у второго члена и сдѣлавши одну перестановку, получимъ:

$$P_m = H\left[\frac{(\eta_m - \eta_{m-1})}{\lambda_m} + \frac{(\eta_m - \eta_{m-1})}{\lambda_m}\right]$$

или

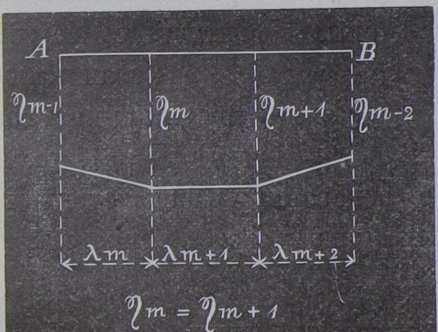
$$P_m = 2H\frac{(\eta_m - \eta_{m-1})}{\lambda_m}$$

Въ случаѣ показанномъ на черт. 46-мъ получится, такъ какъ $\eta_{m+1} = \eta_m$:

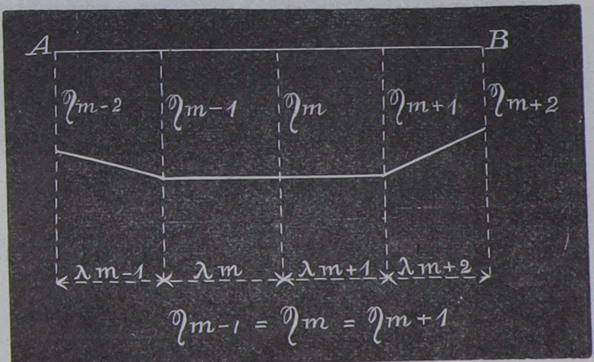
$$P_m = H\left[\frac{(\eta_m - \eta_{m-1})}{\lambda_m} - \frac{(\eta_m - \eta_m)}{\lambda_{m+1}}\right]$$

или

$$P_m = H\frac{(\eta_m - \eta_{m-1})}{\lambda_m}$$



Фиг. 46.



Фиг. 47.

Въ случаѣ, показанномъ на фиг. 47-й получится, такъ какъ $\eta_{m+1} = \eta_m = \eta_{m-1}$:

$$P_m = H\left[\frac{(\eta_m - \eta_m)}{\lambda_m} - \frac{(\eta_m - \eta_m)}{\lambda_{m+1}}\right]$$

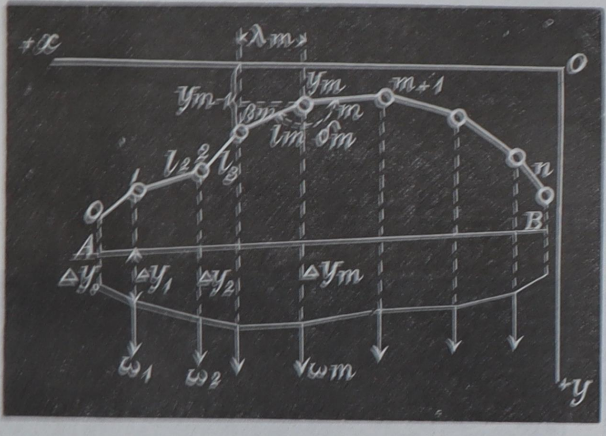
или

$$P_m = 0.$$

§ 20. Линія прогиба. На основаніи предыдущихъ замѣчаній многоугольникъ прогиба какой-либо цѣпи стержней можно разсматривать какъ веревочный многоугольникъ, построенный для параллельныхъ силъ.

Представимъ себѣ (фиг. 48) цѣпь стержней, лежащую въ вертикальной плоскости, и отнесемъ ее къ прямоугольнымъ координатнымъ осямъ $\overline{X}$; $\overline{Y}$, расположеніе коихъ на упомянутой плоскости выбрано такимъ образомъ, чтобы ни одинъ изъ угловъ β_1; β_2; β_3 .... и т. д. наклоненія осей стержней l_1; l_2; l_3 .... и т. д. къ оси $\overline{X}$-овъ не былъ равенъ 90°.

Пусть перемѣщеніе каждой узловой точки цѣпи стержней разложено на двѣ составляющихъ Δx и Δy по осямъ $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ (эти составляющія Δx и Δy — перемѣщенія разсматриваемой узловой точки и представятъ, вмѣстѣ съ тѣмъ, измѣненія координатъ этой же точки). Отложимъ составляющія Δy перемѣщеній узловыхъ точекъ по прямымъ, параллельнымъ оси $\overline{Y}$ и проходящимъ черезъ узловыя точки отъ произвольно выбранной прямой AB. Соединяя между собою прямыми концы полученныхъ такимъ образомъ отрѣзковъ, построимъ многоугольникъ, называемый *многоугольникомъ прогиба*; площадь, заключенная между очертаніемъ этого многоугольника, прямою AB и крайними ординатами Δy_0; Δy_n, — называется *площадью прогиба* въ направленіи оси $\overline{Y}$-овъ. Линію прогиба можно разсматривать какъ веревочный многоугольникъ, построенный для нѣкоторыхъ фиктивныхъ грузовъ ω_1; ω_2; . . . . ω_m; если полюсное разстояніе H принять равнымъ единицѣ $H = 1$, то, на основаніи вышеизложеннаго, можно написать выраженіе какого-либо фиктивнаго груза, напр. ω_m:



Фиг. 48.

$$\omega_m = \frac{\Delta y_m - \Delta y_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\Delta y_{m+1} - \Delta y_m}{\lambda_{m+1}} \quad . \; . \; . \; (10)$$

Изъ фиг. 48 ясно, что:

$$y_{m-1} - y_m = l_m \sin \beta_m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Дифференцируя уравненіе (11) и замѣняя знакъ дифференціала знакомъ Δ, получимъ:

$$\Delta y_{m-1} - \Delta y_m = \Delta l_m \sin \beta_m + l_m \cos \beta_m \Delta \beta_m.$$

Раздѣляя это выраженіе на $\lambda_m = l_m \cos \beta_m$ и мѣняя знаки, найдемъ:

$$\frac{\Delta y_m - \Delta y_{m-1}}{\lambda_m} = -\frac{\Delta l_m}{l_m} tg\beta_m - \Delta\beta_m \quad \ldots \ldots (12)$$

Точно такимъ же образомъ получится:

$$\frac{\Delta y_{m+1} - \Delta y_m}{\lambda_{m+1}} = -\frac{\Delta l_{m+1}}{l_{m+1}} tg\beta_{m+1} - \Delta\beta_{m+1} \quad \ldots (13)$$

Подставляя въ уравненіе (10) выраженія (12) и (13), окончательно находимъ:

$$\omega_m = -\Delta\beta_m + \Delta\beta_{m+1} - \frac{\Delta l_m}{l_m} tg\beta_m + \frac{\Delta l_{m+1}}{l_{m+1}} tg\beta_{m+1} \quad . (14)$$

Изъ фиг. 49-й слѣдуетъ, что:

$$\beta_{m+1} + 180^\circ - \beta_m = \vartheta_m .$$

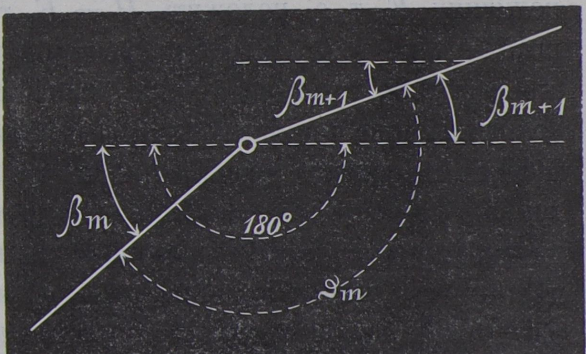
Дифференцируя это выраженіе и замѣняя знакъ дифференціала знакомъ Δ, находимъ:

$$\Delta\beta_{m+1} - \Delta\beta_m = \Delta\vartheta_m ,$$

откуда окончательно:

$$\omega_m = \Delta\vartheta_m - \frac{\Delta l_m}{l_m} tg\beta_m + \frac{\Delta l_{m+1}}{l_{m+1}} tg\beta_{m+1} \quad \ldots \ldots (15)$$

При $\beta_m = 90^\circ$ или при $\beta_{m+1} = 90^\circ$, ω_m становится безконечно большимъ: $\omega_m = \infty$; поэтому, если всѣ ω должны имѣть конечныя значенія, то необходимо выбирать такимъ образомъ положеніе осей координатъ, чтобы ни одинъ изъ узловъ β не былъ равенъ 90°, какъ это и указано было выше, т. е. должно быть $\beta >$ или $< 90^\circ$. Если первоначальная температура стержней остается безъ измѣненія, то для каждаго стержня можемъ написать:



Фиг. 49.

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{S}{EF} = \frac{\sigma}{E}$$

Если для всѣхъ стержней E одно и то же (стержни сдѣланы изъ одинаковаго матеріала), то выраженіе (15) можетъ быть преобразовано въ нижеслѣдующее:

$$\omega_m = \Delta\vartheta_m - \frac{\sigma_m}{E} tg\beta_m + \frac{\sigma_{m+1}}{E} tg\beta_{m+1} \quad \ldots \ldots (16)$$

Помножая обѣ части уравненія (16) на E получимъ:

$$\omega'_m = E\omega_m = E\left\{\Delta\vartheta_m - \frac{\sigma_m}{E} tg\beta_m + \frac{\sigma_{m+1}}{E} tg\beta_{m+1}\right\} \quad . \quad (17)$$

Если построить веревочный многоугольникъ для силъ ω'_m при полюсномъ разстояніи, равномъ E, то получится многоугольникъ изгиба цѣпи стержней въ направленіи оси Y и при томъ въ томъ же масштабѣ, въ которомъ изображена самая цѣпь стержней, т. е. величины Δy получатся въ томъ же масштабѣ.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\omega'_m = E\omega_m ,$$

но, по уравненію (10)

$$\omega_m = \frac{(\Delta y_m - \Delta y_{m-1})}{\lambda_m} - \frac{(\Delta y_{m+1} - \Delta y_m)}{\lambda_{m+1}}$$

Слѣдовательно:

$$\omega'_m = E\left\{\frac{(\Delta y_m - \Delta y_{m-1})}{\lambda_m} - \frac{(\Delta y_{m+1} - \Delta y_m)}{\lambda_{m+1}}\right\}$$

Сравнивая это послѣднее выраженіе съ выраженіемъ:

$$P_m = H\left\{\frac{(\eta_m - \eta_{m-1})}{\lambda_m} - \frac{(\eta_{m+1} - \eta_m)}{\lambda_{m+1}}\right\},$$

гдѣ H есть полюсное разстояніе и гдѣ η_m изображены въ томъ же масштабѣ, какъ и λ_m, видимъ, что если принять за полюсное разстояніе H величину E, т. е. положить $H = E$, то Δy_m получится въ томъ же масштабѣ, какъ и λ_m, т. е. въ масштабѣ чертежа цѣпи стержней. Къ тому же результату придемъ, если величины Δy_m будемъ разсматривать какъ величины пропорціональныя нѣкоторымъ моментамъ, такъ что произведеніе изъ полюснаго разстоянія на величину Δy_m даетъ значеніе опредѣленнаго момента $M_m = E\Delta y_m$. Съ другой стороны этотъ же моментъ M_m равенъ произведенію нѣкоторой линейной функціи силъ $\omega'_m = E\omega_m$ на нѣкоторую линейную величину r_m, измѣряемую въ томъ же масштабѣ разстояній, въ которомъ изображенъ чертежъ цѣпи стержней, такъ какъ при построеніи веревочнаго многоугольника для грузовъ ω'_m грузы эти предполагаются приложенными по вертикалямъ, проходящимъ черезъ узловыя точки цѣпи стержней, т. е. горизонтальныя разстоянія между фиктивными грузами ω'_m изображаются разстояніями между узловыми точками цѣпи стержней.

Такимъ образомъ получимъ:

$$M_m = E\Delta y_m = f(\omega'_m)\, r_m = Ef(\omega_m)\, r_m ,$$

откуда

$$\Delta y_m = \frac{Ef(\omega'_m)\, r_m}{E} = r_m \, . \, f\,(\omega_m)\,.$$

Такъ какъ

$$\omega_m = \Delta\vartheta_m - \frac{\sigma_m}{E}\, tg\beta_m + \frac{\sigma_{m+1}}{E}\, tg\beta_{m+1}$$

есть величина отвлеченная, то измѣреніе и масштабъ величины Δy_m зависитъ отъ измѣренія и масштаба величины r_m, а такъ какъ послѣдняя величина r_m есть линейная (разстояніе) и при томъ измѣряемая по чертежу цѣпи стержней, то масштабъ Δy_m есть тотъ же, что и масштабъ цѣпи стержней. Если желаемъ получить Δy въ масштабѣ увеличенномъ въ μ разъ противъ масштаба чертежа цѣпи стержней, къ каковому увеличенію на практикѣ приходится постоянно прибѣгать, то слѣдуетъ взять полюсное разстояніе H въ μ разъ меньше, т. е. положить $H = \frac{E}{\mu}$.

При тѣхъ же грузахъ ω'_m, величины Δy_m получатся тогда въ μ разъ больше.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\omega'_m = \frac{E}{\mu}\left\{\frac{\mu(\Delta y_m - \Delta y_{m-1})}{\lambda_m} - \frac{\mu(\Delta y_{m+1} - \Delta y_m)}{\lambda_{m+1}}\right\}$$

или, полагая $H = \frac{E}{\mu}$

$$\omega' = H\left\{\frac{(\mu\Delta y_m - \mu\Delta y_{m-1})}{\lambda_m} - \frac{(\mu\Delta y_{m+1} - \mu\Delta y_m)}{\lambda_{m+1}}\right\}.$$

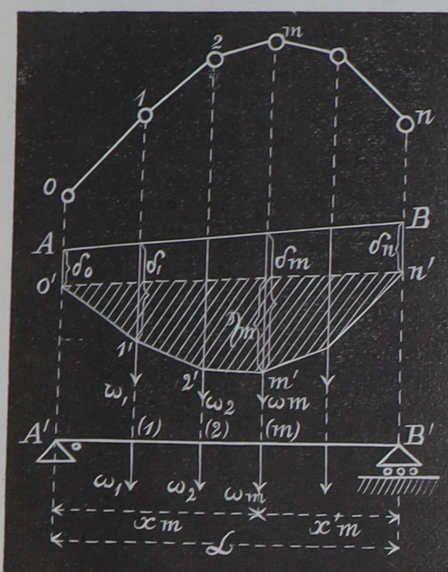
Если желали бы принять во вниманіе измѣненіе температуры стержней, то необходимо было бы только напряженія

$$\sigma = \frac{S}{F} \text{ увеличить на } \mu Et.$$

Въ остальномъ предыдущіе выводы сохраняютъ свою силу и для этого случая. Когда по фиктивнымъ грузамъ ω'_m веревочный многоугольникъ построенъ, то всѣ Δy опредѣлены, если дана прямая AB, т. е. если извѣстны какія-либо два перемѣщенія Δy, напримѣръ, для точекъ O и n цѣпи стержней.

§ 21. Разсмотрѣніе площади прогиба, какъ площади моментовъ. Вычисленіе прогибовъ. Пусть (фиг. 50) многоугольникъ $O'—1'—2' \ldots m' \ldots n$ есть линія прогиба по направленію AA' цѣпи стержней $O—1—2 \ldots m \ldots n$, лежащихъ въ вертикальной плоскости, и пусть AB есть замыкающая сторона этого многоугольника, который мы можемъ разсматривать, какъ веревочный многоугольникъ для нѣкоторыхъ фиктивныхъ грузовъ ω_1; ω_2; $\omega_3 \ldots \omega_m$.

Обозначимъ прогибъ въ точкѣ m черезъ δ_m, а часть отрѣзка δ_m, заключенную между прямою $O'n'$ и линіей прогиба, черезъ η_m. Площадь, заключенная между многоугольникомъ прогиба и прямою $O'n'$ можетъ быть разсматриваема какъ площадь моментовъ для нагруженной фиктивными грузами ω_1; ω_2; $\omega_3 \ldots \omega_m$ простой балки $A'B'$, которой опоры A' и B' лежатъ на прямыхъ, проведенныхъ черезъ узлы O и n шарнирной цѣпи параллельно направленію AA' разсматриваемыхъ перемѣщеній, при чемъ скользящая опора B' этой балки перемѣщается по линіи нормальной къ направленію AA'. Если фиктивные грузы ω опредѣлены изъ вышеприведеннаго уравненія (15) или (16), т. е. при полюсномъ разстояніи $H = 1$, то, какъ извѣстно изъ Графической Статики, между изгибающимъ моментомъ $M_{\omega_1 m}$ для сѣченія (m) простой балки $A'B'$ и между ординатой η_m—веревочнаго многоугольника (въ данномъ случаѣ эта ордината представляетъ нѣкоторое перемѣщеніе) существуетъ слѣдующая зависимость: $1 \cdot \eta_m = M_{\omega_1 m}$. Если фиктивные грузы ω' опредѣлены изъ вышеприведеннаго уравненія (17), т. е. при полюсномъ разстояніи, равномъ E, то $E\eta = M_{\omega_1 m}$,



Фиг. 50.

откуда $\eta = \frac{M\omega_1 m}{E}$. Такимъ образомъ, опредѣленіе прогибовъ η сводится къ вычисленію изгибающихъ моментовъ для простой балки. Если перемѣщенія δ_o и δ_n извѣстны, то, по опредѣленіи прогибовъ η, всѣ остальныя перемѣщенія могутъ быть найдены изъ выраженія: $\delta_m = \eta_m + \delta_o \frac{x'_m}{L} + \delta_n \frac{x_m}{L}$.

Это послѣднее выраженіе легко получить изъ фиг. 50.

Изложенное въ семъ § показываетъ, что опредѣленіе прогибовъ цѣпи стержней можетъ быть произведено независимо отъ построенія веревочнаго многоугольника, еще и аналитическимъ путемъ посредствомъ вычисленія ординатъ η_m, которое приводится къ вычисленію изгибающихъ моментовъ для сѣченій простой балки, нагруженной фиктивными грузами. Это вычисленіе въ нѣкоторыхъ случаяхъ очень удобно и просто, а именно, когда балка симметрично нагружена и когда, сверхъ того, фиктивные грузы ω расположены въ одинаковыхъ разстояніяхъ λ одинъ отъ другого. Приведеннымъ способомъ пользуются при вычисленіи прогибовъ поясовъ сквозныхъ фермъ.

ГЛАВА II.

Графическое сложенiе и разложенiе силъ въ пространствѣ.

Создатель Графической Статики, незабвенный профессоръ Кульманъ, въ своемъ сочиненiи «Die Graphische Statik», появившемся въ первомъ изданiи въ 1864 году, а во второмъ изданiи въ 1875 году, первый показалъ графическiе прiемы сложенiя и разложенiя силъ въ пространствѣ.

Эта часть Графической Статики, имѣющая непосредственную связь съ Начертательной Геометрiей, какъ пользующаяся методами послѣдней,— долгое время оставалась внѣ области практическихъ примѣненiй и только въ сравнительно недавнее время, благодаря замѣчательнымъ трудамъ профессора Föppl'я, а именно сочиненiю его: «Das Fachwerk im Raume», появившемуся въ 1892 году, получила весьма важное значенiе въ теорiи сооруженiй, предоставляя возможность разсчитывать сооруженiя, какъ системы пространственныя, каковыми они въ дѣйствительности являются, безъ искусственнаго расчлененiя сооруженiй на составляющiя ихъ плоскiя системы.

Въ области расчета плоскихъ системъ, какъ всѣмъ извѣстно, Графическая Статика уже давно прiобрѣла себѣ значительное практическое примѣненiе.

D-r Föppl явился преемникомъ и послѣдователемъ покойнаго Culmann'а, котораго идеи, такъ сказать, популяризованы и развиты Föppl'емъ, собственно въ практическихъ примѣненiяхъ. Основанiя расчета пространственныхъ системъ, состоящiя въ графическихъ способахъ сложенiя и разложенiя силъ въ пространствѣ, собственно даны были уже Culmann'омъ, затѣмъ нѣсколько дополнены Müller-Breslau по отношенiю къ частному случаю сложенiя силъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ. Д-ръ Föppl излагаетъ эти прiемы, основываясь на идеяхъ Culmann'а, но въ значительно сокращенномъ и упрощенномъ видѣ, лишь насколько это необходимо для практическихъ цѣлей.

I. Линіи дѣйствія силъ пересѣкаются между собой въ одной точкѣ.

§ 1. Пусть даны три силы P_1, P_2 и P_3, линіи дѣйствія коихъ пересѣкаются въ одной точкѣ, причемъ заданныя силы не лежатъ въ одной плоскости; можно доказать, что равнодѣйствующая R этихъ силъ будетъ выражаться по линіи дѣйствія и по величинѣ діагональю параллелопипеда, построеннаго на отрѣзкахъ, изображающихъ по линіи дѣйствія и по величинѣ данныя силы. Въ самомъ дѣлѣ, если мы сложимъ между собою силы P_1 и P_2 (фиг. 51), то получимъ равнодѣйствующую R', лежащую въ плоскости, проходящей черезъ P_1 и P_2, и представляющую діагональ параллелограмма, построеннаго на силахъ P_1 и P_2. Проведемъ затѣмъ черезъ эту діагональ R' и черезъ силу P_3 плоскость и въ этой плоскости построимъ равнодѣйствующую силъ R' и P_3; эта послѣдняя равнодѣйствующая и будетъ искомая R и, какъ ясно изъ чертежа, она будетъ представлять діагональ параллелопипеда, построеннаго на отрѣзкахъ, изображающихъ данныя силы P_1, P_2 и P_3.

Это предложеніе о *параллелопипедѣ силъ* для силъ, расположенныхъ какъ угодно въ пространствѣ, *аналогично* съ предложеніемъ *о параллелограммѣ силъ для силъ*, находящихся *въ одной плоскости*.

Измѣрить настоящую величину упомянутой діагонали параллелопипеда *силъ*, представляющей искомую равнодѣйствующую данныхъ силъ P_1, P_2 и P_3, вполнѣ возможно по двумъ ея проекціямъ; поэтому къ сложенію силъ въ пространствѣ примѣняется методъ проекцій, т. е. методъ Начертательной Геометріи.

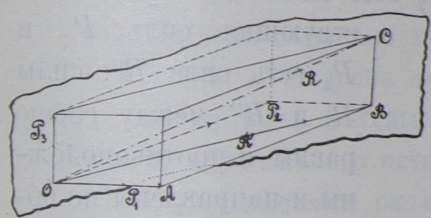
Для полученія искомой равнодѣйствующей R нѣтъ надобности строить весь параллелопипедъ, достаточно построить лишь многоугольникъ $OABC$, какъ это усматривается изъ фиг. 51.

Въ проекціяхъ рѣшеніе разсматриваемой задачи показано на фиг. 52 (A) и (B). На фиг. 52 (A) показаны въ проекціяхъ данныя силы.

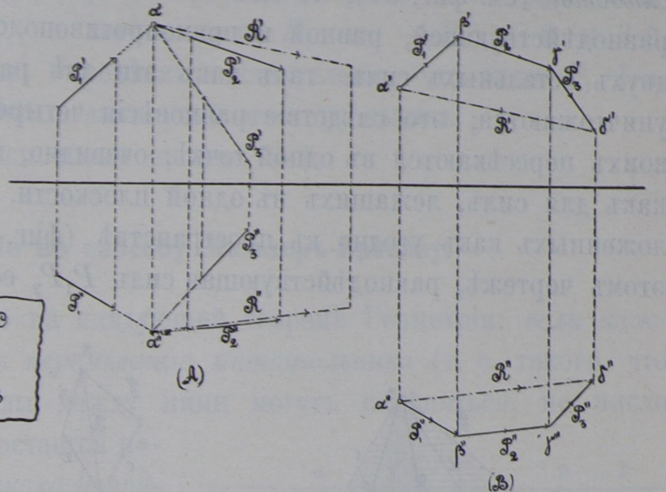
На фиг. 52 B отъ произвольной точки α', α'' построенъ въ проекціяхъ многоугольникъ (планъ) силъ и опредѣлена въ проекціяхъ (R', R'') равнодѣйствующая данныхъ силъ по линіи дѣйствія, по знаку и по величинѣ, такъ какъ, зная величины проекцій равнодѣйствующей, можемъ найти настоящую ея величину по правиламъ Начертательной Геометріи; затѣмъ на фиг. 52 (A) черезъ соотвѣтствующія проекціи (α', α'') общей точки a пересѣченія линій дѣйствія силъ P проведены соотвѣтствующія проекціи (R' и R'') равнодѣйствующей данныхъ силъ.

Если на фиг. 52-й къ даннымъ силамъ P_1, P_2 и P_3 пристроить четвертую силу, равную и прямо противоположную силѣ R, то, очевидно, эти четыре силы будутъ взаимно уравновѣшиваться, и многоугольникъ силъ (α, β, γ, δ) замѣнится многоугольникомъ (α, β, γ, δ, α), т. е. будетъ *замкнутымъ*.

Все вышеизложенное относится и къ случаю сложенія сколькихъ угодно силъ, линіи дѣйствія коихъ пересѣкаются въ одной точкѣ. Такимъ образомъ, *для равновѣсія силъ, расположенныхъ какъ угодно въ пространствѣ, линіи дѣйствія коихъ пересѣкаются въ одной точкѣ, многоугольникъ силъ долженъ быть замкнутъ*, т. е. каждая проекція этого многоугольника должна, въ свою очередь, представлять замкнутый многоугольникъ. Это предложеніе *аналогично* съ предложеніемъ о равновѣсіи силъ, находящихся въ одной плоскости и пересѣкающихся въ одной точкѣ.



Фиг. 51.



Фиг. 52.

Такъ какъ параллелопипедъ можетъ быть построенъ, если извѣстны: а) величина и направленіе (линія параллельная) діагонали параллелопипеда, и б) направленія (линіи параллельныя) для трехъ реберъ параллелопипеда, пересѣкающихся въ одной точкѣ, то, очевидно, замкнутый *четыреугольникъ* силъ въ пространствѣ, пересѣкающихся въ одной точкѣ, можетъ быть построенъ, если извѣстны:

а) величина и линія дѣйствія одной изъ этихъ силъ, и

б) линія дѣйствія трехъ остальныхъ силъ.

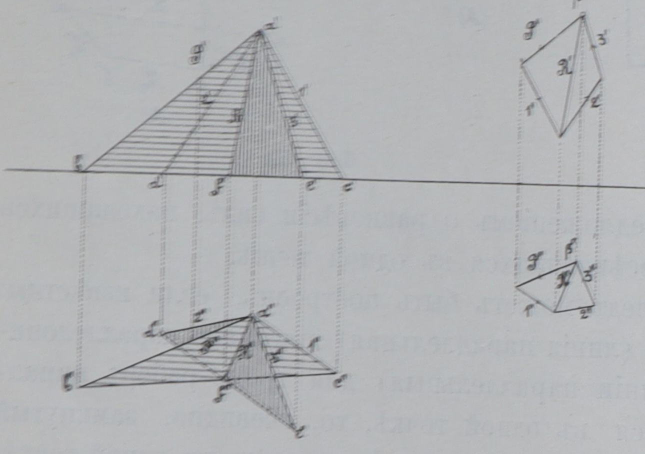
Это предложеніе *аналогично* съ предложеніемъ о построеніи *треугольника силъ* на плоскости, если извѣстны величина и линія дѣйствія одной изъ силъ и линіи дѣйствія двухъ остальныхъ силъ.

§ 2. Графическія рѣшенія задачи объ уравновѣшиваніи данной силы тремя силами, линіи дѣйствія коихъ расположены какъ угодно въ пространствѣ (не лежатъ въ одной плоскости).

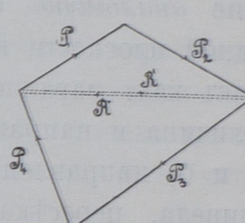
А. Рѣшеніе по способу Кульмана.

На фиг. 53 заданная сила изображена ея проекціями P' и P'', а линіи дѣйствія трехъ неизвѣстныхъ силъ, долженствующихъ уравновѣсить силу (P', P'') изображены въ проекціяхъ прямыми ($1'$; $1''$), ($2'$; $2''$) и ($3'$; $3''$).

Какъ извѣстно изъ предыдущаго, для равновѣсія четырехъ силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ, необходимо, чтобы построенный на этихъ силахъ четыреугольникъ былъ замкнутый; изъ условія замкнутости четыреугольника непосредственно получается по чертежу, какъ необходимое *слѣдствіе* (см. фиг. 54), что двѣ изъ четырехъ силъ приводятся къ одной равнодѣйствующей, равной и прямопротивоположной равнодѣйствующей двухъ остальныхъ силъ, такъ какъ эти двѣ равнодѣйствующія взаимно уничтожаются; это слѣдствіе равновѣсія четырехъ снлъ, линіи дѣйствія коихъ пересѣкаются въ одной точкѣ, очевидно, имѣетъ мѣсто безразлично какъ для силъ, лежащихъ въ одной плоскости, такъ и для силъ, расположенныхъ какъ угодно въ пространствѣ (фиг. 54). Какъ показано на этомъ чертежѣ, равнодѣйствующая силъ P_1P_2 есть сила R', а равнодѣйствующая силъ P_3 и P_4 есть сила R''; силы R' и R'' между собою равны и противоположны и направлены по общей линіи дѣйствія, значитъ, онѣ взаимно уничтожаются (для наглядности на фиг. 54-й силы R' и R'' показаны рядомъ двумя пунктирными линіями).



Фиг. 53.



Фиг. 54.

Обращаясь опять къ фиг. 53-й, замѣчаемъ, что равнодѣйствующая заданной силы P и неизвѣстной по величинѣ силы 1-ой должна, очевидно, лежать въ плоскости, проходящей черезъ линіи дѣйствія этихъ силъ, точно также равнодѣйствующая неизвѣстныхъ по величинѣ 2-ой и 3-й должна лежать въ плоскости, проходящей черезъ линіи дѣйствія этихъ силъ.

По только что доказанному *слѣдствію* равновѣсія четырехъ силъ, сходящихся въ одной точкѣ, равнодѣйствующая двухъ изъ этихъ силъ должна быть равна и противоположна равнодѣйствующей двухъ остальныхъ силъ, причемъ обѣ эти равнодѣйствующія должны имѣть общую линію дѣйствія, откуда слѣдуетъ, что общая линія дѣйствія равнодѣйствующихъ должна лежать на линіи пересѣченія двухъ плоскостей, изъ коихъ одна проходитъ черезъ линіи дѣйствія силъ P и 1-ой, а вторая— черезъ линіи дѣйствія силъ 2-ой и 3-ей.

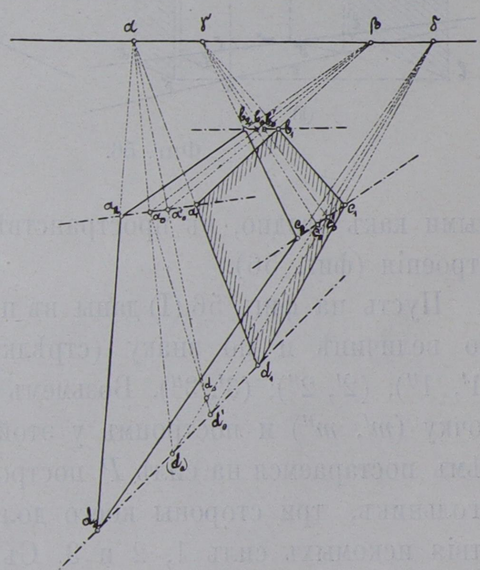
Такимъ образомъ вопросъ сводится къ задачѣ Начертательной Геометріи о построеніи линіи пересѣченіи двухъ плоскостей.

Если линія пересѣченія плоскостей найдена, то могутъ быть легко найдены искомыя величины силъ 1-й, 2-й и 3-й построеніемъ, начиная отъ произвольной точки (β', β''), въ проекціяхъ замкнутыхъ треугольниковъ силъ P, и 1-й и R_1, а затѣмъ силъ R_2 $(= - R_1)$, 2-й и 3-й. Стрѣлки (или значки) силъ опредѣлятся изъ условія, что силы P, 1-я, 2-я и 3-я должны образовать замкнутый многоугольникъ.

Всѣ эти построенія исполнены на фиг. 3-й.

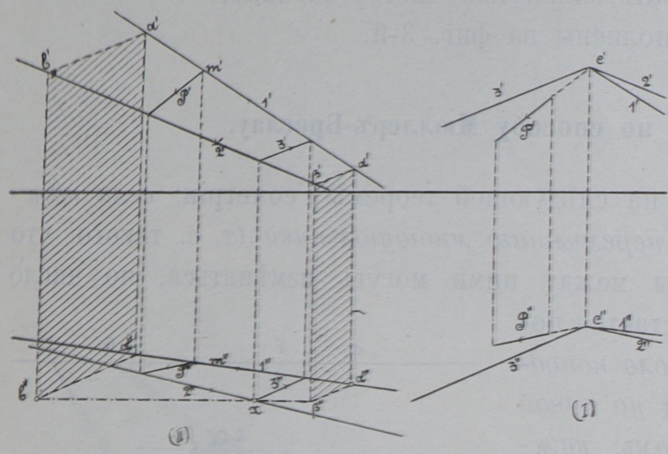
Б. Рѣшеніе по способу Мюллеръ-Бреслау.

Это рѣшеніе основано на слѣдующей теоремѣ Геометріи: *если каждая изъ числа n сторонъ перемѣннаго многоугольника* (т. е. такого, что длина его сторонъ и углы между ними могутъ измѣняться, но число сторонъ и вершинъ его остается постояннымъ) *вращается около неподвижной точки, лежащей на одной прямой, и если, при этомъ, каждая изъ n—1 вершинъ этого перемѣннаго многоугольника перемѣщается по данной для каждой вершины неподвижной прямой, то и n-ая вершина многоугольника должна перемѣщаться по прямой линіи.*



Фиг. 55.

Представимъ себѣ (фиг. 55) четыреугольникъ $abcd$, котораго стороны, при измѣненіи положенія на плоскости и вида сего четыреугольника, должны вращаться около точекъ α, β, γ, δ неподвижной прямой α-δ и три вершины котораго a, b, c должны оставаться на соотвѣтственныхъ заданныхъ прямыхъ a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2. Пусть одно положеніе разсматриваемаго перемѣннаго четыреугольника есть $a_1b_1c_1d_1$, а второе положеніе $a_2b_2c_2d_2$. Докажемъ, что четвертая вершина d перемѣннаго четыреугольника должна двигаться по прямой d_1d_2. Прямыя a_1a_2; b_1b_2; c_1c_2 и d_1d_2 можемъ разсматривать какъ проекціи на плоскость чертежа реберъ нѣкотораго пирамидальнаго тѣла, соотвѣтственныя грани коего будутъ представлять плоскости, проходящія черезъ каждыя два смежныхъ ребра (въ частномъ случаѣ, если прямыя a_1a_2; b_1b_2; c_1c_2 и d_1d_2 пересѣкались бы въ одной точкѣ, упомянутое пирамидальное тѣло обратилось бы въ пирамиду). Четыреугольники $a_1b_1c_1d_1$ и $a_2b_2c_2d_2$ можно разсматривать какъ проекціи на плоскость чертежа сѣченія упомянутаго пирамидальнаго тѣла плоскостью, вращающеюся около оси $\alpha\beta$. При всякомъ промежуточномъ положеніи вращающейся плоскости, напримѣръ, дающемъ въ сѣченіи съ воображаемымъ пирамидальнымъ тѣломъ четыреугольникъ $a_0b_0c_0d_0$, слѣды этой плоскости $(a_0b_0c_0d_0)$ на двухъ смежныхъ граняхъ пирамидальнаго тѣла (а именно на грани, проходящей черезъ ребра a_1a_2 и d_1d_2 и на грани, проходящей черезъ ребра c_1c_2 и d_1d_2) могутъ очевидно пересѣчься лишь на ребрѣ d_1d_2, что и требовалось доказать.



Фиг. 56.

Пользуясь приведенной теоремой, можемъ рѣшить задачу объ уравновѣшиваніи данной силы тремя силами, пересѣкающимися съ нею въ одной точкѣ и расположенными какъ угодно, въ пространствѣ, посредствомъ нижеслѣдующаго построенія (фиг. 56).

Пусть на фиг. 56 (I) даны въ проекціяхъ: сила P по линіи дѣйствія, по величинѣ и по знаку (стрѣлкѣ) и линіи дѣйствія искомыхъ силъ $(1', 1'')$; $(2', 2'')$; $(3', 3'')$. Возьмемъ въ сторонѣ отъ фиг. 56 (I) нѣкоторую точку (m', m'') и построимъ у этой точки данную силу P (P', P''), затѣмъ постараемся на силѣ P построить въ проекціяхъ замкнутый четыреугольникъ, три стороны коего должны быть параллельны линіямъ дѣйствія искомыхъ силъ 1, 2 и 3. Съ этою цѣлью черезъ концы отрѣзковъ, изображающихъ соотвѣтственныя проекціи силы P, проведемъ прямыя параллельныя соотвѣтствующимъ проекціямъ линій дѣйствія искомыхъ силъ 1 и 2 (фиг. 56, II). Величины силъ 1 и 2 намъ неизвѣстны, потому сперва зададимся какою-либо произвольною величиною одной изъ проекцій одной изъ этихъ силъ, напримѣръ, величиною отрѣзка $1'$; пусть конецъ этого отрѣзка приходится въ произвольно взятой точкѣ a'; проведемъ на вертикальной плоскости проекцій черезъ точку a' прямую, параллельную вертикальной проекціи линіи дѣйствія искомой силы $(3', 3'')$, до встрѣчи въ точкѣ b' съ соотвѣтствующею проекціею $2'$ силы 2-ой. Такимъ образомъ, на вертикальной плоскости проекцій получимъ замкнутый четыреугольникъ проекцій силъ.

Затѣмъ спроектируемъ точку a' въ точку a'' на горизонтальную проекцію $1''$ силы 1-ой и черезъ полученную точку проведемъ прямую $a''b''$, параллельную горизонтальной проекціи $3''$ силы 3-й, и спроектируемъ на $3''$ точку b' въ b''.

Въ результатѣ сего построенія получается *несмыкаемость* четыреугольника горизонтальныхъ проекцій силъ, такъ какъ точка b'' не пришлась на прямой $2''$, слѣдовательно, сдѣланное нами предположеніе о величинѣ вертикальной проекціи $1'$ силы 1-ой и полученная построеніемъ величина силы $(3', 3'')$ невѣрны, такъ какъ настоящія значенія силъ 1-й, 2-й и 3-й должны быть таковы, чтобы построенный на нихъ и на заданной силѣ P четыреугольникъ былъ замкнутый, чего въ данномъ случаѣ нѣтъ.

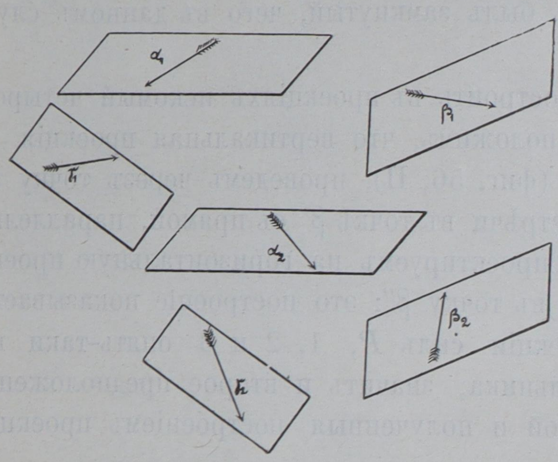
Сдѣлаемъ вторую попытку построить въ проекціяхъ искомый четыреугольникъ силъ, для этого предположимъ, что вертикальная проекція $1'$ силы 1-ой имѣетъ величину $m'\alpha'$ (фиг. 56, II); проведемъ черезъ точку α' прямую, параллельную $3'$, до встрѣчи въ точкѣ β' съ прямой, параллельной $2'$, и полученную точку β' спроектируемъ на горизонтальную проекцію $3'$ линіи дѣйствія силы 3-й въ точку β''; это построеніе показываетъ намъ, что горизонтальныя проекціи силъ P, 1, 2 и 3 опять-таки не образуютъ замкнутаго многоугольника; значитъ и второе предположеніе относительно величины силы 1-ой и полученныя построеніемъ проекціи силы 3-й невѣрны.

Однако, сдѣланныя нами двѣ попытки легко приводятъ насъ къ отыскиванію искомаго рѣшенія. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая иа фиг. 56 (II) два заштрихованныхъ четыреугольника $a'b'a''b''$ и $\alpha'\beta'\alpha''\beta''$, замѣчаемъ, что стороны ихъ параллельны между собою, а три соотвѣтствующія вершины a' и α', b' и β', a'' и α'' лежатъ попарно на трехъ неподвижныхъ прямыхъ, а именно $1''$, $2'$ и $1'$. При такихъ условіяхъ упомянутые четыреугольники могутъ быть разсматриваемы какъ два положенія перемѣннаго четыреугольника, три вершины коего скользятъ по заданнымъ неподвижнымъ прямымъ, а соотвѣтствующія стороны остаются параллельными даннымъ линіямъ; это послѣднее условіе равносильно условію вращенія сторонъ перемѣннаго четыреугольника при измѣненіи его положенія около точекъ *безконечно удаленной* неподвижной прямой.

Въ силу вышеприведенной теоремы и четвертая вершина упомянутаго четыреугольника должна при его перемѣщеніи описывать прямую; на фиг. 56 (II) эта прямая есть $b''\beta''$. Точка x пересѣченія прямой $b''\beta''$ съ прямой $2''$ даетъ рѣшеніе разсматриваемаго вопроса и позволяетъ построить замкнутые четыреугольника проекцій силъ данной P и искомыхъ 1, 2 и 3.

II. Силы, линіи дѣйствія коихъ расположены какъ угодно въ пространствѣ, не пересѣкаются въ одной точкѣ. Крестъ силъ.

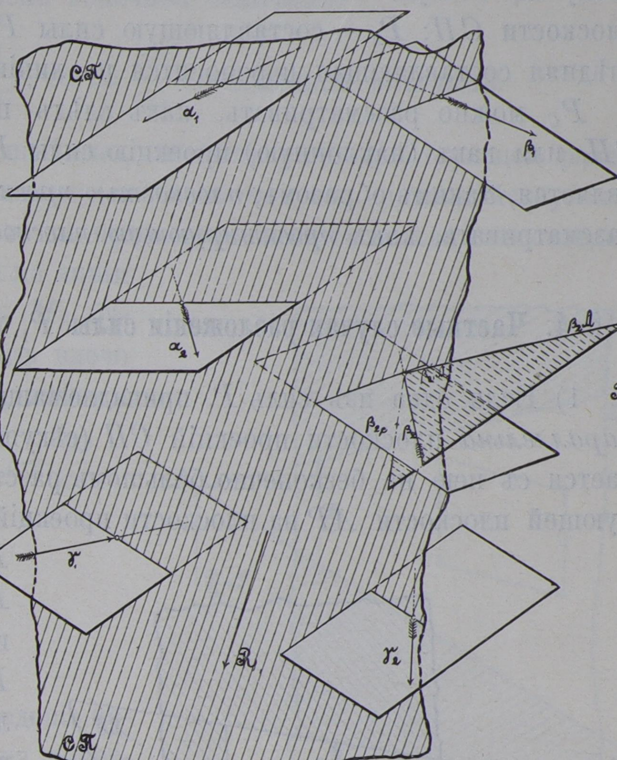
§ 3. Представимъ себѣ въ пространствѣ систему такихъ силъ α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 (фиг. 57), которыя не пересѣкаются между собою и непараллельны между собой (случай параллельности силъ есть, очевидно, частный случай силъ, пересѣкающихся, съ безконечно удаленной точкой пересѣченія). Такая система силъ, очевидно, не можетъ быть приведена къ одной равнодѣйствующей, такъ какъ для этого необходимо, чтобы линіи дѣйствія силъ пересѣкались въ одной точкѣ.



Фиг. 57.

Легко, однако, показать, что подобную систему силъ возможно всегда привести къ другой болѣе простой системѣ силъ. Въ самомъ дѣлѣ, если представить себѣ линіи дѣйствія заданныхъ силъ безконечно продолженными, то ясно, что возможно провести такую плоскость, которая пересѣчетъ линіи дѣйствія всѣхъ заданныхъ силъ на конечномъ или на безконечно большомъ разстояніи (фиг. 58); назовемъ эту плоскость черезъ $СП$ (отъ словъ: сѣкущая плоскость). Возьмемъ произвольную точку A внѣ плоскости $СП$ и черезъ эту точку и черезъ каждую изъ заданныхъ силъ α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 и т. д. проведемъ плоскости $A\alpha_1$, $A\alpha_2$; $A\beta_1$, $A\beta_2$; $A\gamma_1$, $A\gamma_2$ и т. д., которыя пересѣкутъ плоскость $СП$ по нѣкоторымъ прямымъ; эти плоскости будемъ вообще называть въ отличіе отъ плоскости $СП$ черезъ AP; на фиг. 58 построеніе это исполнено только для одной силы β_2, т. е. проведена лишь одна подобная плоскость $A\beta_2$; затѣмъ разложимъ каждую изъ данныхъ силъ на двѣ составляющія, изъ коихъ одна пойдетъ по линіи сѣченія плоскости AP съ плоскостью $СП$, т. е. будетъ лежать въ этой плоскости, а вторая пройдетъ по прямой, соединяющей точку A съ точкой пересѣченія соотвѣтствующей заданной силы съ плоскостью $СП$, т. е. будетъ лежать внѣ этой послѣдней плоскости. Для каждой изъ данныхъ силъ первую составляющую будемъ обозначать тою же буквой, какъ и данную силу, но со значками $СП$ внизу, напр., $\beta_{2;сп}$, или проще $\beta_{2,с}$ и вообще $P_с$; вторую составляющую будемъ обозначать наименованіемъ соотвѣтствующей силы, но со значкомъ A внизу, напр.,

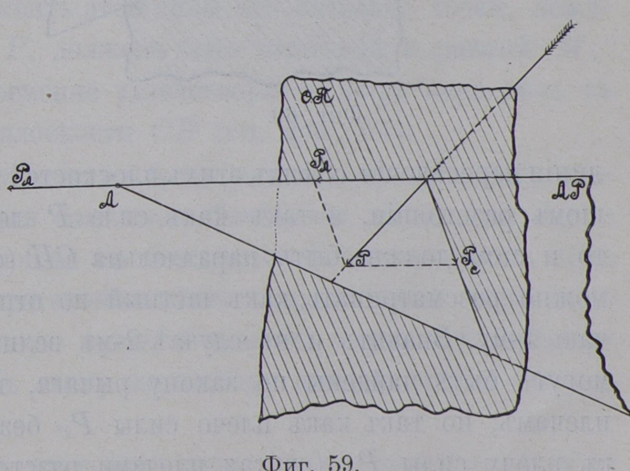
$\beta_{2,A}$, или вообще P_A. Силы P_A могутъ быть перенесены по линіямъ ихъ дѣйствія въ точку A и въ этой точкѣ сложены въ одну равнодѣйствующую R_A. Силы же P_C, какъ лежащія въ одной плоскости $СП$, могутъ быть сложены между собою по правиламъ сложенія силъ, лежащихъ въ одной плоскости, причемъ эти силы приведутся, вообще говоря, къ одной равнодѣйствующей R_C, лежащей въ той же плоскости $СП$ (въ частномъ случаѣ силы P_C могутъ привестись и въ парѣ силъ).



Фиг. 58.

Силы R_A и R_C должны, очевидно, быть между собою: 1) *не*параллельны, и 2) *не*пересѣкаться, такъ какъ, въ противномъ случаѣ, онѣ привелись бы къ одной равнодѣйствующей, что противорѣчило бы условію, что заданная система силъ α, β, γ *не* приводится къ одной равнодѣйствующей.

Такимъ образомъ, силы R_A и R_C образуютъ, такъ называемый, *крестъ силъ* (въ пространствѣ).



Фиг. 59.

Изложенное доказываетъ, что *система сколькихъ угодно не пересѣкающихся и непараллельныхъ силъ можетъ быть приведена* къ простѣйшей системѣ, именно къ *одному кресту силъ*.

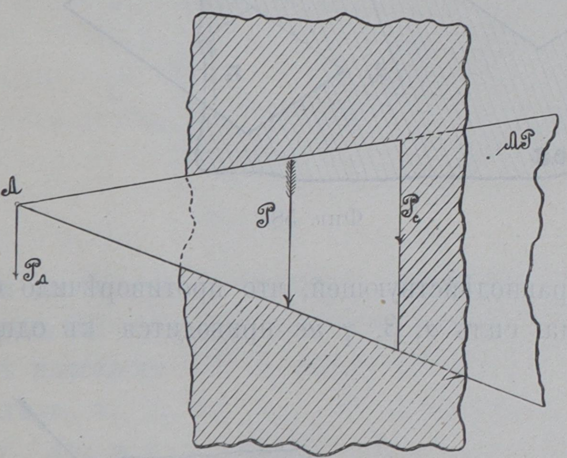
Понятіе о крестѣ силъ введено въ статику сооруженій Föppl'емъ.

Упомянутое выше и показанное на фиг. 58-й разложеніе силъ изображено отдѣльно на фиг. 59-й, на коей *СП* изображаетъ плоскость сѣкущую заданную силу P; AP — плоскость, проходящую черезъ силу P и точку A, взятую внѣ плоскости *СП*; P_C — составляющую силы P въ плоскости *СП*; P_A — составляющую силы P въ плоскости AP; эта послѣдняя составляющая переносится по линіи ея дѣйствія въ точку A.

P_C можно разсматривать, какъ слѣдъ плоскости AP на плоскости *СП*, или какъ (наклонную) проекцію силы P на плоскость *СП*, которая является, такимъ образомъ, *плоскостью проекцій*, а плоскость AP можно разсматривать, какъ *проектирующую плоскость*.

§ 4. Частные случаи разложеніи силы P, показаннаго на фиг. 59-й.

1) Если одна изъ силъ P, принадлежащихъ къ данной системѣ силъ, *параллельна* плоскости проекцій *СП* (сѣкущей плоскости), т. е. пересѣкается съ нею на безконечно большомъ разстояніи, то и слѣдъ проектирующей плоскости AP на плоскости проекцій *параллеленъ* заданной *силѣ* P (фиг. 60), слѣдовательно, $P_C \parallel P$, а въ такомъ случаѣ и вторая составляющая силы P, т. е. P_A должна быть параллельна силѣ P; величины этихъ параллельныхъ составляющихъ, очевидно, опредѣлятся либо графически, либо аналитически по закону рычага.



Фиг. 60.

2) Если для какой-либо силы P данной системы силъ проектирующая плоскость AP параллельна плоскости проекцій *СП* (фиг. 61), то, очевидно, линія пересѣченія обѣихъ этихъ плоскостей находится на безконечно большомъ разстояніи, и такъ какъ сила P лежитъ въ плоскости $AP \parallel$ *СП*, то и сама должна быть параллельна *СП* (фиг. 60). Поэтому случай 2-ой можно разсматривать, какъ частный по отношенію къ болѣе общему случаю 1-му. Значитъ и въ случаѣ 2-мъ величины составляющихъ P_A и P_C могутъ быть найдены по закону рычага, т. е. обратно пропорціональны плечамъ; но такъ какъ плечо силы P_C безконечно велико по отношенію къ плечу силы P_A (считая плечами разстоянія линій дѣйствія силъ P_A и P_C до линіи дѣйствія параллельной имъ равнодѣйствующей P), то сила P_C *безконечно мала* по отношенію къ силѣ P_A и въ предѣлѣ сила $P_C = 0$, а сила $P_A = P$; но безконечно малая сила P_C дѣйствуетъ на

безконечно большомъ плечѣ, и моментъ M_C этой безконечно малой силы относительно какой-либо точки, лежащей на линіи дѣйствія заданной силы P, долженъ быть равенъ конечной величинѣ:

$$M_c = 0 \cdot \infty = \frac{1}{\infty} \cdot \infty = \frac{\infty}{\infty} = \text{конечной величинѣ.}$$

Въ самомъ дѣлѣ, какъ извѣстно, моментъ равнодѣйствующей равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ; возьмемъ моментъ равнодѣйствующей, т. е. силы P относительно точки приложенія этой силы или относительно какой-либо точки, лежащей на линіи ея дѣйствія; этотъ моментъ M_P будетъ равенъ нулю, такъ какъ плечо равно нулю; слѣдовательно, имѣемъ:

$$M_p = O = M_A + M_c = M_A + \frac{\infty}{\infty},$$

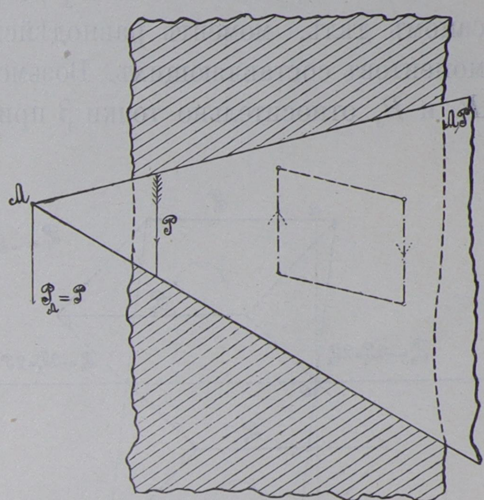
откуда:

$$M_c = -M_A,$$

или

$$\frac{\infty}{\infty} = -M_A,$$

моментъ же M_A есть произведеніе конечной величины $P_A = P$ на конечное разстояніе точки A до силы P, слѣдовательно, величина конечная.



Фиг. 61.

Такимъ образомъ, сила P_C должна быть безконечно мала, она должна быть безконечно удалена отъ силы P въ плоскости AP и должна лежать въ плоскости $CП$, а моментъ этой силы относительно точки, лежащей на линіи дѣйствія силы P, долженъ быть конечный и равный M_A; всѣмъ этимъ условіямъ одновременно удовлетворяетъ лишь пара силъ съ моментомъ M_A, лежащая въ плоскости $CП$ (см. фиг. 61).

Въ самомъ дѣлѣ, *пара силъ можетъ быть разсматриваема* какъ единичная сила, равная нулю, или *какъ сила безконечно малая*, но *безконечно удаленная*, т. е. дѣйствующая на безконечно большомъ плечѣ, такъ какъ двѣ направленныя въ противоположныя стороны силы пары силъ даютъ равнодѣйствующую равную нулю, а моментъ пары силъ представляетъ величину конечную. Къ этому же выводу можемъ прійти посредствомъ другихъ разсужденій.

Для этого докажемъ сперва, что *всякая пара силъ можетъ быть перенесена въ плоскость ей параллельную, безъ измѣненія условія равновѣсія силъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть на фиг. 62-й дана пара силъ P_1 и P_2, вращающая, напримѣръ, по направленію часовой стрѣлки. Если къ даннымъ силамъ P_1 и P_2 прибавить двѣ равныя и прямопротивоположныя силы P_3 и P_4, то условія равновѣсія силъ P_1 и P_2 отъ этого не измѣнятся, такъ какъ силы P_3 и P_4 между собою взаимно уравновѣшиваются. Величины силъ P_3 и P_4 возьмемъ такія, чтобы $P_3 = P_4 = 2P_1 = 2P_2$. Тогда изъ фиг. 62-й легко видѣть, что если сложить силу P_1 съ силою P_3 въ плоскости, проходящей черезъ *обѣ* эти параллельныя между собой силы, то равнодѣйствующая ихъ будетъ сила $P_5 = P_1$, лежащая въ той же плоскости, и линія дѣйствія ея будетъ отстоять отъ линіи дѣйствія силы P_3 на такомъ же разстояніи, на какомъ линія дѣйствія силы P_3 отстоитъ отъ линіи дѣйствія силы P_1. Въ самомъ дѣлѣ, моментъ равнодѣйствующей долженъ быть равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ. Возьмемъ моментъ равнодѣйствующей P_5 силъ P_1 и P_3 относительно точки β приложенія самой силы P_5; этотъ моментъ, очевидно, равенъ нулю, значитъ и сумма моментовъ силъ составляющихъ должна быть равна 0, т. е.

$$0 = P_1 \overline{\alpha\beta} - P_3 \overline{O\beta}.$$

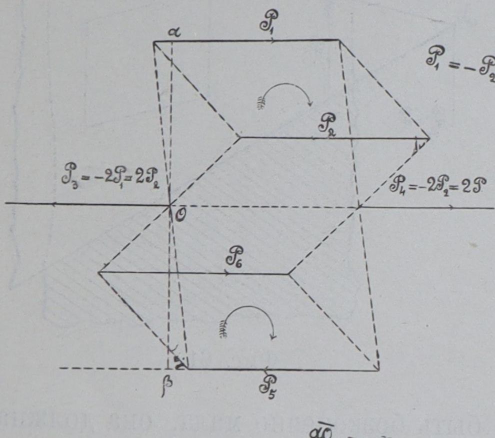
Замѣчая, что P_3 по условію взято $P_3 = 2P_1$, находимъ:

$$0 = P_1 (\overline{\alpha\beta} - 2\overline{O\beta}),$$

откуда:

$$2\overline{O\beta} = \overline{\alpha\beta}, \quad \text{или} \quad \overline{O\beta} = \frac{1}{2}\overline{\alpha\beta},$$

что и требовалось доказать.



Фиг. 62.

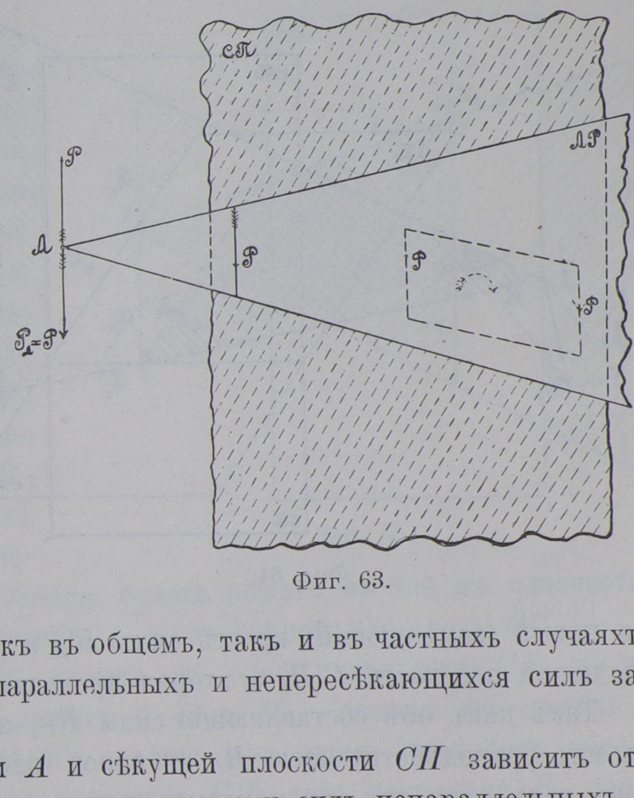
Точно также отъ сложенія силъ P_2 и P_4 получимъ силу P_6.

Такимъ образомъ, взамѣнъ пары силъ P_1 и P_2, мы получили новую пару силъ P_6 и P_5, но лежащую въ другой плоскости, именно въ плоскости, параллельной плоскости данной пары силъ; силы новой пары силъ равны силамъ данной пары силъ; плечо новой пары силъ то же, что и въ данной, какъ легко видѣть изъ фиг. 62-й, и направленіе вращенія то же самое. Перенесеніе пары силъ въ параллельную ей плоскость обусловлено было прибавленіемъ силъ P_3 и P_4, взаимно уравновѣшивающихся, т. е. не измѣняющихъ условій равновѣсія данныхъ силъ. Слѣдовательно, теорема доказана.

Выбирая соотвѣтственно положеніе общей линіи дѣйствія вспомогательныхъ силъ P_3 и P_4, можемъ перемѣстить данную пару силъ въ любую параллельную ей плоскость.

Если теперь обратиться къ разсмотрѣнному нами частному случаю (фиг. 61), то, пользуясь только что доказанной теоремой о перенесеніи пары силъ въ плоскость ей параллельную можемъ сдѣлать нижеслѣдующее построеніе (см. фиг. 63).

Въ точкѣ A приложить двѣ равныя и прямопротивоположныя силы P по линіи, параллельной линіи дѣйствія данной силы P. Одна изъ этихъ силъ, направленная (по знаку или стрѣлкѣ) въ ту же сторону, какъ данная сила P, представитъ составляющую $P_A = P$ данной силы, проходящую черезъ точку A, вторая же изъ силъ P, приложенныхъ къ точкѣ A, вмѣстѣ съ данною силою P образуетъ пару силъ съ плечомъ, измѣряющимъ разстояніе данной силы P до точки A, причемъ плоскость этой пары параллельна плоскости $СП$. Въ силу вышедоказаннаго, имѣемъ право эту пару перенести въ любую параллельную ей плоскость, а, значитъ, и въ плоскость $СП$, что и подтверждаетъ предыдущіе наши выводы, относящіеся ко второму частному случаю разложенія данной силы на двѣ составляющихъ, изъ коихъ одна проходитъ черезъ данную точку, а другая лежитъ въ данной плоскости.



Фиг. 63.

Умѣя разлагать силы, какъ въ общемъ, такъ и въ частныхъ случаяхъ, можемъ всегда систему непараллельныхъ и непересѣкающихся силъ замѣнить *крестомъ силъ*.

Такъ какъ выборъ точки A и сѣкущей плоскости $СП$ зависитъ отъ нашего произвола, то каждую данную систему силъ непараллельныхъ и непересѣкающихся мы можемъ замѣнить крестомъ силъ безчисленнымъ множествомъ способовъ.

Различные кресты силъ, соотвѣтствующіе одной и той же системѣ данныхъ силъ, *равнозначны* (эквивалентны) между собою.

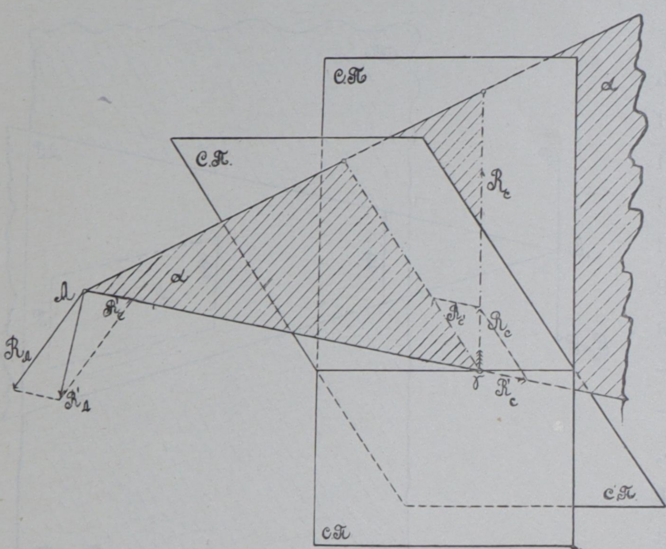
§ 5. Замѣна одного креста силъ другимъ, ему равнозначнымъ (эквивалентнымъ).

1-е предложеніе.

Если одна изъ силъ замѣняющаго (второго) креста силъ проходитъ черезъ данную точку, то вторая сила замѣняющаго (второго) креста силъ лежитъ въ плоскости, проходящей черезъ ту же точку.

Пусть (фиг. 64) данъ крестъ силъ R_A и R_C; требуется замѣнить этотъ крестъ силъ другимъ, ему равнозначнымъ, и при этомъ такимъ, чтобы одна изъ силъ новаго (замѣняющаго) креста силъ проходила черезъ данную точку, напримѣръ, черезъ точку A, а вторая сила новаго замѣняющаго креста силъ лежала въ какой-либо данной плоскости, напримѣръ, въ плоскости $СП$.

Упомянутая замѣна можетъ быть произведена слѣдующимъ способомъ (см. фиг. 64). Линію дѣйствія силы R_C перваго (замѣняемаго) креста силъ мы можемъ продолжить до пересѣченія съ прямой, по которой плоскость $СП$ пересѣкается съ плоскостью $С'П$, и затѣмъ разложить силу R_C на двѣ составляющихъ, изъ коихъ одна R'_C направлена по прямой $A\gamma$, а другая $R_{C'}$, лежитъ въ плоскости $С'П$. Сила R'_C, можетъ быть перенесена по линіи ея дѣйствія въ точку A и въ этой точкѣ сложена съ силой R_A въ одну равнодѣйствующую R'_A. Такимъ образомъ, получится новый (замѣняющій) крестъ силъ R'_A и $R_{C'}$, изъ коихъ одна лежитъ въ новой плоскости $С'П$, а вторая проходитъ черезъ точлу A.



Фиг. 64.

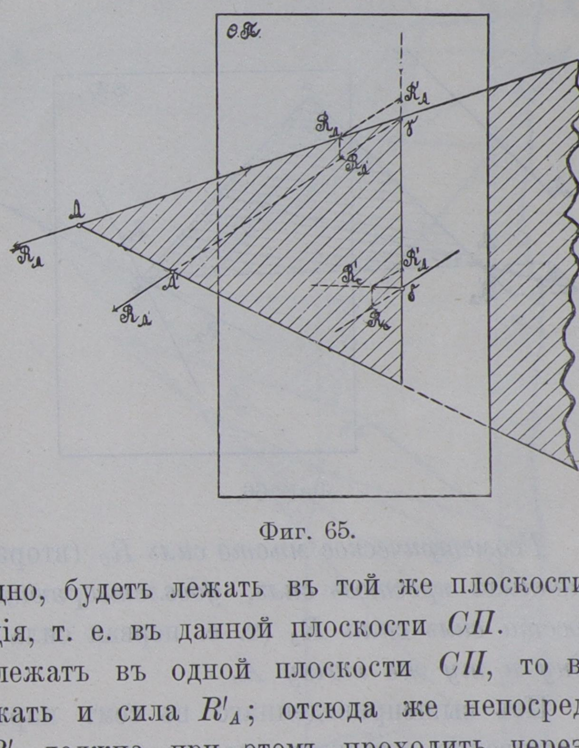
Такъ какъ обѣ составляющія силы R_C, а именно R'_C, и $R_{C'}$ лежатъ съ ихъ равнодѣйствующею R_C съ одной плоскости (α) (см. фиг. 64) и такъ какъ одна изъ упомянутыхъ составляющихъ выбрана была такъ, что она проходитъ черезъ точку A, то ясно, что плоскость (α), въ которой лежатъ обѣ эти составляющія, проходитъ черезъ ту же точку A. Слѣдовательно, доказана теорема, что если одна R'_A изъ силъ замѣняющаго второго креста силъ проходитъ черезъ точку A, то вторая сила того же замѣняющаго креста силъ лежитъ въ плоскости α, проходящей черезъ ту же точку A.

2-е предложеніе.

Если одна изъ силъ замѣняющаго (второго) креста силъ лежитъ въ данной плоскости, то вторая сила того же (замѣняющаго) креста силъ проходитъ черезъ опредѣленную точку, лежащую въ той же плоскости.

Пусть (фиг. 65) первый крестъ силъ есть R_A и R_C; требуется замѣнить данный крестъ силъ другимъ, ему равнозначнымъ и притомъ такимъ, чтобы одна изъ силъ замѣняющаго второго креста силъ лежала въ данной плоскости, напримѣръ, въ той же плоскости $C\Pi$, въ которой лежитъ вторая сила R_C даннаго замѣняемаго креста силъ, а другая сила замѣняющаго креста силъ проходила не черезъ ту же точку A, черезъ которую проходитъ первая сила даннаго креста, а черезъ нѣкоторую другую, произвольно избранную точку A'.

Чтобы второй крестъ силъ былъ равнозначенъ первому и удовлетворялъ, вмѣстѣ съ тѣмъ, заданнымъ условіямъ, необходимо произвести слѣдующія построенія: продолжить линію дѣйствія силы R_A до пересѣченія съ плоскостью $C\Pi$ въ точкѣ γ; соединить точку γ съ точкою A' прямою $A'\gamma$; черезъ прямыя $A\gamma$ и $A'\gamma$ провести плоскость; пусть пересѣченіе этой плоскости съ плоскостью $C\Pi$ есть прямая $\gamma\delta$; затѣмъ слѣдуетъ разложить данную силу R_A на двѣ составляющихъ: R'_A по направленію $\gamma A'$ и $R_{A'}$ по направленію $\gamma\delta$, продолжить R'_A до пересѣченія съ R_C въ точкѣ δ и сложить эти силы; равнодѣйствующая ихъ R'_C, очевидно, будетъ лежать въ той же плоскости, въ которой лежатъ составляющія, т. е. въ данной плоскости $C\Pi$.

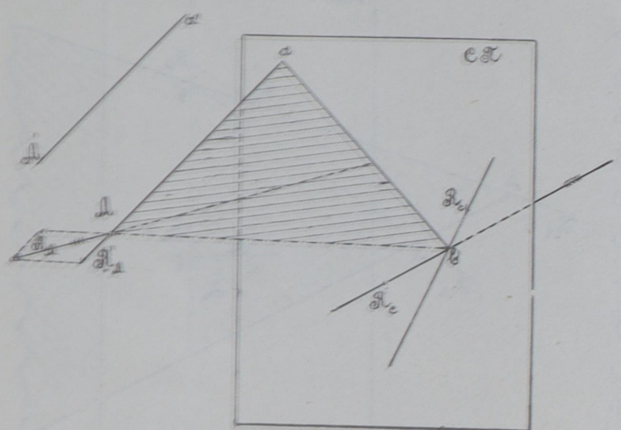


Фиг. 65.

Обратно, если R'_C и R_C лежатъ въ одной плоскости $C\Pi$, то въ той же плоскости должна лежать и сила R'_A; отсюда же непосредственно слѣдуетъ, что сила R'_A должна при этомъ проходить черезъ точку γ, лежащую въ той же плоскости $C\Pi$, такъ какъ сила R_A пересѣкается въ точкѣ γ съ силою R'_A, а эта лежитъ въ плоскости $C\Pi$; значитъ, теорема доказана.

Замѣна даннаго креста силъ другимъ, ему равнозначнымъ, при условіяхъ, чтобы одна изъ силъ второго (замѣняющаго) креста силъ проходила черезъ данную точку и чтобы линія дѣйствія этой силы была параллельна данной прямой.

Пусть (фиг. 66) данъ крестъ силъ R_A и R_C; требуется замѣнить таковой другимъ крестомъ силъ такимъ, чтобы сила R'_A проходила черезъ точку A и была параллельна данной прямой $A'a'$. Для рѣшенія этой задачи проведемъ черезъ точку A прямую Aa, параллельную заданной прямой $A'a'$, и продолжимъ прямую Aa до пересѣченія въ точкѣ a съ плоскостью *СП*, въ которой лежитъ вторая сила R_C даннаго креста силъ. Затѣмъ черезъ R_A и прямую Aa проведемъ плоскость и найдемъ пересѣченіе этой плоскости съ плоскостью *СП*; пусть линія пересѣченія есть прямая ab; продолжимъ эту прямую до пересѣченія съ силою R_C, лежащею въ плоскости *СП*, въ точкѣ b; соединимъ точку b съ точкою A и разложимъ силу R_A на двѣ составляющихъ, по линіи Aa и по линіи Ab. Составляющая по линіи Aa представитъ первую силу R'_A замѣняющаго (второго) креста силъ, а составляющая по линіи Ab сложится въ точкѣ b съ силою R_C и дастъ вторую силу R'_C замѣняющаго (второго) креста силъ. Эта послѣдняя сила R'_C уже не будетъ лежать въ плоскости *СП*, такъ какъ составляющая ея, идущая по прямой Ab, не лежитъ въ этой плоскости. Отсюда слѣдуетъ, что если задано направленіе одной силы креста силъ, замѣняющаго данный крестъ силъ и ему равнозначнаго, то получается одно опредѣленное направленіе второй силы того же замѣняющаго креста силъ, а также опредѣляются величины обѣихъ силъ.



Фиг. 66.

Геометрическое мѣсто силъ R_C (вторая сила креста силъ) *для равнозначныхъ крестовъ силъ, удовлетворяющихъ условію, что для каждаго креста силъ сила* R_A (т. е. первая сила креста силъ) *проходитъ черезъ одну и ту же точку* A.

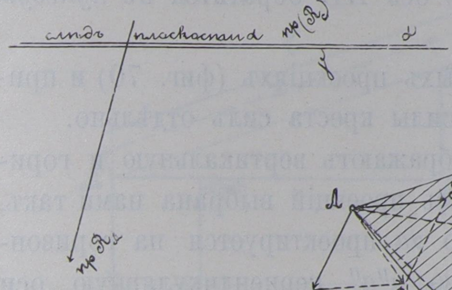
Изъ вышеприведеннаго въ семъ параграфѣ предложенія 1-го непосредственно слѣдуетъ, что *плоскость* α (фиг. 67) есть геометрическое мѣсто всѣхъ силъ R_C, что ясно видно изъ фиг. 17-й и не требуетъ особаго доказательства.

Каждая прямая, проходящая черезъ точку A (фиг. 67), можетъ быть линіей дѣйствія силы R_A *креста силъ, за исключеніемъ, однако, прямыхъ, лежащихъ въ плоскости* α, такъ какъ сила R_A, лежащая въ плоскости α, можетъ пересѣчься съ соотвѣтствующей силой R_C, лежащей въ той же плоскости, и въ такомъ случаѣ силы R_A и R_C *не образуютъ креста силъ*, а приводятся къ одной равнодѣйствующей.

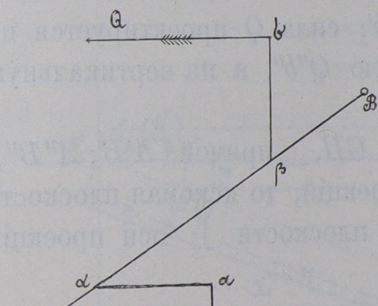
На этомъ основаніи плоскость α называютъ *нулевою плоскостью для точки* A (силы, лежащія въ этой плоскости, не даютъ креста силъ, даютъ *нуль* креста силъ); всякую прямую, лежащую въ этой нулевой плоскости и проходящую черезъ точку A, называютъ *нулевою линіей.*

Силы R_A и R_C, соотвѣтствующія одному и тому же кресту силъ, называютъ *сопряженными* между собой. Нулевая линія сама себѣ сопряжена, такъ какъ не имѣетъ второй соотвѣтствующей ей силы *креста силъ*.

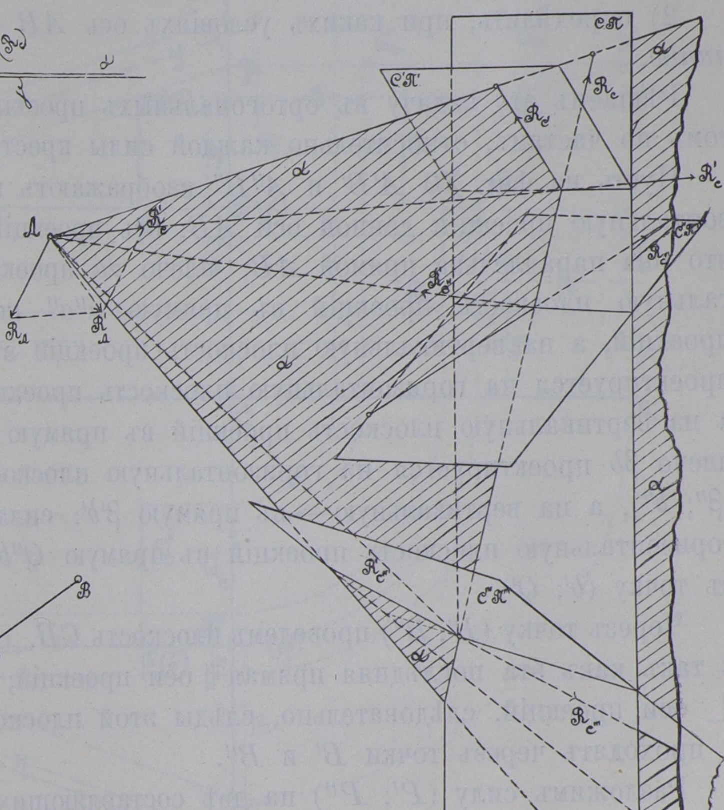
На фиг. 68-й показанъ частный случай расположенія креста силъ и плоскости α. Слѣдъ плоскости α на плоскости чертежа есть прямая $A\gamma$;



Фиг. 68.



Фиг. 69.



Фиг. 67.

проекція силы R_A на плоскости чертежа есть R_A; сила R_C, лежащая въ плоскости α, проектируется на слѣдъ этой плоскости въ точку γ (R_C).

На основаніи вышеизложеннаго ученія о крестѣ силъ можетъ быть рѣшена нижеслѣдующая задача.

§ 6. Задача на замѣну креста силъ другимъ, ему равнозначнымъ.

Дана ось (фиг. 69), подпертая въ двухъ точкахъ A и B, съ надѣтыми на эту ось въ точкахъ α и β плечами αa и $b\beta$, изъ коихъ плечо αa горизонтально, а плечо $b\beta$ вертикально; на конецъ a перваго плеча дѣйствуетъ вертикальная сила P, а на конецъ b второго плеча дѣйствуетъ горизонтальная сила Q. Силы P и Q образуютъ, очевидно, крестъ силъ. Требуется:

1) замѣнить этотъ крестъ силъ другимъ, въ которомъ одна сила проходила бы черезъ точку A, а вторая лежала бы въ плоскости нормальной въ данной оси и проходящей черезъ точку B, и

2) опредѣлить, при какихъ условіяхъ ось AB обратится въ *нулевую линію*.

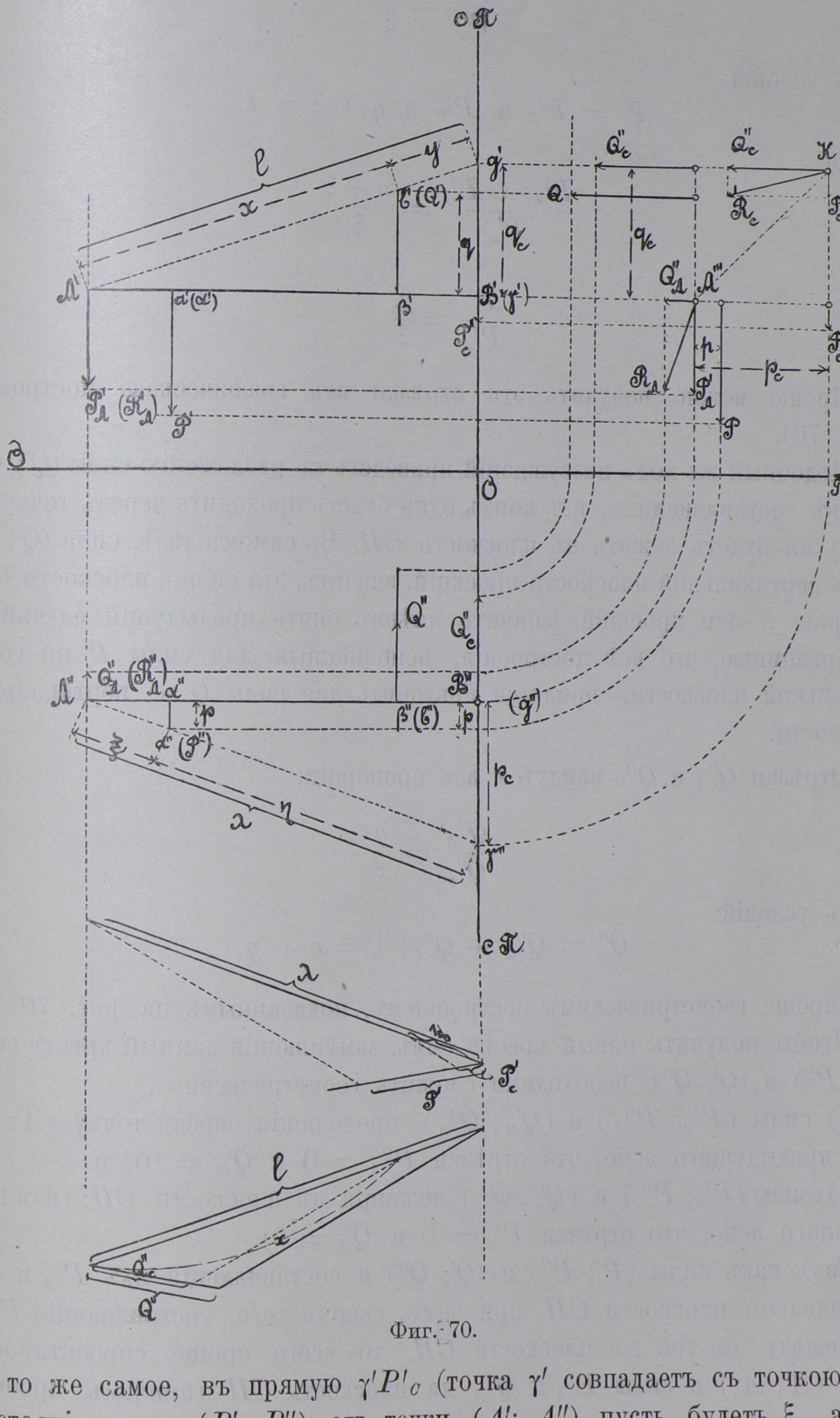
Рѣшаемъ эту задачу въ ортогональныхъ проекціяхъ (фиг. 70) и притомъ по частямъ, относительно каждой силы креста силъ отдѣльно.

Пусть на фиг. 70 $A'B'$ и $A''B''$ изображаютъ вертикальную и горизонтальную проекціи данной оси AB; ось проекцій выбрана нами такъ, что она параллельна прямой AB; плечо αa проектируется на горизонтальную плоскость проекцій въ прямую $\alpha''a''$ перпендикулярную оси проекцій, а на вертикальную плоскость проекцій въ точку $(\alpha'a')$; сила P проектируется на горизонтальную плоскость проекцій въ точку $(a''; P'')$, а на вертикальную плоскость проекцій въ прямую $a'P' \perp$ оси проекцій; плечо βb проектируется на горизонтальную плоскость проекцій въ точку $(\beta''; b'')$, а на вертикальную — въ прямую $\beta'b'$; сила Q проектируется на горизонтальную плоскость проекцій въ прямую $Q''b''$, а на вертикальную въ точку $(b'; Q')$.

Черезъ точку $(B'; B'')$ проведемъ плоскость CII, $\perp$ прямой $(A'B'; A''B'')$, а такъ какъ эта послѣдняя прямая $\parallel$ оси проекцій, то искомая плоскость $\perp$ оси проекцій, слѣдовательно, слѣды этой плоскости $\perp$ оси проекцій и проходятъ черезъ точки B' и B''.

Разложимъ силу $(P'; P'')$ на двѣ составляющихъ, изъ которыхъ одна проходитъ черезъ точку $(A'; A'')$, а вторая лежитъ въ плоскости CII, нормальной къ прямой $(A'B'; A''B'')$ и проходящей черезъ точку $(B'; B'')$. Такъ какъ сила $(P'; P'')$ вертикальна, то она $\parallel$ плоскости CII, которая также вертикальна; слѣдовательно, сила $(P'P'')$ разложится на двѣ упомянутыя составляющія по правилу, приведенному выше для случая, когда данная сила $P \parallel$ плоскости CII, т. е. составляющія силы будутъ ей параллельны, а величины ихъ будутъ обратно пропорціональны разстояніямъ силы до точки A или соотвѣтственно до плоскости CII.

Для опредѣленія этихъ разстояній проведемъ черезъ точку $(A'; A'')$ и черезъ силу $(P'; P'')$ плоскость; такъ какъ сила P вертикальна, то и эта плоскость будетъ вертикальна и горизонтальнымъ слѣдомъ ея будетъ прямая $A''a''\gamma''$; въ этой плоскости и произойдетъ разложеніе силы $(P'; P'')$ на двѣ параллельныхъ ей составляющихъ, при чемъ одна составляющая P_A будетъ проектироваться на горизонтальную плоскость проекцій въ точку A'', а на вертикальную — въ прямую $A'P'_A$, а вторая составляющая P_c будетъ проектироваться на горизонтальную плоскость проекцій въ точку γ'', а на вертикальную плоскость проекцій въ прямую $B'P'_c$ или,



Фиг. 70.

что то же самое, въ прямую $\gamma' P'_c$ (точка γ' совпадаетъ съ точкою B'); разстояніе силы $(P'; P'')$ отъ точки $(A'; A'')$ пусть будетъ ξ, а отъ очки у) оно равно η; величины отрѣзковъ P'_A и P''_C получатся изъ пропорціи:

$$\frac{P'_A}{P'_c} = \frac{\eta}{\xi}$$

и изъ условій:

$$P' = P'_A + P'_C \text{ и } \eta + \xi = \lambda,$$

откуда:

$$\frac{P'_A + P'_c}{P'_c} = \frac{\eta + \xi}{\xi},$$

или:

$$\frac{P'}{P'_c} = \frac{\lambda}{\xi}.$$

Проще можно получить эти отрѣзки изъ графическаго построенія (фиг. 70).

Подобный же ходъ разсужденій приведетъ къ разложенію силы $(Q'; Q'')$ на двѣ составляющихъ, изъ коихъ одна будетъ проходить черезъ точку A, а другая будетъ лежать въ плоскости CII. Въ самомъ дѣлѣ, сила $(Q'; Q'')$ $\perp$ къ вертикальной плоскости проекцій, значитъ, эта сила $\parallel$ плоскости CII, которая $\perp$ оси проекцій; значитъ имѣемъ опять предыдущій случай съ тою разницею, что всѣ построенія, исполненныя для силы P на горизонтальной плоскости, придется повторить для силы Q на вертикальной плоскости.

Отрѣзки Q''_A и Q''_c найдутся изъ пропорціи:

$$\frac{Q''_A}{Q''_c} = \frac{y}{x}$$

и изъ условій:

$$Q'' = Q''_A + Q''_c; \; l = x + y,$$

или проще геометрическимъ построеніемъ, показаннымъ на фиг. 70.

Чтобы получить новый крестъ силъ, замѣняющій данный крестъ силъ: $(P'; P'')$ и $(Q'; Q'')$, необходимо сложить геометрически:

1) силы $(P'_A; P''_A)$ и $(Q'_A; Q''_A)$, проходящія черезъ точку $(A'; A'')$ (изъ предыдущаго ясно, что отрѣзки $P''_A = 0$ и $Q'_A = 0$), и

2) силы $(P'_c; P''_c)$ и $(Q'_c; Q''_c)$ лежащія въ плоскости CII; (изъ предыдущаго ясно, что отрѣзки $P''_c = 0$ и $Q'_c = 0$).

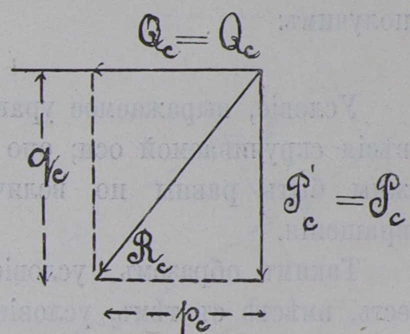
Такъ какъ силы $(P'; P'')$ и $(Q'; Q'')$ и составляющія ихъ P''_A и Q''_A параллельны плоскости CII, при чемъ, сверхъ того, составляющія P''_C и Q''_C лежатъ въ той же плоскости CII, то всего проще спроектировать точку $(A'; A'')$ и силы P'_A и Q''_A на плоскость CII (причемъ проекціи ихъ на этой плоскости получатся въ натуральную величину) и произвести въ этой плоскости геометрическое ихъ сложенiе, причемъ получится равнодѣйствующая R_A, т. е. искомая первая сила замѣняющаго креста силъ.

Что же касается силъ P'_C и Q''_C, то геометрическое сложенiе этихъ силъ можетъ быть произведено лишь въ плоскости $СП$, въ которой онѣ лежатъ. Для того, чтобы произвести всѣ указанныя дѣйствiя на плоскости $СП$, совмѣстимъ эту плоскость съ вертикальной плоскостью проекцiй вращенiенъ ея около вертикальнаго слѣда Og', какъ показано на фиг. 70.

Равнодѣйствующая силъ P'_A и Q''_A будетъ R_A — первая сила замѣняющаго креста силъ.

Для полученiя второй силы R_C замѣняющаго креста силъ продолжаемъ въ плоскости $СП$ силы P'_C и Q''_C до взаимнаго ихъ пересѣченiя въ точкѣ K и строимъ равнодѣйствующую R_C.

Чтобы прямая AB была *нулевою линiею* необходимо, какъ извѣстно, чтобы эта прямая лежала въ плоскости, проходящей черезъ силу R_C и точку A, а такъ какъ прямая AB на плоскость $СП$ проектируется въ точку A''', то для возможности проведенiя плоскости, удовлетворяющей сказаннымъ условiямъ, необходимо, чтобы сила R_C прошла черезъ точку A'''.



Фиг. 71.

Если обозначить длину проекцiи отрѣзка λ на плоскость $СП$ черезъ p_c, а длину проекцiи отрѣзка l на ту же плоскость черезъ q_C, то изъ фигуръ 70 и 71 легко видѣть, что для удовлетворенiя условiя прохожденiя силы R_C черезъ точку A''' необходимо, чтобы

$$\frac{P'_c}{Q''_c} = \frac{q_c}{p_c},$$

откуда

$$P'_c p_c = Q''_c q_c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mu)$$

Съ другой стороны, обозначая длину плеча $\alpha''a''$ черезъ p и длину плеча $\beta'b'$ черезъ q, имѣемъ:
изъ подобiя треугольниковъ (фиг. 70) $\triangle\ A''\gamma''B''$ и $\triangle\ A''\alpha''a''$.

$$\frac{\lambda}{\xi} = \frac{p_c}{p},$$

а изъ подобiя треугольниковъ $\triangle\ A'q'B' \infty A'b'\beta'$:

$$\frac{l}{y} = \frac{q_c}{q}.$$

Ранѣе было выведено, что:

$$\frac{P'}{P'_c} = \frac{\lambda}{\xi};$$

точно также легко вывести, что:

$$\frac{Q''}{Q''_c} = \frac{l}{x};$$

слѣдовательно, можемъ написать:

$$\frac{P'}{P'_c} = \frac{p_c}{p}, \text{ или } P'p = P'_c p_c.$$

Замѣчая, что $P' = P$ и обозначая P'_C черезъ P_C, окончательно получимъ:

$$Pp = P_c p_c;$$

точно также:

$$Qq = Q_c q_c.$$

Подставляя найденныя выраженія въ вышеполученное уравненіе (μ), получимъ:

$$Pp = Qq.$$

Условіе, выражаемое уравненіемъ (μ), есть необходимое условіе равновѣсія скручиваемой оси: оно выражаетъ, что моменты силъ P и Q должны быть равны по величинѣ и противоположны по направленію вращенія.

Такимъ образомъ, условіе равновѣсія скручиваемой оси или вала есть, вмѣстѣ съ тѣмъ, условіе, при которомъ эта ось обращается въ *нулевую линію.*

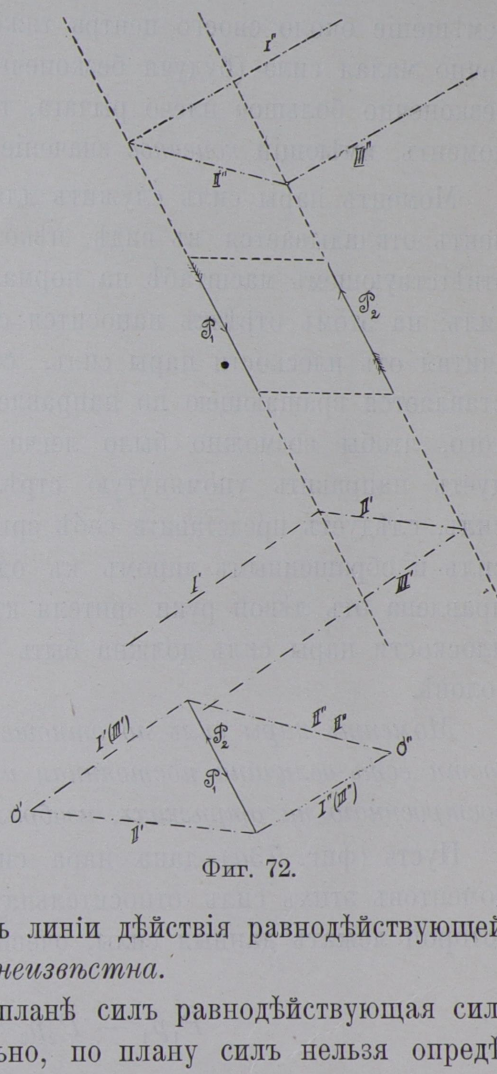
§ 7. Общія свойства пары силъ. Векторъ момента пары силъ.

Пользуясь теоремами Графической Статики, выведемъ нѣкоторыя свойства пары силъ, извѣстныя отчасти изъ общихъ началъ статики, и докажемъ нѣкоторыя новыя свойства пары силъ.

Какъ извѣстно, парою силъ называютъ двѣ параллельныя между собой, равныя и прямопротивоположныя силы.

Пусть для такихъ двухъ силъ (фиг. 72) начерченъ планъ силъ и веревочный многоугольникъ I', II', III', соотвѣтствующій полюсу O'; изъ чертежа (72) легко видѣть, что въ этомъ случаѣ веревочный многоугольникъ *не* замыкается, какъ это имѣетъ мѣсто въ случаѣ равновѣсія силъ, и что крайнія его стороны I' и III' параллельны между собой, т. е. пересѣкаются на безконечно большомъ разстояніи. Если для тѣхъ же силъ построить (фиг. 72) другой веревочный многоугольникъ I'', II'', III'', пользуясь полюсомъ O'', то крайнія стороны его I'' и III'' опять-таки параллельны между собой, т. е. пересѣкаются на безконечно большомъ разстояніи. Изъ ученія о веревочномъ многоугольоикѣ извѣстно, что точка приложенія равнодѣйствующей силъ, для которыхъ построенъ веревочный многоугольникъ, находится въ мѣстѣ пересѣченія крайнихъ сторонъ веревочнаго многоугольника; сверхъ того изъ свойствъ веревочнаго многоугольника *) извѣстно, что для данной системы силъ, какъ бы ни было выбрано положеніе полюса, крайнія стороны веревочнаго многоугольника всегда пересѣкаются на одной и той же опредѣленной прямой, именно на линіи дѣйствія равнодѣйствующей данной системы силъ.

Въ данномъ случаѣ (фиг. 72) равнодѣйствующая силъ P_1 и P_2 должна пройти черезъ точку пересѣченія прямыхъ I′ и III′, а также черезъ точку пересѣченія прямыхъ I″ и III″; двумя точками вполнѣ опредѣляется положеніе прямой, т. е. линіи дѣйствія равнодѣйствующей, но такъ какъ обѣ эти точки лежатъ на безконечно большомъ разстояніи, то и вся равнодѣйствующая *безконечно удалена*.



Фиг. 72.

Для опредѣленія положенія равнодѣйствующей силъ P_1 и P_2 въ разсматриваемомъ случаѣ необходимо было прибѣгнуть къ опредѣленію *двухъ точекъ*, принадлежащихъ линіи дѣйствія равнодѣйствующей, такъ какъ эта линія намъ *заранѣе неизвѣстна*.

Въ самомъ дѣлѣ (фиг. 72), на планѣ силъ равнодѣйствующая силъ P_1 и P_3 равна нулю и, слѣдовательно, по плану силъ нельзя опредѣлить ея линію дѣйствія, тогда какъ во всѣхъ остальныхъ случаяхъ планъ силъ даетъ совершенно опредѣленный отрѣзокъ, изображающій по линіи дѣйствія, по величинѣ и по направленію (знаку, стрѣлкѣ) равнодѣйствующую данныхъ силъ. Поэтому въ остальныхъ случаяхъ для опредѣленія положенія равнодѣйствующей достаточно знать *только одну точку*.

*) См. С. К. Куницкій. Начала статики сооруженій. Графическая статика и ея приложенія въ расчету сооруженій, 1898 г., стр. 3.

Разсматривая нуль, какъ предѣлъ, къ которому стремится безконечно малая величина, можемъ на основаніи вышеизложеннаго разсматривать пару силъ, какъ *безконечно малую силу, безконечно удаленную* (это опредѣленіе пары силъ было уже приведено выше).

Если приложить пару силъ къ твердому тѣлу, то тѣло, очевидно, не получитъ никакого *поступательнаго* перемѣщенія, такъ какъ пара силъ равносильна безконечно малой силѣ, но тѣло получитъ вращательное перемѣщеніе около своего центра тяжести, такъ какъ упомянутая безконечно малая сила (будучи безконечно удаленною) дѣйствуетъ какъ бы на безконечно большое плечо рычага, т. е. даетъ въ результатѣ вращающій моментъ, имѣющій *конечное* значеніе.

Моментъ пары силъ служитъ для измѣренія ея величины; этотъ моментъ откладывается въ видѣ нѣкотораго отрѣзка прямой линіи въ соотвѣтствующемъ масштабѣ на нормали nn' къ плоскости дѣйствія пары силъ; на этомъ отрѣзкѣ наносится стрѣлка, направленная въ ту сторону, считая отъ плоскости пары силъ, съ которой данная пара силъ представляется вращающею по направленію часовой стрѣлки (фиг. 73). Для того, чтобы возможно было легче опредѣлить, въ какую сторону слѣдуетъ направить упомянутую стрѣлку на нормали къ плоскости пары силъ, слѣдуетъ представить себѣ зрителя стоящимъ на плоскости пары силъ и обращеннымъ лицомъ къ одной силѣ пары; если эта сила направлена отъ лѣвой руки зрителя къ правой, то стрѣлка на нормали къ плоскости пары силъ должна быть направлена отъ ногъ зрителя къ его головѣ.

Моментъ пары силъ по отношенію къ какой либо точкѣ ея плоскости есть величина постоянная и равная площади параллелограмма, построеннаго на отрѣзкахъ, изображающихъ силы данной пары.

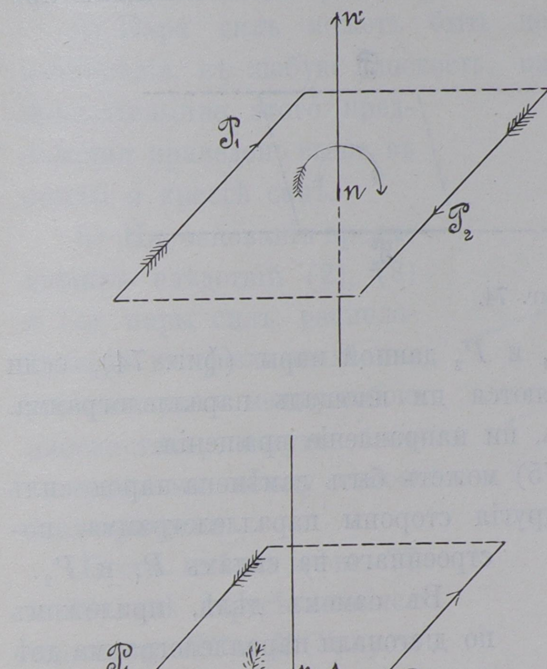
Пусть (фиг. 73а) дана пара силъ P_1 и P_2; алгебраическая сумма моментовъ этихъ силъ относительна какой либо точки O плоскости, въ которой лежатъ данныя силы, очевидно равна:

$$P_1 p_1 - P_2 p_2 = P_1 p = P_2 p,$$

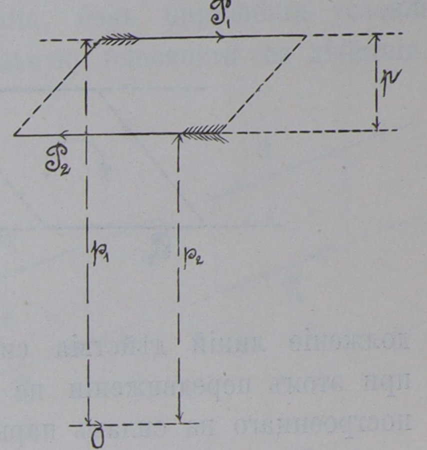
т. е. равна произведенію изъ силы на разстояніе между линіями дѣйствія силъ, составляющихъ пару, или на такъ называемое *плечо пары*.

Слѣдовательно, моментъ пары силъ не зависитъ отъ положенія точки, относительно которой берется моментъ, и для данной пары силъ есть *величина постоянная*. Для различныхъ паръ силъ моменты ихъ различны, въ зависимости отъ величины силъ, составляющихъ пару, и отъ плеча пары. Къ тому же выводу пришли бы, разсматривая моментъ пары силъ графически, какъ удвоенную разность площадей треугольниковъ: $\triangle(\alpha\beta o)$ и $\triangle(\gamma\delta o)$ фиг. 73*в*.

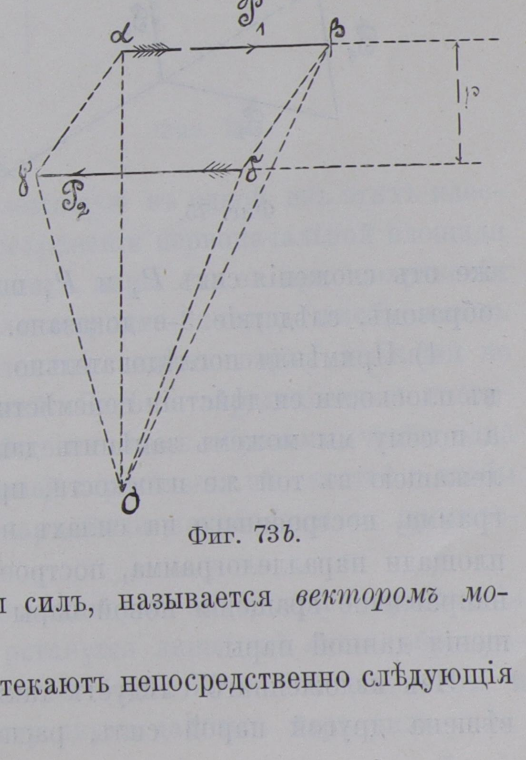
Отложенный по нормали къ плоскости пары силъ отрѣзокъ nn', изображающій (въ соотвѣтствующемъ масштабѣ) величину момента и на-



Фиг. 73.



Фиг. 73*a*.



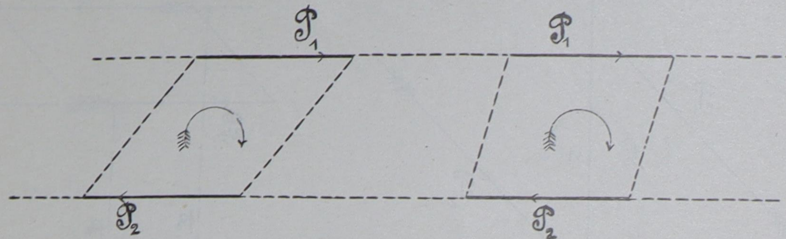
Фиг. 73*b*.

правленіе вращенія для данной пары силъ, называется *векторомъ момента* пары силъ.

Изъ изложеннаго о парѣ силъ вытекаютъ непосредственно слѣдующія слѣдствія:

1) пара силъ на данной плоскости совершенно опредѣлена, если даны: а) площадь параллелограмма, образуемаго силами пары, и б) направленіе вращенія;

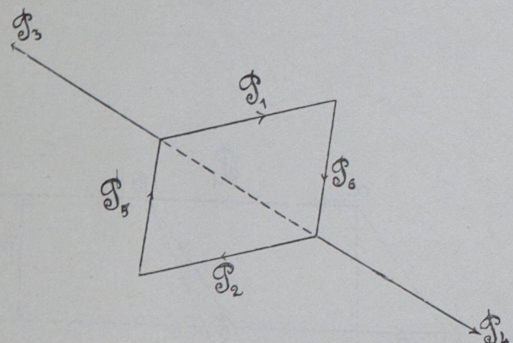
2) пара силъ можетъ быть въ плоскости ея дѣйствія передвигаема вдоль полосы, образуемой параллельными линіями, составляющими про-



Фиг. 74.

долженіе линій дѣйствія силъ P_1 и P_2 данной пары (фиг. 74), если при этомъ передвиженіи не измѣняются ни площадь параллелограмма, построеннаго на силахъ пары силъ, ни направленіе вращенія.

3) Пара силъ P_1 и P_2 (фиг. 75) можетъ быть замѣнена парою силъ P_5 и P_6, представляющихъ двѣ другія стороны параллелограмма, построеннаго на силахъ P_1 и P_2.



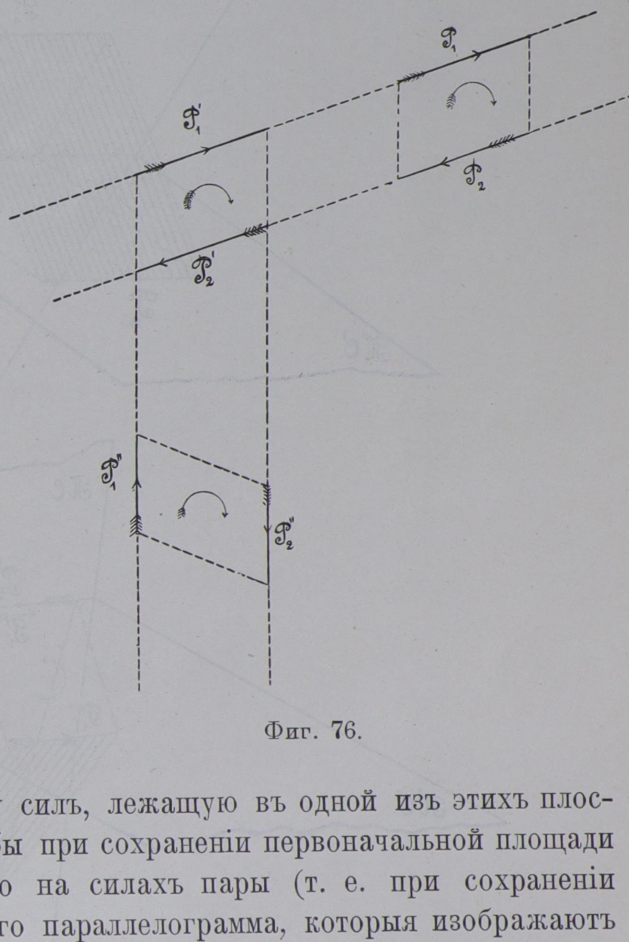
Фиг. 75.

Въ самомъ дѣлѣ, приложимъ по діагонали параллелограмма двѣ равныя между собой и прямопротивоположныя силы P_3 и P_4, изъ которыхъ каждая по величинѣ равна силѣ, выражаемой длиною діагонали (измѣренною въ масштабѣ силъ). Если сложить геометрически силу P_1 съ силою P_3, то получится равнодѣйствующая P_5; точно также отъ сложенія сикъ P_2 и P_4 получится равнодѣйствующая P_6. Такимъ образомъ, слѣдствіе 3-е доказано.

4) Примѣняя послѣдовательно слѣдствія 2-е и 3-е можемъ пару силъ въ плоскости ея дѣйствія перемѣстить въ какое угодно положеніе (фиг. 76), а посему мы можемъ замѣнить данную пару силъ произвольною парою, лежащею въ той же плоскости, при условіи, чтобы площадь параллелограмма, построеннаго на силахъ новой (замѣняющей) пары, была равна площади параллелограмма, построеннаго на силахъ данной пары, и чтобы направленіе вращенія новой пары было одинаково съ направленіемъ вращенія данной пары.

Изъ изложеннаго слѣдуетъ также, что пара силъ можетъ быть уравновѣшена другой парой силъ, расположенной какъ угодно въ плоскости данной пары силъ, при условіи, чтобы площадь параллелограмма, построеннаго на силахъ уравновѣшивающей пары, была равна площади параллелограмма, построеннаго на силахъ данной пары, и чтобы направленіе вращенія уравновѣшивающей пары было противоположно направленію вращенія данной пары.

5) Пара силъ можетъ быть переносима, безъ нарушенія условій равновѣсія, въ любую плоскость, параллельную плоскости ея дѣйствія. Доказательство этого предложенія приведено выше въ статьѣ о крестѣ силъ.



Фиг. 76.

6) На основаніи предыдущихъ слѣдствій (2), (3) и (4), пары силъ, расположенныя въ различныхъ пересѣкающихся между собою плоскостяхъ, могутъ быть складываемы между собою геометрически.

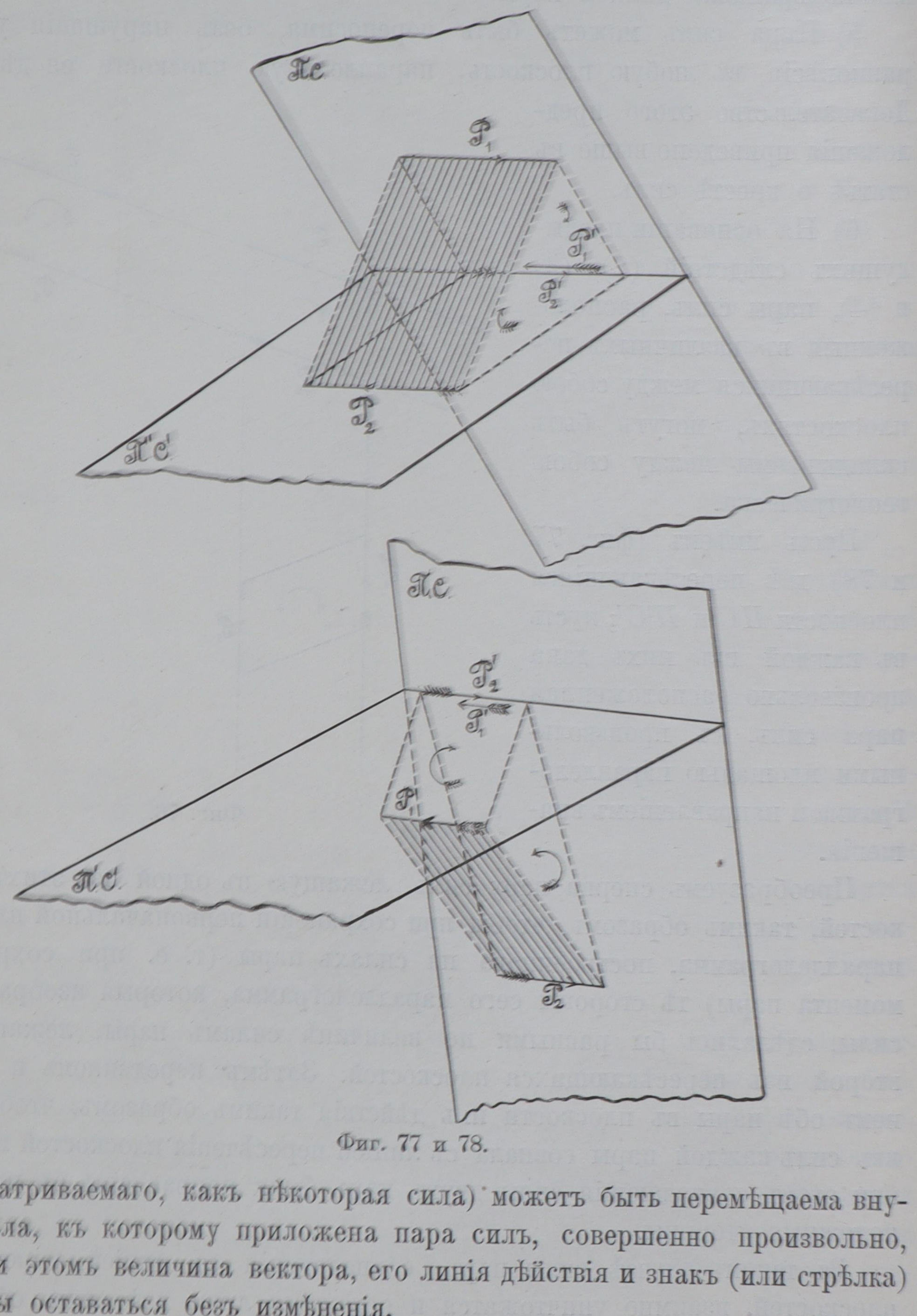
Пусть имѣемъ (фиг. 77 и 78) двѣ пересѣкающіяся плоскости $ПС$ и $П'С'$; пусть въ каждой изъ нихъ дана произвольно расположенная пара силъ, съ произвольными площадью параллелограмма и направленіемъ вращенія.

Преобразуемъ сперва пару силъ, лежащую въ одной изъ этихъ плоскостей, такимъ образомъ, чтобы при сохраненіи первоначальной площади параллелограмма, построеннаго на силахъ пары (т. е. при сохраненіи момента пары) тѣ стороны сего параллелограмма, которыя изображаютъ силы, сдѣлались бы равными по величинѣ силамъ пары, лежащей во второй изъ пересѣкающихся плоскостей. Затѣмъ передвинемъ и повернемъ обѣ пары въ плоскости ихъ дѣйствія такимъ образомъ, чтобы одна изъ силъ каждой пары совпала съ линіей пересѣченія плоскостей и чтобы при этомъ совпадающія силы двухъ паръ были направлены въ противоположныя стороны.

Въ такомъ случаѣ силы паръ, совпадающія съ линіей пересѣченія плоскостей, взаимно уничтожатся и останутся лишь двѣ силы, образующія пару, лежащую въ заштрихованной (фиг. 77 и 78) плоскости и представляющую геометрическую сумму двухъ данныхъ паръ силъ.

Если воспользоваться понятіемъ о векторѣ момента пары силъ, то вышеприведенныя слѣдствія могутъ быть выражены иначе, а именно:

1) *векторъ момента* пары силъ можетъ быть произвольно перемѣщаемъ параллельно самому себѣ, т. е. точка приложенія этого вектора



Фиг. 77 и 78.

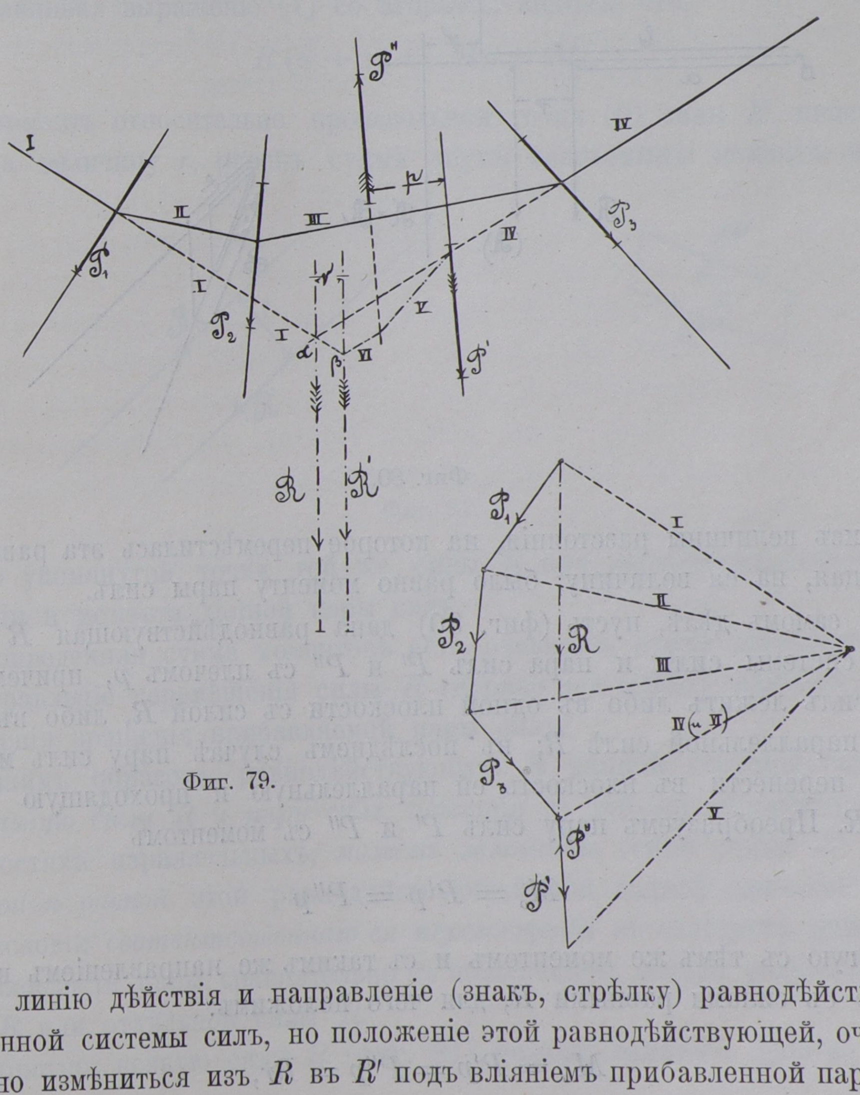
(разсматриваемаго, какъ нѣкоторая сила) можетъ быть перемѣщаема внутри тѣла, къ которому приложена пара силъ, совершенно произвольно, но при этомъ величина вектора, его линія дѣйствія и знакъ (или стрѣлка) должны оставаться безъ измѣненія.

2) *векторы моментовъ* могутъ быть складываемы графически, какъ силы. Вслѣдствіе сего, можно говорить *о многоугольникѣ векторовъ* мо-

ментоаъ паръ силъ, который для паръ силъ имѣетъ то же значеніе, какъ *многоугольникъ силъ* для простыхъ силъ. Дальнѣйшей же аналогіи между простыми силами и парами силъ нѣтъ, такъ какъ для опредѣленія положенія простой силы необходимо знать точку, черезъ которую она проходитъ (точку приложенія), опредѣляемую *многоугольникомъ положенія (веревочнымъ многоугольникомъ)*, между тѣмъ для вектора момента пары силъ этого не надо, вслѣдствіе *совершенной произвольности* его положенія, т. е. его точки приложенія.

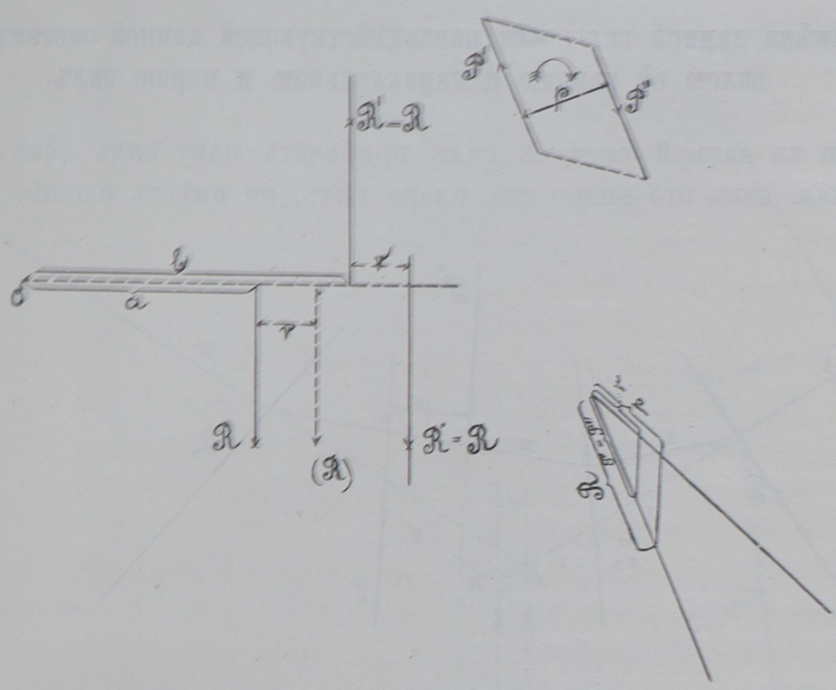
§ 8. Замѣна данной силы или равнодѣйствующей данной системы силъ — силою ей равною и параллельною и парою силъ.

Если къ данной системѣ силъ прибавить пару силъ (фиг. 79), то послѣдняя, какъ это видно изъ плана силъ, не имѣетъ вліянія на вели-



Фиг. 79.

чину, линію дѣйствія и направленіе (знакъ, стрѣлку) равнодѣйствующей R данной системы силъ, но положеніе этой равнодѣйствующей, очевидно, должно измѣниться изъ R въ R' подъ вліяніемъ прибавленной пары силъ, какъ это видно изъ веревочнаго многоугольника (фиг. 79). Это измѣненіе положенія равнодѣйствующей зависитъ отъ того, что, съ прибавленіемъ къ данной системѣ силъ—пары силъ, сумма моментовъ силъ относительно любой точки измѣняется на величину момента пары силъ, а, слѣдовательно, и моментъ относительно той же точки равнодѣйствующей силъ измѣняется на ту же величину. Слѣдовательно, равнодѣйствующая данной системы силъ должна, въ этомъ случаѣ, передвинуться на столько, чтобы приращеніе ея момента относительно произвольной точки, т. е. произведеніе изъ величины разстоянія, на которое перемѣстилась эта равнодѣйствующая, на ея величину, было равно моменту пары силъ.



Фиг. 80.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть (фиг. 80) дана равнодѣйствующая R нѣкоторой системы силъ и пара силъ P' и P'' съ плечомъ p, причемъ эта пара силъ лежитъ либо въ одной плоскости съ силой R, либо въ плоскости параллельной силѣ R; въ послѣднемъ случаѣ пару силъ можемъ всегда перенести въ плоскость ей параллельную и проходящую черезъ силу R. Преобразуемъ пару силъ P' и P'' съ моментомъ

$$M_o = P'p = P''p$$

въ другую съ тѣмъ же моментомъ и съ такимъ же направленіемъ вращенія, но съ силами равными R, для чего положимъ:

$$M_o = P'p = P''p = Rr,$$

откуда получится новое плечо пары силъ:

$$r = \frac{M_o}{R} = \frac{P'p}{R} = \frac{P''p}{R}.$$

Разсмотримъ затѣмъ, чему равна сумма моментовъ силы R и пары Rr относительно произвольной точки плоскости, въ которой лежатъ эти сила и пара силъ, напримѣръ, относительно точки (O) фиг. 80.

$$\Sigma M = Ra + R(b + r) - Rb,$$

или:

$$\Sigma M = Ra + Rr = R(r + a).$$

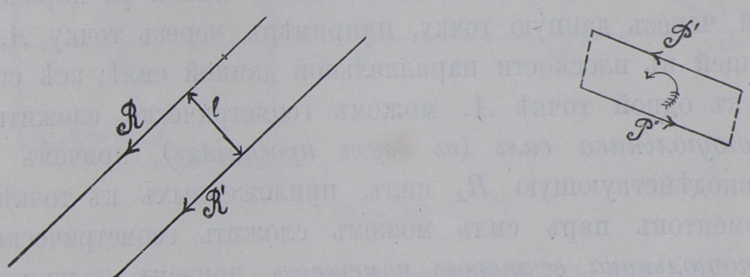
Но, съ другой стороны, если обозначить моментъ силы R относительно точки (O) черезъ M_R, то имѣемъ

$$\Sigma M = M_R + M_o.$$

Сравнивая выраженіе (1) со вторымъ, видимъ, что,

$$R(a + r) = M_R + M_o,$$

т. е. моментъ относительно произвольной точки (0) силы R, перенесенной на величину r, равенъ суммѣ двухъ слагаемыхъ: момента относи-



Фиг. 81.

тельно упомянутой точки той же силы R при первоначальномъ ея положеніи и момента данной пары силъ.

Приведенная сумма моментовъ есть, очевидно, сумма алгебраическая, и направленіе перемѣщенія силы R (вправо или влѣво) зависитъ отъ направленія вращенія прибавляемой пары силъ.

Такимъ образомъ, равнодѣйствующую R данной системы силъ или *отдѣльную силу* R *и пару силъ*, лежащія въ той же плоскости или въ плоскостяхъ параллельныхъ, *можемъ замѣнить одной силой* R' *параллельной и равной* этой равнодѣйствующей или данной *отдѣльной силѣ* при условіи *соотвѣтственнаго ея перемѣщенія* въ плоскости параллельной плоскости пары, сравнительно съ положеніемъ данной равнодѣйствующей R или отдѣльной силы R.

Обратно, всякую силу R (фиг. 81) можемъ замѣнить другою ей параллельною и равною силою R' и парою силъ, плоскость дѣйствія коей параллельна RR', при условіи соотвѣтственнаго выбора величины момента этой пары силъ и направленія ея вращенія.

Такъ, напримѣръ, при замѣнѣ (фиг. 81) силы R силою R' и парою силъ необходимо выбрать послѣднюю такимъ образомъ, чтобы направленіе ея вращенія было противоположно направленію движенія часовой стрѣлки и чтобы моментъ пары силъ былъ равенъ $R'h$ (площадь параллелограмма, построеннаго на силахъ пары силъ), т. е. пара силъ должна имѣть такія величину момента и направленіе вращенія, чтобы она уравновѣшивала моментъ $R'h$ силы R, относительно какой-либо точки линіи дѣйствія силы R, происшедшій отъ перенесенія силы R въ положеніе R', т. е. параллельно самой себѣ на разстояніе h.

§ 9. Примѣненіе ученія о парахъ силъ къ сложенію силъ, расположенныхъ какъ угодно въ пространствѣ. Замѣна системы силъ, расположенныхъ какъ угодно въ пространствѣ, одной силой и парой силъ. Моментъ силы относительно данной оси.

Изъ вышеизложеннаго слѣдуетъ, что каждую силу заданной произвольной системы силъ мы можемъ замѣнить силой ей параллельной и проходящей черезъ данную точку, напримѣръ, черезъ точку A, и парой силъ, лежащей въ плоскости параллельной данной силѣ; всѣ силы, приложенныя къ одной точкѣ A, можемъ геометрически сложить посредствомъ *многоугольника силъ* (*въ двухъ проекціяхъ*), причемъ получимъ общую равнодѣйствующую R_A силъ, приложенныхъ къ точкѣ A; всѣ векторы моментовъ паръ силъ можемъ сложить геометрически посредствомъ *многоугольника векторовъ моментовъ*, причемъ получится *равнодѣйствующій векторъ моментовъ* M.

Такимъ образомъ, *всякую систему силъ въ пространствѣ можно замѣнить силою* R_A, *проходящею черезъ данную точку* A *и парою съ моментомъ* M.

Линію дѣйствія равнодѣйствующей R_A называютъ *осью нулевой системы.*

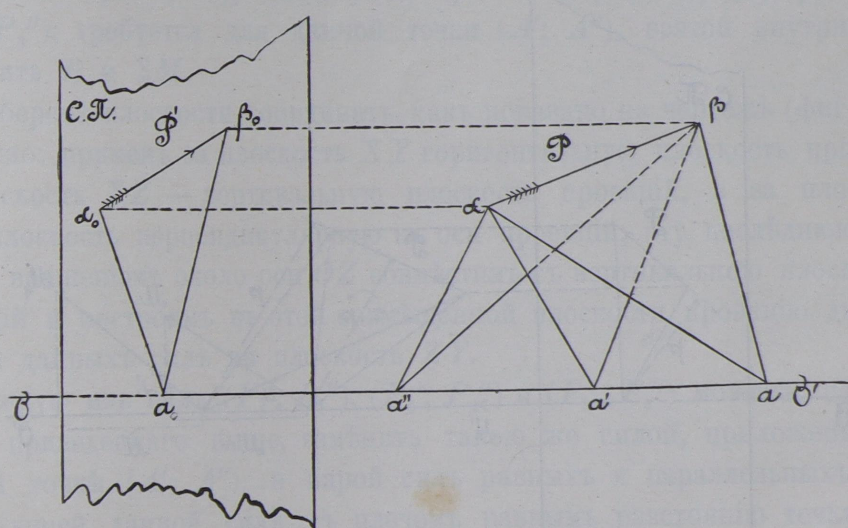
Ученіе о крестѣ силъ дало намъ одинъ способъ сложенія силъ непараллельныхъ и непересѣкающихся; изъ изложеннаго видимъ, что ученіе о парахъ силъ даетъ другой способъ сложенія такихъ силъ.

Векторы моментовъ, которые приходится складывать, могутъ быть какъ угодно расположены въ пространствѣ, поэтому при сложеніи ихъ приходится прибѣгать къ *методу проекцій* этихъ векторовъ на опредѣленныя оси проекцій избранной системы координатъ.

Какъ извѣстно, *моментомъ силы* P *относительно* какой-либо *оси* OO'

называется моментъ проекціи силы P на плоскость нормальную къ данной оси, взятый относительно точки пересѣченія оси съ упомянутою плоскостью (фиг. 32); этотъ моментъ измѣряется удвоенною площадью треугольника, одна сторона котораго изображаетъ проекцію P' данной силы P на плоскость нормальную къ оси, относительно которой берется моментъ, а противолежащая этой сторонѣ вершина треугольника совпадаетъ съ точкою пересѣченія упомянутой оси съ нормальной къ ней плоскостью.

Если провести черезъ данную силу P (фиг. 82) плоскости $\alpha\beta a$, $\alpha\beta a'$, $\alpha\beta a''$, пересѣкающія ось OO' въ точкахъ a; a' и a'' и наклоненныя подъ



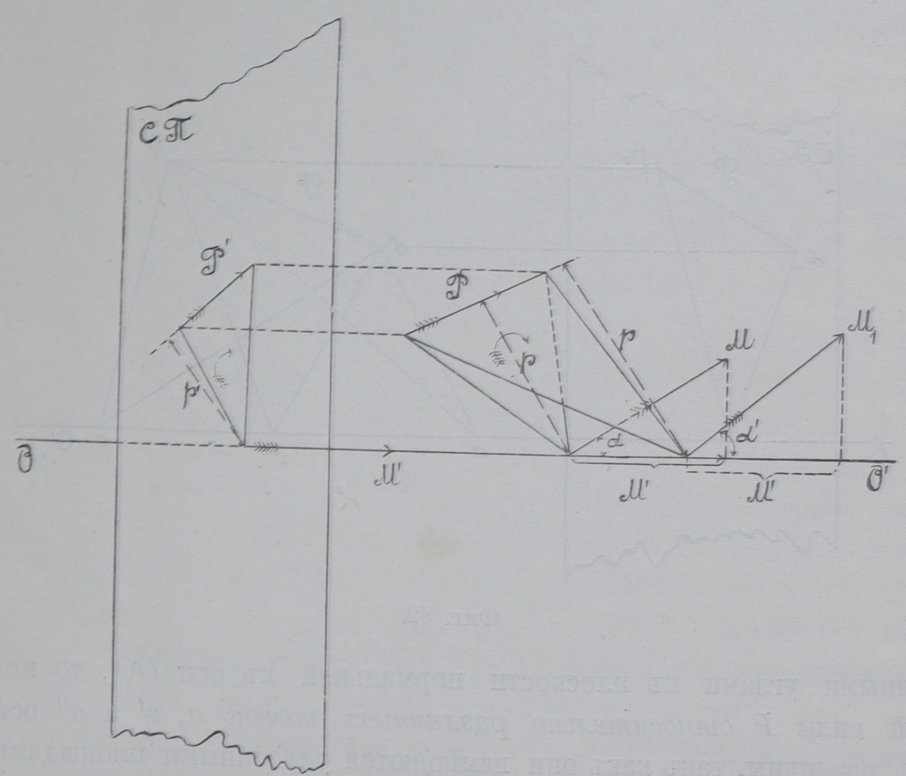
Фиг. 82.

различными углами къ плоскости нормальной къ оси OO', то моменты данной силы P *относительно различныхъ точекъ* a, a' и a'' оси OO' будутъ различны, такъ какъ они измѣряются удвоенными площадями треугольниковъ $\alpha\beta a$, $\alpha\beta a'$ и $\alpha\beta a''$; между тѣмъ моментъ силы P относительно оси OO', измѣряемый удвоенной площадью общей проекціи этихъ треугольниковъ на плоскость нормальную къ оси OO', есть величина *постоянная* для данной силы P и данной оси OO'.

Моментъ силы P *относительно какой-либо точки* данной оси OO' можетъ быть изображенъ посредствомъ своего вектора, т. е. посредствомъ отрѣзка нормальнаго къ плоскости треугольника, опредѣляемаго данной силой и точкою, относительно которой берется моментъ (фиг. 83); *векторъ момента силы относительно данной точки* отличается тѣмъ отъ *вектора момента пары силъ*, что для перваго изъ сихъ векторовъ *точка приложенія постоянна*, а именно эта та точка, относительно которой берется моментъ, а для второго—*точка приложенія произвольна*.

Моментъ той же силы P *относительно оси* OO' можетъ быть изображенъ посредствомъ своего вектора, который, очевидно, совпадаетъ съ осью OO', такъ какъ онъ долженъ быть нормаленъ къ плоскости, перпендикулярной къ оси OO', т. е. параллеленъ этой оси и такъ, какъ точка приложенія этого вектора должна лежать въ точкѣ пересѣченія оси OO' съ упомянутою нормальною къ ней плоскостью.

Проекція на ось OO' вектора момента данной силы P относительно какой-либо точки той же оси, очевидно, равна вектору момента той же силы относительно оси OO', такъ какъ уголъ α, составляемый плоскостями.



Фиг. 83.

1) проходящею черезъ данную силу и взятую на данной оси OO, точку, относительно которой берется моментъ, и 2) нормальною къ данной оси, равенъ углу, составляемому нормалями къ этимъ плоскостямъ, т. е. векторомъ M момента данной силы относительно точки и осью OO'.

Слѣдовательно, можемъ написать (фиг. 83):

$$Pp = M,$$

$$(Pp)\cos\alpha = M\cos\alpha = M'.$$

Съ другой стороны:

$$P'p' = (Pp)\cos\alpha = M\cos\alpha = M'.$$

Итакъ, *проекція* (M') *вектора момента силы* (P) *относительно какой-либо точки данной оси* (OO') *на эту ось есть величина постоянная и равная вектору момента той же силы относительно данной оси.*

§ 10. Задача на замѣну данной системы силъ одною силою и векторомъ суммы моментовъ паръ силъ.

На основаніи вышеизложеннаго можемъ рѣшить слѣдующую задачу:

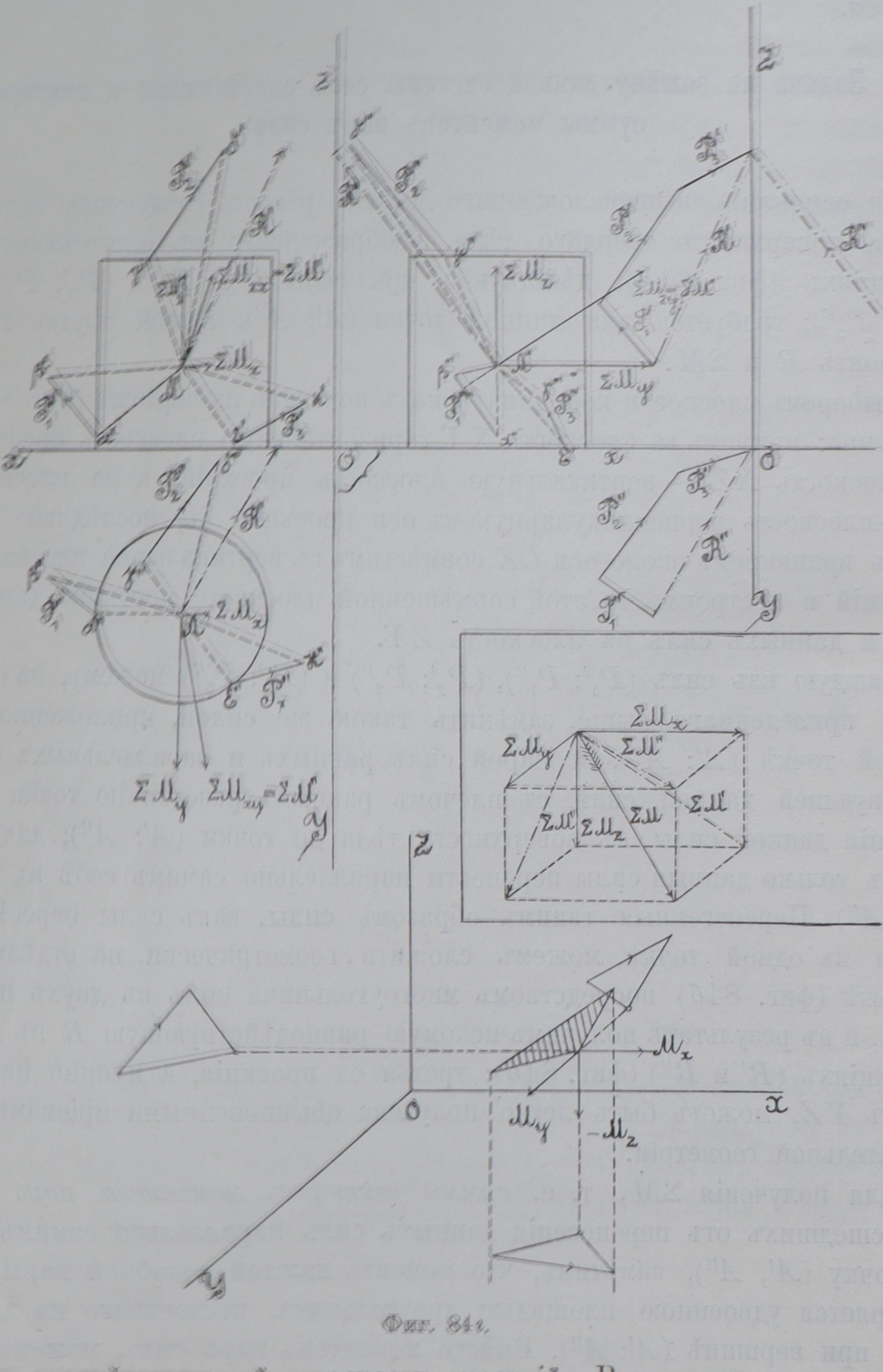
На поверхность твердаго тѣла, изображеннаго въ ортогональныхъ проекціяхъ (фиг. 84*а*), дѣйствуютъ три силы $(P_1'; P_1'')$, $(P_2'; P_2'')$ и $(P_3'; P_3'')$; требуется для данной точки $(A'; A'')$, взятой внутри тѣла, построить R и ΣM.

Выберемъ плоскости координатъ, какъ показано на чертежѣ (фиг. 84*а*), а именно: примемъ за плоскость XY горизонтальную плоскость проекцій, за плоскость XZ — вертикальную плоскость проекцій, а за плоскость YZ—плоскость перпендикулярную къ оси проекцій; эту послѣднюю плоскость вращеніемъ около оси OZ совмѣстимъ съ вертикальною плоскостью проекцій и построимъ въ этой совмѣщенной плоскости проекцію даннаго тѣла и данныхъ силъ на плоскость ZY.

Каждую изъ силъ $(P_1'; P_1'')$, $(P_2'; P_2'')$ и $(P_3'; P_3'')$ можемъ, на основаніи приведеннаго выше, замѣнить такою же силой, приложенной къ данной точкѣ $(A'; A'')$, и парой силъ равныхъ и параллельныхъ соотвѣтствующей данной силѣ, съ плечомъ равнымъ разстоянію точки приложенія данной силы къ поверхности тѣла до точки $(A'; A'')$; для сего стоитъ только данныя силы перенести параллельно самимъ себѣ въ точку $(A'; A'')$. Перенесенныя такимъ образомъ силы, какъ силы пересѣкающіяся въ одной точкѣ, можемъ сложить геометрически на отдѣльномъ чертежѣ (фиг. 84*б*) посредствомъ многоугольника силъ въ двухъ проекціяхъ, и въ результатѣ получимъ искомую равнодѣйствующую R въ двухъ проекціяхъ (R' и R'') (фиг. 84*б*); третья ея проекція, а именно на плоскость YZ, можетъ быть легко получена обыкновенными пріемами Начертательной геометріи.

Для полученія ΣM, т. е. *суммы векторовъ моментовъ паръ силъ*, происшедшихъ отъ перенесенія данныхъ силъ параллельно самимъ себѣ въ точку (A', A''), замѣтимъ, что моментъ каждой подобной пары силъ измѣряется удвоенною площадью треугольника, постоеннаго на данной силѣ при вершинѣ $(A'; A'')$. Вмѣсто моментовъ паръ силъ, можемъ разсматривать моменты данныхъ силъ относительно точки A, такъ какъ очевидно, что моментъ каждой изъ упомянутыхъ паръ силъ равенъ моменту соотвѣтствующей данной силы относительно точки A.

Изъ предыдущаго извѣстно, что проекція такого треугольника на какую-либо плоскость представляетъ половину момента соотвѣтствующей силы относительно оси, проходящей черезъ точку (A', A'') и нормаль-



Фиг. 84а.

Фиг. 84б.

Фиг. 84в.

Фиг. 84г.

ной къ соотвѣтствующей плоскости проекцій. Вторая изъ силъ каждой пары, какъ проходящая черезъ точку (A', A''), дастъ относительно оси, проходящей черезъ эту точку, моментъ равный нулю. Такъ, напримѣръ, площадь треугольника $\alpha'\beta'A'$ представляетъ половину момента силы $(P'_1;\ P''_1)$ относительно оси, нормальной къ плоскости XZ и проходящей черезъ точку A, т. е. относительно оси параллельной оси $У$-овъ. Удвоенную площадь этого треугольника откладываемъ *въ видѣ вектора момента* на оси, проходящей черезъ точку A и $\|$-ой оси $У$-овъ (см. фиг. 84,*а* и 84,*г*) и наносимъ на этомъ векторѣ стрѣлку соотвѣтственно направленію вращенія момента силы $(P'_1;\ P''_1)$ относительно точки $(A';\ A'')$. Точно также на той же оси откладываемъ въ видѣ векторовъ моментовъ удвоенныя площади треугольниковъ $A'\gamma'\delta'$ и $A'\varepsilon'\varkappa'$.

Алгебраическая сумма этихъ отрѣзковъ дастъ ΣM_y, т. е. проекцію на ось $У$-овъ суммы векторовъ моментовъ. Точно такимъ же образомъ найдутся проекціи ΣM на ось X-овъ и Z-овъ, т. е. величины ΣM_x и ΣM_z, для чего слѣдуетъ отложить по оси X-овъ удвоенныя площади треугольниковъ $A'''\alpha'''\beta'''$; $A'''\gamma'''\delta'''$ и $A'''\varepsilon'''\varkappa'''$, а по оси Z-овъ удвоенныя площади треугольниковъ $A''\alpha''\beta''$; $A''\gamma''\delta''$ и $A''\varepsilon''\varkappa''$ и полученные на соотвѣтствующихъ осяхъ отрѣзки алгебраически суммировать.

Указанныя дѣйствія можно упростить, сложивъ предварительно удвоенныя площади отдѣльныхъ треугольниковъ на каждой изъ плоскостей проекцій, съ принятіемъ во вниманіе при этомъ сложеніи направленія вращенія моментовъ, т. е., считая положительными площади, соотвѣтствующія моментамъ, вращающимъ по направленію движенія часовой стрѣлки, и отрицательными площади, соотвѣтствующія моментамъ, вращающимъ въ обратномъ направленіи.

Получивъ проекціи суммы векторовъ моментовъ ΣM на оси координатъ, т. е., найдя отрѣзки:

$$\Sigma M_x;\ \Sigma M_y \text{ и } \Sigma M_z,$$

можемъ, складывая геометрически попарно:

$$\Sigma M_x \text{ и } \Sigma M_y;\ \Sigma M_x \text{ и } \Sigma M_z;\ \Sigma M_y \text{ и } \Sigma M_z,$$

найти проекціи искомой суммы векторовъ моментовъ ΣM на каждую изъ трехъ плоскостей координатъ (фиг. 84,*а* и 84,*в*); этими послѣдними проекціями искомая сумма векторовъ моментовъ вполнѣ опредѣляется.

Сумма векторовъ моментовъ можетъ быть разсматриваема, какъ діагональ параллелопипеда, котораго ребра представляютъ отрѣзки, равные и параллельные векторамъ ΣM_x; ΣM_y и ΣM_z (фиг. 84,*в*).

Проекціи найденныхъ равнодѣйствующей R и суммы векторовъ моментовъ могутъ быть построены у точки $(A';\ A'';\ A''')$ въ трехъ плоскостяхъ проекцій, что и исполнено на фиг. 84,*а*.

§ 11. Соотношеніе между крестомъ силъ и одною силою въ совокупности съ парою силъ.

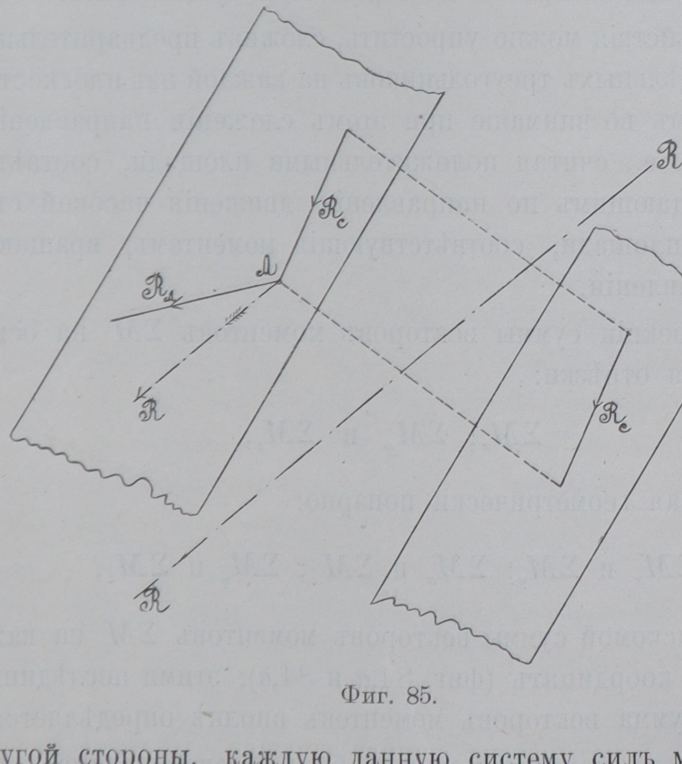
Изъ изложеннаго выше о крестѣ силъ, а также о парахъ силъ ясно, что всякая система силъ, заключающая въ себѣ силы *непараллельныя и непересѣкающіяся*, можетъ быть замѣнена или:

1) крестомъ силъ R_A и R_C, или

2) одною силою R и парою силъ M.

Во второмъ случаѣ линію дѣйствія силы R, т. е. линію дѣйствія равнодѣйствующей всѣхъ силъ системы, перенесенныхъ параллельно самимъ себѣ до пересѣченія въ одной точкѣ, называютъ *осью нулевой системы*.

Для каждой данной системы силъ имѣется лишь *одна ось нулевой системы*, какъ это слѣдуетъ изъ самаго опредѣленія этой оси.



Фиг. 85.

Съ другой стороны, каждую данную систему силъ можемъ замѣнить однимъ изъ безчисленнаго множества равнозначныхъ (эквивалентныхъ) ей крестовъ силъ.

Такимъ образомъ, *каждый изъ безчисленнаго множества крестовъ силъ, равнозначныхъ данной системѣ силъ, можетъ быть замѣненъ одною силою* R (съ совершенно опредѣленною линіею дѣйствія, называемою осью нулевой системы) *и парою* M.

Изъ этого вытекаетъ, какъ непосредственное слѣдствіе, слѣдующее предложеніе:

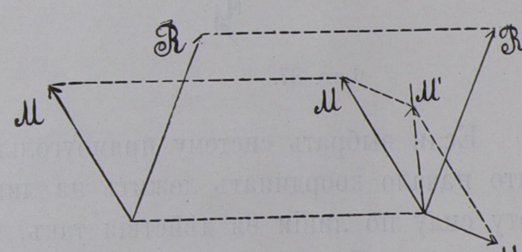
Теорема.

Если черезъ одну изъ силъ R_A даннаго креста силъ (R_A и R_C) провести плоскость, параллельную оси нулевой системы, то эта плоскость должна быть параллельна линіи дѣйствія второй силы R_C даннаго креста силъ (фиг. 85).

Въ самомъ дѣлѣ, пусть на чертежѣ (фиг. 85) черезъ силу R_A креста силъ R_A и R_C проведена плоскость параллельная линіи дѣйствія силы R, т. е. оси нулевой системы, эту плоскость обозначимъ черезъ II. A. Перенесемъ затѣмъ силу R_C параллельно ей самой въ точку плоскости II. A, именно въ точку A, пересѣченія R_A и R; въ такомъ случаѣ ясно, что перенесенная сила R_C должна лежать въ той же плоскости, въ коей лежатъ силы R_A и R, такъ какъ сила R есть равнодѣйствующая, а силы R_A и R_C двѣ ея составляющія; значитъ перенесенная сила R_C должна лежать въ плоскости II. A. Слѣдовательно, сила R_C, лежащая въ плоскости II. C., какъ параллельная перенесенной силѣ R_C, должна быть параллельна плоскости II. A. или, обратно, плоскость II. A. должна быть параллельна линіи дѣйствія силы R_C, что и требовалось доказать.

§ 12. Центральная ось нулевой системы. Координаты данной системы силъ.

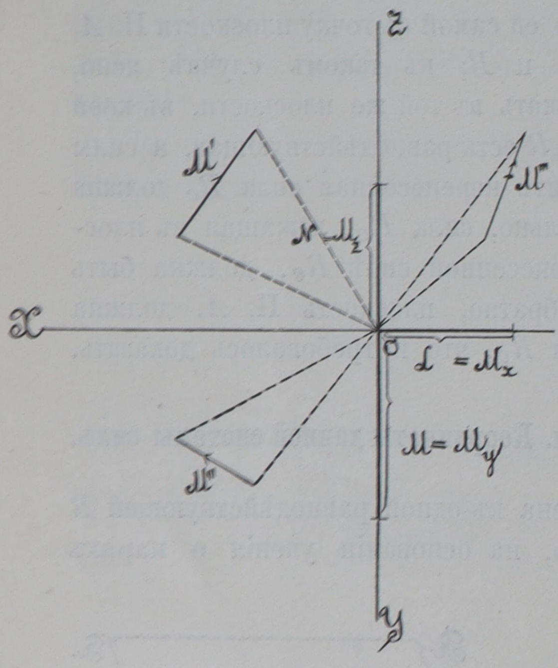
Если данная система силъ приведена къ одной равнодѣйствующей R и къ парѣ силъ съ моментомъ M, то, на основаніи ученія о парахъ силъ, можемъ силу R перенести въ любое параллельное ей положеніе при условіи прибавленія къ первоначальному вектору-момента M еще новаго вектора момента пары силъ, происшедшей отъ перенесенія силы R параллельно самой себѣ въ новое положеніе; этотъ новый векторъ момента пары силъ будетъ нормаленъ къ плоскости этой пары, т. е. къ плоскости, въ которой сила R переносилась параллельно самой себѣ.



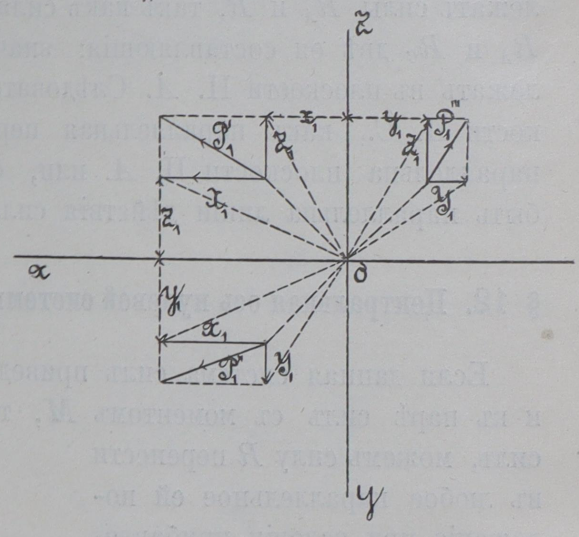
Фиг. 86.

Складывая геометрически два вектора моментовъ M и M_1, получимъ новый векторъ моментовъ M' (фиг. 86).

Такъ какъ черезъ силу R мы можемъ провести безчисленное множество плоскостей, въ каждой изъ коихъ мы можемъ эту силу R перенести параллельно ей самой, то очевидно, что мы можемъ провести черезъ силу R и такую плоскость, въ которой сила R, будучи передвинута на соотвѣтствующее (большее или меньшее) разстояніе, дастъ намъ добавочный векторъ момента M_1 пары силъ, имѣющій такія линію дѣйствія, величину и знакъ (стрѣлку, направленіе), что, если сложить геометрически первоначальный векторъ момента M съ векторомъ M_1, то равнодѣйствующій векторъ момента M' совпадетъ съ линіей дѣйствія силы R. Очевидно, что точка приложенія векторовъ M и M_1 (которая, какъ извѣстно, совершенно произвольна) берется въ данномъ случаѣ на линіи дѣйствія силы R въ новомъ ея положеніи. Еслибы эта точка была взята внѣ упомянутой линіи, то M' получился бы $\parallel R$. То положеніе равнодѣйствующей R, при коемъ M' совпадаетъ или $\parallel R$, называется *центральной осью нулевой системы.*



Фиг. 87.



Фиг. 88.

Если выбрать систему прямоугольныхъ координатъ такимъ образомъ, что начало координатъ лежитъ на линіи дѣйствія силы R, и перенести эту силу по линіи ея дѣйствія такъ, чтобы начало отрѣзка, изображающаго силу R, совпало съ началомъ O координатъ, то силу R можно изобразить посредствомъ трехъ ея проекцій X; Y; Z на оси координатъ. Точно также векторъ момента M можно изобразить проекціями трехъ его составляющихъ L; M и N по координатнымъ осямъ (фиг. 87).

Если R и M представляютъ собою равнодѣйствующую и моментъ пары силъ, равнозначныя данной системѣ силъ, то упомянутыя 6 составляющихъ R и M по осямъ координатъ называются *координатами* данной *системы силъ.*

Для какой-либо силы P_1, отнесенной къ данной системѣ координатъ, легко опредѣлить величины L, M и N, если извѣстны координаты x_1;

y_1; z_1 точки приложенія силы P_1 и проекціи X_1; Y_1; Z_1 этой силы на оси координатъ (фиг. 88).

Въ самомъ дѣлѣ, пусть сила P_1 спроектирована на три плоскости проекцій (фиг. 88) въ P_1'; P_1'' и P_1''' и пусть каждая изъ трехъ полученныхъ такимъ образомъ проекцій, въ свою очередь, разложена на двѣ составляющихъ по координатнымъ осямъ, а именно: P_1' на X_1 и Z_1; P_1'' на X_1 и Y_1; P_1''' на Y_1 и Z_1; въ такомъ случаѣ, моментъ силы P_1 относительно оси X (т. е. величина L), будетъ, какъ извѣстно изъ предыдущаго, равенъ моменту проекціи P_1''' силы P_1 на плоскость ZY относительно точки O, а этотъ моментъ равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ Z_1 и Y_1 относительно той же точки O.

Такимъ образомъ:

$$L = M_{1,x} = Y_1 z_1 - Z_1 y_1.$$

Точно также:

$$M = M_{1,y} = Z_1 x_1 - X_1 z_1,$$

и

$$N = M_{1,z} = X_1 y_1 - Y_1 x_1.$$

Еслибы была задана не одна сила P_1, а цѣлая система силъ при тѣхъ извѣстныхъ, какъ и для силы P_1, то можно было бы написать:

$$R_x = \Sigma X = X; \qquad R_y = \Sigma Y = Y; \qquad R_z = \Sigma Z = Z.$$

гдѣ R_x, R_y и R_z—составляющія равнодѣйствующей силъ по осямъ координатъ.

Точно также можно было бы написать:

$$L = \Sigma M_x = \Sigma(Yz - Zy);$$
$$M = \Sigma M_y = \Sigma(Zx - Xz),$$
$$N = \Sigma M_z = \Sigma(Xy - Yx).$$

§ 13. Примѣненіе ученія о крестѣ силъ къ разсмотрѣнію условій равновѣсія силъ въ пространственныхъ системахъ.

На основаніи приведеннаго выше ученія о крестѣ силъ могутъ быть рѣшаемы задачи о равновѣсіи силъ въ пространственныхъ системахъ.

Подобно тому, какъ въ *плоскихъ системахъ* условія равновѣсія статики давали возможность опредѣлить усилія въ стержняхъ системы, если въ данномъ сѣченіи системы встрѣчаются *лишь три стержня, въ коихъ усилія неизвѣстны*, и если при этомъ *не болѣе двухъ* изъ этихъ стержней пересѣкаются *въ одной точкѣ, въ пространственныхъ системахъ* условія статики (и въ частности ученіе о крестѣ силъ) даютъ возможность опредѣлить усилія въ стержняхъ системы, если въ данномъ сѣченіи системы встрѣчаются *лишь шесть стержней*, въ коихъ усилія неизвѣстны, и если, при этомъ, *не болѣе трехъ* изъ этихъ стержней *пересѣкаются въ одной точкѣ и не болѣе трехъ* изъ этихъ шести стержней *лежатъ въ одной плоскости*.

Два послѣднія условія объясняются:

1) первое тѣмъ, что мы умѣемъ разложить силу въ пространствѣ лишь на три линіи дѣйствія, не лежащія въ одной плоскости.

2) второе—тѣмъ, что мы умѣемъ разложить силу въ плоскости либо по двумъ линіямъ *пересѣкающимся въ одной точкѣ*, либо по тремъ линіямъ *непересѣкающимся* въ одной точкѣ.

Ученіе о крестѣ силъ примѣняется къ рѣшенію этого рода задачъ на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Каждая часть пространственнаго сооруженія, мысленно отсѣченная отъ всего сооруженія, должна находиться въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ заданныхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ этой части сооруженія, и подъ дѣйствіемъ усилій, приложенныхъ къ разсѣченнымъ стержнямъ системы и замѣняющихъ собою дѣйствіе мысленно устраненной части сооруженія.

Система заданныхъ силъ, дѣйствующихъ на разсматриваемую часть сооруженія, вмѣстѣ съ системою извѣстныхъ усилій въ нѣкоторыхъ изъ разсѣченныхъ стержней системы, образуетъ совокупность силъ, которая, въ случаѣ равновѣсія сооруженія, должна уравновѣшиваться *шестью неизвѣстными* усиліями въ шести изъ числа разсѣченныхъ стержней системы.

Совокупность заданныхъ силъ и извѣстныхъ усилій, какъ бы эти силы и усилія ни были расположены въ пространствѣ, можетъ быть всегда приведена къ кресту силъ. Слѣдовательно, шесть неизвѣстныхъ усилій, долженствующихъ уравновѣшивать упомянутую совокупность заданныхъ силъ и извѣстныхъ усилій, должны привестись къ *равнозначному съ первымъ кресту силъ*, съ соотвѣтствующими силами направленными въ стороны противоположныя направленію силъ перваго креста.

Изъ этого слѣдуетъ, что и первый *крестъ силъ можетъ быть разложенъ на составляющія по шести линіямъ*, соотвѣтствующимъ осямъ разсѣченныхъ стержней, усилія коихъ неизвѣстны.

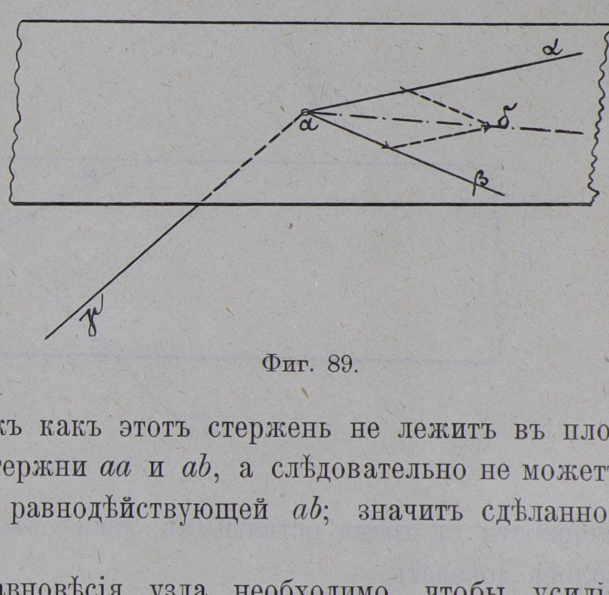
Чтобы закончить изложеніе первоначальныхъ свѣдѣній о сложеніи и разложеніи силъ въ пространствѣ, необходимыхъ для расчета пространственныхъ системъ, разсмотримъ еще два частныхъ случая равновѣсія усилій въ стержняхъ пространственной фермы, сходящихся въ одной узловой точкѣ.

§ 14. Частные случаи равновѣсія усилій въ стержняхъ пространственной фермы, сходящихся въ одной узловой точкѣ.

Теорема 1-я. Если въ данномъ узлѣ сходятся лишь три стержня, не лежащіе въ одной плоскости, и если къ узлу не приложено никакой внѣшней силы, то для равновѣсія узла, усилія въ каждомъ изъ трехъ стержней должны быть порознь равны нулю.

Доказательство отъ противнаго (фиг. 89).

Изъ числа трехъ сходящихся въ одной точкѣ и не лежащихъ въ одной плоскости стержней, выберемъ два, а именно: $a\alpha$ и $a\beta$, и проведемъ черезъ эти стержни плоскость. Затѣмъ, предположимъ, что въ стержняхъ $a\alpha$, $a\beta$ и $a\gamma$ имѣются усилія, *отличныя отъ нуля.* Въ такомъ случаѣ, усилія $a\alpha$ и $a\beta$ могутъ быть приведены къ одной равнодѣйствующей $a\delta$, лежащей въ плоскости, проведенной черезъ стержни $a\alpha$ и $a\beta$. Эта равнодѣйствующая $a\delta$ ни въ какомъ случаѣ не можетъ уравновѣситься съ усиліемъ въ стержнѣ $a\gamma$, такъ какъ этотъ стержень не лежитъ въ плоскости, проходящей черезъ стержни aa и ab, а слѣдовательно не можетъ совпасть *въ одну прямую* съ равнодѣйствующей ab; значитъ сдѣланное нами предположеніе невѣрно.



Фиг. 89.

Такимъ образомъ, для равновѣсія узла необходимо, чтобы усилія во всѣхъ трехъ стержняхъ были *порознь равны нулю*; что и требовалось доказать.

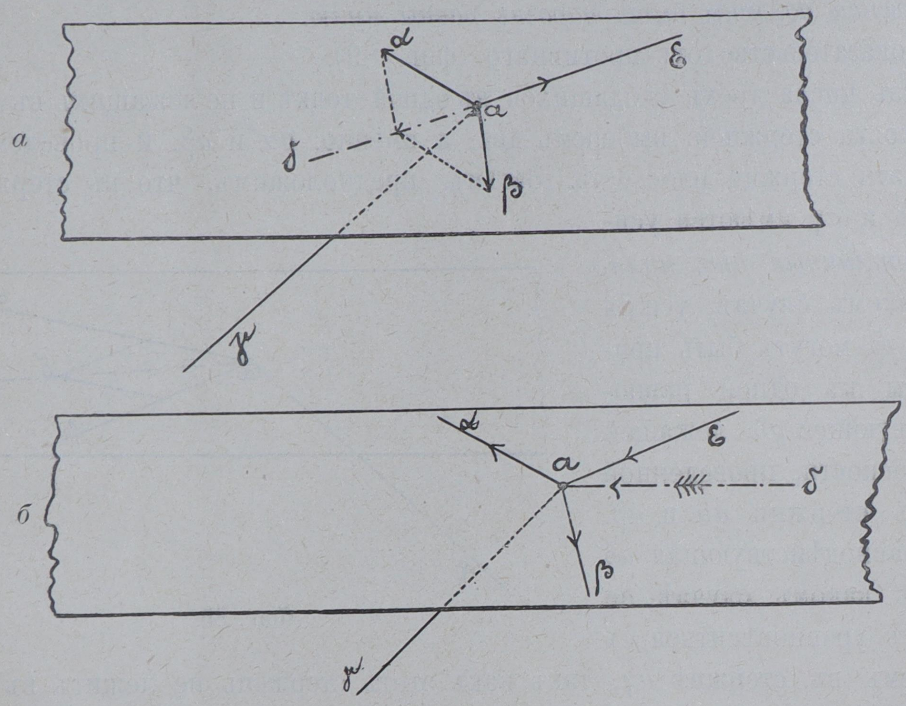
Теорема 2-ая. Если въ данномъ узлѣ сходятся четыре стержня, зиъ коихъ три лежатъ въ одной плоскости, и если въ этомъ узлѣ никакой внѣшней силы не приложено, то для равновѣсія узла необходимо, чтобы усиліе въ четвертомъ стержнѣ было равно нулю.

Для доказательства разсмотримъ два предположенія:

1) усилія въ трехъ стержняхъ, лежащихъ въ одной плоскости, взаимно уравновѣшиваются (фиг. 90а), и

2) усилія въ трехъ стержняхъ, лежащихъ въ одной плоскости, приводятся къ одной равнодѣйствующей (фиг. 90б).

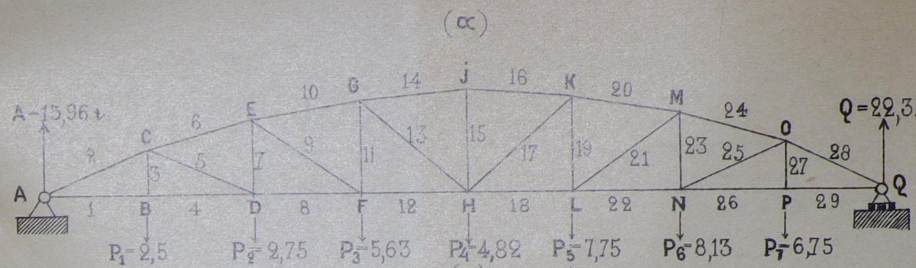
Въ первомъ случаѣ (фиг. 90а) усилія въ двухъ изъ трехъ стержней, лежащихъ въ одной плоскости, приводятся къ равнодѣйствующей, равной и прямопротивоположной усилію въ третьемъ стержнѣ, лежащемъ въ той же плоскости, вслѣдствіе чего получается равновѣсіе усилій въ трехъ стержняхъ, лежащихъ въ одной плоскости, т. е. равнодѣйствующая этихъ усилій *равна нулю*. Сверхъ того, по условію, внѣшняя сила, приложенная къ данному узлу, тоже *равна нулю*; слѣдовательно, для равновѣсія узла необходимо, чтобы усиліе въ четвертомъ стержнѣ, не лежащемъ въ одной

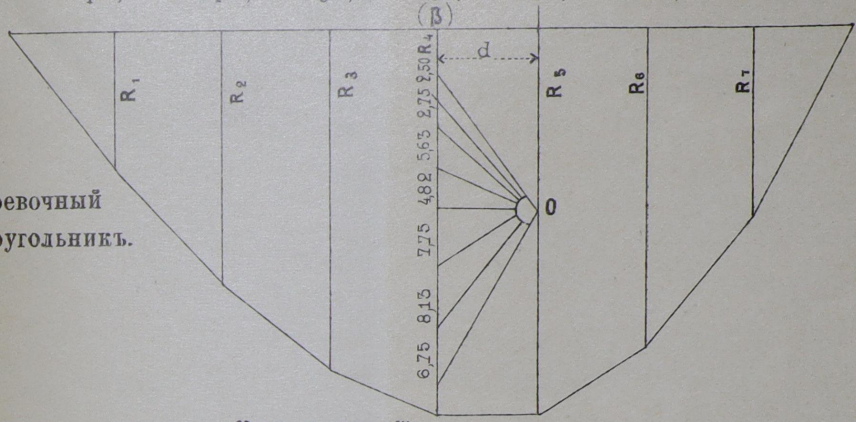


Фиг. 90.

плоскости съ тремя остальными, также *было равно нулю*, что и требовалось доказать.

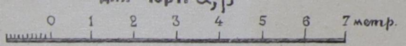
Во второмъ случаѣ, по сдѣланному предположенію, усилія въ трехъ стержняхъ, лежащихъ въ одной плоскости, приводятся къ одной равнодѣйствующей, отличной отъ нуля (фиг. 90б). Эта равнодѣйствующая, очевидно, ни въ какомъ случаѣ не можетъ уравновѣситься съ усиліемъ въ четвертомъ стержнѣ, такъ какъ послѣдній не лежитъ въ плоскости первыхъ трехъ стержней, а слѣдовательно, не можетъ совпасть *въ одну прямую* съ упомянутою равнодѣйствующей. Значитъ, сдѣланное предположеніе невѣрно, такъ какъ узелъ не можетъ быть при этомъ предположеніи въ равновѣсіи, слѣдовательно, приходится возвратиться къ первому предположенію, которое привело къ доказательству теоремы.



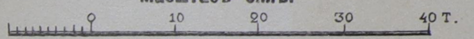


Веревочный многоугольникъ.

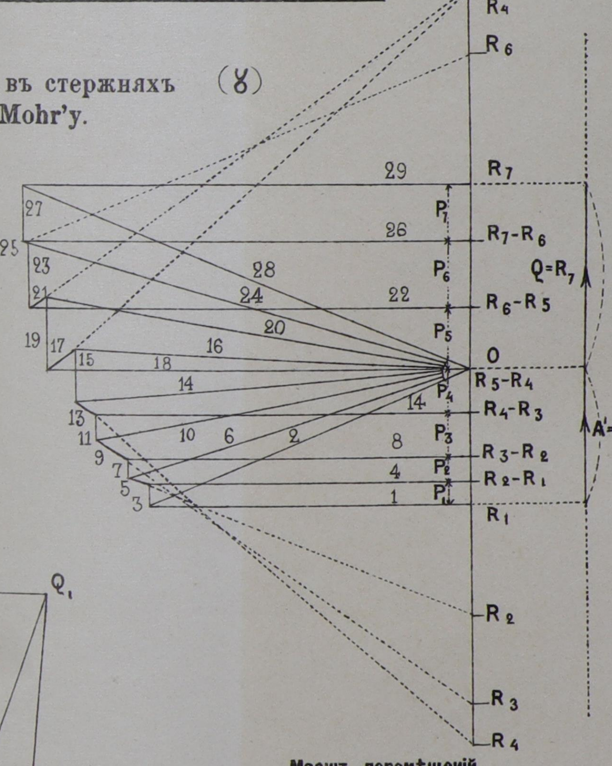
Масшт. разстояній для черт. α, β



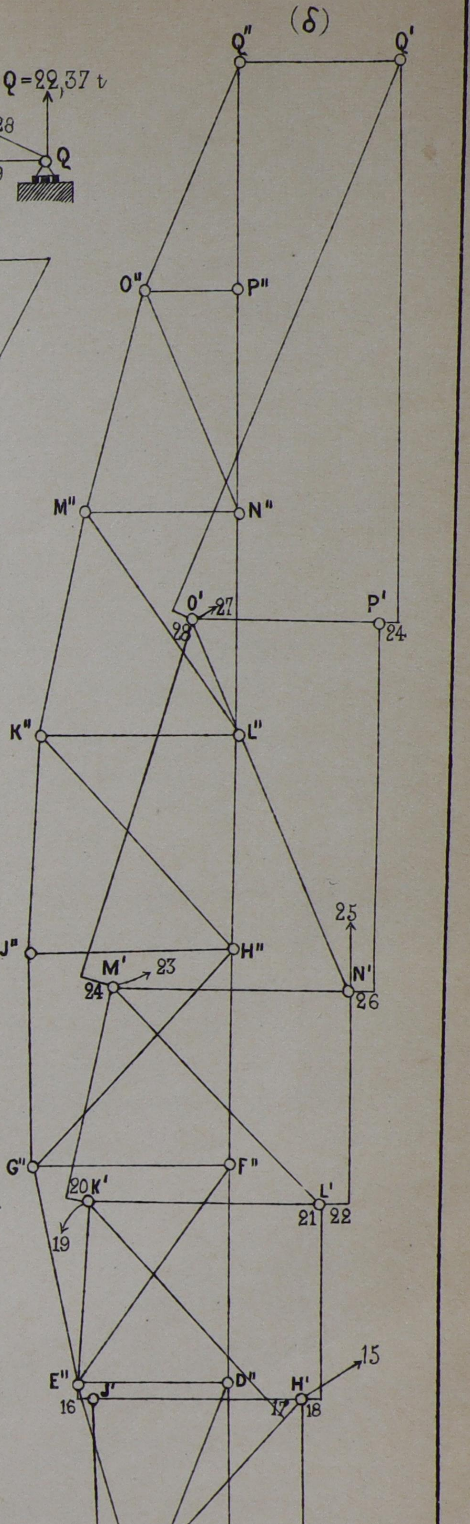
Масштабъ силъ.

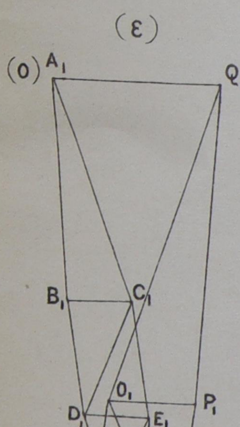


Діаграмма усилій въ стержняхъ фермы по Mohr'у. (γ)



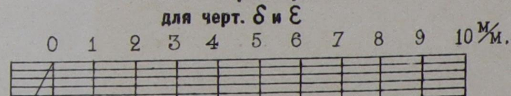
Планъ перемѣщеній.

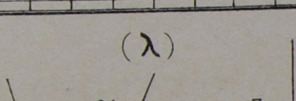




Полныя перемѣщенія узловыхъ точекъ фермы.

Масшт. перемѣщеній для черт. δ и ε





Деталь черт. δ у точки A' (увеличено въ 4 раза).

ЛИТ. ГАКШТЕТТЕРЪ С. П. Б.