Wilh. Keck,

Профессоръ Высшей Технической Школы въ Ганновер[illegible]

ГРАФИЧЕСКАЯ СТАТИКА

въ приложеніи къ

РАЗСЧЕТУ СТРОИТЕЛЬНЫХЪ СООРУЖЕНІЙ

(Дополненіе къ сочиненію того же автора: „Основы разсчета строительныхъ сооруженій по методамъ теоріи упругости").

Перевелъ съ нѣмецкаго

П. С. Страховъ,

Преподаватель ИМПЕРАТОРСКАГО Техническаго Училища.

Съ 83 чертежами въ текстѣ и 4 таблицами.

Москва.

Т[illegible]-Литографія Высочайше утвер. „Русск. Т-ва печатн. и издат. дѣла".

Чистые пруды, собственный домъ.

1896.

Wilh. Keck,

Профессоръ Высшей Технической Школы въ Ганновере.

ГРАФИЧЕСКАЯ СТАТИКА

въ приложении къ

РАЗСЧЕТУ СТРОИТЕЛЬНЫХЪ СООРУЖЕНІЙ

(Дополненіе къ сочиненію того же автора: „Основы разсчета строительныхъ сооруженій по методамъ теоріи упругости“).

Перевелъ съ нѣмецкаго

П. С. Страховъ,

Преподаватель ИМПЕРАТОРСКАГО Техническаго Училища.

Съ 83 чертежами въ текстѣ и 4 таблицами.

Москва.

Типо-Литографія Высочайше утвержд. „Русск. Т-ва печатн. и издат. дѣла“.

Чистые пруды, собств. домъ.

1896.

Оглавленіе.

Стр.

Стр.

ОТДѢЛЪ IV.

Распредѣленіе напряженій въ данномъ поперечномъ сѣченіи.

ОТДѢЛЪ V.

Изгибающіе моменты и поперечныя силы для балки, лежащей на 2-хъ опорахъ.

ОТДѢЛЪ VI.

Простыя фермы.

ОТДѢЛЪ VII.

Давленіе грунта и подпорныя стѣнки.

ОТДѢЛЪ VIII.

Цилиндрическіе своды.

Предисловіе.

Предлагаемая книга является окончаніемъ и дополненіемъ моего сочиненія „Vorträge über Elasticitäts-Lehre als Grundlage für die Festigkeits-Berechnung der Bauwerke", появившагося въ прошедшемъ году *).

Первые два отдѣла книги разсматриваютъ приложеніе принципа силового и веревочнаго многоугольниковъ къ сложенію и разложенію силъ, чему предпосылается изложеніе различныхъ способовъ превращенія площадей плоскихъ фигуръ. Слѣдующій отдѣлъ посвященъ опредѣленію центровъ тяжести, статическихъ и центробѣжныхъ моментовъ и моментовъ инерціи площадей плоскихъ фигуръ, а также нахожденію ядра различныхъ поперечныхъ сѣченій (фасоннаго желѣза, каменнаго столба, желѣзнодорожнаго рельса). Теоретическія основанія всего этого выводятся въ теоріи упругости, а потому уже здѣсь не повторяются, хотя всюду, по возможности, приводятся поясненія, необходимыя для пониманія сути дѣла. Съ этою цѣлью, между прочимъ, въ текстѣ помѣщены нѣкоторыя изъ наиболѣе важныхъ построеній, взятыя изъ упомянутаго выше сочиненія автора. Все сказанное относится также и къ четвертому отдѣлу, трактующему о распредѣленіи напряженій въ данномъ поперечномъ сѣченіи. Въ слѣдующихъ двухъ отдѣлахъ разсматриваются балки, лежащія на 2-хъ опорахъ, и простѣйшія фермы, причемъ изложеніе ведется совершенно независимо отъ

*) Это сочиненіе имѣется на русскомъ языкѣ: В. Кекъ, Основы разсчета строительныхъ сооруженій по методамъ теоріи упругости, переводъ съ нѣм. П. С. Страхова, съ 300 черт. въ текстѣ, Москва 1896, ц. 3 р.
Изд.

теоріи упругости, между тѣмъ какъ послѣдніе два отдѣла, относящіеся къ давленію грунта на подпорныя стѣнки и къ цилиндрическимъ сводамъ, по существу дѣла, весьма тѣсно съ нею связаны.

Большинство фигуръ приводятся въ текстѣ, и лишь черезчуръ крупныя по размѣрамъ, напр. нахожденіе ядра сѣченія углового и Z-образнаго желѣза, рельса, каменнаго столба, а также графическій разсчетъ подпорной стѣнки и мостового свода, вынесены на отдѣльныя таблицы.

Литературные источники приводятся всюду въ видѣ сносокъ.

Ганноверъ, іюнь 1894.

В. Кекъ.

Введеніе.

Объ исполненіи геометрическихъ чертежей.

Всѣ чертежи, требующіе большей или меньшей точности, должны, разумѣется, быть исполнены при помощи хорошихъ чертежныхъ инструментовъ и твердаго, остро очиненнаго карандаша. Наиболѣе важныя точки пересѣченій и дѣленій слѣдуетъ, для того, чтобы онѣ быля болѣи замѣтны, очерчивать маленькими окружностями, которыя, впослѣдствіи, могутъ быть обведены окончательно при помощи кронциркуля. Наглядность чертежа достигается соотвѣтствующимъ примѣненіемъ различныхъ красокъ, причемъ данныя линіи проводятся черной краской, вспомогательныя — синей и искомыя—красной. Если, вслѣдствіе чего либо, приходится ограничиться какой нибудь одной крсакой, то данныя линіи можно вычерчивать сплошными, вспомогательныя нѣсколько болѣе тонкимъ пунктиромъ, и, наконецъ, искомыя — пунктиромъ толстымъ. Разумѣется, такое правило не можетъ быть вполнѣ строго приложено къ болѣе сложнымъ задачамъ.

Выдѣленіе плоскостей можетъ быть произведено при помощи прокрыванія ихъ какимъ нибудь слабымъ колеромъ, или же штриховкою, причемъ ровность этой послѣдней всего лучше достигается толстыми штрихами, проводимыми блѣдной тушью.

Отдѣлъ I.

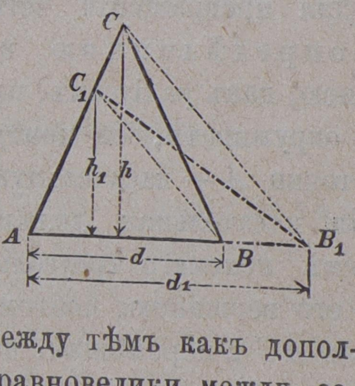
Способы превращенія площадей плоскихъ фигуръ.

Въ приложеніяхъ графическаго метода часто приходится выводить величины силъ изъ квадратнаго содержанія данныхъ фигуръ, вслѣдствіе чего, во многихъ случаяхъ, является весьма желательнымъ произвести геометрическое превращеніе одной площади въ другую. Поэтому здѣсь и будутъ приведены, вкратцѣ, всѣ наиболѣе употребительные способы такихъ превращеній.

1. Превращеніе треугольника въ другой, ему равновеликій.

Для того, чтобы превратить треугольникъ ABC (фиг. 1), съ основаніемъ d и высотою h, въ равновеликій ему треугольникъ съ основаніемъ $d_1 = AB_1$, проведемъ линію B_1C и параллельную ей BC_1; тогда точка C_1 будетъ искомою вершиною новаго треугольника AB_1C_1. — Дѣйствительно, по чертежу имѣемъ: $AC_1 : AC = d : d_1$, а слѣдовательно $h_1 : h = d : d_1$, или ${}^1/_2\, d_1 h_1 = {}^1/_2\, d h$. Справедливость этого подтверждается также тѣмъ, что площадь ABC_1 принадлежитъ обоимъ треугольникамъ, между тѣмъ какъ дополняющіе треугольники BC_1C и BC_1B_1 равновелики между собою вслѣдствіе того, что вершины ихъ C и B_1 лежатъ на линіи, параллельной ихъ общему основанію BC_1.

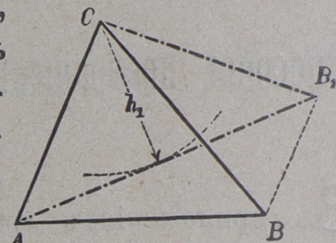
Фиг. 1.



Если новое основаніе d_1 содержитъ въ себѣ 2 единицы длины, то $F = {}^1/_2 \cdot 2 \cdot h_1 = h_1$, т. е. найденная высота h_1, будучи измѣрена въ принятыхъ единицахъ длины, дастъ площадь даннаго треугольника въ соотвѣтствующихъ квадратныхъ единицахъ.

Для превращенія треугольника ABC (фиг. 2) въ таковой-же съ высотою h_1, очертимъ изъ вершины C, какъ центра, дугу окружности радіусомъ h_1, проведемъ касательную къ этой дугѣ, черезъ точку A, до пересѣченія въ B_1 съ параллелью линіи AC, проведенною черезъ точку B. Тогда очевидно, что $AB_1C = ABC$, и, кромѣ того, треугольникъ AB_1C имѣетъ желаемую высоту h_1. (При $h_1 = 2$, будемъ имѣть $ABC = AB_1$). Такой способъ, разумѣется, примѣнимъ лишь въ томъ случаѣ, когда хотя одна изъ сторонъ даннаго треугольника будетъ равна, или больше, h_1.

Фиг. 2.

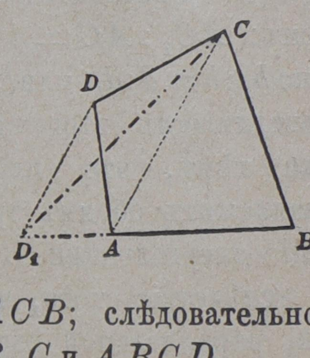


2. Превращеніе четыреугольника.

Превращеніе четыреугольника $ABCD$ (фиг. 3) въ треугольникъ можно произвести проводя діагональ AC и перемѣщая, параллельно ей, вершину четыреугольника D въ точку D_1; тогда $ACD_1 = ACD$, а слѣдовательно и $D_1BC = ABCD$.

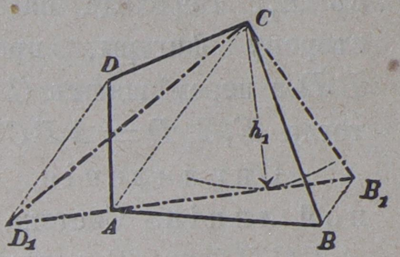
Для превращенія четыреугольника въ треугольникъ съ опредѣленною высотою h_1 (фиг. 4) этою послѣднею, какъ радіусомъ, проведемъ опять дугу окружности, съ центромъ въ C, а изъ точки A — касательную къ этой дугѣ. Такая касательная должна быть основаніемъ искомаго треугольника, а точка C — его вершиною; поэтому, проводя діагональ AC и перемѣщая, параллельно ей, вершину D въ D_1 а B въ B_1, получимъ, что $ACD_1 = ACD$ и $ACB_1 = ACB$; слѣдовательно будутъ равны между собою и площади D_1B_1C и $ABCD$.

Фиг. 3.



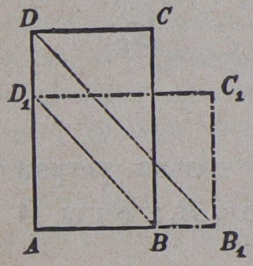
Превращеніе прямоугольника $ABCD$ (фиг. 5) въ таковой-же съ основаніемъ $d_1 = AB_1$ производится совершенно подобно тому, какъ это было указано для треугольника (фиг 1), т. е. проводя линію B_1D и параллельную къ ней BD_1; тогда D_1 будетъ искомою вершиною новаго прямоугольника $AB_1C_1D_1$.

Фиг. 4.

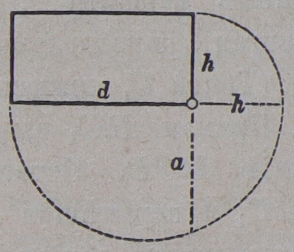


Для превращенія прямоугольника $d \cdot h$ въ квадратъ a^2 (фиг. 6) продолжимъ d на величину h и построимъ на линіи $d+h$, какъ на діаметрѣ, полуокружность; тогда, непосредственно на чертежѣ, получимъ сторону квадрата a. — Того-же можно достигнуть (фиг. 7), откладывая d и h отъ точки A

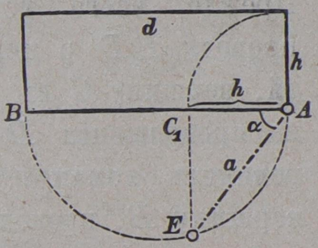
Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.



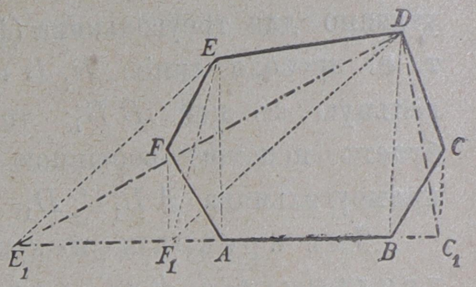
въ одну и ту-же сторону и описывая на d, какъ діаметрѣ, полуокружность; тогда, по чертежу, получимъ $AE = a$. (Такъ какъ $\cos\alpha = AC_1 : AE = h : a$, а также $\cos\alpha = AE : AB = a : d$, то $a^2 = d \cdot h$).

3. Превращеніе многоугольниковъ.

Для того, чтобы превратить произвольный многоугольникъ въ треугольникъ, приходится лишь нѣсколько разъ примѣнить уже показанный для четыреугольника способъ послѣдовательнаго устраненія вершинъ (фиг. 3). На фиг. 8, прежде всего, устраняется вершина F, для чего проводится линія AE, и точка F перемѣщается, параллельно ей, въ F_1. Такимъ образомъ шестиугольникъ $ABCDEF$

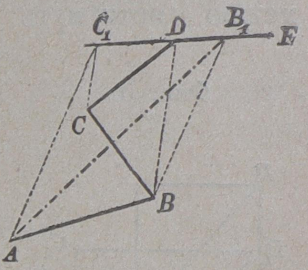
приводится къ виду пятиугольника F_1BCDE. Затѣмъ проводятъ F_1D и параллельно этой линіи перемѣщаютъ E въ E_1. Переходя на правую сторону фигуры, проводятъ BD и перемѣщаютъ C въ C_1; тогда $E_1C_1D = ABCDEF$.

Фиг. 8.



Спрямленіе ломаной линіи. Система линій $ABCD$ (фиг. 9) должна быть замѣнена прямою линіею, проходящею черезъ точки A и B_1, причемъ послѣдняя принадлежитъ линіи DE, но при томъ условіи, чтобы площадь, лежащая вправо отъ прямой AB_1, оставалась такой же, какъ и при ограниченіи ея ломаною линіею $ABCD$. Прежде всего устранимъ вершину C, проводя BD и передвигая, параллельно ей, вершину C въ C_1. (Точка C_1 лежитъ на продолженіи DE). Прямая BC_1 выровняетъ ломаную линію BCD. Остается только устранить вершину B, проводя AC_1 и перемѣщая B въ B_1; тогда AB_1 и будетъ искомою спрямляющею линіею.

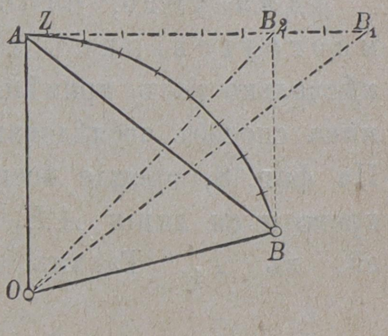
Фиг. 9.



4. Превращеніе кругового сектора и сегмента въ треугольникъ.

Площадь F сектора OAB (фиг. 10), съ радіусомъ $r = OA$, равна, какъ извѣстно, $\frac{1}{2} r \cdot \widehat{AB}$. Эту площадь можно превратить въ прямоугольный треугольникъ OAB_1, сторона котораго AB_1 будетъ равна длинѣ дуги AB. Для этого проведемъ касательную въ точкѣ A и замѣнимъ дугу AB вписаннымъ въ нее многоугольникомъ съ произвольнымъ числомъ сторонъ; это можно сдѣлать, взявъ циркулемъ произвольную небольшую длину и отложивъ ее по дугѣ BA, отъ точки B (но не отъ A). При этомъ

Фиг. 10.



конечная точка дѣленія не попадетъ, разумѣется, совершенно точно въ A; но эта точка Z, вблизи A, будетъ настолько близка къ касательной AB_1, что ее можно будетъ свободно принять лежащею на этой линіи. Затѣмъ, не обращая вниманія на длину AZ, слѣдуетъ нанести по касательной, отъ точки Z до B_1, столько дѣленій, сколько ихъ получилось между точками дуги B и Z (на фигурѣ — восемь); тогда получимъ, приближенно, что $ZB_1 = \widehat{ZB}$ и $AB_1 = \widehat{AB}$, а слѣдовательно треугольникъ OAB_1 равенъ сектору OAB.

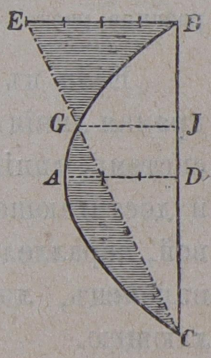
Сегментъ $\widehat{AB}B\overline{A}$ представляетъ собою разность между соотвѣтствующимъ секторомъ и треугольникомъ AOB. Проводя $BB_2 \parallel OA$, получимъ $OAB_2 = OAB$; слѣдовательно треугольникъ OB_2B_1 будетъ равенъ данному сегменту.

Если-бы при нанесеніи дѣленій циркулемъ не получалось погрѣшностей, то превращеніе площадей было-бы тѣмъ точнѣе, чѣмъ меньше былъ бы размѣръ дѣленій. Но способность циркуля пружинить, косая постановка его на бумагу и т. п., порождаютъ различныя неправильности, такъ что слишкомъ большое число мелкихъ дѣленій является безполезнымъ въ смыслѣ точности. Принимая размѣръ дѣленія отъ $^1/_6\,r$ до $^1/_8\,r$, найдемъ, что разница между хордою и дугою составляетъ лишь отъ $^1/_{700}$ до $^1/_{1200}$ длины дуги. Бо́льшая точность при черченіи, обыкновенно, недостижима уже на основаніи иныхъ, постороннихъ условій, да кромѣ того и не является необходимой, а потому вообще можно рекомендовать $^1/_6$ или $^1/_8\,r$, какъ размѣры дѣленій, наиболѣе подходящіе для откладыванія циркулемъ.

5. Превращеніе параболическаго сегмента въ треугольникъ.

Если A (фиг. 11) представляетъ собою вершину параболы и BC — хорду, перпендикулярную къ оси параболы, то площадь F параболическаго сегмента BAC равна, какъ извѣстно, $^2/_3$ площади описаннаго прямоугольника, т. е. $F = {}^2/_3\,AD \cdot BC$. Поэтому, откладывая $BE = {}^4/_3\,AD$ и проводя линію CE, найдемъ, что $F = BCE$. (Заштрихованныя площади, конечно, должны быть тоже равны между собою).

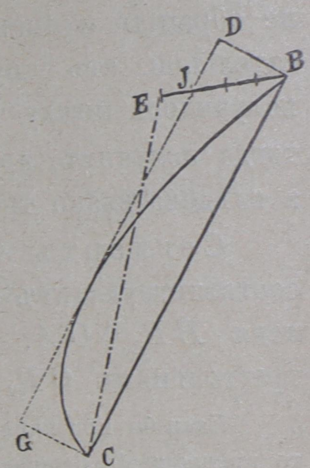
Фиг. 11.



Очень плоскіе круговые сегменты могутъ быть принимаемы за параболическіе, а слѣдовательно ихъ тоже можно превращать въ треугольники по только что указанному способу.

Этотъ-же способъ оказывается пригоднымъ и въ томъ случаѣ, когда параболическій сегментъ ограниченъ всякою произвольною, косо-направленною хордою (фиг. 12). Проведемъ къ параболѣ касательную, параллельную такой хордѣ, и въ точкахъ B и C возставимъ къ ней перпендикуляры; тогда площадь, ограничиваемая параболой, будетъ равна $^2/_3$ прямоугольника $BCGD$. Если-же линіи BD и CG будутъ хотя и неперпендикулярны къ хордѣ, но параллельны между собою, то получится параллелограммъ, равновеликій такому прямоугольнику. Поэтому, если какая нибудь прямая линія, проведенная совершенно произвольно черезъ точку B, пересѣчетъ касательную, параллельную хордѣ, въ точкѣ J, то, раздѣляя BJ на 3 равныя части, откладывая одну такую часть отъ J, на продолженіи BJ, до E и проводя линію CE, получимъ что треугольникъ BCE будетъ равенъ данной площади параболическаго сегмента.

Фиг. 12.



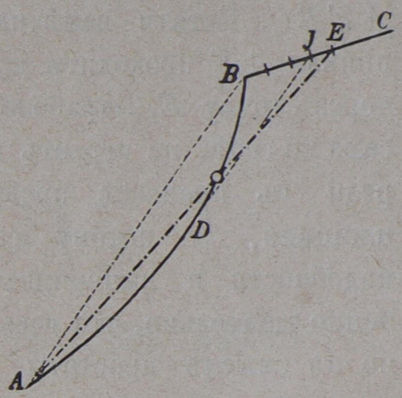
Этотъ графическій способъ находитъ себѣ часто примѣненіе, вслѣдствіе того, что весьма плоскія кривыя можно разсматривать какъ параболы, а всѣ остальныя кривыя линіи, всегда можно разбить на такія составныя части, что каждая изъ этихъ послѣднихъ, въ отдѣльности, можетъ быть принята за параболу.

При одинаковыхъ размѣрахъ хорды и стрѣлки, площадь круговаго сегмента всегда больше площади соотвѣтствующаго параболическаго. При центральномъ углѣ въ 30^0, или при стрѣлкѣ въ $^1/_{15}$ хорды, эта разница составляетъ, приблизительно, $0{,}6\,^0/_0$, при центр. углѣ въ 45^0 и стрѣлкѣ въ $^1/_{10}$, разница равна $0{,}8\,^0/_0$, а при 57^0, или стрѣлкѣ въ $^1/_8$, она достигаетъ $1^1/_4\,^0/_0$.

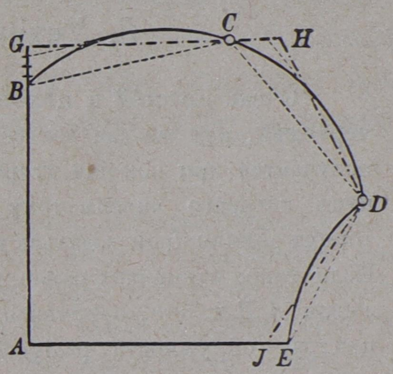
Если къ какой нибудь плоской кривой AB присоединяется прямая линія BC (фиг. 13), и если требуется спрямить такую систему линій при помощи линіи AE, проходящей черезъ A и достигающей BC, то проведя касательную DJ къ данной кривой, параллельную хордѣ AB, отложивъ $BE = {}^4/_3 BJ$ и строя, наконецъ, линію AE, найдемъ, что она и будетъ спрямляющею.

Если требуется превратить въ многоугольникъ фигуру 14, отчасти ограниченную криволинейно, то входящую въ очертаніе кривую слѣдуетъ разложить на столько частей BC, CD, DE, чтобы каждую изъ нихъ, въ отдѣльности, можно было принять за параболу. Затѣмъ, прежде всего, проведемъ черезъ точку C спрямляющую линію CG для кривой BC, пользуясь по общему правилу продолженіемъ прямой AB; для CD получится, подобнымъ-же образомъ, спрямляющая DH, проходящая черезъ точку D и продолженіе прямой CG, и, наконецъ, линія DJ будетъ спрямляющею для кривой DE. Пятиугольникъ-же $AGHDJ$ можетъ быть уже легко превращенъ въ треугольникъ по способу, указанному на стр. 5.

Фиг. 13.

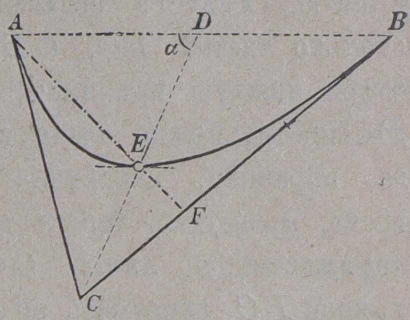


Фиг. 14.



Параболическій треугольникъ, т. е. площадь, ограничиваемая параболой и двумя пересѣкающимися ея касательными, можетъ быть легко превращена въ треугольникъ, ограниченный прямолинейно. Если точка C представляетъ собою пересѣченіе касательныхъ параболы (фиг. 15) и D — средину хорды AB, то линіи CD и AB будутъ сопряженными относительно данной параболы; прямая CD раздѣляется параболой пополамъ въ точкѣ E, и касательная, проведенная въ этой точкѣ, будетъ параллельна хордѣ AB. Слѣдовательно площадь параболы $ADBEA$ будетъ равна $^2/_3\, AB \cdot DE \cdot \sin\alpha = {}^1/_3\, AB \cdot CD \cdot \sin\alpha$, между тѣмъ какъ внѣшній треугольникъ ABC будетъ имѣть площадь, равную $^1/_2\, AB \cdot CD \cdot \sin\alpha$; поэтому площадь всего параболическаго треугольника $AEBC = {}^1/_6\, AB \cdot CD \cdot \sin\alpha$, т. е. одной трети площади внѣшняго треугольника ABC. Такимъ образомъ, если сдѣлаемъ $CF = {}^1/_3\, BC$, то треугольникъ ACF будетъ равновеликъ съ даннымъ параболическимъ треугольникамъ $AEBC$. Кстати замѣтимъ, что прямая AF проходитъ какъ разъ черезъ точку E. Парабола AEB, сама по себѣ, не играетъ никакой роли въ процессѣ превращенія площади, а потому ее нѣтъ надобности и вычерчивать особенно тщательно, что весьма важно въ смыслѣ простоты практическаго приложенія указаннаго способа; такимъ образомъ оказывается совершенно достаточнымъ знать лишь конечныя точки параболы A и B, да точку пересѣченія ея касательныхъ C.

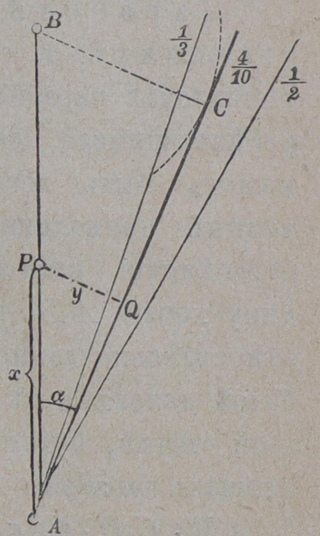
Фиг. 15.



6. Уменьшительный масштабъ.

Очень простой и цѣлесообразный масштабъ, служащій для уменьшенія чертежей, или же для нанесенія въ уменьшенномъ видѣ всякаго рода длинъ, получается при помощи сторонъ такого угла, синусъ котораго равенъ тому отношенію, въ которомъ должно производиться уменьшеніе (фиг. 16). Если такое отношеніе равно, напр., $^4/_{10}$, то, откладывая $AB = 5^{cm}$, очерчивая изъ точки B, какъ центра, окружность радіусомъ, равнымъ 2^{cm}, и проводя къ ней касательную черезъ точку A, получимъ $\sin BAC = 0{,}4$. Тогда, если требуется для данной длины x найти уменьшеніе $y = 0{,}4x$, то откладывая по AB, отъ точки A, величину $x = AP$, измѣряемъ по перпендикуляру PQ разстояніе точки P отъ другой стороны построеннаго угла, что дѣлается весьма просто и точно при помощи циркуля, устанавливая одну его ножку въ точкѣ P, а при помощи другой отыскивая точку Q; тогда PQ и будетъ желаемая величина y. Такой масштабъ не требуетъ, такимъ образомъ, цѣлой массы параллельныхъ линій, а ограничивается лишь двумя сторонами соотвѣтствующаго угла. На фиг. 16, кромѣ линіи AC, соотвѣтствующей 0,4, проведены еще двѣ другія стороны угла, для уменьшеній въ $^1/_3$ и $^1/_2$. Вычерчиваніе такого масштаба, требуя всего 1 — 2 минуты времени, оказывается весьма удобнымъ даже и въ томъ случаѣ, когда приходится уменьшать небольшое число длинъ.

Фиг. 16.



Отдѣлъ II.

Сложеніе силъ, лежащихъ въ одной плоскости.

1. Предварительное замѣчаніе.

Въ графической статикѣ всѣ силы изображаются прямыми линіями, проведенными въ извѣстномъ направленіи, занимающими извѣстное положеніе, обладающими опредѣленной длиной и характеризуемыми стрѣлками. Эти силы слагаются графическимъ путемъ въ одну равнодѣйствующую и, если нужно, изыскиваются условія ихъ равновѣсія.

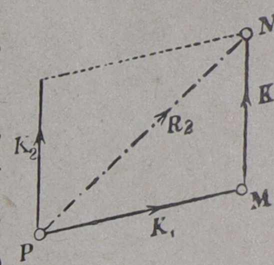
Правило параллелограмма силъ, въ сущности, непосредственно указываетъ на возможность чисто графическаго изображенія механическихъ процессовъ, уже вслѣдствіе того, что согласно ему, силы, изображаемыя извѣстными отрѣзками прямыхъ линій, приводятся къ одной равнодѣйствующей, при помощи вычерчиванія параллелограмма. Въ дальнѣйшемъ развитіи механики такое, чисто геометрическое, рѣшеніе вопроса было облечено въ аналитическую форму, были установлены извѣстныя условія равновѣсія, зависящія отъ алгебраической суммы слагающихъ по извѣстному направленію и отъ суммы соотвѣтствующихъ моментовъ; лишь позднѣе обратились опять къ по существу болѣе близкому къ истинѣ, графическому развитію ученія о силахъ. Такимъ образомъ вообще можно сказать, что: „Графостатика болѣе стара, чѣмъ статика аналитическая, такъ какъ правило параллелограмма, въ сущности, имѣетъ чисто геометрическое значеніе“.

2. Сложеніе силъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ.

Если данныя силы (лежащія въ одной плоскости) имѣютъ общую точку пересѣченія P, то равнодѣйствующая ихъ должна проходить черезъ ту-же точку, и ее приходится опредѣлять лишь по величинѣ, положенію и направленію (направленію стрѣлки).

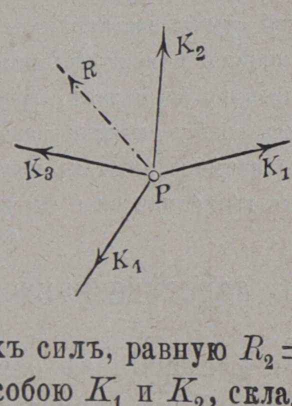
Пусть, первоначально, намъ приходится имѣть дѣло съ 2-мя силами K_1 и K_2 (фиг. 17); тогда, какъ извѣстно, равнодѣйствующею этихъ силъ будетъ діагональ построеннаго на нихъ параллелограмма. Но для нахожденія этой діагонали вовсе нѣтъ необходимости въ цѣломъ параллелограммѣ; совершенно достаточно одного треугольника PMN, который получится, если къ концу M первой изъ силъ K_1 присоединимъ вторую силу K_2 (передвинутую параллельно самой себѣ), въ видѣ отрѣзка MN, такимъ образомъ, чтобы стрѣлка силы была направлена отъ M къ N, и, значитъ чтобы въ послѣдовательности силъ PMN стрѣлки шли по одному направленію; тогда третья сторона треугольника дастъ равнодѣйствующую, по величинѣ и направленію, а стрѣлка ея будетъ направлена отъ точки приложенія P къ конечной точкѣ N. Присоединяя къ данной системѣ силъ еще нѣкоторую силу $K_3 = -R_2$, увидимъ, что она уравновѣситъ силу R_2, а слѣдовательно и силы K_1 и K_2. Силы K_1, K_2 и K_3 составятъ треугольникъ съ одинаковымъ направленіемъ стрѣлокъ сторонъ.

Фиг. 17.

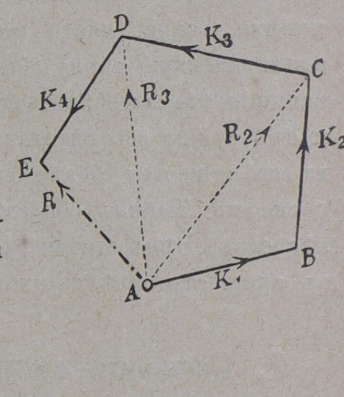


Если требуется сложить нѣсколько силъ, проходящихъ черезъ точку P, напр. K_1, K_2, K_3, K_4 (фиг. 18), то цѣлесообразнѣе будетъ произвести нахожденіе равнодѣйствующей R на отдѣльномъ чертежѣ (фиг. 18 а). Для этого наносятъ, прежде всего, отъ точки A силу $K_1 = AB$, и, полагая $K_2 = BC$, находятъ равнодѣйствующую этихъ двухъ силъ, равную $R_2 = AC$. Съ этой силой, вполнѣ замѣняющей собою K_1 и K_2, складываютъ, подобнымъ-же образомъ, силу K_3, присоединяя ее въ видѣ отрѣзка DE, и получаютъ, наконецъ, равнодѣйствующую AE всѣхъ данныхъ силъ безъ исключенія. Очевидно, что для нахожденія точки A

Фиг. 18.



Фиг. 18 а.



является совершенно излишнимъ проведеніе діагоналей AC и AD. Совершенно достаточно нанести, послѣдовательно, всѣ данныя силы, начиная отъ точки A и соблюдая условіе, чтобы стрѣлки всѣхъ элементовъ многоугольника $ABCDE$ шли одна за другой; тогда замыкающая сторона такого многоугольника дастъ равнодѣйствующую по величинѣ и направленію, причемъ ея стрѣлка будетъ направлена отъ начальной точки къ конечной, значитъ противоположно стрѣлкамъ данныхъ силъ. Полученную такимъ образомъ силу R можно всегда вообразить передвинутою параллельно самой себѣ въ данную точку приложенія силъ P. Послѣдовательность силъ $ABCDE$ называется **силовымъ многоугольникомъ**.

Подобно тому, какъ діагональ AD представляетъ собою равнодѣйствующую силъ K_1, K_2 и K_3, образующихъ замыкаемый ею многоугольникъ, точно также и всякая другая діагональ силового многоугольника является равнодѣйствующею отсѣкаемой ею группы силъ; такъ, напр., BE будетъ равнодѣйствующею силъ K_2, K_3, K_4, и т. д.

Если конечная точка силового многоугольника совпадаетъ съ его начальной точкой, то, очевидно, что равнодѣйствующая равна нулю. Слѣдовательно: Произвольное число силъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ, будетъ находиться въ равновѣсіи въ томъ случаѣ, если эти силы образуютъ замкнутый силовой многоугольникъ съ послѣдовательнымъ направленіемъ стрѣлокъ сторонъ*). Кромѣ того, легко обнаружить, что порядокъ послѣдовательныхъ сложеній силъ не имѣетъ никакого вліянія на конечный результатъ, что вполнѣ согласуется и съ ученіемъ механики.

Все вышесказанное остается справедливымъ и въ томъ случаѣ, когда силы, пересѣкающіяся въ одной точкѣ, не лежатъ

---

*) Представивъ себѣ, что стрѣлки сторонъ силового многоугольника какъ бы указываютъ направленіе движенія какой нибудь точки по его периферіи, мы можемъ, въ дальнѣйшемъ, называть, для краткости, всякій замкнутый многоугольникъ съ послѣдовательно направленными стрѣлками — многоугольникомъ непрерывнаго движенія, или многоугольникомъ равновѣсія.

Пр. пер.

въ одной и той-же плоскости, но только при этомъ силовой многоугольникъ уже будетъ представлять собою нѣкоторую фигуру въ пространствѣ. Предположимъ, что на фиг. 18а треугольникъ ABC лежитъ въ плоскости силъ K_1 и K_2. Теперь, если сила K_3 выходитъ изъ этой плоскости, то хотя ее и можно будетъ опять сложить, по общему правилу, съ силою R_2, но уже треугольникъ ACD расположится въ плоскости силъ R_2 и K_3, т. е. силовой многоугольникъ получитъ перегибъ по діагонали AC. Подобнымъ образомъ могутъ произойти и дальнѣйшіе перегибы по діагоналямъ, проходящимъ черезъ точку A, но во всякомъ случаѣ замыкающая сторона силового многоугольника будетъ представлять собою, опять таки, равнодѣйствующую данной группы силъ. Но только въ этомъ случаѣ придется уже изображать и находить силы по двумъ ихъ проэкціямъ, примѣняя методы Начертательной Геометріи.

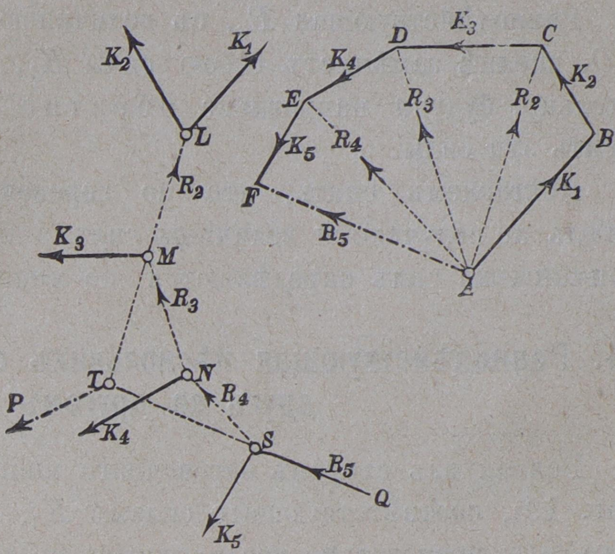
3. Сложеніе произвольныхъ силъ, лежащихъ въ одной плоскости.

Если всѣ данныя силы не имѣютъ общей точки пересѣченія, то ихъ всегда можно представить себѣ перенесенными, съ сохраненіемъ направленія, въ какую нибудь произвольно выбранную точку. Отъ этого измѣнится лишь положеніе равнодѣйствующей въ плоскости силъ, между тѣмъ какъ ея величина и направленіе останутся неизмѣнными, и значитъ могутъ быть найдены по приведенному выше способу. Поэтому вообще можно рекомендовать производить сложеніе данныхъ силъ при помощи силового многоугольника лишь для нахожденія величины и направленія равнодѣйствующей, положеніе же ея на плоскости, опредѣлять по данному чертежу направленій силъ.

На фиг. 19, съ лѣвой стороны, представлены направленія силъ K_1, $K_2 \ldots K_5$; на этихъ направленіяхъ вовсе нѣтъ необходимости наносить величины силъ, потому что эти величины уже имѣются въ силовомъ многоугольникѣ $ABCDEF$ (правая сторона фигуры). Положеніе равнодѣйствующей получится слѣдующимъ образомъ: если L представляетъ собою точку пересѣченія направленій силъ K_1 и K_2, то черезъ нее должна проходить, также, равнодѣйствующая R_2 силъ K_1 и K_2.

Направленіе этой равнодѣйствующей опредѣляется діагональю AC силового многоугольника; слѣдовательно, проводя параллель этой діагонали черезъ точку L, тѣмъ самымъ и получимъ положеніе силы R_2. Точка M, въ которой R_2 пересѣкаетъ направленіе силы K_3, должна находиться, кромѣ того, на направленіи равнодѣйствующей R_3 силъ R_2 и K_3 (а слѣдовательно и K_1, K_2 и K_3); поэтому, проводя $MN \parallel AD$, получимъ, что MN будетъ истиннымъ направленіемъ силы R_3.

Фиг. 19.



Подобнымъ-же образомъ, проводя черезъ точку N параллель AE до пересѣченія, въ точкѣ S, со слѣдующею силою K_5, и, наконецъ, черезъ S, линію $SQ \parallel AF$, найдемъ QS, т. е. направленіе равнодѣйствующей R всѣхъ 5-ти данныхъ силъ.

Послѣдовательность силъ $LMNSQ$ называется **веревочнымъ многоугольникомъ** данныхъ силъ на томъ основаніи, что, по ученію механики, она представляетъ собою форму равновѣсія вполнѣ гибкаго шнура, закрѣпленнаго въ точкѣ Q и нагруженнаго, въ точкахъ L, M, N и P, силами K_1, $K_2 \cdot \cdot \cdot K_5$. Силы R_2, R_3, R_4 и R_5, найденныя по силовому многоугольнику, являются напряженіями, развивающимися при этомъ въ параллельныхъ имъ элементахъ шнура.

Если силы K_1, K_2, K_3, и т. д. измѣнятъ свое направленіе на обратное, то для нахожденія положенія равнодѣйствующихъ R_2, R_3, R_4 и R_5 послужитъ тотъ-же самый многоугольникъ $LMNSQ$. Но такой многоугольникъ, въ данномъ случаѣ, уже не можетъ быть разсматриваемъ какъ форма равновѣсія **веревки**, потому что въ элементахъ его появятся вмѣсто растягивающихъ, сжимающія напряженія, что невозможно для вполнѣ гибкаго тѣла. Напротивъ, вполнѣ возможно будетъ принять его за систему несжимаемыхъ стержней, соединенныхъ между собою идеальными шарнирами (безъ тренія), нагруженную, въ узлахъ, силами K. Но тѣмъ не менѣе, хотя названіе шарнирнаго многоугольника и было-бы въ данномъ случаѣ болѣе справедливымъ, названіе веревочнаго многоугольника удерживается, вообще, для случаевъ существованія какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ напряженій элементовъ веревки.

Равнодѣйствующая R_5, съ величиною AF и положеніемъ PQ, вполнѣ замѣняетъ собою силы K_1, $K_2 \cdot \cdot \cdot \cdot K_5$; слѣдовательно, будучи направлена обратно, она должна уравновѣсить эти силы.

Повторяемъ опять, что по веревочному многоугольнику отнюдь не получаются величины силъ, а лишь ихъ направленія; величины-же силъ опредѣляются по многоугольнику силовому.

4. Равнодѣйствующая нѣсколькихъ силъ, слѣдующихъ другъ за другомъ.

Всякая изъ сторонъ веревочнаго многоугольника $LMNSQ$ (фиг. 19), соотвѣтствующаго силамъ K_1, $K_2 \cdot \cdot \cdot \cdot K_5$ (и могущаго быть произвольно увеличеннымъ введеніемъ новыхъ силъ), изображаетъ собою направленіе равнодѣйствующей всѣхъ до нея расположенныхъ силъ. Такъ, напр., сила R_2 (направленная по LM) эквивалентна силамъ K_1 и K_2, что можетъ быть выражено знакомъ равнозначенія $\equiv$, т. е. $R_2 \equiv K_1, K_2$. Точно также всякая другая равнодѣйствующая, напр. R_5 (направленная по SQ), эквивалентна силамъ K_1, $K_2 \cdot \cdot \cdot \cdot K_5$, т. е.

$$R_5 \equiv K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ K_5.$$

Замѣняя, въ правой части равенства, силы K_1 и K_2 черезъ R_2, получимъ:

$$R_5 \equiv R_2,\ K_3,\ K_4,\ K_5.$$

K_3, K_4 и K_5 представляютъ собою 3 силы, слѣдующія одна за другою, какъ въ силовомъ, такъ и въ веревочномъ многоугольникѣ и приложенныя между сторонами этого послѣдняго LM и SQ; обозначая равнодѣйствующую силъ K_3, K_4, K_5 (которую легко найти по величинѣ и направленію изъ соотвѣтствующаго силового многоугольника) черезъ P и замѣняя ею всѣ эти силы, получимъ, что $R_5 \equiv R_2, P$. Но такъ какъ сила R_5 представляетъ собою равнодѣйствующею двухъ остальныхъ—R_2 и P, то эти три силы должны имѣть общую точку пересѣченія, а такъ какъ точка пересѣченія T силъ R_2 и R_5, или, что все