

1991



П. В. ВОРОНЕЦЬ.

576
B75

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗСЛѢДОВАНИЕ

ЭЙЛЕРОВА СЛУЧАЯ ВРАЩЕНІЯ ТВЕРДАГО ТѢЛА

ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ.



КІЕВЪ.

Всероссійскаго Университета Св. Владиміра Н. Т. Корчакъ-Новицкаго.

1898.

117468

ОГЛАВЛЕНІЕ

§§

СТР.

Предисловіе	1
-----------------------	---

ГЛАВА I.

Опредѣленіе случая Euler'a. Интерпретаціи Poincot и Mac Cullagh'a.

1. Выводъ уравненій вращенія твердаго тѣла около неподвижной точки . . .	7
2. Уравненія и интегралы движенія для случая Euler'a	8
3. Соотношенія между произвольными постоянными	11
4. Первая интерпретація Poincot	14
5. Интерпретація Mac Cullagh'a	15
6. Теорема Routh'a	17
7. Случай дѣйствія пары, плоскость которой перпендикулярна къ неизмѣнной прямой	18
8. Теорема Sainte-Marie	19

ГЛАВА II.

О сферо-коническихъ кривыхъ.

1. Определеніе сферо-конической кривой	21
2. Уравненіе сферо-конической кривой въ координатахъ x, y на сферѣ . . .	24
3. Фокусы сферо-конической кривой	27
4. Нормаль къ сферо-конической кривой	29
5. Сопряженные діаметры сферо-конической кривой	32
6. Касательная и радіусъ кривизны сферо-конической кривой	34

ГЛАВА III.

Движеніе неизмѣнной прямой, эксцентричной прямой и мгновенной оси въ тѣлѣ.

1. Уравненія неизмѣннаго, эксцентричнаго и мгновеннаго конусовъ	38
2. Положеніе неизмѣннаго, эксцентричнаго и мгновеннаго конусовъ въ тѣлѣ .	39
3. Неизмѣнная, эксцентричная и мгновенная сферо-коническая кривая . .	41
4. Скорость конца неизмѣнной прямой	42
5. Скорости концовъ эксцентричной прямой и мгновенной оси	46

ГЛАВА IV.

Движеніе мгновенной оси и главныхъ осей инерціи тѣла въ пространствѣ. Вторая интерпретація *Poinsot*.

1. Формула <i>Poinsot</i>	53
2. Формулы <i>Ferrers'a</i> и <i>Routh'a</i>	55
3. Теорема <i>Booth'a</i>	56
4. Движеніе главныхъ осей инерціи въ пространствѣ	57
5. Теоремы <i>Poinsot</i> и <i>Routh'a</i>	60
6. Вторая интерпретація <i>Poinsot</i>	62
7. Кинематическая модель <i>Darboux</i> и <i>Koenigs'a</i>	63
8. Движеніе прямой <i>ОН</i> въ тѣлѣ и въ пространствѣ	64
9. Траекторія точки <i>H</i> въ тѣлѣ и въ неизмѣнной плоскости, вращающейся около своей нормали съ угловою скоростью $\frac{h}{l}$	65

ГЛАВА V.

Частные случаи вращенія твердаго тѣла по инерціи.

1. Случай $Bh - l^2 = 0$. Плоскости, описываемыя въ тѣлѣ неизмѣнною прямою, эксцентричною прямою и мгновенною осью	67
2. Случай $Bh - l^2 = 0$. Измѣненіе угловъ неизмѣнной прямой, эксцентричной прямой и мгновенной оси съ осью средняго момента	69
3. Случай $Bh - l^2 = 0$. Движеніе мгновенной оси, оси средняго момента и прямой <i>ОН</i> въ пространствѣ	72
4. Случай $A = B$	73

ГЛАВА VI.

О полодіи.

1. Опредѣленіе движенія <i>Poinsot</i> общаго типа	76
2. Опредѣленіе полодіи	77
3. Радиусъ векторъ полодіи	80
4. Кривая пересѣченія катящейся поверхности съ неизмѣнною плоскостью. Кривизна поверхности въ точкахъ полодіи	82
5. Нормаль къ катящейся поверхности въ точкахъ полодіи. Теорема <i>Sylvester'a</i>	84

ГЛАВА VII.

О герполодіи.

1. Дифференціальное уравненіе герполодіи	88
2. Уравненіе герполодіи въ случаѣ $Bh - l^2 = 0$	90
3. Преобразованіе уравненій герполодіи, указанное <i>Darboux</i>	92
4. Точки перегиба герполодіи	96
5. Колебательное движеніе радиуса вектора герполодіи	99

ГЛАВА VIII.

**Полодія, какъ пересѣченіе двухъ концентрическихъ и соосныхъ
поверхностей II порядка.**

1. Условіе, при которомъ пересѣченіе двухъ концентрическихъ и соосныхъ поверхностей II порядка можно разсматривать, какъ полодію	101
2. Теорема <i>de la Gournerie</i>	103
3. Приложение теоремы <i>de la Gournerie</i> къ полодіи	105
4. Новое опредѣленіе полодіи	108
5. Теорема <i>Greenhill'a</i>	110
6. Деформація однополаго гиперболоида, при которой одна изъ его произво- дящихъ остается неподвижною	110
7. Новый приѣмъ полученія герполодіи	112

Геометрическое изслѣдованіе Эйлерова случая вращенія твердаго тѣла около неподвижной точки.

Стипендіата П. В. Воронца.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

При изслѣдованіи вопроса о вращеніи твердаго тѣла около неподвижной точки по инерціи можно итти, какъ и во многихъ другихъ вопросахъ механики, двумя путями. Можно изучать это движеніе или аналитически или геометрически.

Оба метода имѣютъ свои преимущества другъ передъ другомъ, тотъ и другой могутъ назваться въ числѣ своихъ изслѣдователей имена лучшихъ механиковъ и математиковъ послѣдняго времени.

За аналитическій методъ въ интересующемъ насъ вопросѣ говорить, между прочимъ, уже и то обстоятельство, что онъ появился почти на цѣлое столѣтіе раньше геометрическаго¹⁾ и обладаетъ болѣе обширной и разработанной литературой.

Вообще, сравнивая эти два метода, можно сказать, что аналитическое рѣшеніе разсматриваемаго нами движенія проще по замыслу, прямѣе по своему ходу, но, по большей части, очень сложно въ выкладкахъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ это рѣшеніе не даетъ вполне ясной картины того, какъ именно происходитъ явленіе.

Геометрический методъ, наоборотъ, требуетъ много находчивости при установкѣ исходныхъ точекъ разсужденія, но за то въ своемъ выполненіи онъ обыкновенно бываетъ простъ и изященъ и даетъ возможность представить всѣ обстоятельства движенія въ простой и осязательной формѣ.

¹⁾ Первые аналитическія изслѣдованія по вопросу о вращеніи твердаго тѣла около неподвижной точки по инерціи принадлежатъ *Euler*'у (напеч. 1765 г.), первыя же геометрическія — *Poinsot* (1834, 1851).

При помощи геометрическаго метода мы будемъ изучать довольно сложный вопросъ о вращеніи твердаго тѣла по инерціи элементарно, не пользуясь свойствами высшихъ трансцендентныхъ функцій.

Послѣ появленія знаменитыхъ мемуаровъ *Poinsot* по теоріи вращенія твердаго тѣла, весьма часто появлялись въ различныхъ періодическихъ изданіяхъ краткія замѣтки и статьи, относящіяся къ этому вопросу и выясняющія какую либо, часто весьма любопытную, подробность разсматриваемаго движенія.

Въ курсахъ механики болѣе новаго времени рядомъ съ изложеніемъ основныхъ положеній по теоріи вращенія твердаго тѣла мы встрѣчаемся, по большей части въ видѣ замѣтокъ или задачъ и примѣровъ для упражненія, съ цѣнными указаніями на тѣ или другія интересныя обстоятельства, сопровождающія вращеніе твердаго тѣла около неподвижной точки по инерціи.

Въ этомъ отношеніи особеннымъ богатствомъ отличается курсъ динамики твердаго тѣла *Routh'a*, о которомъ будемъ говорить ниже болѣе подробно.

Мы старались воспользоваться всякими указаніями, разбросанными, какъ говорили, въ различныхъ періодическихъ изданіяхъ, а также отдѣльныхъ курсахъ механики, чтобы собрать, по возможности, все, что касается геометрической стороны вращенія твердаго тѣла по инерціи, и полученный матеріалъ пытались изложить послѣдовательно и систематически.

Такова цѣль, которую мы преслѣдовали въ настоящемъ сочиненіи.

Задача о вращеніи твердаго тѣла около неподвижной точки по инерціи, была рѣшена *Euler'омъ* ¹⁾, въ честь котораго такого рода движеніе твердаго тѣла и носитъ названіе вращенія *Euler'a*. Изслѣдованія, изложенныя въ указанномъ мемуарѣ, чисто аналитическаго характера.

Первое геометрическое изысканіе вращенія *Euler'a* относится къ 1834 году и принадлежитъ французскому геометру и механику *Poinsot*. Въ своей пзвѣстной статьѣ „*Théorie nouvelle de la rotation des corps*“ ²⁾ *Poinsot* даетъ слѣдующее геометрическое толкованіе вращенія твердаго тѣла около неподвижной точки по инерціи: „Если около неподвижной точки (точки опоры) описать эллипсоидъ инерціи тѣла, неизмѣнно съ нимъ связанный, то во время движенія эта поверхность будетъ катиться безъ скольженія по одной изъ своихъ касательныхъ плоскостей, остаю-

¹⁾ *Theoria motus corporum solidorum*. Rostock. 1865.

²⁾ *Prés. à l'Inst. le 19 mai 1834*. Въ распространенной формѣ въ *Liouville, Journ. de Mathém.* t. XVI, 1851.

щейся неподвижной въ пространствѣ. Мгновенная угловая скорость тѣла будетъ измѣняться прямо пропорціонально радіусу вектору точки касанія“.

Эта замѣчательная теорема носитъ названіе первой интерпретаціи *Poinsot*.

Впослѣдствіи приведенному толкованію вращенія *Euler*'а ставили въ упрекъ то обстоятельство, что оно не достаточно явно содержитъ время. И дѣйствительно, если-бы намъ и удалось построить эллипсоидъ инерціи и плоскость катанія или подвижный и неподвижный аксоиды, то для насъ являлось-бы затруднительнымъ сообщить катящейся поверхности или подвижному аксоиду такую угловую скорость, которая требуется въ толкованіи.

Это неудобство было устранено еще самимъ *Poinsot* въ его второй интерпретаціи, которая и нашла свое примѣненіе въ остроумномъ при-борѣ *Darboux* и *Koenigs*'а, названномъ ими герполодографомъ и осу-ществляющемъ вращеніе *Euler*'а.

Дальнѣйшимъ развитіемъ первоначальной идеи *Poinsot* мы обязаны *Sylvester*'у ¹⁾, который первый сталъ разсматривать катаніе безъ скольженія любой центральной поверхности II порядка по одной изъ ея касательныхъ плоскостей, остающейся неподвижною ²⁾.

Движеніе, такимъ образомъ опредѣляемое, носитъ названіе вращенія *Poinsot*.

Въ своей интересной статьѣ *Sylvester* доказываетъ еще одну любопытную теорему, которая кратко можетъ быть формулирована такъ: „Вращеніе *Poinsot*, будучи сложено съ постояннымъ вращеніемъ около перпендикуляра изъ точки опоры на плоскость катанія, даетъ снова вращеніе *Poinsot*“.

Наиболѣе важныя услуги эта теорема *Sylvester*'а оказала въ теоріи вращенія тяжелаго симметричнаго гироскопа. Но и для случая *Euler*'а она примѣняется въ т. н. интерпретаціи *Jacobi*.

Замѣняя эллипсоидъ инерціи тѣла другой какой либо поверхностью, получаемой произвольнымъ построеніемъ изъ этого эллипсоида, мы можемъ на основаніи интерпретаціи *Poinsot* вывести рядъ другихъ геометрическихъ толкованій вращенія *Euler*'а. Къ наиболѣе интересному мы прійдемъ, если замѣнимъ эллипсоидъ инерціи взаимной поверхностью, носящей названіе гираціоннаго эллипсоида.

Геометрическое толкованіе вращенія твердаго тѣла по инерціи, основанное на разсмотрѣннн движенія гираціоннаго эллипсоида, неизмѣнно съ

¹⁾ *Sylvester. On the motion of a rigid body acted on by no external forces Philos. Transact. Vol. 156, 1866.*

²⁾ Законъ измѣненія угловой скорости тотъ-же, что въ теоремѣ *Poinsot*.

тѣломъ связаннаго, носитъ названіе интерпретаціи *Mac Cullagh'a*¹⁾ и читается такъ: „Гираціонный эллипсоидъ тѣла относительно точки опоры проходитъ во время движенія постоянно черезъ неподвижную въ пространствѣ точку, и мгновенная угловая скорость измѣняется обратно пропорціонально длинѣ перпендикуляра, опущеннаго изъ точки опоры на касательную плоскость къ гираціонному эллипсоиду въ точкѣ, совпадающей въ разсматриваемый моментъ съ неподвижною точкою“.

Изслѣдованіе вращенія *Euler'a* съ точки зрѣнія интерпретаціи *Poinsot* тѣсно связано съ изученіемъ геометрическихъ свойствъ двухъ кривыхъ, полодіи и герполодіи, служащихъ траекторіями въ тѣлѣ и въ пространствѣ точки касанія эллипсоида инерціи къ плоскости катанія.

Вопросомъ о полодіи и герполодіи занимался еще *Poinsot* въ выше приведенномъ сочиненіи. Но болѣе подробное и обстоятельное изслѣдованіе этихъ кривыхъ мы находимъ въ извѣстныхъ примѣчаніяхъ *Darboux* къ курсу механики *Despeyroux*²⁾.

Въ тѣхъ главахъ, которыя относятся къ интересующему насъ предмету³⁾, *Darboux* приводитъ новыя опредѣленія полодіи и герполодіи, дающія вполне ясное и отчетливое представленіе о характерѣ этихъ кривыхъ, и останавливается подробно на интересномъ вопросѣ о точкахъ перегиба герполодіи. Не вдаваясь въ подробности, замѣтимъ только, что этотъ вопросъ вызвалъ весьма богатую литературу, о которой говоримъ подробно въ текстѣ. Первый доказавшій, что герполодія, соотвѣтствующая вращенію *Euler'a*, не можетъ имѣть точекъ перегиба, былъ *Hess*⁴⁾.

Другой вопросъ, рѣшаемый въ связи съ интерпретаціями *Poinsot* и *Mac Cullagh'a*, касается движенія неизмѣнной прямой, эксцентричной прямой и мгновенной оси въ тѣлѣ. *Routh* въ своемъ курсѣ динамики твердаго тѣла⁵⁾ предложилъ совершенно новый пріемъ для изслѣдованія движенія названныхъ прямыхъ. Способъ *Routh'a* основанъ на свойствахъ сферо-коническихъ кривыхъ⁶⁾ и позволяетъ чрезвычайно просто изучить искомое движеніе въ мельчайшихъ подробностяхъ.

¹⁾ *Mac Cullagh*, *On the rotation of a solid body. Proceed. of the Irish Acad. Vol. II*, 1840—44. *Vol. III*, 1845—47. Ср. также *Clebsch*, *Zur Theorie der Trägheitsmomente und der Drehung um einen Punkt. Crelle, Journ. für Math. LVII*. 1860.

²⁾ *Despeyroux*, *Cours de Mécanique avec des notes par G. Darboux*. 1886.

³⁾ Т. II. Note XVII; XVIII, § 4, 5.

⁴⁾ *Hess*, *Ueber das Rollen einer Fläche II Grades auf einer invariablen Ebene*. 1880.

⁵⁾ *Routh*, *A treatise on the Dynamics of a system of rigid bodies. The advanced part*. 1884.

⁶⁾ Тѣ предложенія изъ теоріи сферо-коническихъ кривыхъ, которыми намъ приходится пользоваться, мы доказываемъ въ отдѣльной (II) главѣ.

Не менѣе подробно въ приведенномъ курсѣ изученъ вопросъ о движеніи мгновенной оси и главныхъ осей инерціи тѣла въ пространствѣ. Исслѣдованія *Routh'a*, относящіяся къ этому предмету, основаны также на свойствахъ сферо-коническихъ кривыхъ. Однако слѣдуетъ замѣтить, что, по крайней мѣрѣ, въ послѣднемъ вопросѣ, вопросѣ о движеніи главныхъ осей инерціи въ пространствѣ, пріемъ исслѣдованія, предложенный еще *Poinsot*, какъ намъ кажется, проще способа *Routh'a* и приводитъ скорѣе къ желаемому результату.

При нашемъ изложеніи указаннаго отдѣла мы держались ближе къ способу *Poinsot*.

Заключенія, выведенныя для самаго общаго вращенія *Euler'a*, значительно упрощаются, если мы ихъ приложимъ къ двумъ частнымъ случаямъ такого вращенія, которые имѣютъ мѣсто, во-первыхъ, когда данное твердое тѣло является въ динамическомъ смыслѣ тѣломъ вращенія, и, во-вторыхъ, когда разстояніе плоскости катанія отъ точки опоры равно средней полуоси эллипсоида инерціи относительно точки опоры.

Указанные простѣйшіе случаи вращенія *Euler'a* одинаково полно изучены какъ у *Routh'a* такъ и у *Poinsot*.

Этимъ закончимъ нашу краткую характеристику тѣхъ основныхъ источниковъ, которыми пользовались при изложеніи геометрической стороны вращенія твердаго тѣла около неподвижной точки по инерціи.

Матеріаль, заключенный въ названныхъ выше сочиненіяхъ, мы распредѣлили по главамъ слѣдующимъ образомъ.

Въ I главѣ мы выводимъ уравненія вращенія твердаго тѣла около неподвижной точки, излагаемъ интерпретаціи *Poinsot* и *Mac Cullagh'a* для вращенія *Euler'a* и указываемъ на два болѣе общихъ вращенія твердаго тѣла, въ которыхъ сохраняются нѣкоторые свойства вращенія *Euler'a* (теоремы *Routh'a* и *Sainte-Marie*).

II глава—чисто подготовительная и содержитъ нѣкоторые основныя положенія изъ теоріи сферо-коническихъ кривыхъ.

III глава трактуетъ о движеніи неизмѣнной прямой, эксцентричной прямой и мгновенной оси въ тѣлѣ.

Въ IV главѣ мы изучаемъ движеніе мгновенной оси и главныхъ осей инерціи въ пространствѣ и излагаемъ вторую интерпретацію *Poinsot*.

Въ V главѣ приложены предыдущія общія заключенія къ тѣмъ двумъ частнымъ случаямъ вращенія *Euler'a*, о которыхъ говорили выше.

Послѣднія три главы посвящены исслѣдованію геометрическихъ свойствъ пологіи и герполодіи.

Кромѣ названныхъ выше сочиненій, мы пользовались еще многочисленными болѣе мелкими статьями и замѣтками, указанія на которыя будутъ сдѣланы въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ текста.

Въ заключеніи, считаемъ пріятнымъ долгомъ выразить многоуважаемому Гавріилу Константиновичу Суслову свою искреннюю благодарность за его цѣнныя указанія по литературѣ вопроса и за тѣ замѣчанія, которыя оказали столь важныя услуги намъ при второй редакціи нашего сочиненія, предназначенной для печати.

ГЛАВА I.

Опредѣленіе случая Euler'a. Интерпретации Poincot и Mac Cullagh'a.

§ 1. Выводъ уравненій вращенія твердаго тѣла около неподвижной точки.

Прежде всего, припомнимъ уравненія вращенія твердаго тѣла около неподвижной точки.

Неподвижную точку, которую будемъ называть точкой опоры или привѣса, примемъ за начало O системы декартовыхъ координатъ x, y, z , неизмѣнно съ тѣломъ связанной. Координатныя оси Ox, Oy, Oz направимъ по главнымъ осямъ инерціи тѣла относительно точки опоры.

Для вывода искомыхъ уравненій движенія мы воспользуемся закономъ момента количествъ движенія. Если будемъ проводить черезъ точку O векторъ OG , геометрически равный главному моменту количествъ движенія тѣла вокругъ точки опоры, то конецъ G этого вектора опишетъ въ пространствѣ нѣкоторую кривую—годографъ главнаго момента количествъ движенія тѣла. Изъ названнаго выше закона слѣдуетъ, что скорость точки G по ея траекторіи геометрически равна главному моменту приложенныхъ къ тѣлу силъ относительно точки опоры.

Векторъ OG перемѣщается не только въ пространствѣ, но и въ тѣлѣ, слѣдовательно, скорость точки G можно разсматривать какъ геометрическую сумму двухъ другихъ скоростей, относительной и переносной.

Если обозначимъ чрезъ A, B, C главные моменты инерціи тѣла относительно осей Ox, Oy, Oz ; черезъ p, q, r проекціи на тѣ-же оси мгновенной угловой скорости тѣла, то координаты точки G будутъ, какъ извѣстно,

$$Ap; \quad Bq; \quad Cr;$$

слѣдовательно, означая черезъ t время, имѣемъ для проекцій на оси координатъ относительной и переносной скорости точки G выраженія:

$$A \frac{dp}{dt}; \quad B \frac{dq}{dt}; \quad C \frac{dr}{dt};$$

$$q.Cr - r.Bq; \quad r.Ap - p.Cr; \quad p.Bq - q.Ap;$$

Если, далѣе, L , M , N представляютъ собою главные моменты приложенныхъ къ тѣлу силъ около координатныхъ осей, то предыдущія соображенія приводятъ насъ къ слѣдующимъ соотношеніямъ, носящимъ названіе уравненій *Euler'a*:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} - (B - C) qr &= L; \\ B \frac{dq}{dt} - (C - A) rp &= M; \\ C \frac{dr}{dt} - (A - B) pq &= N. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

§ 2. Уравненія и интегралы движенія для случая *Euler'a*.

Случай вращенія твердаго тѣла около неподвижной точки подѣйствиемъ силъ, не дающихъ момента около точки опоры, носитъ названіе случая *Euler'a* или случая вращенія твердаго тѣла по инерціи.

Примѣромъ для такого движенія можетъ служить вращеніе тяжелаго твердаго тѣла около неподвижнаго центра инерціи.

Изслѣдованіемъ случая вращенія твердаго тѣла по инерціи мы и займемся.

Чтобы перейти отъ общихъ формулъ (1) къ уравненіямъ движенія для случая *Euler'a*, нужно, очевидно, положить величины L , M , N равными нулю, что даетъ:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C) qr; \\ B \frac{dq}{dt} &= (C - A) rp; \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B) pq. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Прямая (5), которую будемъ называть неизмѣнной прямой, своимъ направлениемъ опредѣляетъ семейство неподвижныхъ въ пространствѣ плоскостей, къ ней перпендикулярныхъ. Эти плоскости носятъ названіе плоскостей *Laplace'a* или неизмѣнныхъ. Мы послѣдній терминъ будемъ прилагать преимущественно къ той изъ плоскостей *Laplace'a*, которая проходитъ черезъ точку опоры.

Выведемъ теперь изъ уравненій и интеграловъ движенія нѣкоторыя формулы и соотношенія, которыми будемъ пользоваться ниже.

Исключая изъ уравненій (3) и (4) послѣдовательно величины p^2 , q^2 , r^2 , находимъ:

$$\left. \begin{aligned} B(A-B)q^2 + C(A-C)r^2 &= Ah - l^2; \\ C(B-C)r^2 + A(B-A)p^2 &= Bh - l^2; \\ A(C-A)p^2 + B(C-B)q^2 &= Ch - l^2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Обозначимъ черезъ ω мгновенную угловую скорость тѣла, такъ что

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2. \dots \dots \dots (7)$$

Опредѣляя изъ уравненій (3), (4), (7) величины, p^2 , q^2 , r^2 , получаемъ

$$\left. \begin{aligned} p^2 &= \frac{BC}{(A-C)(A-B)} (\omega^2 - \lambda_1); \\ q^2 &= \frac{CA}{(B-A)(B-C)} (\omega^2 - \lambda_2); \\ r^2 &= \frac{AB}{(C-B)(C-A)} (\omega^2 - \lambda_3), \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

гдѣ

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{h(B+C) - l^2}{BC}; \\ \lambda_2 &= \frac{h(C+A) - l^2}{CA}; \\ \lambda_3 &= \frac{h(A+B) - l^2}{AB}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Изъ формулы (7) имѣемъ:

$$\omega \frac{d\omega}{dt} = p \frac{dp}{dt} + q \frac{dq}{dt} + r \frac{dr}{dt},$$

откуда на основаніи уравненія (2) находимъ:

$$\omega \frac{d\omega}{dt} = - \frac{(B-C)(C-A)(A-B)}{ABC} pqr. \quad (10)$$

Подставляя сюда величины p, q, r изъ соотношеній (8), получаемъ:

$$\omega \frac{d\omega}{dt} = \sqrt{(\lambda_1 - \omega^2)(\lambda_2 - \omega^2)(\lambda_3 - \omega^2)}. \quad (11)$$

§ 3. Соотношенія между произвольными постоянными.

Количества A, B, C , какъ момента инерціи, всѣ положительны. Мы предположимъ, что они всѣ различны*), и что

$$A > B > C. \quad (12)$$

Тогда, какъ извѣстно,

$$B + C > A. \quad (13)$$

Основываясь на предположеніи (12), мы будемъ главные оси Ox, Oy, Oz называть соотвѣтственно осями наибольшаго, средняго и наименьшаго момента.

Уравненія (6) при условіяхъ (12) показываютъ, что

$$Ah - l^2 \geq 0; \quad Bh - l^2 \leq 0; \quad Ch - l^2 < 0. \quad (14)$$

Въ предѣльныхъ случаяхъ, когда либо

$$Ah - l^2 = 0 \quad (15)$$

либо

$$Ch - l^2 = 0, \quad (16)$$

уравненія (6), (2), (7) даютъ

$$q = 0; \quad r = 0; \quad p = \omega = \text{const.}$$

или

$$p = 0; \quad q = 0; \quad r = \omega = \text{const.}$$

¹⁾ Случай, когда двѣ изъ величинъ A, B, C равны между собою, мы рассмотримъ ниже отдѣльно.

и неизмѣнная прямая (5) во все время движенія совпадаетъ съ осью наибольшаго или наименьшаго момента, слѣдовательно,

„при условіи (15) или (16) твердое тѣло вращается съ постоянной угловой скоростью около неподвижной въ пространствѣ оси наибольшаго или наименьшаго момента“.

Замѣчая далѣе на основаніи перваго и послѣдняго изъ уравненій (6), что, если количества q и r или p и q для какого либо момента были бесконечно малыми величинами, то они таковыми будутъ и во все время движенія, мы заключаемъ, что разсматриваемыя нами вращенія твердаго тѣла около оси наибольшаго или наименьшаго момента будутъ движеніями устойчивыми.

Если во все время движенія количества p и r , а слѣдовательно (форм. 6), также и величина $Bh - l^2$ равны нулю, т. е., если

$$p = 0; r = 0; Bh - l^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

то мы имѣемъ, очевидно, случай вращенія твердаго тѣла съ постоянной угловой скоростью около неподвижной въ пространствѣ оси средняго момента, но изъ формулъ (6) мы не можемъ заключить, будетъ-ли такое вращеніе устойчивымъ или нѣтъ *).

Въ болѣе подробное изслѣдованіе простѣйшихъ случаевъ вращенія твердаго тѣла, когда удовлетворяется одно изъ условій (15), (16) или условія (17), мы входить не будемъ; случай, когда

$$Bh - l^2 = 0,$$

и количества p и r не равны нулю во все время движенія, мы разсмотримъ ниже въ отдѣльной главѣ, такъ что въ дальнѣйшемъ будемъ предполагать

$$Ah - l^2 > 0; Bh - l^2 \text{ не равно } 0; Ch - l^2 < 0. \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Обратимся теперь къ формуламъ (9). Наименьшій числитель дробей, входящихъ въ эти соотношенія, по (12) соотвѣтствуетъ количеству λ_1 , и этотъ числитель на основаніи (13) больше $Ah - l^2$, т. е., по (18) больше нуля, слѣдовательно, всѣ количества λ положительны. Далѣе, такъ какъ

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{(A - B)(Ch - l^2)}{ABC};$$

$$\lambda_2 - \lambda_3 = \frac{(B - C)(Ah - l^2)}{ABC};$$

$$\lambda_3 - \lambda_1 = \frac{(C - A)(Bh - l^2)}{ABC},$$

*) Въ главѣ о пологіи мы убѣдимся, что вращеніе твердаго тѣла при условіяхъ (17) будетъ движеніемъ неустойчивымъ

то очевидно (форм. 12, 18), что наибольшее изъ количествъ λ будетъ λ_2 , и λ_1 больше или меньше λ_3 въ зависимости отъ того, будетъ-ли $Bh - l^2$ больше или меньше нуля.

Эти заключенія на основаніи (11) показываютъ, что во время движенія ω^2 не можетъ сдѣлаться больше λ_2 и меньше наибольшаго изъ λ_1 и λ_3 .

Выведемъ теперь одно весьма важное соотношеніе, которымъ часто будемъ пользоваться. Вычислимъ проекцію мгновенной угловой скорости на направленіе главнаго момента количествъ движенія тѣла, или, что то-же, на направленіе неизмѣнной прямой (5).

Замѣчая, что уравненіями мгновенной оси служатъ

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = \frac{Z}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

и обозначая черезъ ζ уголъ между прямыми (19) и (5), находимъ на основаніи (7), (4), (3):

$$\omega \cos \zeta = \frac{h}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Отсюда извѣстная теорема *Lagrange'a*:

„Проекція мгновенной угловой скорости на направленіе главнаго момента количествъ движенія тѣла остается постоянной во время движенія“.

Формула (20) даетъ намъ возможность убѣдиться, что, если исключить случаи (15), (16), (17), то ни при какихъ начальныхъ условіяхъ мгновенная ось (19) не можетъ оставаться неподвижной въ пространствѣ. Для этой цѣли достаточно показать, что мгновенная ось не можетъ составлять постояннаго угла съ неизмѣнной прямой (5), т. е., что, по (20), ω не можетъ быть *const.* во время движенія.

Дѣйствительно, уравненія (11), (8), (2) показываютъ, что это возможно только тогда, когда двѣ изъ величинъ p , q , r равны нулю во все время движенія, т. е., когда осью вращенія служитъ одна изъ главныхъ осей инерціи тѣла относительно точки опоры.

Итакъ,

„постоянными осями вращенія могутъ служить только три главныхъ оси инерціи тѣла относительно точки опоры“.

§ 4. Первая интерпретация Poinsot.

Одинъ изъ эллипсоидовъ инерціи тѣла, описанный около точки опоры и неизмѣнно съ тѣломъ связанный, имѣетъ своимъ уравненіемъ

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1. \quad (21)$$

Точку F пересѣченія поверхности (21) съ мгновенной осью (19) назовемъ полюсомъ и координаты полюса обозначимъ черезъ x, y, z . Тогда, на основаніи (3) и (7), находимъ:

$$x = \frac{p}{\sqrt{h}}, \quad y = \frac{q}{\sqrt{h}}, \quad z = \frac{r}{\sqrt{h}}, \quad (22)$$

$$\rho = \frac{p}{\sqrt{h}}, \quad (23)$$

гдѣ ρ радиусъ-векторъ полюса F относительно точки опоры.

Разсмотримъ касательную плоскость къ эллипсоиду (21) въ точкѣ F :

$$ApX + BqY + CrZ = \sqrt{h}. \quad (24)$$

Разстояніе z этой плоскости отъ точки опоры равно (4)

$$z = \frac{\sqrt{h}}{l}. \quad (25)$$

Плоскость (24), очевидно, перпендикулярна къ неизмѣнной прямой (5), и такъ какъ она находится на постоянномъ разстояніи отъ точки опоры, то, слѣдовательно, эта плоскость неподвижна въ пространствѣ. Отсюда и на основаніи формулы (23) слѣдующая знаменитая теорема Poinsot:

„Эллипсоидъ инерціи тѣла для точки опоры во время движенія катится безъ скольженія по одной изъ своихъ касательныхъ плоскостей. Эта плоскость перпендикулярна къ главному моменту количества движенія тѣла и остается неподвижной въ пространствѣ. Мгновенная угловая скорость по величинѣ пропорціональна радиусу-вектору точки касанія, а по направленію съ нимъ совпадаетъ“.

Катаніе эллипсоида инерціи не сопровождается скольженіемъ, потому что точка касанія лежитъ на мгновенной оси.

Касательную плоскость (24) мы будемъ называть плоскостью катанія.

Сравнивая уравненіе (25) съ неравенствами (14), приходимъ къ слѣдующему, геометрически вполнѣ очевидному, положенію:

„Длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки опоры на плоскость катанія, должна заключаться между большой и малой полуосями эллипсоида инерціи“.

Съ теченіемъ времени полюсъ J перемѣщается, какъ по эллипсоиду инерціи, такъ и по плоскости катанія. Путь его по первому *Poinsot* называлъ пологіей, путь его по плоскости катанія—герполодіей.

Построимъ два конуса, имѣющихъ общую вершину въ точкѣ опоры, а направляющими пологію и герполодію. Первый изъ этихъ конусовъ назовемъ пологіальнымъ, второй—герполодіальнымъ. Такъ какъ полюсъ J лежитъ на мгновенной оси, то ясно, что построенные нами конусы будутъ подвижнымъ и неподвижнымъ аксоидами.

Во время движенія пологіальный конусъ катится безъ скольженія по герполодіальному.

§ 5. Интерпретація Mac Cullagh'a.

Замѣняя эллипсоидъ инерціи другою какою либо поверхностью, неизмѣнно съ тѣломъ связанною и получаемую тѣмъ или другимъ преобразованиемъ изъ поверхности (21), мы можемъ при помощи теоремы *Poinsot* вывести рядъ другихъ геометрическихъ толкованій движенія *Euler'a*. Весьма изящное толкованіе мы получимъ, если замѣнимъ эллипсоидъ инерціи взаимною ему поверхностью, носящею названіе гираціоннаго эллипсоида.

Возьмемъ на эллипсоидѣ инерціи точку J встрѣчи его съ мгновенной осью и перейдемъ отъ этой точки къ соотвѣтствующей точкѣ J' на взаимной поверхности. Для этой цѣли, какъ извѣстно, нужно въ точкѣ J построить касательную плоскость къ эллипсоиду инерціи, опустить на эту плоскость перпендикуляръ изъ точки опоры O и отложить на немъ длину OJ' , обратно пропорціональную величинѣ этого перпендикуляра. Но перпендикуляръ на касательную плоскость въ полюсѣ J по теоремѣ *Poinsot* неизмѣненъ по величинѣ и направленію, слѣдовательно, точка J' гираціоннаго эллипсоида неподвижна въ пространствѣ.

Если мы совершимъ обратный переходъ отъ точки J' гираціоннаго эллипсоида къ точкѣ J взаимной поверхности и примемъ во вниманіе, что векторъ OJ пропорціоналенъ мгновенной угловой скорости тѣла, то убѣдимся, что эта скорость обратно пропорціональна длинѣ перпендикуляра, опущеннаго изъ точки опоры на касательную плоскость къ гираціонному эллипсоиду въ точкѣ J' .

Формулы (27), (28), (29), (30) доказывают теорему *Mac Cullagh'a*. Точка J' встречи неизменной прямой (5) с гирационным эллипсоидом (26) с течением времени будет перемещаться в тѣлѣ, оставаясь при этомъ на постоянномъ разстояніи $\frac{l}{\sqrt{h}}$ отъ точки опоры, слѣдовательно, кривая, описываемая точкою J' в тѣлѣ, получится въ пересѣченіи гираціоннаго эллипсоида (26) со сферою

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{l^2}{h}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Эта кривая пересѣченія носитъ названіе сферо-конической кривой *Mac Cullagh'a*.

§ 6. Теорема Routh'a.

Преобразуемъ теперь эллипсоидъ инерціи (21) по способу обратныхъ радіусовъ векторовъ, т. е., положимъ

$$X' = \frac{X}{X^2 + Y^2 + Z^2}; \quad Y' = \frac{Y}{X^2 + Y^2 + Z^2}; \quad Z' = \frac{Z}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

откуда обратно находимъ

$$X = \frac{X'}{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}; \quad Y = \frac{Y'}{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}; \quad Z = \frac{Z'}{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}. \quad (32)$$

Эллипсоидъ инерціи (21) перейдетъ въ слѣдующую поверхность, неизмѣнно съ тѣломъ связанную,

$$AX'^2 + BY'^2 + CZ'^2 - (X'^2 + Y'^2 + Z'^2)^2 = 0. \quad . \quad . \quad (33)$$

Плоскость катанія (24) формулами (32) преобразуется въ неподвижную въ пространствѣ сферу

$$\left(X' - \frac{Ap}{2\sqrt{h}} \right)^2 + \left(Y' - \frac{Bq}{2\sqrt{h}} \right)^2 + \left(Z' - \frac{Cr}{2\sqrt{h}} \right)^2 = \frac{l^2}{4h}, \quad . \quad . \quad (34)$$

центръ которой лежитъ на неизмѣнной прямой (5) въ разстояніи $\frac{l}{2\sqrt{h}}$ отъ точки опоры.

Точка

$$x' = \frac{\sqrt{h}p}{\omega^2}; \quad y' = \frac{\sqrt{h}q}{\omega^2}; \quad z' = \frac{\sqrt{h}r}{\omega^2}$$

встрѣчи мгновенной оси (19) со сферою (34) будетъ лежать на поверхности (33), и эти двѣ поверхности (33) и (34) будутъ имѣть общую касательную плоскость въ точкѣ (x', y', z') .

Отсюда слѣдующая теорема *):

„Поверхность (33), неизмѣнно съ тѣломъ связанная, во время движенія катится безъ скольженія по неподвижной въ пространствѣ сферѣ (34)“.

§ 7. Случай дѣйствія пары, плоскость которой перпендикулярна къ неизмѣнной прямой.

По поводу первой интерпретаціи *Poinsot* сдѣлаемъ еще два небольшихъ замѣчанія, а именно, покажемъ, что нѣкоторые свойства движенія сохраняются и при силахъ, дающихъ моментъ около точки опоры и соответственно выбранныхъ.

Пусть данное вращающееся твердое тѣло во время движенія подвергается дѣйствию пары, плоскость которой перпендикулярна къ неизмѣнной прямой (5).

Если, кромѣ того, отношеніе момента дѣйствующей пары къ главному моменту количествъ движенія тѣла постоянно, то новыя уравненія движенія будутъ (1):

$$A \frac{dp}{dt} - (B - C) q r = k \cdot Ap;$$

$$B \frac{dq}{dt} - (C - A) r p = k \cdot Bq;$$

$$C \frac{dr}{dt} - (A - B) p q = k \cdot Cr,$$

гдѣ k нѣкоторое постоянное.

Написанныя уравненія допускаютъ слѣдующіе два интеграла

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h'e^{2kt};$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = l'^2e^{2kt},$$

гдѣ h' и l' произвольныя постоянныя.

*) *Routh, The advanced part* и т. д. стр. 79. Ex. 4.

При помощи полученныхъ интеграловъ находимъ координаты точки пересѣченія эллипсоида инерціи съ мгновенной осью (форм. 21, 19):

$$x = \frac{p}{\sqrt{h'}} e^{-kt}; \quad y = \frac{q}{\sqrt{h'}} e^{-kt}; \quad z = \frac{r}{\sqrt{h'}} e^{-kt};$$

$$\therefore \rho = \frac{\omega}{\sqrt{h'}} e^{-kt}. \quad \dots \dots \dots (35)$$

Уравненіемъ касательной плоскости къ эллипсоиду (21) въ точкѣ (x, y, z) служить

$$Ap \cdot X + Bq \cdot Y + Cr \cdot Z = \sqrt{h'} \cdot e^{kt}.$$

Разстояніе δ' этой плоскости отъ точки опоры равно

$$\delta' = \frac{\sqrt{h'}}{l'} = \text{const.}$$

и направлено по прямой

$$\frac{X}{Ap} = \frac{Y}{Bq} = \frac{Z}{Cr}.$$

На этомъ перпендикулярѣ возьмемъ какую либо точку въ произвольномъ, но постоянномъ разстояніи отъ точки опоры. Вычисливъ скорость этой точки по тому-же способу, которымъ пользовались выше въ аналогичномъ случаѣ (§ 2), мы убѣдимся, что эта скорость равна нулю на основаніи уравненій движенія.

Отсюда заключаемъ, какъ и выше въ § 2, что касательная плоскость къ эллипсоиду инерціи въ точкѣ встрѣчи его съ мгновенной осью неподвижна въ пространствѣ.

Итакъ, мы можемъ утверждать, что отъ дѣйствія данной пары геометрическая сторона движенія не измѣнится. Только отношеніе угловой скорости тѣла къ величинѣ радіуса вектора точки касанія не будетъ постояннымъ, а будетъ измѣняться со временемъ (35) *).

§ 8. Теорема Sainte-Marie.

Другое наше замѣчаніе относится къ формулѣ (23).

Докажемъ, что мгновенная угловая скорость тѣла будетъ пропорціональной длинѣ радіуса вектора эллипсоида (21), совпадающаго съ мгновен-

*) *Routh, The advanced part* и т. д. стр. 79. Ex. I.

ной осью, и въ болѣе общемъ случаѣ вращенія твердаго тѣла, чѣмъ движеніе *Euler'a*.

Выберемъ единицу времени такъ, чтобы въ рассматриваемый моментъ векторъ, изображающій мгновенную угловую скорость тѣла, равнялся радіусу вектору полюса, т. е. точки встрѣчи эллипсоида инерціи съ мгновенною осью.

Пусть P , Q , R равны проекціямъ на главныя оси инерціи углового ускоренія, или, что то-же, геометрической производной отъ мгновенной угловой скорости, тогда

$$P = \frac{dp}{dt}; \quad Q = \frac{dq}{dt}; \quad R = \frac{dr}{dt}.$$

Обращаясь къ уравненіямъ движенія (1), находимъ

$$P A p + Q B q + R C r = L p + M q + N r.$$

Допустимъ, что приложенныя къ тѣлу силы не даютъ момента около мгновенной оси, тогда правая часть послѣдняго уравненія обращается въ нуль, и мы имѣемъ

$$P A p + Q B q + R C r = 0.$$

Количества $A p$, $B q$, $C r$ пропорціональны косинусамъ угловъ нормали n къ эллипсоиду инерціи въ точкѣ встрѣчи этой поверхности съ мгновенною осью (19). Съ другой стороны, угловое ускореніе (P , Q , R) параллельно скорости v полюса J .

Такимъ образомъ мы видимъ, что послѣднее уравненіе даетъ

$$v \cos(v, n) = 0,$$

слѣдовательно, конецъ мгновенной оси и въ слѣдующій моментъ не покинетъ эллипсоида инерціи.

Отсюда слѣдующая теорема *Sainte-Marie* *):

„Если приложенныя къ тѣлу силы не даютъ момента около мгновенной оси, то величина угловой скорости тѣла пропорціональна радіусу вектору точки встрѣчи этой оси съ эллипсоидомъ инерціи“.

*) *Sainte-Marie*, Note sur la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe dans un cas particulier.

Liouville, Journal de Mathématique. t. III. 1877.

ГЛАВА II.

О сфоро-конических кривыхъ.

§ 1. Опреѣленіе сфоро-конической кривой.

Въ настоящей главѣ мы изложимъ нѣкоторыя основныя свойства сфоро-коническихъ кривыхъ, которыя намъ будутъ нужны впослѣдствіи.

Большинство изъ теоремъ, приведенныхъ нами, указаны *Routh'*омъ *). Нѣкоторыя другія свойства мы позаимствовали у *Frost'a* **) и *Salmon'a* ***).

Первыя работы по теоріи разсматриваемыхъ кривыхъ принадлежатъ *Gudermann'u* ****) и *Chasles'ю* *****).

Сфоро-конической кривой или коническимъ сѣченіемъ на сферѣ называется кривая пересѣченія конуса II порядка со сферою, имѣющею центръ въ вершинѣ конуса.

Та-же кривая получится въ пересѣченіи центральной поверхности II порядка съ концентрической сферою.

Помѣстимъ начало O прямоугольныхъ декартовыхъ координатъ (ξ, η, ζ) въ центрѣ сферы. Три главныхъ плоскости конуса примемъ за координатныя. Ту изъ нихъ, которая не содержитъ дѣйствительныхъ производящихъ конуса, мы выберемъ за плоскость $\eta O \zeta$.

По обѣ стороны отъ послѣдней, симметрично относительно начала координатъ, будетъ расположено коническое сѣченіе въ видѣ двухъ отдѣльныхъ замкнутыхъ кривыхъ, вполне сходныхъ между собою. Мы будемъ

*) *Routh, The advanced part* и т. д. стр. 108, 109.

**) *Frost, Solid Geometry.*

***) *Salmon, A Treatise on the Analytic Geometry of tree Dimensions*

****) *Gudermann, Grundriss der analytischen Sphärik.* 1830.

*****) *Mémoires de l'Acad. de Bruxelles.* t. VI.

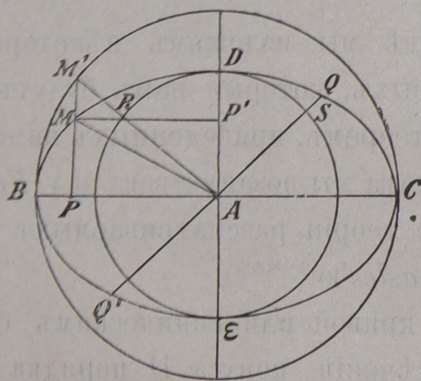
изслѣдовать только ту изъ названныхъ кривыхъ, которая обхватываетъ положительную ось ξ , т. е., будемъ отбрасывать отрицательныя значенія координаты ξ .

Согласно опредѣленію сферо-конической кривой мы пишемъ ея уравненія въ формѣ:

$$\left. \begin{aligned} P\xi^2 + Q\eta^2 + R\zeta^2 &= 0; \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Первое изъ нихъ представляетъ уравненіе конуса II порядка, отнесенное къ главнымъ плоскостямъ этой поверхности. Изъ постоянныхъ P , Q , R , входящихъ въ названное уравненіе, Q и R одного, P противоположнаго знака, такъ какъ по условію плоскость $\eta O\zeta$ не содержитъ дѣйствительныхъ производящихъ конуса. Второе изъ уравненій (1) опредѣляетъ сферу радіуса 1, центръ которой находится въ началѣ координатъ.

Пусть A будетъ точка пересѣченія оси конуса со сферою и пусть $BDCE$ (фиг. I *) представляетъ данное коническое сѣченіе.



Фиг. I

Тогда A носить названіе центра кривой.

Проведемъ черезъ A дугу **) QQ' , соединяющую двѣ соотвѣтствующія точки Q и Q' кривой, тогда, очевидно,

$$\cup AQ = \cup AQ'.$$

Называя дугу QQ' діаметромъ кривой, заключаемъ, что „діаметръ сферо-конической кривой дѣлится въ ея центрѣ пополамъ“.

Пусть дуги BC и DE лежатъ соотвѣтственно въ плоскостяхъ $\xi O\eta$ и $\xi O\zeta$. Обозначимъ

$$\cup BC = 2a; \cup DE = 2b$$

*) На чертежѣ наблюдатель предположенъ на положительной оси ξ . Дуги большихъ круговъ условно изображены прямыми.

**) Подъ дугою мы будемъ подразумѣвать всегда дугу большаго круга сферы.

и назовемъ эти дуги осями кривой. Если

$$a > b,$$

то AB носитъ названіе большой, AD — малой полуоси.

Выразимъ теперь количества P, Q, R , входящія въ уравненіе конуса (форм. 1), черезъ a и b .

Очевидно, что, если въ первомъ изъ уравненій (1) положить

$$\zeta = 0,$$

то отношеніе η къ ξ представитъ тангенсъ большой полуоси, и если въ томъ-же уравненіи положить

$$\eta = 0,$$

то отношеніе ζ къ ξ дастъ тангенсъ малой полуоси, слѣдовательно,

$$tg^2 a = -\frac{P}{Q}; \quad tg^2 b = -\frac{P}{R}. \quad (2)$$

При помощи этихъ соотношеній представимъ уравненія (1) кривой въ формѣ:

$$\left. \begin{aligned} \eta^2 ctg^2 a + \zeta^2 ctg^2 b &= \xi^2; \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{\eta^2}{sn^2 a} + \frac{\zeta^2}{sn^2 b} &= 1; \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Въ частномъ случаѣ, когда полуоси кривой дѣлаются равными либо a , либо b , находимъ изъ (4) или

$$\xi = cs a; \quad \eta^2 + \zeta^2 = sn^2 a; \quad (5)$$

или

$$\xi = cs b; \quad \eta^2 + \zeta^2 = sn^2 b. \quad (6)$$

Уравненія (5) и (6) выражаютъ соотвѣтственно малые круги $BM'C$ и RDS (фиг. I), описанные изъ точки A радіусами-дугами a и b .

§ 2. Уравнение сферо-конической кривой въ координатахъ x, y на сферѣ.

При изслѣдованіи свойствъ сферо-коническихъ кривыхъ часто бываетъ выгоднымъ пользоваться координатами на сферѣ, аналогичными декартовымъ на плоскости.

Примемъ (фиг. I) большіе круги AB и AD за оси координатъ и опустимъ изъ какой либо точки M сферы перпендикулярныя дуги MP и MP' на оси AB и AD . Такъ какъ въ сферическомъ четырехугольникѣ $APMP'$ противоположныя стороны не равны, то является нѣкоторая свобода при выборѣ координатъ. Мы примемъ за абсциссу x дугу AP , за ординату y дугу MP .

Связь новыхъ координатъ со старыми очевидна:

$$\xi = cs y \cdot cs x; \eta = cs y \cdot sn x; \zeta = sn y. \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

При нашемъ выборѣ координатъ уравненіе сферы удовлетворяется тождественно, слѣдовательно, наша кривая должна даваться однимъ соотношеніемъ между переменными x и y . Это соотношеніе мы могли-бы получить простымъ переходомъ отъ однихъ координатъ къ другимъ, но намъ кажется болѣе удобнымъ вывести уравненіе сферо-конической кривой изъ одного ея свойства, къ доказательству котораго мы теперь и приступимъ.

Проведемъ черезъ точку $M(\xi', \eta', \zeta')$ кривой $BDCE$ (фиг. I) дуги MP и MP' , перпендикулярныя къ осямъ AB и AD . Пусть M' и R будутъ точки пересѣченія этихъ дугъ съ кругами $BM'C$ и RDS , описанными около A радіусами a и b . Убѣдимся, что точки $M'(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, $R(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ и $A(1, 0, 0)$ лежатъ въ одной плоскости съ центромъ O сферы, т. е., докажемъ, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Плоскости OPM и $OP'M$ даются уравненіями

$$\eta = \frac{\eta'}{\xi'} \xi; \quad \zeta = \frac{\zeta'}{\xi'} \xi.$$

Рѣшая первое изъ этихъ уравненій совмѣстно съ уравненіями (5), второе—съ (6), находимъ координаты точекъ M' и R . Подставляя найденныя такимъ образомъ координаты (ξ_1, η_1, ζ_1) и (ξ_2, η_2, ζ_2) въ соотношеніе (8) и раскрывая детерминантъ, мы легко убѣдимся по (3), что послѣдній равенъ нулю.

Доказанная теорема даетъ слѣдующій способъ построения сферо-конической кривой по точкамъ, если даны ея оси. Построимъ (фиг. I) на данныхъ осяхъ, какъ на діаметрахъ, круги $BM'C$ и RDS . Черезъ произвольную точку P оси BC проводимъ дугу PM' , перпендикулярную къ AB , и продолжаемъ PM' до пересѣченія съ кругомъ $BM'C$ въ точкѣ M' . M' соединяемъ съ A и отмѣчаемъ точку R пересѣченія дуги $M'A$ съ кругомъ RDS . Черезъ R проводимъ дугу RP' , перпендикулярную къ оси AD . Если M будетъ точка пересѣченія дугъ RP' и PM' , то M принадлежитъ искомой кривой.

Выведемъ теперь уравненіе сферо-конической кривой въ координатахъ x, y .

По доказанному мы имѣемъ (фиг. I):

$$\cup AR = b.$$

Положимъ

$$\cup PM' = y'$$

и рассмотримъ прямоугольные сферическіе треугольники $PM'A$, RAP' , MAP' и MAP . Изъ нихъ имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{tgy'}{tga} &= cs PM'A = cs x \cdot sn M'AP = cs x cs RAP' = cs x \frac{tg AP'}{tg b} = \\ &= \frac{cs x}{tg b} tg AM \cdot cs MAP' = \frac{1}{tg b} \frac{cs x}{cs AM} sn AM \cdot sn MAP = \frac{1}{tg b} \cdot \frac{1}{cs y} \cdot sn y; \\ \therefore \frac{tg y'}{tg y} &= \frac{tg a}{tg b}. \end{aligned}$$

Обращаясь снова къ треугольнику $PM'A$, получаемъ еще:

$$cs a = cs x cs y'.$$

Исключая изъ двухъ послѣднихъ уравненій количество y' , легко представимъ искомое уравненіе кривой въ формѣ:

$$\frac{sn^2 x}{sn^2 a} + \frac{tg^2 y}{tg^2 b} = 1. \quad \dots \dots \dots (9)$$

Замѣтимъ, что если-бы мы приняли за абсцису дугу MP' , то уравненіе нашей кривой привели-бы къ виду:

$$\frac{sn^2 x'}{sn^2 a} + \frac{sn^2 y'}{sn^2 b} = 1, \quad \dots \dots \dots (9')$$

гдѣ

$$x' = \cup MP'; \quad y' = \cup MP.$$

Положимъ

$$\cup AM = \rho; \quad \cup PAM = \omega$$

и рассмотримъ треугольникъ AMP , изъ котораго находимъ

$$\operatorname{sn} x = \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{ctg} \omega; \quad \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{ctg} \rho = \operatorname{cs} x \cdot \operatorname{sn} \omega. \quad \dots \dots \dots (10)$$

Опредѣляя изъ этихъ соотношеній $\operatorname{sn}^2 x$ и $\operatorname{tg}^2 y$ и подставляя въ уравненіе кривой (9), получаемъ

$$\frac{\operatorname{sn}^2 b}{\operatorname{sn}^2 \rho} = 1 - e^2 \operatorname{cs}^2 \omega, \quad \dots \dots \dots (11)$$

гдѣ

$$e^2 = \frac{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b}{\operatorname{sn}^2 a}. \quad \dots \dots \dots (12)$$

Величины ρ и ω называются полярными координатами точки M , ρ —ея центральнымъ радіусомъ векторомъ, ω —амплитудой. Количество e носить названіе эксцентриситета кривой, соотношеніе (11)—ея полярнаго уравненія.

Разсмотримъ радіусъ векторъ ρ' , перпендикулярный къ ρ . Для него уравненіе (11) даетъ

$$\frac{\operatorname{sn}^2 b}{\operatorname{sn}^2 \rho'} = 1 - e^2 \operatorname{sn}^2 \omega, \quad \dots \dots \dots (13)$$

откуда на основаніи (11) и (12) находимъ

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 \rho} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \rho'} = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 a},$$

т. е.:

„Сумма квадратовъ обратныхъ величинъ синусовъ двухъ полудіаметровъ, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ, постоянна и равна квадрату обратной величины синуса большой полуоси“.

Мы въ дальнѣйшемъ примемъ за главное переменное абсциссу x и будемъ всѣ опредѣляемыя величины выражать черезъ это количество.

Такъ изъ уравненій (10) на основаніи (9) находимъ

$$\operatorname{cs}^2 \rho = \frac{\operatorname{cs}^2 b}{1 + e^2 \operatorname{tg}^2 x}; \quad \operatorname{tg}^2 \omega = \frac{\operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{tg}^2 a} \frac{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}. \quad \dots \dots \dots (14)$$

§ 3. Фокусы сферо-конической кривой.

Фокусами сферо-конической кривой называются точки пересѣченія асимптотъ фокальной линіи конуса съ большою осью кривой.

Уравненіями названныхъ асимптотъ конуса (3) служатъ

$$\zeta = 0; \quad \zeta cs b \pm \frac{\eta}{\sqrt{tg^2 a - tg^2 b}} = 0.$$

Рѣшая эти уравненія совмѣстно съ уравненіями большой оси кривой

$$\zeta = 0; \quad \xi^2 + \eta^2 = 1,$$

получаемъ координаты фокусовъ въ формѣ:

$$\zeta_s = \frac{cs a}{cs b}; \quad \eta_s = \pm e \frac{sn a}{sn b}; \quad \zeta_s = 0; \quad (15)$$

$$\therefore tg X_s = e tg a, \quad (16)$$

гдѣ X_s абсцисса фокуса.

Формула (16) показываетъ, что

„тангенсъ абсциссы фокуса пропорціоналенъ тангенсу большой полу-оси. Коэффициентъ пропорціональности равенъ эксцентриситету“.

Проведемъ черезъ фокусъ дугу, перпендикулярную къ большой оси, и назовемъ отрѣзокъ этой дуги, заключенный между кривой, *latus rectum*. Если длину *latus rectum* обозначимъ черезъ $2l$ и положимъ въ уравненіи кривой (9)

$$x = X_s; \quad y = l,$$

то найдемъ

$$tg l = \frac{tg^2 b}{tg a} (17)$$

Докажемъ теперь основное свойство фокусовъ, по которому

„сумма дугъ, соединяющихъ фокусы сферо-конической кривой съ какой либо точкой на ней, постоянна и равна большой оси“.

Пусть (фиг. II) S' и S будутъ фокусами сферо-конической кривой $BDCE$, M —какая либо точка на ней. Изъ треугольника PMS' , полагая

$$\cup S'M = r',$$

имѣемъ

$$cs r' = cs y . cs (x - X_s),$$

откуда на основаніи (9) и (16) находимъ

$$\operatorname{tg} r' = \frac{\operatorname{tg} a - e \cdot \operatorname{tg} x}{1 + e \cdot \operatorname{tg} a \operatorname{tg} x}; \quad (18)$$

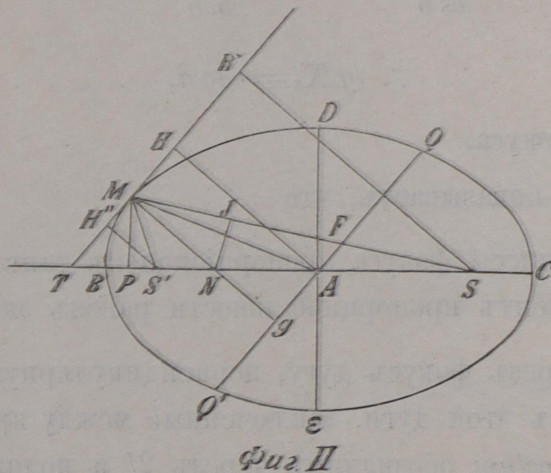
$$\therefore \operatorname{tg} (a - r') = e \cdot \operatorname{tg} x. \quad (19)$$

Измѣняя въ двухъ послѣднихъ формулахъ знакъ при e , мы, очевидно, опредѣлимъ дугу SM , равную r :

$$\operatorname{tg} r = \frac{\operatorname{tg} a + e \cdot \operatorname{tg} x}{1 - e \cdot \operatorname{tg} a \operatorname{tg} x}; \quad \operatorname{tg} (a - r) = -e \operatorname{tg} x. \quad (20)$$

Составляя при помощи (18) и (20) $\operatorname{tg} (r + r')$, мы убѣждаемся, что

$$r + r' = 2a. \quad (21)$$



Какъ слѣдствіе доказанной теоремы, находимъ (фиг. II)

$$SD = S'D = a.$$

Пусть

$$\angle S'SM = f,$$

тогда изъ треугольника SMS' имѣемъ

$$\operatorname{cs} r' = \operatorname{cs} 2X_s \cdot \operatorname{cs} r + \operatorname{sn} 2X_s \cdot \operatorname{sn} r \cdot \operatorname{cs} f,$$

откуда на основаніи (21) и (16) получаемъ

$$\frac{\operatorname{tg} l}{\operatorname{tg} r} = 1 - \frac{e}{\operatorname{cs}^2 b} \operatorname{cs} f, \quad (22)$$

гдѣ l половина *latus rectum* (17).

Соотношеніе (22) служитъ полярнымъ уравненіемъ сферо-конической кривой, отнесеннымъ къ одному изъ фокусовъ, какъ къ началу.

§ 4. Нормаль къ сферо-конической кривой.

Пусть (фиг. II) дуга MN лежитъ въ нормальной плоскости къ кривой $BDCE$ въ точкѣ M . Тогда MN будетъ дугою большого круга, такъ какъ названная плоскость содержитъ радіусъ сферы. Пусть далѣе N и P будутъ точки пересѣченія дуги MN и ординаты MP съ большою осью BC .

Будемъ называть нормалью къ сферо-конической кривой въ точкѣ M дугу пересѣченія нормальной плоскости въ этой точкѣ со сферою. Отрѣзокъ MN нормали носитъ названіе длины ея, точка M —точки касанія, дуга NP —длины поднормали.

Введемъ обозначенія:

$$\cup MN = n; \cup AN = X_n; \cup NP = S_n.$$

Уравненіемъ нормальной плоскости въ точкѣ $M(\xi, \eta, \zeta)$ служить

$$\Xi \frac{d\xi}{d\eta} + \Upsilon + Z \frac{d\zeta}{d\eta} = 0,$$

гдѣ Ξ, Υ, Z —текущія координаты.

Полагая въ предыдущемъ уравненіи

$$Z = 0,$$

получаемъ

$$\text{tg } X_n = - \frac{d\xi}{d\eta}.$$

Дифференцируя уравненіе кривой (4), находимъ на основаніи (7)

$$\frac{d\xi}{d\eta} = - e^2 \cdot \text{tg } x;$$

$$\therefore \text{tg } X_n = e^2 \text{tg } x, \quad \dots \dots \dots (23)$$

т. е.

„Тангенсъ абсциссы точки пересѣченія нормали съ большою осью пропорціоналенъ тангенсу абсциссы точки касанія. Коэффициентъ пропорціональности равенъ квадрату эксцентриситета“.

Изъ фигуры II очевидно:

$$S_n = x - X_n; \therefore \text{tg } S_n = \frac{(1 - e^2) \text{tg } x}{1 + e^2 \cdot \text{tg}^2 x} \cdot \dots \dots \dots (24)$$

Изъ треугольника PMN имѣемъ

$$cs\,n = cs\,y \cdot cs\,S_n,$$

откуда на основаніи формулъ (24) и (9)

$$tg^2n = \frac{tg^2b}{tg^2a} \cdot \frac{tg^2a - e^2tg^2x}{1 + e^2tg^2x} \cdot \dots \dots \dots (25)$$

Это выраженіе при помощи соотношеній (9) и (14) можно представить въ одномъ изъ слѣдующихъ двухъ видовъ:

$$tg^2n - tg^2l = \frac{e^2}{cs^4b} sn^2y; \dots \dots \dots (26)$$

$$tg^2n = \frac{tg^2b}{sn^2a\,cs^2b} (cs^2\rho - cs^2a\,cs^2b), \dots \dots \dots (27)$$

гдѣ l , по прежнему, половина *latus rectum*.

Выведемъ теперь нѣкоторыя основныя свойства нормали.

„Квадратъ тангенса длины нормали пропорціоналенъ произведенію синусовъ фокальныхъ радіусовъ векторовъ точки касанія“.

Составляя при помощи (18) и (20) выраженіе

$$sn\,r \cdot sn\,r'$$

и сравнивая съ (25), находимъ

$$tg^2n = \frac{tg^2b}{sn^2a} sn\,r \cdot sn\,r' \cdot \dots \dots \dots (28)$$

„Нормаль дѣлитъ пополамъ уголъ между фокальными радіусами векторами точки касанія“.

Изъ треугольниковъ $S'MN$ и SMN (фиг. II) имѣемъ

$$sn\,S'MN = sn\,S'NM \cdot \frac{sn\,(X_s - X_n)}{sn\,r'};$$

$$sn\,SMN = sn\,S'NM \cdot \frac{sn\,(X_s + X_n)}{sn\,r};$$

$$\therefore \frac{sn\,S'MN}{sn\,SMN} = \frac{sn\,r}{sn\,r'} \cdot \frac{sn\,(X_s - X_n)}{sn\,(X_s + X_n)},$$

откуда на основаніи (18), (20), (16), (23) находимъ

$$\frac{sn S MN}{sn SMN} = 1; \quad \therefore \angle S' MN = \angle SMN. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Опредѣлимъ этотъ уголъ

$$\angle SMN = \vartheta$$

въ функціи абсциссы точки касанія.

Изъ треугольника SMS' имѣемъ

$$cs^2 X_s = csr \cdot csr' + snr \cdot snr' \cdot cs SMS = cs(r + r') + 2snr snr' cs^2 \left(\frac{1}{2} SMS \right).$$

По доказанному

$$r + r' = 2a; \quad \angle \frac{1}{2} SMS' = \vartheta,$$

слѣдовательно, по (18), (20), (16)

$$cs^2 \vartheta = tg^2 b \frac{1 + e^2 \cdot tg^2 x}{tg^2 a - e^2 tg^2 x} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Выразимъ еще уголъ ϑ въ функціи ординаты y точки касанія.

При помощи уравненія кривой (9) мы изъ (30) находимъ

$$tg \vartheta = e \cdot \frac{tg a}{sn^2 b} \cdot sn y. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Перемножая соотношенія (25) и (30), получаемъ

$$tg n \cdot cs \vartheta = tg l. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Чтобы истолковать это уравненіе геометрически, опустимъ (фиг. II) изъ точки N перпендикулярную дугу NJ на фокальный радіусъ векторъ SM . Разсматривая треугольникъ MNJ , находимъ на основаніи (32)

$$\cup MJ = l, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

т. е.

„Проекція длины нормали на фокальный радіусъ векторъ точки касанія постоянна и равна половинѣ *latus rectum*“.

§ 5. Сопряженные диаметры сферо-конической кривой.

Проведемъ (фиг. II) дугу GAQ черезъ центръ A перпендикулярно къ нормали MN и будемъ отрѣзокъ AQ этой дуги называть полудіаметромъ, сопряженнымъ съ направлениемъ центрального радіуса вектора AM точки касанія.

Докажемъ, что

„тангенсъ отрѣзка нормали, отсѣкаемаго діаметромъ, сопряженнымъ съ направлениемъ центрального радіуса вектора точки касанія, обратно пропорціоналенъ тангенсу длины нормали“.

Пусть (фиг. II) G будетъ точка пересѣченія діаметра QQ' съ нормалью MN . Разсмотримъ треугольники AMG и ANM , изъ нихъ имѣемъ:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} MG &= \operatorname{tg} \rho \cdot \operatorname{cs}(n, \rho); & \dots \dots \dots (34) \\ \operatorname{cs} X_n &= \operatorname{cs} n \cdot \operatorname{cs} \rho + \operatorname{sn} n \cdot \operatorname{sn} \rho \cdot \operatorname{cs}(n, \rho). \end{aligned}$$

Исключая изъ этихъ уравненій $\operatorname{cs}(n, \rho)$, находимъ по (23), (25), (14)

$$\operatorname{tg} MG \cdot \operatorname{tg} n = \operatorname{tg}^2 b, \quad \dots \dots \dots (35)$$

что и доказываетъ нашу теорему.

Для уравненія (32) и (35) другъ на друга, получаемъ

$$\operatorname{tg} MG = \operatorname{tg} a \operatorname{cs} \vartheta,$$

слѣдовательно, видимъ изъ треугольника GMF , что

$$\cup MF = a, \quad \dots \dots \dots (36)$$

т. е.:

„Діаметръ, сопряженный съ направлениемъ центрального радіуса вектора какой либо точки кривой, отсѣкаетъ отъ фокального радіуса вектора этой точки отрѣзокъ, равный большой полуоси“.

Рѣшимъ теперь основную задачу теоріи сопряженныхъ діаметровъ. Опредѣлимъ по длинѣ ρ и амплитудѣ ω даннаго центрального радіуса вектора соотвѣтствующія величины ρ' и ω' сопряженнаго съ его направлениемъ полудіаметра.

На фигурѣ II

$$\rho = \cup AM; \quad \omega = \angle BAM; \quad \rho' = AQ; \quad \omega' = \angle BAQ.$$

Изъ треугольниковъ NAG и PNM имѣемъ:

$$\operatorname{ctg} \omega' = -\operatorname{cs} X_n \cdot \operatorname{tg} PNM = -\frac{\operatorname{cs} X_n \cdot \operatorname{tg} y}{\operatorname{sn} S_n},$$

слѣдовательно, по (9), (24), (23),

$$tg \omega' = - (1 - e^2) \frac{tg a}{tg b} \frac{tg x}{\sqrt{tg^2 a - tg^2 x}}.$$

Сравнивая это выраженіе со вторымъ изъ уравненій (14), находимъ

$$tg \omega \cdot tg \omega' = - (1 - e^2) = - \frac{sn^2 b}{sn^2 a}, \quad \dots \dots \dots (37)$$

т. е.

„Произведеніе тангенсовъ амплитудъ двухъ сопряженныхъ полудіаметровъ постоянно“.

Чтобы найти связь между ρ и ρ' , обращаемся къ полярному уравненію кривой (11), которое даетъ

$$\frac{sn^2 \rho}{sn^2 b} = \frac{1 + tg^2 \omega}{(1 - e^2) + tg^2 \omega}.$$

Полагая въ этомъ уравненіи

$$\rho = \rho'; \quad \omega = \omega',$$

находимъ на основаніи (37)

$$\begin{aligned} \frac{sn^2 \rho'}{sn^2 b} &= \frac{1}{1 - e^2} \cdot \frac{(1 - e^2)^2 + tg^2 \omega}{(1 - e^2) + tg^2 \omega} \\ \therefore sn^2 \rho + sn^2 \rho' &= sn^2 a + sn^2 b. \quad \dots \dots \dots (38) \end{aligned}$$

Отсюда заключаемъ, что

„сумма квадратовъ синусовъ двухъ сопряженныхъ полудіаметровъ постоянна и равна суммѣ квадратовъ синусовъ полуосей“.

Полученное соотношеніе (38) даетъ также возможность выразить ρ' черезъ координаты x и y точки M , а именно, при помощи (14) и (9) находимъ

$$\left. \begin{aligned} sn^2 \rho' &= sn^2 a + sn^2 b - 1 + \frac{cs^2 b}{1 + e^2 tg^2 x}; \\ sn^2 \rho' - sn^2 b &= sn^2 a - sn^2 \rho = \frac{e^2}{1 - e^2} sn^2 y. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (39)$$

Опредѣляя изъ (35) и (25) $sn^2 MG$ въ функціи x и прилагая первое изъ соотношеній (39), получаемъ

$$sn \rho' \cdot sn MG = sn a \cdot sn b, \quad \dots \dots \dots (40)$$

т. е.

„Синусъ отрѣзка нормали, отрѣкаемаго діаметромъ, сопряженнымъ съ направленіемъ центральнаго радіуса вектора точки касанія, обратно пропорціоналенъ синусу этого полудіаметра“.

§ 6. Касательная и радіусъ кривизны сферо-конической кривой.

Пусть (фиг. II) дуга MT перпендикулярна къ нормали MN , и пусть T и P будутъ точки пересѣченія дуги MT и ординаты MP съ большою осью BC .

Дугу MT будемъ называть касательной къ кривой въ точкѣ M , отрѣзокъ MT касательной—ея длиною, уголъ MTP —угломъ наклоненія, наконецъ, отрѣзокъ PT большой оси—длиною подкасательной.

Введемъ обозначенія:

$$\cup MT = t; \quad \angle MTP = i;$$

$$\cup PT = S_t; \quad \cup AT = X_t.$$

Разсмотримъ треугольники TMP и PMN , которые даютъ

$$\operatorname{tg} S_t = \operatorname{sn} y \cdot \operatorname{tg} TMP = \operatorname{sn} y \cdot \operatorname{ctg} PMN = \frac{\operatorname{sn}^2 y}{\operatorname{tg} S_n},$$

слѣдовательно, по (9) и (24)

$$\operatorname{tg} S_t = \operatorname{cs}^2 a \frac{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}. \quad \dots \dots \dots (41)$$

Далѣе имѣемъ (фиг. II)

$$\operatorname{tg} X_t = \operatorname{tg} (x + S_t); \quad \therefore \operatorname{tg} X_t = \frac{\operatorname{tg}^2 a}{\operatorname{tg} x}, \quad \dots \dots \dots (42)$$

т. е.

„Тангенсъ абсциссы точки пересѣченія касательной съ большою осью обратно пропорціоналенъ тангенсу абсциссы точки касанія“.

Какъ слѣдствіе изъ доказанной теоремы вытекаетъ (23), что

„произведеніе тангенсовъ абсциссъ точекъ пересѣченія нормали и касательной съ большою осью постоянно“.

Опустимъ (фиг. II) изъ центра A перпендикулярную дугу

$$AH = p$$

на касательную MT . Треугольники AMH и AMG даютъ

$$\operatorname{sn} p = \operatorname{sn} \rho \operatorname{sn} AMH = \operatorname{sn} \rho \operatorname{cs} AMG = \operatorname{sn} \rho \cdot \frac{\operatorname{tg} MG}{\operatorname{tg} \rho} = \operatorname{cs} \rho \cdot \operatorname{tg} MG,$$

откуда на основаніи (35) находимъ

$$\operatorname{sn} p = \operatorname{tg}^2 b \cdot \frac{\operatorname{cs} \rho}{\operatorname{tg} n}, \quad \dots \dots \dots (43)$$

или при помощи (27)

$$\frac{\operatorname{tg}^2 a \cdot \operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{tg}^2 p} = \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b - \operatorname{tg}^2 \rho. \quad \dots \dots \dots (44)$$

Проведемъ черезъ фокусы S и S' (фиг. II) перпендикулярныя къ касательной MT дуги

$$\cup SH'' = \partial; \quad \cup SH' = \partial'$$

и докажемъ, что произведеніе синусовъ этихъ дугъ постоянно.

Треугольникъ MSH'' даетъ

$$\operatorname{sn} \partial = \operatorname{sn} r \cdot \operatorname{sn} SMH'' = \operatorname{sn} r \operatorname{cs} \vartheta,$$

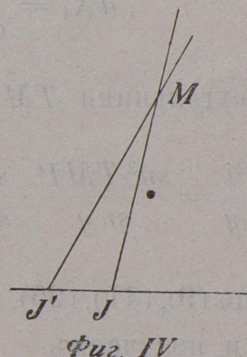
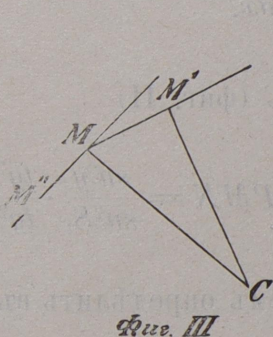
откуда при помощи (30) и (20)

$$\operatorname{sn}^2 \partial = \operatorname{cs}^2 a \cdot \operatorname{tg}^2 b \cdot \frac{\operatorname{tg} a + e \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a - e \operatorname{tg} x}.$$

Измѣняя въ этой формулѣ знакъ при e , находимъ, очевидно, $\operatorname{sn}^2 \partial'$ слѣдовательно,

$$\operatorname{sn} \partial \cdot \operatorname{sn} \partial' = \operatorname{cs}^2 a \cdot \operatorname{tg}^2 b = \operatorname{const.}$$

Введемъ теперь въ разсмотрѣніе сферическій радіусъ кривизны.



Пусть (фиг. III) $M''M$ и MM' будутъ два смежныхъ элемента нашей кривой, MC и $M'C$ нормали въ точкахъ M и M' , C —ихъ точка

пересѣченія. Радиусомъ кривизны сферо-конической кривой въ точкѣ M будемъ называть отрѣзокъ MC нормали, заключенный между точкою касанія и точкою пересѣченія нормали съ бесконечно смежной.

Обозначимъ радиусъ кривизны MC черезъ R , элементъ дуги кривой черезъ ds , уголъ между элементами $M''M$ и MM' (уголъ смежности) черезъ $d\varepsilon$.

Принимая дугу MM' за дугу большого круга, находимъ изъ треугольника $MM'C$

$$\operatorname{tg}(ds) = \operatorname{tg} R \operatorname{sn}(d\varepsilon); \quad \therefore \operatorname{tg} R = \frac{ds}{d\varepsilon}. \quad (45)$$

Дифференцируя уравненіе кривой (9) и замѣчая, что по (7)

$$ds^2 = d\tilde{z}^2 + dr^2 + d\tilde{x}^2 = dx^2 cs^2 y + dy^2,$$

находимъ

$$ds^2 = \frac{cs^2 b}{cs^4 x} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 a - e^2 \operatorname{tg}^2 x}{(\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 x)(1 + e^2 \operatorname{tg}^2 x)^2} dx^2. \quad (46)$$

Пусть (фиг. IV) MJ и MJ' будутъ касательныя къ кривой въ двухъ смежныхъ точкахъ, J и J' — точки ихъ пересѣченія съ большою осью кривой. Тогда

$$\frac{\operatorname{sn} JJ'}{\operatorname{sn} JM} = \frac{\operatorname{sn} J'MJ}{\operatorname{sn} MJ'J}.$$

Но при нашихъ обозначеніяхъ

$$\cup JJ' = dX_t; \quad \cup JM = t, \quad \angle J'MJ = d\varepsilon; \quad \angle MJ'J = i + di,$$

$$\therefore d\varepsilon = \frac{\operatorname{sn} i}{\operatorname{sn} t} dX_t.$$

Изъ формулы (42) находимъ

$$dX_t = \frac{-\operatorname{tg}^2 a}{cs^2 x (\operatorname{tg}^4 a + \operatorname{tg}^2 x)} dx.$$

Далѣе, треугольники TMP и PMN даютъ (фиг. II)

$$\frac{\operatorname{sn} i}{\operatorname{sn} t} = \frac{\operatorname{sn}^2 i}{\operatorname{sn} y} = \frac{\operatorname{sn}^2 TMP}{\operatorname{sn} y} \cdot \frac{\operatorname{sn}^2 y}{\operatorname{sn}^2 S_t} = \frac{\operatorname{sn} y}{\operatorname{sn}^2 S_t} \cdot cs^2 PMN = \frac{\operatorname{sn} y}{\operatorname{sn}^2 S_t} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}^2 n},$$

слѣдовательно по (9), (41), (25), величину $d\varepsilon$ можемъ опредѣлить въ функціи координаты x , и получаемъ

$$(d\varepsilon)^2 = \frac{\operatorname{sn}^2 b \cdot \operatorname{tg}^2 a \cdot (1 + e^2 \operatorname{tg}^2 x)}{cs^4 x \cdot (\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 x) \cdot (\operatorname{tg}^2 a - e^2 \operatorname{tg}^2 x)^2} dx^2.$$

Раздѣливъ это соотношеніе на (46), находимъ на основаніи (45)

$$\frac{1}{tg^2 R} = tg^2 a \cdot tg^2 b \left[\frac{1 + e^2 tg^2 x}{tg^2 a - e^2 tg^2 x} \right]^3.$$

Если теперь вспомнимъ выраженіе, полученное нами для $tg n$ (25), и сравнимъ съ послѣднимъ соотношеніемъ, то найдемъ

$$tg R = \frac{tg^3 n}{tg^2 l}, \quad (47)$$

т. е.

„Тангенсъ радиуса кривизны пропорціоналенъ кубу тангенса длины нормали. Коэффициентъ пропорціональности равенъ квадрату котангенса половины *latus rectum*“.

ГЛАВА III.

Движеніе неизмѣнной прямой, эксцентричной прямой и мгновенной оси въ тѣлѣ.

§ 1. Уравненія неизмѣннаго, эксцентричнаго и мгновеннаго конусовъ.

Интерпретаціи *Poinsot* и *Mac Cullagh*'а тѣсно связаны съ изученіемъ движенія неизмѣнной прямой (гл. I форм. 5) и мгновенной оси (гл. I форм. 19). Для удобства изслѣдованія мы введемъ еще т. н. эксцентричную прямую

$$\frac{X}{\sqrt{A} \cdot p} = \frac{Y}{\sqrt{B} \cdot q} = \frac{Z}{\sqrt{C} \cdot r}^* \dots \dots \dots (1)$$

Въ настоящей главѣ мы займемся изученіемъ движенія этихъ трехъ прямыхъ въ тѣлѣ. Большинство изъ теоремъ, относящихся къ этому вопросу, принадлежатъ *Routh*'у **).

*, Если на эллипсоидѣ

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

дана переменная точка (x, y, z) , то эксцентричной прямой радіуса вектора этой точки называется прямая

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z},$$

слѣдовательно, уравненія (1) опредѣляютъ эксцентричную прямую или мгновенной оси, если будетъ разсматривать эллипсоидъ инерціи, или неизмѣнной прямой, если имѣемъ въ виду гиращонный эллипсоидъ

**) *Routh. The advanced part.* §§ 157—167. Ср. также *Routh. Some new theorems on the motion of a body* и т. д. *Proceed. of the Royal Soc. of London.* XXI. 1872.

Во время вращенія твердаго тѣла разсматриваемыя нами три прямыя, проходящія постоянно черезъ точку опоры, описываютъ въ немъ коническія поверхности, которыя соотвѣтственно будемъ называть неизмѣннымъ, эксцентричнымъ и мгновеннымъ или полодіальнымъ конусами.

Исключая изъ уравненій неизмѣнной прямой

$$\frac{X}{Ap} = \frac{Y}{Bq} = \frac{Z}{Cr}$$

при помощи интеграловъ движенія (форм. 3, 4 гл. I) количества p, q, r , получаемъ уравненіе неизмѣннаго конуса:

$$\frac{Ah-l^2}{A} X^2 + \frac{Bh-l^2}{B} Y^2 + \frac{Ch-l^2}{C} Z^2 = 0. \quad (2)$$

Подобнымъ путемъ находимъ уравненіе эксцентричнаго конуса (1)

$$(Ah-l^2) X^2 + (Bh-l^2) Y^2 + (Ch-l^2) Z^2 = 0. \quad (3)$$

и мгновеннаго (форм. 19 гл. I)

$$A(Ah-l^2)X^2 + B(Bh-l^2)Y^2 + C(Ch-l^2)Z^2 = 0. \quad (4)$$

Мы видимъ, что конусы (2), (3), (4) всѣ второго порядка, и что главными плоскостями для нихъ служатъ плоскости главныхъ сѣченій эллипсоида инерціи.

Если вспомнимъ геометрическое значеніе тѣхъ неравенствъ (форм. 18 гл. I), которымъ удовлетворяютъ постоянныя h и l , то убѣдимся, что всѣ три конуса (2), (3), (4) обхватываютъ одновременно ось или наибольшаго или наименьшаго момента въ зависимости отъ того, будетъ-ли разстояніе плоскости катанія отъ точки опоры меньше или больше средней полуоси эллипсоида инерціи.

§ 2. Положеніе неизмѣннаго, эксцентричнаго и мгновеннаго конусовъ въ тѣлѣ-

Положеніе неизмѣннаго и эксцентричнаго конусовъ въ тѣлѣ еще болѣе выясняется изъ свойствъ ихъ круговыхъ сѣченій.

Докажемъ сначала слѣдующую теорему, основанную на извѣстномъ законѣ двойственности *Chasles'*я:

„Круговыя сѣченія эллипсоида инерціи перпендикулярны къ асимптотамъ фокальной линіи гираціоннаго эллипсоида въ соотвѣтствующей координатной плоскости“.

Уравненіями центральныхъ круговыхъ сѣченій эллипсоида инерціи служатъ (форм. 21 гл. I)

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{A-B} \cdot X + \sqrt{B-C} \cdot Z &= 0; \\ \sqrt{A-B} \cdot X - \sqrt{B-C} \cdot Z &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Разсмотримъ фокальную линію гираціоннаго эллипсоида (форм. 26 гл. I) въ плоскости XOZ :

$$Y=0; \quad \frac{X^2}{A-B} - \frac{Z^2}{B-C} = 1.$$

Уравненіями ея асимптотъ служатъ

$$\left. \begin{aligned} Y=0; \quad \frac{X}{\sqrt{A-B}} - \frac{Z}{\sqrt{B-C}} &= 0; \\ Y=0; \quad \frac{X}{\sqrt{A-B}} + \frac{Z}{\sqrt{B-C}} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Плоскости (5), очевидно, перпендикулярны къ прямымъ (6).

Обратно, плоскости центральныхъ круговыхъ сѣченій гираціоннаго эллипсоида

$$\left. \begin{aligned} X \sqrt{\frac{A-B}{A}} + Z \sqrt{\frac{B-C}{C}} &= 0; \\ X \sqrt{\frac{A-B}{A}} - Z \sqrt{\frac{B-C}{C}} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

перпендикулярны къ асимптотамъ

$$\left. \begin{aligned} Y=0; \quad \frac{X}{\sqrt{\frac{A-B}{A}}} - \frac{Z}{\sqrt{\frac{B-C}{C}}} &= 0; \\ Y=0; \quad \frac{X}{\sqrt{\frac{A-B}{A}}} + \frac{Z}{\sqrt{\frac{B-C}{C}}} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

фокальной линіи эллипсоида инерціи въ плоскости XOZ .

Обратимся теперь къ уравненіямъ (2) и (3) неизмѣннаго и эксцентричнаго конусовъ. Легко убѣдиться, что круговыя сѣченія перваго изъ

нихъ даются уравненіями (7), а второго—уравненіями (5). Отсюда слѣдующая теорема:

„Круговыя сѣченія неизмѣннаго конуса параллельны таковымъ же сѣченіямъ гираціоннаго эллипсоида, и слѣдовательно, перпендикулярны къ асимптотамъ фокальной линіи эллипсоида инерціи въ плоскости наибольшаго и наименьшаго момента. Круговыя сѣченія эксцентричнаго конуса параллельны таковымъ же сѣченіямъ эллипсоида инерціи, и слѣдовательно, перпендикулярны къ асимптотамъ фокальной линіи гираціоннаго эллипсоида въ плоскости наибольшаго и наименьшаго момента“.

Уравненіемъ касательной плоскости къ неизмѣнному конусу (2) служить

$$(Ah - l^2)p \cdot X + (Bh - l^2)q \cdot Y + (Ch - l^2)r \cdot Z = 0.$$

То-же уравненіе опредѣляетъ полярную плоскость мгновенной оси относительно эксцентричнаго конуса (3), слѣдовательно,

„полярная плоскость мгновенной оси по отношенію къ эксцентричному конусу касается неизмѣннаго конуса по соотвѣтствующему положенію неизмѣнной прямой, такъ что мгновенный и неизмѣнный конусы являются взаимно полярными поверхностями по отношенію къ конусу эксцентричному“.

Изъ интерпретаціи *Mac Cullagh*'а слѣдуетъ, что кривая пересѣченія неизмѣннаго конуса съ гираціоннымъ эллипсоидомъ лежитъ на сферѣ. Радиусъ этой сферы равенъ $\frac{l}{\sqrt{h}}$ (форм. 28 гл. I). Докажемъ, что кривая пересѣченія эксцентричнаго конуса съ эллипсоидомъ инерціи также лежитъ на нѣкоторой сферѣ.

Дѣйствительно, помножая уравненіе эллипсоида инерціи (форм. 21 гл. I) на h и вычитая изъ уравненія эксцентричнаго конуса (3), находимъ

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{h}{l^2}.$$

Радиусъ этой сферы равенъ длинѣ перпендикуляра, опущеннаго изъ точки опоры на плоскость катанія (форм. 25 гл. I).

§ 3. Неизмѣнная, эксцентричная и мгновенная сферо-коническая кривая.

Въ предыдущихъ параграфахъ мы опредѣлили форму и положеніе поверхностей, описываемыхъ въ тѣлѣ неизмѣнной прямой, эксцентричной

прямой и мгновенной оси. Остается еще для полного знания движения названныхъ прямыхъ въ тѣлѣ вычислить тѣ угловыя скорости, съ которыми производящія движутся по этимъ поверхностямъ.

Опишемъ около точки опоры O сферу радиуса единицы, неизмѣнно съ тѣломъ связанную. Конусы (2), (3), (4) пересѣкутъ эту сферу по тремъ сферо-коническимъ кривымъ, которыя соответственно будемъ называть неизмѣнной, эксцентричной и мгновенной кривой.

Въ дальнѣйшемъ, чтобы остановиться на чемъ либо опредѣленномъ, будемъ предполагать, что разстояние плоскости катанія отъ точки опоры меньше средней полуоси эллипсоида инерціи. Тогда по формулѣ (25) гл. I

$$Bh - l^2 < 0.$$

Точка A пересѣченія оси наибольшаго момента со сферою служить общимъ центромъ трехъ сферо-коническихъ кривыхъ.

Мы удержимъ обозначенія предыдущей главы, при чемъ только величины, относящіяся къ неизмѣнной, эксцентричной и мгновенной кривой, будемъ отличать соответственно значками 1, 2, 3.

Опредѣляя по формуламъ (2) предыдущей главы полуоси разсматриваемыхъ кривыхъ, находимъ (2), (3), (4)

$$\left. \begin{aligned} \frac{tg a_1}{B} = \frac{tg a_2}{\sqrt{AB}} = \frac{tg a_3}{A} &= \sqrt{\frac{-(Ah - l^2)}{AB(Bh - l^2)}}, \\ \frac{tg b_1}{C} = \frac{tg b_2}{\sqrt{AC}} = \frac{tg b_3}{A} &= \sqrt{\frac{-(Ah - l^2)}{AC(Ch - l^2)}}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Полученныя уравненія показываютъ, что

„отношенія тангенсовъ полуосей нашихъ кривыхъ не зависятъ отъ начальныхъ условій (h, l) “.

По формулѣ (12) главы II вычисляемъ эксцентриситеты e_1 и e_2 :

$$e_1^2 = \frac{A(B-C)}{B(A-C)}; \quad e_2^2 = \frac{B-C}{A-C}, \quad \dots \dots \dots (10)$$

т. е.

„Эксцентриситеты неизмѣнной и эксцентричной кривыхъ не зависятъ отъ начальныхъ условій (h, l) “.

§ 4. Скорость конца неизмѣнной прямой.

Пусть въ моментъ t точки M_1, M_2, M_3 будутъ точками пересѣченія неизмѣнной прямой, эксцентричной прямой и мгновенной оси со сферою. Ско-

рости точек M_1, M_2, M_3 по соответствующимъ сферо-коническимъ кривымъ, очевидно, равны угловымъ скоростямъ производящихъ неизмѣннаго, эксцентричнаго и мгновеннаго конусовъ.

Будемъ называть эти точки концами соответствующихъ прямыхъ.

Такъ какъ твердое тѣло вращается около OM_3 , а OM_1 неподвижна въ пространствѣ (§ 2 гл. I), то очевидно, что дуга $M_3 M_1$ нормальна къ неизмѣнной кривой.

Положимъ по прежнему

$$\cup M_3 M_1 = \zeta$$

и опредѣлимъ длину n_1 нормали къ неизмѣнной кривой въ функціи дуги ζ .

Уравненіемъ плоскости, содержащей неизмѣнную прямую

$$\frac{X}{Ap} = \frac{Y}{Bq} = \frac{Z}{Cr}$$

и мгновенную ось

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = \frac{Z}{r},$$

служить

$$(B - C)qr X + (C - A)rp Y + (A - B)pq Z = 0.$$

Уголъ между неизмѣнной прямой и прямой пересѣченія этой плоскости съ плоскостью XOY измѣряется, очевидно, дугою n_1 , слѣдовательно (форм. 3, 4, 7 гл. I)

$$\operatorname{tg} n_1 = - \frac{C\sqrt{l^2\omega^2 - h^2}}{Ch - l^2},$$

гдѣ по прежнему ω мгновенная угловая скорость, а l и h постоянныя интеграловъ живой силы и момента.

По теоремѣ *Lagrange*'а (форм. 20 гл. I) имѣемъ

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{\sqrt{l^2\omega^2 - h^2}}{h},$$

слѣдовательно,

$$\operatorname{tg} n_1 = - \frac{Ch}{Ch - l^2} \operatorname{tg} \zeta. \quad \dots \dots \dots (11)$$

При помощи полученной формулы мы можемъ скорость v_1 конца неизмѣнной прямой выразить въ функціи угла ζ .

Дѣйствительно, мы, очевидно, имѣемъ

$$v_1 = \omega \operatorname{sn} \zeta,$$

слѣдовательно, на основаніи теоремы *Lagrange*'а и формулы (11)

$$v_1 = - \frac{Ch - l^2}{Cl} \operatorname{tg} n_1, \quad \dots \dots \dots (12)$$

т. е.

„Скорость конца неизмѣнной прямой пропорціональна тангенсу длины нормали къ соотвѣтствующей кривой“.

Пусть ϑ_1 будетъ уголъ нормали n_1 съ фокальнымъ радіусомъ векторомъ точки M_1 . Тогда (форм. 32 гл. II)

$$\operatorname{tg} n_1 \operatorname{cs} \vartheta_1 = \operatorname{tg} l_1,$$

гдѣ l_1 половина *latus rectum* неизмѣнной кривой (форм. 17 гл. II).

Перемножая два послѣднихъ уравненія, находимъ при помощи (9)

$$v_1 \operatorname{cs} \vartheta_1 = \frac{1}{l} \sqrt{- \frac{(Ah - l^2)(Bh - l^2)}{AB}}, \quad \dots \dots \dots (13)$$

откуда заключаемъ, что

„проекція скорости конца неизмѣнной прямой на перпендикуляръ къ фокальному радіусу вектору постоянна“.

Дифференцируя полярное уравненіе сферо-конической кривой, отнесенное къ одному изъ фокусовъ, какъ къ началу (форм. 22 гл. II)

$$\frac{\operatorname{tg} l_1}{\operatorname{tg} r_1} = 1 - \frac{e_1}{\operatorname{cs}^2 b_1} \operatorname{cs} f_1,$$

находимъ

$$\frac{dr_1}{dt} = - \frac{e_1}{\operatorname{cs}^2 b_1} \operatorname{ctg} l_1 \cdot \operatorname{sn} f_1 \cdot \operatorname{sn} r_1 \cdot \operatorname{sn} r_1 \cdot \frac{df_1}{dt}.$$

Величина $\operatorname{sn} r_1 \frac{df_1}{dt}$, очевидно, равна проекціи скорости v_1 на перпендикуляръ къ фокальному радіусу вектору (13), произведеніе-же $\operatorname{sn} f_1 \cdot \operatorname{sn} r_1$, какъ это видно изъ треугольника MSP (фиг. II), равно синусу ординаты y_1 , слѣдовательно, предыдущее соотношеніе на основаніи (9) и (10) даетъ

$$\frac{dr_1}{dt} = - \frac{l}{C} \sqrt{\frac{(A - C)(B - C)}{AB}} \cdot \operatorname{sn} y_1, \quad \dots \dots \dots (14)$$

т. е.

„Проекція скорости конца неизмѣнной прямой на фокальный радіусъ векторъ пропорціональна синусу ординаты. Коэффициентъ пропорціональности не зависитъ отъ начальной живой силы $\left(\frac{1}{2} h\right)$ “.

Извѣстно (форм. 34, 35 гл. II), что уголъ нормали сферо-конической кривой съ центральнымъ радіусомъ векторомъ точки касанія выражается черезъ величину ρ_1 этого радіуса вектора и черезъ длину n_1 нормали слѣдующимъ образомъ:

$$\operatorname{tg} n_1 \cdot \operatorname{cs}(n_1, \rho_1) = \operatorname{tg}^2 b_1 \cdot \operatorname{ctg} \rho_1. \quad (15)$$

Помножая это уравненіе на формулу (12), получаемъ при помощи (9):

$$v_1 \operatorname{cs}(n_1, \rho_1) = \frac{Ah - l^2}{Al} \operatorname{ctg} \rho_1, \quad (16)$$

откуда заключаемъ, что

„проекція скорости конца неизмѣнной прямой на перпендикуляръ къ центральному радіусу вектору пропорціональна котангенсу этого радіуса вектора“.

Опредѣлимъ еще проекцію скорости v_1 на центральный радіусъ векторъ ρ_1 .

Такъ какъ декартовыя координаты точки M_1 равны

$$\frac{Ap}{l}; \quad \frac{Bq}{l}; \quad \frac{Cr}{l},$$

то мы, очевидно, имѣемъ (форм. 7 гл. II)

$$\operatorname{cs} x_1 \cdot \operatorname{cs} y_1 = \operatorname{cs} \varrho_1 = \frac{Ap}{l}; \quad \operatorname{sn} x_1 \cdot \operatorname{cs} y_1 = \frac{Bq}{l}; \quad \operatorname{sn} y_1 = \frac{Cr}{l};$$

$$\therefore \frac{d\rho_1}{dt} = -\frac{1}{l} \frac{A \frac{dp}{dt}}{\operatorname{sn} \rho_1},$$

или при помощи уравненій движенія (форм. 2 гл. I)

$$\frac{d\rho_1}{dt} = -\frac{1}{l} \frac{(B-C)qr}{\operatorname{sn} \rho_1};$$

$$\therefore \frac{d\rho_1}{dt} = -\frac{l(B-C) \operatorname{sn} x_1 \operatorname{cs} y_1 \operatorname{sn} y_1}{BC \operatorname{sn} \rho_1}.$$

Это выраженіе можно представить въ слѣдующей болѣе симметричной формѣ:

$$\frac{d\rho_1}{dt} = -l \frac{B-C}{BC} \cdot \frac{\operatorname{sn} y_1 \cdot \operatorname{sn} x_1'}{\operatorname{sn} \rho_1}, \quad \dots \dots \dots (17)$$

гдѣ x_1' имѣетъ то-же значеніе, что x' въ формулѣ (9') главы II.

Въ предыдущей главѣ мы видѣли (28), что квадратъ тангенса нормали пропорціоналенъ произведенію изъ синусовъ фокальныхъ радіусовъ векторовъ точки касанія, слѣдовательно, формулу (12) можно представить такъ:

$$v_1 = k \sqrt{\operatorname{sn} r_1 \cdot \operatorname{sn} r_1'},$$

гдѣ k — постоянное количество.

Дифференцируя послѣднее уравненіе и прилагая снова приведенную теорему, получаемъ

$$\frac{dv_1}{dt} = k' \left(\operatorname{cs} r_1 \operatorname{sn} r_1' \frac{dr_1}{dt \operatorname{tg} n_1} + \operatorname{sn} r_1 \operatorname{cs} r_1' \frac{dr_1'}{dt \operatorname{tg} n_1} \right),$$

гдѣ k' новое постоянное.

По (14) $\frac{dr_1}{dt}$ пропорціональна $\operatorname{sn} y_1$, а отношеніе $\frac{\operatorname{sn} y_1}{\operatorname{tg} n_1}$, какъ это видно изъ формулъ (31) и (32) предыдущей главы, пропорціонально $\operatorname{sn} \vartheta$, гдѣ ϑ уголъ фокальнаго радіуса вектора съ нормалью, слѣдовательно,

$$\frac{dv'}{dt} = k'' [\operatorname{cs} r_1 \cdot \operatorname{sn} r_1' \cdot \operatorname{sn}(r_1', n) + \operatorname{sn} r_1 \operatorname{cs} r_1' \operatorname{sn}(r_1, n_1)],$$

гдѣ k'' новое постоянное.

Полученное соотношеніе, очевидно, показываетъ, что

„движеніе конца неизмѣнной прямой по соотвѣтствующей сфероконической кривой таково-же, какъ движеніе по этой кривой матеріальной частицы, находящейся подѣйствіемъ двухъ силъ, равныхъ $\operatorname{sn} r_1 \cdot \operatorname{cs} r_1'$ и $\operatorname{sn} r_1' \cdot \operatorname{cs} r_1$ и направленныхъ по касательнымъ къ дугамъ r_1 и r_1' “.

§ 5. Скорости концовъ эксцентричной прямой и мгновенной оси.

Чтобы перейти къ изслѣдованію угловыхъ скоростей эксцентричной прямой и мгновенной оси въ тѣлѣ, мы выведемъ два соотношенія, позволяющихъ по движенію точки M_1 судить о движеніи точекъ M_2 и M_3 .

Пусть

$$\rho_1, \theta_1; \rho_2, \theta_2; \rho_3, \theta_3;$$

будутъ центральные радіусы векторы и соотвѣтствующія амплитуды точекъ M_1, M_2, M_3 . Тогда, очевидно, имѣемъ

$$cs \rho_1 = cs M_1 OA = \frac{Ap}{l};$$

$$cs \rho_2 = cs M_2 OA = \frac{\sqrt{A}p}{\sqrt{h}};$$

$$cs \rho_3 = cs M_3 OA = \frac{p}{\omega},$$

слѣдовательно, при помощи теоремы *Lagrange*'а (форм. 20 гл. I)

$$\frac{cs \rho_1}{Ah} = \frac{cs \rho_2}{l \cdot \sqrt{Ah}} = \frac{cs \rho_3}{l^2 cs \zeta} = \frac{p}{lh} \dots \dots \dots (18)$$

Замѣчая далѣе, что плоскости $M_1 OA, M_2 OA, M_3 OA$ даются уравненіями

$$CrY - BqZ = 0; \sqrt{C} \cdot rY - \sqrt{B} \cdot qZ = 0; rY - qZ = 0,$$

получаемъ

$$\frac{tg \theta_1}{C} = \frac{tg \theta_2}{\sqrt{BC}} = \frac{tg \theta_3}{B} = \frac{r}{Bq} \dots \dots \dots (19)$$

Формулы (18) и (19) опредѣляютъ движенія концовъ эксцентричной прямой и мгновенной оси по движенію точки M_1 .

Дифференцируя первое изъ уравненій (19), находимъ

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \sqrt{\frac{B}{C}} \cdot \frac{cs^2 \theta_2}{cs^2 \theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{dt}.$$

Замѣчая, что

$$\left. \begin{aligned} v_1 cs(\rho_1, n_1) &= \frac{d\theta_1}{dt} sn \rho_1; \\ v_2 cs(\rho_2, n_2) &= \frac{d\theta_2}{dt} sn \rho_2, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

такъ какъ лѣвыя и правыя части написанныхъ уравненій выражаютъ проекціи соотвѣтствующихъ скоростей на направленіе перпендикуляра къ

центральному радіусу вектору, получаемъ изъ послѣднихъ трехъ уравненій

$$v_2 = \sqrt{\frac{B}{C} \cdot \frac{\sin \rho_2}{\sin \rho_1} \cdot \frac{\cos^2 \theta_2}{\cos^2 \theta_1} \cdot \frac{v_1 \cos(\rho_1, n_1)}{\cos(\rho_2, n_2)}}.$$

По формулѣ (15)

$$\cos(\rho_2, n_2) = \operatorname{tg}^2 b_2 \cdot \operatorname{ctg} \rho_2 \cdot \operatorname{ctg} n_2, \quad (21)$$

гдѣ $\operatorname{tg} b_2$ дается соотношеніями (9), слѣдовательно, при помощи (16), (18), (19)

$$v_2 = - \frac{Ch - l^2}{\sqrt{ABCh}} \operatorname{tg} n_2, \quad (22)$$

т. е.

„Скорость конца эксцентричной прямой пропорціональна тангенсу длины нормали къ соответствующей кривой“.

Сравнивая выраженія для скоростей v_1 и v_2 между собою (12), (22), заключаемъ, что формулы, относящіяся къ скорости конца эксцентричной прямой, должны быть вполне сходными съ соответствующими формулами для скорости конца неизмѣнной прямой.

Такъ, напримѣръ, проекціи скорости v_2 на направленія перпендикуляра къ фокальному радіусу вектору, самаго фокальнаго радіуса вектора и перпендикуляра къ центральному радіусу вектору точки M_2 даются соотношеніями

$$v_2 \cos \theta = \sqrt{-\frac{(Ah - l^2)(Bh - l^2)}{ABCh}};$$

$$\frac{dr_2}{dt} = - \sqrt{\frac{h(A-C)(B-C)}{ABC}} \sin y_2;$$

$$v_2 \cos(\rho_2, n_2) = \frac{Ah - l^2}{\sqrt{ABCh}} \operatorname{ctg} \rho_2.$$

Эти формулы могутъ быть получены по тому же способу, при помощи котораго были выведены соотношенія (13), (14), (16).

Наконецъ, чтобы найти проекцію скорости v_2 на центральный радіусъ векторъ точки M_2 , замѣчаемъ, что декартовы координаты этой точки равны

$$\sqrt{\frac{A}{h}} \cdot p; \quad \sqrt{\frac{B}{h}} \cdot q; \quad \sqrt{\frac{C}{h}} \cdot r,$$

слѣдовательно (форм. 7 гл. II),

$$cs x_2 \cdot cs y_2 = cs \rho_2 = \sqrt{\frac{A}{h}} \cdot p;$$

$$cs y_2 \cdot sn x_2 = \sqrt{\frac{B}{h}} \cdot q;$$

$$sn y_2 = \sqrt{\frac{C}{h}} \cdot r.$$

Дифференцируя первое изъ этихъ соотношеній, находимъ при помощи двухъ остальныхъ и уравненій движенія (форм. 2 гл. I):

$$\frac{d\rho_2}{dt} = - \frac{(B-C)\sqrt{h}}{\sqrt{ABC}} \cdot \frac{sn y_2 \cdot cs y_2 \cdot sn x_2}{sn \rho_2},$$

или, какъ и въ соотношеніи (17),

$$\frac{d\rho_2}{dt} = - \frac{(B-C)\sqrt{h}}{\sqrt{ABC}} \cdot \frac{sn y_2 \cdot sn x'_2}{sn \rho_2}.$$

Въ предыдущей главѣ (27) мы видѣли, что квадратъ тангенса длины нормали къ сферо-конической кривой въ какой либо точкѣ выражается линейно черезъ квадратъ косинуса центральнаго радіуса вектора этой точки. Представимъ на основаніи указанной теоремы скорости v_1 и v_2 (12), (22) какъ функціи ρ_1 и ρ_2 и вычислимъ количество $v_2^2 - v_1^2$.

Помня, что

$$cs \rho_2 = \sqrt{\frac{A}{h}} \cdot p; \quad cs \rho_1 = \frac{A}{l} \cdot p,$$

мы послѣ очевидныхъ преобразованій по (9) найдемъ

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{(Ah-l^2)(Bh-l^2)(Ch-l^2)}{ABCh l^2}, \quad \dots \dots \dots (23)$$

т. е.

„Разность квадратовъ угловыхъ скоростей эксцентричной и неизмѣнной прямыхъ постоянна во время движенія“.

Перейдемъ къ рассмотрѣнію скорости v_3 конца мгновенной оси.

Изъ соотношеній (19) имѣемъ

$$\frac{d\theta_3}{dt} : \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{B \operatorname{cs}^2 \theta_3}{C \operatorname{cs}^2 \theta_1} = \frac{1}{BC} \frac{B^2 q^2 + C^2 r^2}{q^2 + r^2}.$$

Но изъ (18)

$$\operatorname{cs} \rho_1 = \frac{Ap}{l}; \quad \operatorname{cs} \rho_3 = \frac{p}{\omega},$$

слѣдовательно (форм. 4, 7 гл. I),

$$\frac{d\theta_3}{dt} : \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{A^2}{BC} \left(\frac{\operatorname{ctg} \rho_3}{\operatorname{ctg} \rho_1} \right)^2, \quad \dots \dots \dots (24)$$

т. е.

„Отношеніе угловыхъ скоростей точекъ M_3 и M_1 около точки A пропорціонально квадрату отношенія котангенсовъ центральныхъ радіусовъ векторовъ этихъ точекъ. Коэффициентъ пропорціональности не зависитъ отъ начальныхъ условій (h , l)“.

Опредѣляя изъ тождествъ (20)

$$v_1 \operatorname{cs} (\rho_1, n_1) = \frac{d\theta_1}{dt} \operatorname{sn} \rho_1;$$

$$v_3 \operatorname{cs} (\rho_3, n_3) = \frac{d\theta_3}{dt} \operatorname{sn} \rho_3$$

производныя $\frac{d\theta_1}{dt}$ и $\frac{d\theta_3}{dt}$ и подставляя въ соотношеніе (24), находимъ

$$v_3 = \frac{A^2}{BC} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \rho_1}{\operatorname{tg}^2 \rho_3} \cdot \frac{\operatorname{sn} \rho_3}{\operatorname{sn} \rho_1} \cdot \frac{v_1 \operatorname{cs} (\rho_1, n_1)}{\operatorname{cs} (\rho_3, n_3)}.$$

Но изъ (15), (16)

$$\operatorname{cs} (\rho_3, n_3) = \operatorname{tg}^2 b_3 \cdot \operatorname{ctg} \rho_3 \cdot \operatorname{ctg} n_3;$$

$$v_1 \operatorname{cs} (\rho_1, n_1) = \frac{Ah - l^2}{Al} \operatorname{ctg} \rho_1,$$

b_3 опредѣляется изъ (9), слѣдовательно по (18),

$$v_3 = - \frac{l}{h} \cdot \frac{Ch - l^2}{AB} \cdot \operatorname{cs} \zeta \cdot \operatorname{tg} n_3, \quad \dots \dots \dots (25)$$

откуда заключаемъ, что

„скорость конца мгновенной оси пропорціональна тангенсу нормали къ соотвѣтствующей кривой. Коэффициентъ пропорціональности зависитъ отъ угла мгновенной оси съ неизмѣнною прямою“.

Вычисляя по тому-же способу, которымъ пользовались при выводѣ формулъ (13), (14), (16), проекціи скорости v_3 на направленія перпендикуляра къ фокальному радіусу вектору, самаго фокальнаго радіуса вектора и перпендикуляра къ центральному радіусу вектору точки M_3 , получаемъ:

$$v_3 \cos \vartheta_3 = \frac{l}{hC} \sqrt{-\frac{(Ah-l^2)(Bh-l^2)}{AB}} \cdot \cos \zeta;$$

$$\frac{dr_3}{dt} = \frac{l}{h} \sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}} \lambda_1 \lambda_2 \cdot \cos \zeta \cdot \sin y_3;$$

$$v_3 \cos(\rho_3, n_3) = \frac{l}{h} \cdot \frac{Ah-l^2}{BC} \cdot \cos \zeta \cdot \operatorname{ctg} \rho_3,$$

гдѣ величины λ_1, λ_2 даются формулами (9) главы I.

Выведемъ еще соотношеніе, данное *Poinsot* и опредѣляющее угловую скорость мгновенной оси въ тѣлѣ черезъ ω (форм. 11 гл. I).

Изъ (25) на основаніи теоремы *Lagrange*'а (форм. 20 гл. I) имѣемъ

$$\omega^2 v_3^2 = \frac{(Ch-l^2)^2}{A^2 B^2} \operatorname{tg}^2 n_3.$$

Извѣстно (форм. 27 гл. II), что

$$\operatorname{tg}^2 n_3 = \frac{\operatorname{tg}^2 b_3}{\sin^2 a_3 \cos^2 b_3} (\cos^2 \rho_3 - \cos^2 a_3 \cos^2 b_3),$$

гдѣ

$$\cos \rho_3 = \frac{p}{\omega},$$

слѣдовательно (9),

$$\omega^2 v_3^2 = \frac{(A-C)(A-B)}{BC} \lambda_2 \lambda_3 \frac{p^2}{\omega^2} - \frac{(Bh-l^2)(Ch-l^2)}{A^2 BC}.$$

Величины λ даются соотношеніями (9) главы I.

Прилагая къ полученному выраженію первое изъ уравненій (8) той-же главы, получаемъ искомую формулу *Poinsot*:

$$\omega^2 v_3^2 = \frac{h^2}{ABC} \left(A + B + C - 2 \frac{l^2}{h} \right) - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\omega^2} \dots \dots \dots (26)$$

ГЛАВА IV.

Движеніе мгновенной оси и главныхъ осей инерціи тѣла въ пространствѣ. Вторая интерпретація Poinsot.

§ 1. Формула Poinsot.

Въ предыдущей главѣ мы разсмотрѣли движеніе мгновенной оси въ тѣлѣ. Перейдемъ теперь къ изслѣдованію движенія этой оси въ пространствѣ.

Такъ какъ катаніе пологіальнаго конуса по герполодіальному не сопровождается скольженіемъ, то угловая скорость мгновенной оси въ пространствѣ будетъ равняться угловой скорости ея въ тѣлѣ (форм. 26 гл. III).

Обозначимъ по прежнему уголъ мгновенной оси OJ (форм. 19 гл. I) съ неизмѣнной прямой OG (урав. 5 гл. I) черезъ ζ , и пусть θ будетъ уголъ плоскости JOG , содержащей эти двѣ прямыя, съ нѣкоторою неподвижною въ пространствѣ плоскостью, проходящею черезъ прямую OG .

Неизмѣнная прямая OG неподвижна въ пространствѣ, слѣдовательно, углы ζ и θ и опредѣляютъ положеніе мгновенной оси въ пространствѣ.

Опишемъ около точки опоры сферу радіуса единицы, неизмѣнно съ тѣломъ связанную, и пусть (фиг. V) мгновенная ось и неизмѣнная прямая въ моментъ t пересѣкутъ нашу сферу соотвѣтственно въ точкахъ J и G .

Въ предыдущей главѣ мы видѣли, что дуга JG нормальна къ неизмѣнной кривой GG' , слѣдовательно, если K будетъ точкою пересѣченія дугъ JG и $J'G'$, гдѣ J' и G' обозначаютъ положенія точекъ J и G въ моментъ $t + dt$, то дуга KG служитъ сферическимъ радіусомъ кривизны R неизмѣнной кривой въ точкѣ G .

Проведемъ черезъ точку J нормально къ JG дугу JJ'' и продолжимъ ее до пересѣченія въ точкѣ J'' съ дугою $J'G'$, тогда, очевидно, имѣемъ

$$\frac{\text{sn } JJ''}{\text{sn } GG'} = \frac{\text{sn } JK}{\text{sn } GK} *). \quad \dots \dots \dots (1)$$

Но JJ'' выражаетъ длину пути, пройденную точкою J въ элементъ времени dt по направленію, перпендикулярному къ дугѣ GJ , равной ζ , слѣдовательно,

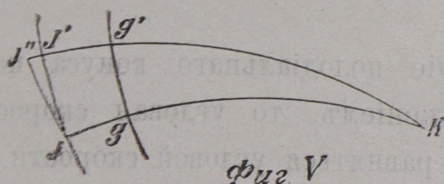
$$\cup JJ'' = \frac{d\theta}{dt} \text{sn } \zeta \cdot dt.$$

Далѣе, обозначая черезъ v_1 угловую скорость неизмѣнной прямой OG въ тѣлѣ, имѣемъ

$$\cup GG' = v_1 \cdot dt,$$

слѣдовательно, соотношеніе (1) даетъ

$$\frac{d\theta}{dt} \text{sn } \zeta = v_1 \cdot \frac{\text{sn}(R + \zeta)}{\text{sn } R}.$$



Но изъ формулъ (11) и (12) главы III находимъ

$$v_1 = \frac{h}{l} \text{tg } \zeta;$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{l} \left(1 + \frac{\text{tg } \zeta}{\text{tg } R} \right).$$

Прилагая къ выраженію для $\text{tg } R$

$$\text{tg } R = \frac{\text{tg}^3 n_1}{\text{tg}^2 l_1},$$

данное въ главѣ II (47), соотношеніе (11) главы III, опредѣляющее $\text{tg } n_1$

*) Безконечно малую дугу GG' мы принимаемъ за дугу большого круга.

черезъ $tg \zeta$, мы получаемъ

$$\frac{tg R}{tg \zeta} = - \frac{C^3 h^3}{(Ch - l^2)^3} \frac{tg^2 \zeta}{tg^2 l_1}.$$

Помня, что

$$tg^2 l_1 = \frac{tg^4 b_1}{tg^2 a_1},$$

мы на основаніи формулъ (9) главы III получаемъ

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{l} + \frac{(Ah - l^2)(Bh - l^2)(Ch - l^2)}{ABClh^2} ctg^2 \zeta. \quad (2)$$

Это соотношеніе дано *Poinsot*.

§ 2. Формулы *Ferrers'a* и *Routh'a*.

Ferrers *) далъ другое весьма простое выраженіе для скорости $\frac{d\theta}{dt}$.

Разсмотримъ проекцію OH мгновенной оси OJ на неизмѣнную плоскость.

Такъ какъ прямая OH получается въ пересѣченіи плоскости GOJ

$$(B - C)qrX + (C - A)rpY + (A - B)pqZ = 0 \quad (3)$$

съ неизмѣнной плоскостью

$$ApX + BqY + CrZ = 0, \quad (4)$$

то уравненія этой прямой OH можно представить на основаніи интеграловъ движенія (форм. 3, 4 гл. I) въ формѣ:

$$\frac{X}{(Ah - l^2) \cdot p} = \frac{Y}{(Bh - l^2) \cdot q} = \frac{Z}{(Ch - l^2) \cdot r}. \quad (5)$$

Пусть H будетъ точкою пересѣченія прямой (5) съ эллипсоидомъ инерціи (форм. 21 гл. I). Тогда очевидно,

$$\frac{1}{OH^2} = A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2,$$

гдѣ λ, μ, ν косинусы угловъ прямой (5) съ осями координатъ, слѣдова-

*) *Smith's Prize paper*. 1882.

тельно (форм. 3, 4, 7 гл. I),

$$\lambda = \frac{(Ah - l^2) \cdot p}{l \cdot \sqrt{l^2 \omega^2 - h^2}}; \quad \mu = \frac{(Bh - l^2) \cdot q}{l \cdot \sqrt{l^2 \omega^2 - h^2}}; \quad \nu = \frac{(Ch - l^2) \cdot r}{l \cdot \sqrt{l^2 \omega^2 - h^2}}, \quad (6)$$

а потому на основаніи теоремы *Lagrange*'а (форм. 20 гл. I)

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{ABCh}{l^3} \left[\frac{h}{l} + \frac{(Ah - l^2)(Bh - l^2)(Ch - l^2)}{ABC l h^2} \right].$$

Сравнивая это выраженіе съ (2), получаемъ

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l^3}{ABCh} \cdot \frac{1}{OH^2}.$$

Эта формула, данная *Ferrers*'омъ, показываетъ, что

„угловая скорость вращенія плоскости, содержащей мгновенную ось и неизмѣнную прямую, около этой послѣдней обратно пропорціональна квадрату полудіаметра эллипсоида инерціи, направленнаго по проекціи мгновенной оси на неизмѣнную плоскость“.

Другое простое выраженіе для $\frac{d\theta}{dt}$ можно получить при помощи формулы, опредѣляющей разность квадратовъ угловыхъ скоростей неизмѣнной и эксцентричной прямыхъ въ тѣлѣ (форм. 23 гл. III).

Прилагая указанную формулу къ (2), находимъ

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{l} - \frac{l}{h} \frac{v_1^2}{tg^2 \zeta} + \frac{l}{h} v_2^2 ctg^2 \zeta,$$

Но первые два члена правой части написаннаго соотношенія взаимно сокращаются (форм. 11, 12 гл. III), слѣдовательно,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{h} v_2^2 ctg^2 \zeta *).$$

§ 3. Теорема Booth'a.

Формула *Lagrange*'а (урав. 20 гл. I)

$$cs \zeta = \frac{h}{l\omega} \dots \dots \dots (7)$$

*) *Routh, The advanced part* и т. д. стр. 94. Ex. III,

опредѣляетъ уголъ ζ черезъ ω , а, слѣдовательно (форм. 11 гл. I), также и черезъ время.

Зная-же ζ какъ функцію отъ t , мы можемъ по формулѣ (2) выразить и уголъ θ черезъ время. Отсюда заключаемъ, что уравненія (7) и (2) исполнѣ рѣшаютъ вопросъ о движеніи мгновенной оси въ пространствѣ.

Изъ (7) слѣдуетъ, что дуга GJ , равная ζ , принимаетъ свои наибольшія и наименьшія значенія одновременно съ ω . Въ главѣ I мы видѣли, что предѣльными значеніями ω^2 служатъ λ_2 и наибольшая изъ λ_1 и λ_3 (форм. 9 гл. I). Но при этихъ значеніяхъ ω^2 , какъ это показываютъ соотношенія (8) главы I, одно изъ количествъ p , q , r равно нулю, слѣдовательно, мгновенная ось лежитъ въ одной изъ координатныхъ плоскостей.

Если теперь еще припомнимъ, что угловая скорость мгновенной оси въ тѣлѣ и пространствѣ одна и та-же, то легко на основаніи приведенныхъ разсужденій убѣдиться въ справедливости слѣдующей теоремы, данной Booth'омъ:

„Если описать около точки опоры двѣ сферы одинаковаго радіуса, изъ которыхъ одна неподвижна въ пространствѣ, а другая неизмѣнно съ тѣломъ связана, то длина спирали, вычерченной мгновенною осью на неподвижной сферѣ, между двумя послѣдовательными вершинами *) этой кривой равна квадранту сферо-конической кривой, описанной тою-же осью на подвижной сферѣ“.

§ 4. Движеніе главныхъ осей инерціи въ пространствѣ.

Опишемъ около точки опоры сферу радіуса единицы, неподвижную въ пространствѣ. Пусть въ моментъ t неизмѣнная прямая, оси наибольшаго, средняго и наименьшаго момента пересѣкутъ нашу сферу соотвѣственно въ точкахъ G , A , B , C .

Пусть

$$\cup GA = \alpha; \quad \cup GB = \beta; \quad \cup GC = \gamma.$$

Тогда уравненія неизмѣнной прямой (форм. 5 гл. I) даютъ

$$\cos \alpha = \frac{Ap}{l}; \quad \cos \beta = \frac{Bq}{l}; \quad \cos \gamma = \frac{Cr}{l} \cdot \dots \dots \dots (8)$$

*) Подъ вершинами спирали мы подразумѣваемъ тѣ ея точки, гдѣ дуга ζ пріобрѣтаетъ maximum или minimum.

Опредѣляя изъ интеграловъ живой силы и момента (форм. 3, 4 гл. I) количества q и r и подставляя въ первое изъ уравненій движенія (форм. 2 гл. I), находимъ

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = \frac{-1}{A^2 BC} [Ch - l^2 + A(A - C)p^2][Bh - l^2 + A(A - B)p^2],$$

откуда на основаніи (8) получаемъ:

$$\left. \begin{aligned} sn^2 \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 &= -\frac{l^2}{BC} \left[\frac{Ch - l^2}{l^2} + \frac{A - C}{A} cs^2 \alpha \right] \left[\frac{Bh - l^2}{l^2} + \frac{A - B}{A} cs^2 \alpha \right]; \\ sn^2 \beta \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 &= -\frac{l^2}{CA} \left[\frac{Ah - l^2}{l^2} + \frac{B - A}{B} cs^2 \beta \right] \left[\frac{Ch - l^2}{l^2} + \frac{B - C}{B} cs^2 \beta \right]; \\ sn^2 \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 &= -\frac{l^2}{AB} \left[\frac{Bh - l^2}{l^2} + \frac{C - B}{C} cs^2 \gamma \right] \left[\frac{Ah - l^2}{l^2} + \frac{C - A}{C} cs^2 \gamma \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Два послѣднихъ соотношенія написаны по аналогіи съ первымъ.

Первое изъ уравненій (9) показываетъ, что $cs^2 \alpha$ долженъ лежать между предѣлами

$$\frac{\frac{1}{C} - \frac{h}{l^2}}{\frac{1}{C} - \frac{1}{A}}; \quad \frac{\frac{1}{B} - \frac{h}{l^2}}{\frac{1}{B} - \frac{1}{A}}.$$

Если по прежнему предположимъ

$$A > B > C; \quad \frac{1}{C} > \frac{1}{B} > \frac{h}{l^2} > \frac{1}{A},$$

то видимъ, что оба предѣла положительны и меньше единицы, слѣдовательно, кривая, описываемая на нашей сферѣ осью наибольшаго момента, лежитъ между двумя кругами, которыхъ она послѣдовательно касается.

Третье изъ уравненій (9) даетъ для предѣловъ $cs^2 \gamma$ величины

$$\frac{\frac{1}{B} - \frac{h}{l^2}}{\frac{1}{B} - \frac{1}{C}}; \quad \frac{\frac{1}{A} - \frac{h}{l^2}}{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}}.$$

Такъ какъ первое изъ этихъ количествъ отрицательно, то низшаго предѣла для $cs^2 \gamma$ не существуетъ. Кривая, описываемая на сферѣ осью

наименьшаго момента, будетъ лежать между двумя діаметрально противоположными малыми кругами сферы.

Второе изъ уравненій (9) показываетъ, что $cs^2\beta$ лежитъ за предѣлами

$$\frac{1}{A} - \frac{h}{l^2}; \quad \frac{1}{C} - \frac{h}{l^2}.$$

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B}; \quad \frac{1}{C} - \frac{1}{B}.$$

Оба предѣла положительны, но второй изъ нихъ больше единицы, слѣдовательно, кривая, вычерченная осью средняго момента на сферѣ, лежитъ между двумя діаметрально противоположными малыми кругами.

Разсмотримъ теперь скорости вращенія около неизмѣнной прямой OG плоскостей GOA , GOB , GOC .

Обозначимъ черезъ ψ_1, ψ_2, ψ_3 углы, составляемые этими плоскостями съ нѣкоторою неподвижною въ пространствѣ плоскостью, проходящею черезъ OG .

Площадь, описываемая въ теченіи времени dt проекціей отрѣзка OA на неизмѣнную плоскость, будетъ, очевидно, равна

$$\frac{1}{2} sn^2\alpha \frac{d\psi_1}{dt} dt.$$

Та-же величина должна равняться проекціи на неизмѣнную плоскость площади, описываемой отрѣзкомъ OA въ пространствѣ за тотъ-же промежутокъ времени. Такъ какъ твердое тѣло вращается около осей OA , OB , OC съ угловыми скоростями p, q, r , то искомая проекція будетъ равна

$$\frac{1}{2} (q dt cs \beta + r dt cs \gamma);$$

$$\therefore sn^2\alpha \frac{d\psi_1}{dt} = q cs \beta + r cs \gamma.$$

Прилагая къ этому соотношенію формулы (8), находимъ на основаніи интеграловъ движенія (форм. 3, 4 гл. I)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= \frac{h - Ap^2}{l sn^2\alpha}; \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{h - Bq^2}{l sn^2\beta}; \\ \frac{d\psi_3}{dt} &= \frac{h - Cr^2}{l sn^2\gamma}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Исключая из этих уравнений и формулы (8) количества p, q, r , получаемъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi_1}{dt} &= \frac{h}{l} + \frac{Ah - l^2}{Al} \operatorname{ctg}^2 \alpha; \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= \frac{h}{l} + \frac{Bh - l^2}{Bl} \operatorname{ctg}^2 \beta; \\ \frac{d\phi_3}{dt} &= \frac{h}{l} + \frac{Ch - l^2}{Cl} \operatorname{ctg}^2 \gamma. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Изъ уравнений (10) на основаніи формулы (9) заключаемъ, что скорости $\frac{d\phi_1}{dt}, \frac{d\phi_2}{dt}, \frac{d\phi_3}{dt}$ могутъ обратиться въ нуль только при слѣдующихъ значеніяхъ α, β, γ :

$$l^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha = Ah; \quad l^2 \operatorname{ctg}^2 \beta = Bh; \quad l^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma = Ch.$$

Но при такихъ значеніяхъ α, β, γ величины $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}$ какъ это видно изъ (9), становятся минимыми. Отсюда слѣдуетъ, что скорости $\frac{d\phi_1}{dt}, \frac{d\phi_2}{dt}, \frac{d\phi_3}{dt}$ не могутъ мѣнять знака.

При увеличеніи угловъ β и γ скорости $\frac{d\phi_2}{dt}$ и $\frac{d\phi_3}{dt}$ (11) будутъ увеличиваться *), скорость же $\frac{d\phi_1}{dt}$ будетъ уменьшаться при увеличеніи угла α .

§ 5. Теорема Poinso't и Routh'a.

Остановимся еще на формулахъ (10).

Обозначимъ черезъ k нѣкоторое постоянное. Помножая уравненія (10) соответственно на

$$\frac{k^2}{2} \operatorname{sn}^2 \alpha \, dt; \quad \frac{k^2}{2} \operatorname{sn}^2 \beta \, dt; \quad \frac{k^2}{2} \operatorname{sn}^2 \gamma \, dt$$

и складывая, находимъ на основаніи интеграла живой силы:

$$\frac{1}{2} (k \operatorname{sn} \alpha)^2 \frac{d\phi_1}{dt} \, dt + \frac{1}{2} (k \operatorname{sn} \beta)^2 \frac{d\phi_2}{dt} \, dt + \frac{1}{2} (k \operatorname{sn} \gamma)^2 \frac{d\phi_3}{dt} \, dt = k^2 \frac{h}{l} \, dt.$$

*) Мы по прежнему предполагаемъ $Bh - l^2 < 0$.

Аналогично, помножая тѣ-же уравненія соотвѣтственно на

$$A \frac{k'^2}{2} \operatorname{sn}^2 \alpha dt; \quad B \frac{k'^2}{2} \operatorname{sn}^2 \beta dt; \quad C \frac{k'^2}{2} \operatorname{sn}^2 \gamma dt$$

и складывая, находимъ на основаніи интеграла момента:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (k' \sqrt{A} \operatorname{sn} \alpha)^2 \frac{d\phi_1}{dt} dt + \frac{1}{2} (k' \sqrt{B} \operatorname{sn} \beta)^2 \frac{d\phi_2}{dt} dt + \frac{1}{2} (k' \sqrt{C} \operatorname{sn} \gamma)^2 \frac{d\phi_3}{dt} dt = \\ = \frac{k'^2}{2} \left[\frac{h}{l} (A + B + C) - l \right] dt. \end{aligned}$$

Полученныя два соотношенія приводятъ насъ къ слѣдующимъ двумъ теоремамъ, даннымъ *Poinsot*:

1) „Если вдоль главныхъ осей инерціи тѣла, считая отъ точки опоры, отложить три отрѣзка равныхъ длинъ, то сумма площадей, описанныхъ проекціями этихъ отрѣзковъ на неизмѣнную плоскость, пропорціональна времени“.

2) „Если черезъ точку опоры вдоль главныхъ осей инерціи тѣла провести три отрѣзка, длины которыхъ пропорціональны соотвѣтственно \sqrt{A} , \sqrt{B} , \sqrt{C} , то сумма площадей, описанныхъ проекціями этихъ отрѣзковъ на неизмѣнную плоскость, пропорціональна времени“.

Уравненіямъ (11) можно дать слѣдующее простое геометрическое толкованіе.

Разсмотримъ движеніе конца G неизмѣнной прямой по ея сфероконической кривой. Пусть A —центр, AA' —большая полуось этой кривой. Обозначимъ черезъ (α, θ_1) центральный радіусъ векторъ и амплитуду точки G . Проекція скорости точки G на перпендикуляръ къ центральному радіусу вектору равна (форм. 16 гл. III)

$$\frac{d\theta_1}{dt} \operatorname{sn} \alpha = \frac{Ah - l^2}{Al} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Сравнивъ это соотношеніе съ первымъ изъ уравненій (11), находимъ

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \frac{h}{l} + \frac{d\theta_1}{dt} \operatorname{cs} \alpha = \frac{h}{l} + \frac{d\theta_1}{dt} - 2 \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} \frac{d\theta_1}{dt}.$$

Интегрируя это уравнение, получаемъ

$$\phi_1 = \frac{h}{l} t + \text{уголъ } GAA' - \text{секторіальная площадь } GAA' *).$$

Для угловъ ϕ_2 и ϕ_3 имѣютъ мѣсто аналогичныя соотношенія. Эти формулы даны Routh'омъ **).

§ 6. Вторая интерпретація Poinsot.

Интерпретація Poinsot, которую мы рассматривали до сихъ поръ, не даетъ простаго способа воспроизвести вращеніе твердаго тѣла по инерціи. Дѣйствительно, весьма трудно представить себѣ, какимъ образомъ можно сообщить катящемуся эллипсоиду инерціи такую скорость, которая измѣнялась-бы пропорціонально радіусу вектору точки касанія этого эллипсоида къ плоскости катанія.

Это неудобство устраняется при помощи второй интерпретаціи Poinsot, къ изложенію которой мы теперь и перейдемъ.

*) Легко убѣдиться, что величина $2sn^2 \frac{\alpha}{2} \frac{d\theta_1}{dt} dt$ равна площади треугольника GAG' , гдѣ G обозначаетъ положеніе точки G черезъ элементъ времени dt .

Дѣйствительно, если A, B, C, a, b, c углы и прогнвоположныя стороны сферическаго треугольника, то, какъ извѣстно, площадь его S равна

$$S = A + B + C - \pi;$$

$$\therefore \operatorname{tg} \frac{S}{2} = - \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}},$$

или, прилагая извѣстную Неперову аналогію,

$$\operatorname{tg} \frac{S}{2} = - \operatorname{tg} \frac{C}{2} \frac{cs \frac{a+b}{2} - cs \frac{a-b}{2}}{cs \frac{a-b}{2} + cs \frac{a+b}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}}.$$

Пользуясь этой формулой въ случаѣ

$$C = \frac{d\theta_1}{dt} dt; \quad a = \alpha; \quad b = \alpha - d\alpha,$$

находимъ, ограничиваясь безконечно малыми I порядка,

$$\text{площадь } GAG' = \frac{d\theta_1}{dt} dt \cdot (1 - cs \alpha) = 2sn^2 \frac{\alpha}{2} \frac{d\theta_1}{dt} dt.$$

**) Routh, The advanced part и т. д. стр. 97 Ex. II.

Разложимъ мгновенную угловую скорость ω тѣла на двѣ составляющія, одну направимъ по неизмѣнной прямой OG (форм. 5 гл. I), другую по проекціи OH (форм. 5 настоящ. главы) мгновенной оси на неизмѣнную плоскость. Первая составляющая по теоремѣ *Lagrange'a* (форм. 20 гл. I) постоянна и равна $\frac{h}{l}$, вторая по теоремѣ *Poinsot* (форм. 23 гл. I) равна $OH \cdot \sqrt{h}$, гдѣ OH проекція на неизмѣнную плоскость радіуса вектора OJ полюса.

Прямая OH , проходящая постоянно черезъ точку опоры, опишетъ въ тѣлѣ нѣкоторый конусъ, который во время вращенія твердаго тѣла будетъ катиться со скольженіемъ по неизмѣнной плоскости.

Этотъ конусъ будемъ называть скользящимъ и катящимся конусомъ *Poinsot* или просто конусомъ *Poinsot*.

Сообщимъ теперь неизмѣнной плоскости около ея нормали постоянное вращеніе съ угловою скоростью $\frac{h}{l}$, тогда, очевидно, конусъ *Poinsot* будетъ катиться безъ скольженія по этой плоскости со скоростью $OH \cdot \sqrt{h}$.

Отсюда слѣдующее представленіе движенія *Euler'a*:

„Вращеніе твердаго тѣла по инерціи можетъ быть представлено катаніемъ безъ скольженія со скоростью $OH \cdot \sqrt{h}$ конуса *Poinsot* по неизмѣнной плоскости, вращающейся около своей нормали съ угловою скоростью $\frac{h}{l}$ “.

Такое представленіе вращенія *Euler'a* носитъ названіе второй интерпретаціи *Poinsot*.

§ 7. Кинематическая модель Darboux и Koenigs'a.

Первая и вторая интерпретаціи *Poinsot* даютъ слѣдующій способъ воспроизвести вращеніе *Euler'a*.

Построимъ неизмѣнную плоскость, герполодіальный и полодіальный конусы и конусъ *Poinsot*. Герполодіальный конусъ укрѣпимъ неподвижно, полодіальный и конусъ *Poinsot* соединимъ неизмѣнно другъ съ другомъ. Неизмѣнную плоскость сдѣлаемъ подвижной около ея нормали.

Если мы наши конусы и неизмѣнную плоскость приготовили изъ такого матеріала, который не допускалъ-бы скольженія конуса *Poinsot* по неизмѣнной плоскости и полодіальнаго конуса по герполодіальному, то ясно, что если мы сообщимъ неизмѣнной плоскости равномерное вращеніе около нормали съ угловою скоростью $\frac{h}{l}$, то полодіальный конусъ будетъ катиться по герполодіальному со скоростью, требуемою вращеніемъ *Euler'a*.

Всякая точка, соединенная неизмѣнно съ пологіальнымъ конусомъ или конусомъ *Poinsot* будетъ двигаться такъ, какъ будто она принадлежала твердому тѣлу, вращающемуся по инерціи.

Такова идея такъ наз. кинематической модели *Darboux* и *Koenigs'a*, воспроизводящей вращеніе *Euler'a* и носящей названіе герполодографа.

§ 8. Движеніе прямой *ОН* въ тѣлѣ и въ пространствѣ.

Въ § 1 нами были найдены уравненія прямой *ОН* (5). Исключая изъ этихъ уравненій и интеграловъ движенія (форм. 3, 4 гл. I) количества *p*, *q*, *r*, получаемъ уравненіе скользящаго и катящагося конуса *Poinsot*:

$$\frac{A}{Ah-l^2} X^2 + \frac{B}{Bh-l^2} Y^2 + \frac{C}{Ch-l^2} Z^2 = 0. \quad \dots (12)$$

Сравнивъ это уравненіе съ уравненіемъ неизмѣннаго конуса (форм. 2 гл. III), мы видимъ, какъ это и слѣдовало ожидать по самому опредѣленію прямой *ОН*, что конусы *Poinsot* и неизмѣнный взаимны по отношенію другъ къ другу.

Отсюда и на основаніи теоремъ, доказанныхъ въ § 2 гл. III заключаемъ, что

„асимптоты фокальной линіи конуса *Poinsot* перпендикулярны къ круговымъ сѣченіямъ неизмѣннаго конуса и совпадаютъ съ асимптотами эллипсоида инерціи въ плоскости наибольшаго и наименьшаго момента. Круговыя сѣченія конуса *Poinsot* перпендикулярны къ асимптотамъ фокальной линіи неизмѣннаго конуса и параллельны таковымъ-же сѣченіямъ гираціоннаго эллипсоида“.

Чтобы опредѣлить движеніе прямой *ОН* въ тѣлѣ, остается еще вычислить ея угловую скорость.

Обозначая эту скорость черезъ *v*₄ и прилагая методъ § 1 настоящей главы, мы находимъ

$$v_4 = v_1 \frac{\operatorname{sn} \left(R + \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{sn} R} = \frac{(Ah-l^2)(Bh-l^2)(Ch-l^2)}{ABCh^2l} \operatorname{ctg}^2 \zeta, \quad \dots (13)$$

гдѣ значеніе буквъ то-же, что въ параграфѣ (1).

Сравнивъ полученное соотношеніе съ уравненіемъ (2), получаемъ

$$v_4 = \frac{d\theta}{dt} - \frac{h}{l},$$

что вполне очевидно изъ второй интерпретаціи *Poinsot*.

Что касается движенія прямой $ОН$ въ пространствѣ, то это движеніе намъ вполне извѣстно. Прямая $ОН$ наклонена къ неизмѣнной прямой $ОG$ подъ угломъ $\frac{\pi}{2}$, а плоскость $ОНG$ вращается около $ОG$ согласно формулѣ (2).

§ 9. Траекторія точки H въ тѣлѣ и въ неизмѣнной плоскости, вращающейся около своей нормали съ угловою скоростью $\frac{h}{l}$.

Полодіи въ первой интерпретаціи *Poinsot* будетъ во второй его интерпретаціи соотвѣтствовать траекторія точки H въ тѣлѣ.

Разсмотримъ прямоугольный треугольникъ $ОJH$, гдѣ J точка встрѣчи эллипсоида инерціи съ мгновенною осью.

По теоремѣ *Poinsot* (форм. 23 гл. I) сторона $ОJ$ равна $\frac{\omega}{\sqrt{h}}$, а по теоремѣ *Lagrange*'а (форм. 20 гл. I) сторона JH равна $\frac{\sqrt{h}}{l}$.

Будемъ проектировать этотъ треугольникъ послѣдовательно на три оси координатъ. Тогда получимъ, обозначая черезъ X, Y, Z координаты точки H ,

$$X = \frac{l^2 - Ah}{l^2 \sqrt{h}} p; \quad Y = \frac{l^2 - Bh}{l^2 \sqrt{h}} q; \quad Z = \frac{l^2 - Ch}{l^2 \sqrt{h}} r.$$

Опредѣляя изъ этихъ соотношеній количества p, q, r и подставляя въ интегралы движенія (форм. 3, 4 главы I), находимъ уравненія траекторіи точки H въ тѣлѣ:

$$\frac{AX^2}{(Ah - l^2)^2} + \frac{BY^2}{(Bh - l^2)^2} + \frac{CZ^2}{(Ch - l^2)^2} = \frac{1}{l^4};$$

$$\frac{A^2 X^2}{(Ah - l^2)^2} + \frac{B^2 Y^2}{(Bh - l^2)^2} + \frac{C^2 Z^2}{(Ch - l^2)^2} = \frac{1}{l^2 h}.$$

Если помножимъ первое изъ этихъ уравненій на l^2 , второе на h и вычтемъ одно изъ другого, то получимъ уравненіе конуса *Poinsot* (12).

Разсмотримъ еще траекторію точки H въ неизмѣнной плоскости, вращающейся съ постоянною угловою скоростью $\frac{h}{l}$ около своей нормали.

Обозначимъ черезъ (ρ', θ') полярныя координаты точки H въ этой плоскости, тогда по формулѣ (13)

$$\frac{d\theta'}{dt} = \frac{(Ah - l^2)(Bh - l^2)(Ch - l^2)}{ABCh^2 l} \operatorname{ctg}^2 \zeta.$$

Далѣе, изъ треугольника $ОНJ$ имѣемъ

$$\rho'^2 = \frac{\omega^2}{h} - \frac{h}{l^2},$$

откуда на основаніи формулы *Lagrange*'а (форм. 20 гл. I)

$$\rho'^2 = \frac{h}{l^2} \operatorname{tg}^2 \zeta.$$

Помножая это уравненіе на соотношеніе, опредѣляющее $\frac{d\theta'}{dt}$, получаемъ

$$\rho'^2 \frac{d\theta'}{dt} = \frac{(Ah - l^2)(Bh - l^2)(Ch - l^2)}{ABCh l^3},$$

откуда заключаемъ, что

„площадь, описываемая прямою $ОН$ въ неизмѣнной плоскости, вращающейся съ постоянною угловою скоростью $\frac{h}{l}$ около своей нормали, пропорціональна времени“.

ГЛАВА V.

Частные случаи вращения твердаго тѣла по инерціи.

§ 1. Случай $Bh - l^2 = 0$. Плоскости, описываемыя въ тѣлѣ неизмѣнною прямою, эксцентричною прямою и мгновенною осью.

Въ главѣ I мы исключили изъ нашего разсмотрѣнія два частныхъ случая вращения твердаго тѣла по инерціи. Первый изъ нихъ имѣетъ мѣсто, когда разстояніе плоскости катанія отъ точки опоры равно средней полуоси эллипсоида инерціи, второй, когда два изъ главныхъ моментовъ инерціи тѣла относительно точки опоры равны *).

Задача настоящей главы будетъ заключаться въ указаніи тѣхъ упрощеній, которыя произойдутъ въ выведенныхъ до сихъ поръ формулахъ благодаря тому или другому изъ приведенныхъ двухъ частныхъ предположеній.

Остановимся сначала на случаѣ, когда длина перпендикуляра δ (форм. 25 гл. I), опущеннаго изъ точки опоры на плоскость катанія, равна средней полуоси эллипсоида инерціи, т. е. на случаѣ

$$Bh - l^2 = 0. \quad (1)$$

Уравненіями поверхностей, описываемыхъ при условіи (1) неизмѣнною прямою, эксцентричною прямою и мгновенною осью въ тѣлѣ, слу-

*) Случай, когда всѣ три момента инерціи тѣла относительно точки опоры равны между собою, соотвѣтствуетъ простѣйшему вращенію твердаго тѣла съ постоянною угловою скоростью около неподвижнаго въ пространствѣ момента количества движенія тѣла.

жаты (форм. 2, 3, 4 гл. III):

$$\sqrt{\frac{A-B}{A}} X \pm \sqrt{\frac{B-C}{C}} Z = 0; \dots\dots\dots (2)$$

$$\sqrt{A-B} X \pm \sqrt{B-C} Z = 0; \dots\dots\dots (3)$$

$$\sqrt{A(A-B)} X \pm \sqrt{C(B-C)} Z = 0; \dots\dots\dots (4)$$

Мы видимъ, что эти три прямыя описываютъ въ тѣлѣ плоскости, проходящія черезъ ось среднего момента.

Сравнивая формулы (2) и (3) съ уравненіями центральныхъ круговыхъ сѣченій гираціоннаго эллипсоида и эллипсоида инерціи (форм. 7, 5 гл. III), заключаемъ, что

„плоскость, описываемая въ тѣлѣ неизмѣнною прямою при условіи (1) совпадаетъ съ однимъ изъ центральныхъ круговыхъ сѣченій гираціоннаго эллипсоида и перпендикулярна къ одной изъ асимптотъ фокальной линіи эллипсоида инерціи въ плоскости наибольшаго и наименьшаго момента, и что плоскость, описываемая въ тѣлѣ эксцентричною прямою при томъ-же условіи, совпадаетъ съ однимъ изъ центральныхъ круговыхъ сѣченій эллипсоида инерціи и перпендикулярна къ одной изъ асимптотъ фокальной линіи гираціоннаго эллипсоида въ плоскости наибольшаго и наименьшаго момента“.

Разсмотримъ теперь уравненія (4). Легко убѣдиться, что плоскости, представляемыя этими уравненіями, являются діаметральными плоскостями эллипсоида инерціи (форм. 21 гл. I), сопряженными съ направленіями асимптотъ фокальной линіи этого эллипсоида въ плоскости XOZ (форм. 8 гл. III).

Докажемъ еще, что плоскости (4) перпендикулярны къ омбилическимъ діаметрамъ гираціоннаго эллипсоида.

Перенесемъ плоскости центральныхъ круговыхъ сѣченій (форм. 7 гл. III) гираціоннаго эллипсоида параллельно самимъ себѣ:

$$\sqrt{\frac{A-B}{A}} X \pm \sqrt{\frac{B-C}{C}} Z = \Delta, \dots\dots\dots (5)$$

гдѣ Δ постоянное.

Выберемъ теперь количество Δ такъ, чтобы плоскости (5) служили касательными плоскостями къ гираціонному эллипсоиду (форм. 26 гл. I).

Точки касанія, координаты которыхъ, очевидно, равны

$$\frac{\sqrt{A(A-B)}}{\Delta}; \quad 0; \quad \pm \frac{\sqrt{C(B-C)}}{\Delta},$$

будутъ омбилическими точками этого эллипсоида.

Отсюда заключаемъ, что уравненіями омбилическихъ діаметровъ служатъ

$$\frac{X}{\sqrt{A(A-B)}} = \frac{Y}{0} = \pm \frac{Z}{\sqrt{C(B-C)}}.$$

Очевидно, что эти прямыя перпендикулярны къ плоскостямъ (4).

Итакъ:

„Въ случаѣ (1) мгновенная ось описываетъ въ тѣлѣ діаметральную плоскость эллипсоида инерціи, сопряженную съ направлениемъ одной изъ асимптотъ фокальной линіи этого эллипсоида въ плоскости наибольшаго и наименьшаго момента. Та-же плоскость, описываемая въ тѣлѣ мгновенною осью, перпендикулярна къ одному изъ омбилическихъ діаметровъ гираціоннаго эллипсоида“.

§ 2. Случай $Bh - l^2 = 0$. Измѣненіе угловъ неизмѣнной прямой, эксцентричной прямой и мгновенной оси съ осью средняго момента.

Такъ какъ неизмѣнная прямая, эксцентричная прямая и мгновенная ось описываютъ въ тѣлѣ плоскости, проходящія черезъ ось средняго момента, то движенія этихъ прямыхъ въ тѣлѣ намъ будутъ вполнѣ извѣстны, если опредѣлимъ углы нашихъ трехъ прямыхъ съ осью средняго момента, какъ функціи времени.

Выведемъ, прежде всего, нѣкоторыя необходимыя формулы.

Припомнимъ, что величины λ (форм. 9 гл. I) всѣ положительны, что λ_2 наибольшая изъ нихъ, и что ω^2 измѣняется въ промежуткѣ между λ_2 и наибольшимъ изъ λ_1 и λ_3 . Въ случаѣ (1)

$$\lambda_1 = \lambda_3,$$

слѣдовательно, по формулѣ (11) главы I

$$\frac{\omega d\omega}{(\lambda_1 - \omega^2)\sqrt{\lambda_2 - \omega^2}} = \pm dt.$$

Тутъ корень въ лѣвой части берется съ плюсомъ, а въ правой части верхній знакъ соотвѣтствуетъ (форм. 10 гл. I) случаю, когда величины

p, q, r одного знака, а нижній, когда двѣ изъ нихъ одного, а третья противоположнаго знака.

Проинтегрировавъ написанное уравненіе, получаемъ

$$\frac{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1} + \sqrt{\lambda_2 - \omega^2}}{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1} - \sqrt{\lambda_2 - \omega^2}} = c.e^{\pm 2\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot t} \dots \dots \dots (6)$$

гдѣ c произвольное постоянное, или

$$\sqrt{\lambda_2 - \omega^2} = \sqrt{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{c.e^{\pm 2t\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}} - 1}{c.e^{\pm 2t\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}} + 1} \dots \dots \dots (7)$$

Уравненіе (6) показываетъ, что при безграничномъ возрастаніи времени ω^2 стремится къ λ_1 , слѣдовательно, величины p и r (форм. 8 гл. I) стремятся къ нулю.

Отсюда заключаемъ, что

„въ случаѣ (1) мгновенная ось съ возрастаніемъ времени асимптотически приближается къ оси средняго момента“.

Въ главѣ I (8) мы опредѣлили q черезъ ω .

Подставляя въ указанную формулу на мѣсто $\omega^2 - \lambda_2$ его величину изъ (7) находимъ,

$$\frac{Bq}{l} = \frac{c.e^{\pm 2\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot t} - 1}{c.e^{\pm 2\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot t} + 1} \dots \dots \dots (8)$$

Перейдемъ теперь къ опредѣленію угловъ неизмѣнной прямой OG , эксцентричной прямой OE и мгновенной оси OJ съ осью средняго момента OB .

Пусть по прежнему

$$\angle BOG = \beta.$$

Тогда (форм. 5 гл. I)

$$cs \beta = \frac{Bq}{l},$$

слѣдовательно, по (8)

$$ctg \frac{\beta}{2} = \sqrt{c.e^{\pm 2\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot t}} \dots \dots \dots (9)$$

Для эксцентричной прямой (форм. 1 гл. III) имѣемъ

$$cs EOB = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{h}} q,$$

или по (1)

$$cs EOB = \frac{B}{l} q = cs \beta,$$

т. е.

„Въ случаѣ (1) углы эксцентричной и неизмѣнной прямыхъ съ осью среднего момента остаются равными во все время движенія“.

Чтобы опредѣлить уголъ JOB мгновенной оси съ осью среднего момента, рассмотримъ сферическій треугольникъ JBG , гдѣ J, B, G точки пересѣченія мгновенной оси, оси среднего момента и неизмѣнной прямой со сферою радіуса единицы и центра O .

Убѣдимся, прежде всего, что въ этомъ треугольникѣ уголъ при G равенъ $\frac{\pi}{2}$.

Дѣйствительно, уравненіемъ плоскости JOG служитъ (форм. 3 гл. IV)

$$(B - C)qrX + (C - A)rpY + (A - B)pqZ = 0.$$

А эта плоскость съ плоскостью BOG (2) образуетъ уголъ, косинусъ котораго обращается въ нуль на основаніи уравненія (4), если въ немъ X и Z положить пропорціональными p и r .

Далѣе, уголъ при B въ сферическомъ треугольникѣ BJG равенъ углу между плоскостями (2) и (4), слѣдовательно,

$$tg JBG = \sqrt{\frac{(B - C)(A - B)}{AC}}. \quad (10)$$

Изъ разсматриваемаго нами треугольника имѣемъ

$$tg BJ = \frac{tg BG}{cs JBG}. \quad (11)$$

Въ этой формулѣ $cs JBG$ постоянная величина (10), $tg BG = tg \beta$ извѣстная намъ функція времени (9), слѣдовательно, соотношеніе (11) опредѣляетъ вполне движеніе мгновенной оси въ плоскости (4).

§ 3. Случай $Bh - l^2 = 0$. Движеніе мгновенной оси, оси среднего момента и прямой OH въ пространствѣ.

Разсмотримъ теперь движеніе мгновенной оси въ пространствѣ.

Обозначимъ черезъ ζ уголъ мгновенной оси съ неизмѣнною прямою и черезъ θ уголъ плоскости GOJ , содержащей эти двѣ прямыя, съ нѣкоторою неподвижною въ пространствѣ плоскостью, проходящею черезъ прямую OG .

Углами ζ и θ , очевидно, вполне опредѣляется искомое движеніе мгновенной оси OJ .

По теоремѣ *Lagrange'a* (форм. 20 гл. I) проекція мгновенной угловой скорости на неизмѣнную прямую OG постоянна и равна $\frac{h}{l}$, слѣдовательно, плоскость BOG будетъ съ этою постоянною скоростью вращаться около прямой OG . Но уголъ между плоскостями BOG и GOJ , какъ мы только что видѣли, равенъ $\frac{\pi}{2}$, слѣдовательно, плоскость GOJ будетъ съ тою-же скоростью вращаться около OG .

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{l} \dots \dots \dots (12)$$

Изъ сферическаго треугольника BJG имѣемъ

$$\operatorname{tg} GJ = \operatorname{sn} BG \cdot \operatorname{tg} JBG;$$

$$\therefore \operatorname{tg} \zeta = \operatorname{tg} JBG \cdot \operatorname{sn} \beta, \dots \dots \dots (13)$$

гдѣ $\operatorname{tg} JBG$ постояненъ (10), а $\operatorname{sn} \beta$ извѣстная намъ функція времени (9).

Формула (12) и (13) рѣшаютъ вопросъ о движеніи мгновенной оси въ пространствѣ.

Разсмотримъ еще траекторію точки B пересѣченія оси среднего момента съ неподвижною въ пространствѣ сферою радіуса единицы, описанною около точки опоры.

Такъ какъ твердое тѣло вращается около OJ , то траекторія точки B должна быть нормальна къ плоскости BOJ , слѣдовательно, эта траекторія пересѣкаетъ всѣ большіе круги, проходящіе черезъ неподвижную въ пространствѣ точку G , подъ постояннымъ угломъ, котангенсъ котораго равенъ (10)

$$\pm \sqrt{\frac{(B-C)A-B}{AC}}.$$

Остается еще изслѣдовать движеніе проекціи OH мгновенной оси на неизмѣнную плоскость.

Такъ какъ прямая $ОН$ во время движенія перпендикулярна къ неизмѣнной прямой $ОG$, то она по теоремѣ, доказанной въ § 1 настоящей главы, неподвижна въ тѣлѣ и совпадаетъ съ одною изъ асимптотъ фокальной линіи эллипсоида инерціи въ плоскости наибольшаго и наименьшаго момента.

Во время движенія эта прямая скользитъ по неизмѣнной плоскости со скоростью $\frac{h}{l}$.

Отсюда заключаемъ, что вторая интерпретація *Poinsot* для случая (1) выражается такъ:

„Если разстояніе плоскости катанія отъ точки опоры равно средней полуоси эллипсоида инерціи, то одна изъ асимптотъ фокальной линіи этого эллипсоида въ плоскости наибольшаго и наименьшаго момента скользитъ по неподвижной въ пространствѣ плоскости съ постоянною угловою скоростью $\frac{h}{l}$ “.

Обратно, движеніе пространства въ тѣлѣ будетъ представляться движеніемъ неизмѣнной прямой по плоскости (2) со скоростью $\frac{d\beta}{dt}$, гдѣ β опредѣляется изъ формулы (9).

§ 4. Случай $A=B$.

Перейдемъ теперь къ изслѣдованію случая вращенія твердаго тѣла, для котораго два изъ главныхъ моментовъ инерціи относительно точки опоры равны.

Пусть

$$A = B.$$

Уравненія движенія при этомъ условіи принимаютъ видъ (форм. 2 гл. I):

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (A - C) qr; \\ A \frac{dq}{dt} &= (C - A) rp; \\ \frac{dr}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Интегралы живой силы и момента даютъ

$$\left. \begin{aligned} A(p^2 + q^2) + Cr^2 &= h; \\ A^2(p^2 + q^2) + C^2r^2 &= l^2, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

гдѣ h и l произвольныя постоянныя.

Обозначимъ черезъ i уголъ мгновенной оси OJ съ осью OC неравнаго момента. Тогда изъ уравненій (14) имѣемъ

$$r = \omega \cos i = \text{const.}; \quad p^2 + q^2 = \omega^2 \sin^2 i = \text{const.}$$

Отсюда очевидно, что

$$\omega = \text{const.}; \quad \angle i = \text{const.} \dots \dots \dots (16)$$

Количества ω и i извѣстны изъ начальныхъ условій. Опредѣлимъ постоянныя h и l черезъ эти количества.

Уравненія (15) даютъ

$$\left. \begin{aligned} (A \sin^2 i + C \cos^2 i) \omega^2 &= h; \\ (A^2 \sin^2 i + C^2 \cos^2 i) \omega^2 &= l^2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

Найдемъ теперь углы γ и ε неизмѣнной прямой (форм. 5 гл. I) и эксцентричной прямой (форм. 1 гл. III) съ осью неравнаго момента.

На основаніи (17) получаемъ

$$\left. \begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{Cr}{l} = \frac{C \omega \cos i}{l} = \frac{C \cdot \cos i}{\sqrt{A^2 \sin^2 i + C^2 \cos^2 i}} = \text{const.}; \\ \cos \varepsilon &= \frac{\sqrt{C} \cdot r}{\sqrt{h}} = \frac{\sqrt{C} \cdot \omega \cdot \cos i}{\sqrt{h}} = \frac{\sqrt{C} \cdot \cos i}{\sqrt{A \sin^2 i + C \cos^2 i}} = \text{const.} \end{aligned} \right\} \dots \dots (18)$$

Формулы (16) и (18) приводятъ къ слѣдующему заключенію:

„Въ случаѣ $A = B$ мгновенная ось, неизмѣнная и эксцентричная прямая описываютъ въ тѣлѣ прямые конусы вращенія около оси неравнаго момента съ углами растворенія $2i$, 2γ , 2ε “.

Далѣе, такъ какъ плоскость, содержащая мгновенную ось и неизмѣнную прямую, въ разсматриваемомъ нами случаѣ проходитъ черезъ ось неравнаго момента (форм. 3 гл. IV), то очевидно, что

„въ случаѣ $A = B$ мгновенная ось и ось неравнаго момента описываютъ въ пространствѣ прямые конусы вращенія около неизмѣнной прямой съ углами растворенія $2(i - \gamma)$ и 2γ “.

Плоскость GOJ , содержащая неизмѣнную прямую OG , мгновенную ось OJ и ось OC неравнаго момента, будетъ во время движенія вращаться въ тѣлѣ около OC , а въ пространствѣ около OG . Обозначимъ черезъ $\frac{d\theta'}{dt}$ и $\frac{d\theta}{dt}$ угловыя скорости этой плоскости въ тѣлѣ и въ пространствѣ.

Пусть G будетъ точкою неизмѣнной прямой на единицѣ разстоянія отъ точки опоры. Скорость этой точки въ тѣлѣ будетъ равна

$$\frac{d\theta'}{dt} \sin \gamma.$$

Но твердое тѣло вращается около OJ съ угловою скоростью ω , слѣдовательно, скорость точки G въ тѣлѣ будетъ равняться также

$$\omega \cdot \sin GOJ = \omega \sin (i - \gamma);$$

$$\therefore \frac{d\theta'}{dt} = \omega \frac{\sin (i - \gamma)}{\sin \gamma}.$$

Аналогично, если станемъ разсматривать скорость въ пространствѣ точки C , лежащей на оси неравнаго момента въ единицѣ разстоянія отъ точки опоры, то найдемъ

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{\sin i}{\sin \gamma}.$$

ГЛАВА VI.

О полодіи.

§ 1. Опредѣленіе движенія Poinsot общаго типа.

Въ главѣ I мы видѣли, что количества A, B, C , входящія въ уравненія движенія (форм. 2 гл. I), всѣ положительны, и что сумма двухъ изъ нихъ больше третьяго.

Sylvester *) первый подалъ мысль разсматривать эти уравненія при произвольныхъ значеніяхъ постоянныхъ A, B, C .

Понятно, что въ этомъ случаѣ названныя уравненія потеряютъ свой динамическій смыслъ, т. е., перестанутъ опредѣлять вращеніе твердаго тѣла около неподвижной точки по инерціи. Но, конечно, кинематическое значеніе ихъ сохранится. Они будутъ выражать такое движеніе твердаго тѣла, во время котораго нѣкоторая центральная поверхность II порядка

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1, \quad \dots \dots \dots (1)$$

неизмѣнно съ тѣломъ связанная, катится безъ скольженія по одной изъ своихъ касательныхъ плоскостей. Эта плоскость и центръ поверхности остаются неподвижными въ пространствѣ, и мгновенная угловая скорость тѣла измѣняется прямо пропорціонально радіусу вектору точки касанія.

Движеніе твердаго тѣла, такимъ образомъ опредѣляемое, носитъ названіе вращенія *Poinsot* (общаго типа).

Мы займемся теперь изученіемъ свойствъ этого болѣе общаго вращенія твердаго тѣла, при чемъ сохранимъ опредѣленія и обозначенія, принятыя нами для движенія *Euler*'а.

*) *Sylvester, On the Motion of a Rigid Body acted on by no external forces. Philos. Transact. t. CLVI. 1866.*

Въ зависимости отъ того, будетъ-ли уравненіе (1) опредѣлять эллипсоидъ, однополый или двуполый гиперболоидъ, мы сдѣлаемъ одно изъ слѣдующихъ трехъ предположеній:

$$\left. \begin{aligned} A > B > C > 0; \\ 0 > A; B > C > 0; \\ 0 > A > B; C > 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Поверхность (1) будемъ называть катящеюся поверхностью, главные оси ея, направленные по координатнымъ осямъ OZ , OY , OX , соотвѣтственно большою, среднею и малою осью.

Легко видѣть, что въ разсматриваемомъ нами болѣе общемъ случаѣ вращенія твердаго тѣла мы можемъ пользоваться формулами, выведенными въ предыдущихъ главахъ. Произвольныя постоянныя h и l , входящія въ интегралы движенія (форм. 3, 4 гл. I), подчинены тому же условію, которому удовлетворяютъ въ случаѣ *Euler*'а. Дѣйствительно, изъ уравненій (6) главы I мы имѣемъ

$$\frac{Ah - l^2}{A} \geq 0; \quad \frac{Bh - l^2}{B} \leq 0; \quad \frac{Ch - l^2}{C} \leq 0. \quad \dots \dots \dots (3)$$

Отсюда на основаніи формулы (25) той-же главы заключаемъ, что квадратъ длины перпендикуляра, опущеннаго изъ центра катящейся поверхности на плоскость катанія, долженъ лежать между квадратами большою и малою полуосей этой поверхности.

Въ настоящей главѣ мы рассмотримъ нѣкоторыя основныя свойства пологіи (§ 4 гл. I).

§ 2. Опредѣленіе пологіи.

Изъ самаго опредѣленія движенія *Poinsot* слѣдуетъ, что касательныя плоскости къ катящейся поверхности (1) въ точкахъ пологіи находятся на постоянномъ разстояніи $\frac{\sqrt{h}}{l}$ отъ точки опоры.

Отсюда слѣдующее геометрическое опредѣленіе разсматриваемой нами кривой:

„Пологіей называется геометрическое мѣсто точекъ, расположенныхъ на центральной поверхности II порядка и обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что касательныя плоскости къ этой поверхности въ различныхъ точкахъ нашей кривой находятся на постоянномъ разстояніи отъ центра поверхности“.

На основаніи такого опредѣленія мы находимъ уравненія пологіи въ формѣ:

$$\left. \begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Cz^2 &= 1; \\ A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 &= \frac{l^2}{h}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Помножая первое изъ этихъ уравненій на $\frac{l^2}{h}$ и вычитая изъ второго, получаемъ уравненіе конуса, проходящаго черезъ пологію:

$$A(Ah - l^2)x^2 + B(Bh - l^2)y^2 + C(Ch - l^2)z^2 = 0.$$

Этотъ конусъ, очевидно, и будетъ тотъ, который мы называли мгновеннымъ или пологіальнымъ (форм. 4 гл. III).

Такъ какъ пологія получается въ пересѣченіи поверхности (1) съ мгновеннымъ конусомъ, то наша кривая должна состоять изъ двухъ отдѣльныхъ замкнутыхъ вѣтвей.

Если припомнимъ сказанное въ главѣ III о положеніи мгновеннаго конуса въ тѣлѣ, то убѣдимся, что пологія обхватываетъ или большую или малую ось катящейся поверхности въ зависимости отъ того, будетъ ли квадратъ разстоянія плоскости катанія отъ точки опоры больше или меньше квадрата средней полуоси поверхности (1). Замѣтимъ, что въ случаѣ двуполога гиперболоида пологія всегда обхватываетъ большую ось катящейся поверхности.

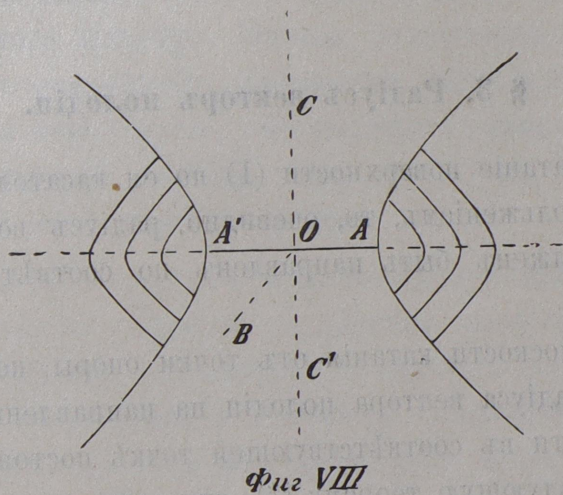
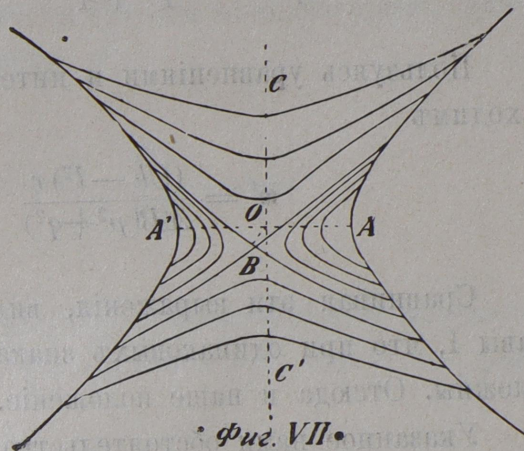
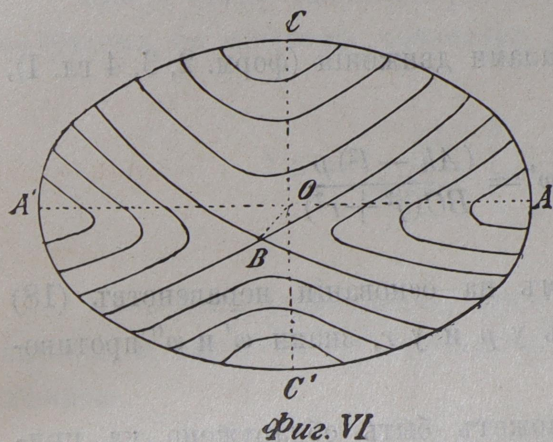
Если квадратъ разстоянія плоскости катанія отъ точки опоры какъ разъ равенъ квадрату средней полуоси катящейся поверхности, что допустимо только для эллипсоида и однополога гиперболоида, то могутъ быть два случая, пологія либо обращается въ вершины средней оси этой поверхности, либо состоитъ изъ двухъ плоскихъ эллипсовъ, пересѣкающихся въ этихъ вершинахъ. На основаніи теоремы, доказанной въ § 1 предыдущей главы, мы заключаемъ, что плоскости этихъ эллипсовъ служатъ діаметральными плоскостями катящейся поверхности, сопряженными съ направленіями асимптотъ фокальной линіи этой поверхности въ плоскости xOz .

Наконецъ, если квадратъ разстоянія плоскости катанія отъ точки опоры равенъ квадрату большой или малой полуоси катящейся поверхности (послѣднее возможно только для эллипсоида), то пологія обращается въ вершины соотвѣтствующей оси.

На фиг. VI, VII, VIII изображены различныя положенія пологіи въ зависимости отъ величины разстоянія плоскости катанія отъ центра катящейся поверхности. Точки A , B , C обозначаютъ соотвѣтствующія вершины, точка O —центръ этой поверхности.

Изъ чертежей мы видимъ, что полодіи, смежныя съ вершинами A и C большой и малой оси катящейся поверхности, всѣми своими частями бесконечно близки къ названнымъ точкамъ, полодіи-же, подходящія бесконечно близко къ вершинѣ B средней оси, имѣютъ также точки на конечномъ разстояніи отъ этой вершины.

Отсюда заключаемъ, что вращения около большой и малой оси будутъ устойчивыми, около средней неустойчивыми *).



Сдѣлаемъ еще одно небольшое замѣчаніе.

Допустимъ, что имѣемъ снарядъ, который можетъ совершать вращения *Euler'a*. Пусть при одномъ его вращеніи полодія обхватываетъ большую ось эллипсоида инерціи, при другомъ—малую. Изъ фиг. VI очевидно, что если при первомъ вращеніи мгновенная ось перемѣщалась въ тѣлѣ по часовой стрѣлкѣ, то при второмъ, если одно движеніе непрерывно переходитъ въ другое, эта ось будетъ перемѣщаться въ тѣлѣ противъ часовой стрѣлки.

*) Ср. гл. I § 3.

Точнѣе мы можемъ въ этомъ убѣдиться непосредственно изъ уравненій движенія.

Составимъ выраженія для угловыхъ скоростей проекцій мгновенной оси на плоскости xOy и yOz . Эти угловыя скорости ω' и ω'' , очевидно, равны:

$$\omega' = \frac{d}{dt} \left(\text{arc. tg } \frac{q}{p} \right) = \frac{p \frac{dq}{dt} - q \frac{dp}{dt}}{p^2 + q^2}; \quad \omega'' = \frac{d}{dt} \left(\text{arc. tg } \frac{r}{q} \right) = \frac{q \frac{dr}{dt} - r \frac{dq}{dt}}{q^2 + r^2}.$$

Пользуясь уравненіями и интегралами движенія (форм. 2, 3, 4 гл. I), находимъ

$$\omega' = \frac{(Ch - l^2) r}{AB(p^2 + q^2)} \quad \omega'' = \frac{(Ah - l^2) p}{BC(q^2 + r^2)}.$$

Сравнивая эти выраженія, видимъ на основаніи неравенствъ (18) главы I, что при одинаковыхъ знакахъ у p и у r , знаки ω' и ω'' противоположны. Отсюда и наше положеніе.

Указанное нами обстоятельство можетъ быть обнаружено на при- борѣ, носящемъ названіе волчка Максвелля.

§ 3. Радіусъ векторъ полодіи.

Такъ какъ катаніе поверхности (1) по ея касательной плоскости не сопровождается скольженіемъ, то, очевидно, радіусъ векторъ различныхъ точекъ полодіи долженъ быть направленъ по соотвѣтственной мгновенной оси.

Разстояніе плоскости катанія отъ точки опоры постоянно, слѣдовательно, проекція радіуса вектора полодіи на направленіе нормали къ катящейся поверхности въ соотвѣтствующей точкѣ постоянна *).

Докажемъ слѣдующую теорему **), относящуюся къ радіусу вектору полодіи:

„Если вдоль трехъ главныхъ осей катящейся поверхности, считая отъ центра, отложить длины, пропорціональныя величинамъ полуосей этой поверхности, то сумма квадратовъ площадей трехъ треугольниковъ, образуемыхъ отложенными длинами и радіусомъ векторомъ полодіи, есть величина постоянная ***).

*) Ср. теорему *Lagrange*'а (форм. 20 гл. I).

**) *Routh, The advanced part* и т. д. стр. 75. Ex.

***) Другими словами мы утверждаемъ, что сумма квадратовъ скоростей концовъ отложенныхъ длинъ постоянна во время движенія.

Дѣйствительно, обозначая через ρ длину радіуса вектора полодіи, через k коэффициентъ пропорціональности, находимъ, что квадратъ площади Δ одного изъ треугольниковъ выразится:

$$\Delta^2 = \frac{1}{4} \frac{k^2}{A} \rho^2 \sin^2(\rho, x) = \frac{k^2}{4A} \left[\rho^2 - \rho^2 \cos^2(\rho, x) \right] = \frac{k^2}{4ABC} \left[BCy^2 + BCz^2 \right].$$

Взявъ сумму такихъ выраженій по отношенію ко всѣмъ тремъ осямъ, получаемъ на основаніи уравненій полодіи (4):

$$\Sigma \Delta^2 = \frac{k^2}{4ABC} \left[A + B + C - \frac{l^2}{h} \right] = \text{const.}$$

Проведемъ черезъ точку опоры плоскость, параллельную плоскости катанія, и назовемъ эту неподвижную въ пространствѣ плоскость неизмѣнною.

Извѣстно, что касательная плоскость къ поверхности (1) въ концѣ какого либо діаметра параллельна діаметральной плоскости, сопряженной съ направленіемъ этого діаметра. Отсюда заключаемъ, что въ каждый моментъ времени съ неизмѣнною плоскостью совпадаетъ діаметральная плоскость катящейся поверхности, сопряженная съ направленіемъ соотвѣтствующаго радіуса вектора полодіи, или, что то-же, съ направленіемъ мгновенной оси для этого момента времени.

Вслѣдствіе поворота твердаго тѣла около этой оси въ теченіе бесконечно малаго промежутка времени подвижная діаметральная плоскость выйдетъ изъ неподвижной неизмѣнной, и съ этою послѣднею совпадетъ бесконечно близкая діаметральная плоскость, сопряженная съ направленіемъ мгновенной оси для смежнаго промежутка времени.

Если мгновенная ось становится перпендикулярною къ неизмѣнной плоскости, то вслѣдствіе указаннаго поворота твердаго тѣла подвижная плоскость не выйдетъ изъ неподвижной, и разсматриваемая нами ось будетъ служить постоянною осью вращенія.

Такъ какъ для поверхности (1) только главные оси перпендикулярны къ діаметральнымъ плоскостямъ, сопряженнымъ съ направленіями этихъ осей, то отсюда заключаемъ, что только главные оси катящейся поверхности могутъ служить постоянными осями вращенія *).

*) Ср. теорему, доказанную въ § 3 гл. I.

§ 4. Кривая пересѣченія катящейся поверхности съ неизмѣнною плоскостью. Кривизна поверхности въ точкахъ пологіи.

Въ предыдущемъ параграфѣ мы опредѣлили подвижныя плоскости, послѣдовательно совпадающія во время движенія съ неизмѣнною плоскостью, какъ діаметральныя плоскости катящейся поверхности, сопряженныя съ производящими пологіальнаго конуса.

Эти подвижныя плоскости можно охарактеризовать еще иначе. Легко убѣдиться, что онѣ пересѣкаютъ поверхность (1) по кривымъ постоянной площади. Для этой цѣли достаточно показать, что

„площадь сѣченія катящейся поверхности съ неизмѣнною плоскостью постоянна во время движенія“.

Извѣстно, что объемъ параллелепипеда, построеннаго на трехъ сопряженныхъ діаметрахъ поверхности (1), постояненъ. Высота этого параллелепипеда равна длинѣ перпендикуляра, опущеннаго изъ центра поверхности на касательную плоскость въ концѣ одного изъ діаметровъ. Для точекъ пологіи длина этого перпендикуляра постоянна. Отсюда заключаемъ, что плоскость основанія параллелепипеда постоянна, а слѣдовательно, постоянна и площадь кривой пересѣченія поверхности съ соотвѣтствующею діаметральною плоскостью, такъ какъ отношеніе этихъ площадей постоянно (π).

Помня, что объемъ нашего параллелепипеда равенъ объему параллелепипеда, построеннаго на главныхъ осяхъ, находимъ искомую площадь кривой пересѣченія въ формѣ:

$$S = \frac{\pi}{\sqrt{ABC}} \frac{l}{\sqrt{h}} = \text{const.} \quad \dots \dots \dots (5)$$

Замѣтимъ, что для однополаго гиперболоида подрадикальная величина становится отрицательной, и дѣйствительно, неизмѣнная плоскость пересѣкаетъ эту поверхность по незамкнутой кривой, гиперболѣ.

На основаніи формулы (5) можно доказать, что

„кривизна катящейся поверхности въ точкахъ пологіи постоянна“.

Извѣстно изъ аналитической геометріи *), что если R обозначаетъ радіусъ кривизны какого либо нормального сѣченія центральной поверхности II порядка, δ —длину перпендикуляра, опущеннаго изъ центра поверхности на соотвѣтствующую касательную плоскость, β —длину полу-

*) См., напр., Сальмонъ, Анал. геом. трехъ измѣр. гл. VIII.

изъ послѣднихъ трехъ при помощи первыхъ двухъ и уравненія (1) поверхности

$$C^4 Z^4 (rt - s^2) = C^2 Z^2 [AB + BCp^2 + ACq^2] = \\ = ABC [AX^2 + BY^2 + CZ^2] = ABC;$$

$$\therefore K = \frac{ABC}{[A^2 X^2 + B^2 Y^2 + C^2 Z^2]^2}.$$

Для точекъ пологіи эта формула на основаніи уравненій (4) переходитъ въ (6).

§ 5. Нормаль къ катящейся поверхности въ точкахъ пологіи. Теорема Sylvester'a.

Перейдемъ теперь къ изученію свойствъ нормали къ катящейся поверхности въ точкахъ пологіи.

Уравненіями этой нормали служатъ

$$\frac{X-x}{Ax} = \frac{Y-y}{By} = \frac{Z-z}{Cz} (7)$$

Косинусы угловъ этой нормали съ осями равны на основаніи второго изъ уравненій (4):

$$cs(n, x) = \frac{\sqrt{h}}{l} Ax; \quad cs(n, y) = \frac{\sqrt{h}}{l} By; \quad cs(n, z) = \frac{\sqrt{h}}{l} Cz. . . (8)$$

Разсмотримъ, прежде всего, прямую, проходящую черезъ центръ поверхности (1) параллельно нормали (7). Эта прямая неподвижна въ пространствѣ и носитъ названіе неизмѣнной прямой.

Докажемъ слѣдующую теорему, данную *Poinsot*:

„Сумма квадратовъ разстояній вершинъ катящейся поверхности отъ неизмѣнной прямой постоянна“.

Обозначимъ искомую сумму черезъ Σ . Тогда очевидно:

$$\Sigma = \frac{1}{A} sn^2(n, x) + \frac{1}{B} sn^2(n, y) + \frac{1}{C} sn^2(n, z),$$

откуда на основаніи (8) и (4)

$$\Sigma = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{h}{l^2} = const.$$

Разсмотримъ отрѣзокъ нормали къ катящейся поверхности въ точкѣ положіи, заключенный между точкою касанія и какою либо координатною плоскостью.

Пусть (x_0, y_0) будетъ точка пересѣченія нормали (7) съ плоскостью xOy , тогда

$$x_0 = x - \frac{1}{C} Ax; \quad y_0 = y - \frac{1}{C} By; \quad \dots \dots \dots (9)$$

$$\therefore (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2 = \frac{A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2}{C^2}.$$

На основаніи второго изъ уравненій (4) мы видимъ, что лѣвая часть написаннаго соотношенія постоянна и равна $\frac{l^2}{C^2 h}$.

Аналогично разсуждаемъ относительно плоскостей yOz и zOx .

Итакъ:

„Отрѣзокъ нормали въ точкѣ положіи, заключенный между точкою касанія и какою либо координатною плоскостью, постояненъ по длинѣ“.

Изъ уравненій (9) находимъ

$$x = -\frac{Cx_0}{A-C}; \quad y = -\frac{Cy_0}{B-C}.$$

Но изъ уравненій (4) положіи имѣемъ

$$A(A-C)x^2 + B(B-C)y^2 = -\frac{Ch-l^2}{h},$$

слѣдовательно, точка пересѣченія нормали (7) съ плоскостью xOy лежитъ на кривой

$$Z=0; \quad \frac{X^2}{\frac{1}{C}-\frac{1}{A}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{C}-\frac{1}{B}} = -\frac{Ch-l^2}{Ch}.$$

Для плоскостей yOz и zOx мы находимъ, что точки пересѣченія этихъ плоскостей съ нормалью (7) лежатъ соотвѣтственно на кривыхъ

$$X=0; \quad \frac{Y^2}{\frac{1}{A}-\frac{1}{B}} + \frac{Z^2}{\frac{1}{A}-\frac{1}{C}} = -\frac{Ah-l^2}{Ah}$$

и

$$Y=0; \quad \frac{Z^2}{\frac{1}{B}-\frac{1}{C}} + \frac{X^2}{\frac{1}{B}-\frac{1}{A}} = -\frac{Bh-l^2}{Bh}.$$

Если будемъ разсматривать такую координатную плоскость, въ которой существуетъ фокальная линія катящейся поверхности, то на основаніи полученныхъ уравненій мы, очевидно, можемъ утверждать, что

„линейчатая поверхность, производящія которой нормальны къ катящейся поверхности въ точкахъ пологіи, пересѣкаетъ разсматриваемую координатную плоскость по коническому сѣченію, подобному фокальной линіи катящейся поверхности въ этой плоскости“.

Докажемъ теперь слѣдующую знаменитую теорему *Sylvester'a*:

„Если намъ дана пологія, начерченная на какой либо центральной поверхности II порядка, и если мы отложимъ на нормаляхъ къ поверхности въ точкахъ пологіи равныя длины, то концы отложенныхъ длинъ будутъ лежать на новой пологіи, начерченной на другой поверхности, софокусной съ поверхностью, гомотетичною по отношенію къ первоначальной. Нормали къ первой поверхности въ различныхъ точкахъ пологіи будутъ служить нормальми ко второй въ соотвѣствующихъ точкахъ новой пологіи“.

Отложимъ на нормали (7) постоянную длину $\lambda \frac{l}{\sqrt{h}}$, при чемъ λ будемъ считать положительной, когда длина отложена по направленію, обратному перпендикуляру, опущенному изъ точки опоры на плоскость катанія.

Обозначимъ координаты конца отложенной длины черезъ x' , y' , z' . Тогда изъ (7) имѣемъ

$$Ax = \frac{x'}{\frac{1}{A} - \lambda}; \quad By = \frac{y'}{\frac{1}{B} - \lambda}; \quad Cz = \frac{z'}{\frac{1}{C} - \lambda} \dots \dots (10)$$

Откуда на основаніи уравненій (4) пологіи, находимъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{x'^2}{\frac{1}{A} - \lambda} + \frac{y'^2}{\frac{1}{B} - \lambda} + \frac{z'^2}{\frac{1}{C} - \lambda} &= 1 - \lambda \frac{l^2}{h}; \\ \frac{x'^2}{\left(\frac{1}{A} - \lambda\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{1}{B} - \lambda\right)^2} + \frac{z'^2}{\left(\frac{1}{C} - \lambda\right)^2} &= \frac{l^2}{h}. \end{aligned} \right\} \dots \dots (11)$$

формулы (11) и (10) доказываютъ теорему. Уравненія (11) опредѣляютъ пологію, и первое изъ нихъ представляетъ поверхность, софокусную съ поверхностью, подобною и соосною съ данною, т. е. гомотетичною съ данною.

Соотношенія-же (10) показываютъ, что наши двѣ поверхности въ соотвѣтствующихъ точкахъ пологій имѣютъ общія нормали.

Доказанному положенію легко дать механическое толкованіе.

Замѣтимъ, что радіусъ векторъ второй пологій представляетъ собою геометрическую сумму радіуса вектора первой пологій и отрѣзка нормали, слѣдовательно, если примемъ, что эти векторы изображаютъ собою угловыя скорости, то найдемъ, что

„движеніе *Poinsot*, будучи сложено съ постояннымъ вращеніемъ около нормали къ плоскости катанія, даетъ снова движеніе *Poinsot*“.

ГЛАВА VII.

О герполодіи.

§ 1. Дифференціальное уравненіе герполодіи.

Прежде всего выведемъ дифференціальное уравненіе герполодіи.

Намъ извѣстно изъ самаго опредѣленія этой кривой (§ 4 гл. I), что она расположена въ плоскости катанія, которая находится отъ точки опоры O на разстояніи $\frac{\sqrt{h}}{l}$ (форм. 25 гл. I).

Мы отнесемъ герполодію къ полярнымъ координатамъ (ρ, θ) въ этой плоскости и примемъ за начало координатъ точку G пересѣченія плоскости катанія съ неизмѣнною прямою (форм. 5 гл. I).

Пусть J будетъ точка встрѣчи мгновенной оси OJ (форм. 19 гл. I) съ плоскостью катанія, тогда длина OJ равна $\frac{\omega}{\sqrt{h}}$ (форм. 23 гл. I).

Изъ прямоугольнаго треугольника GOJ имѣемъ

$$\overline{GJ}^2 = \rho^2 = \frac{\omega^2}{h} - \frac{h}{l^2}; \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\therefore \rho \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{h} \omega \frac{d\omega}{dt}.$$

Въ главѣ I (11) мы выразили $\omega \frac{d\omega}{dt}$ черезъ ω^2 . Опредѣляя изъ написанныхъ соотношеній $\omega \frac{d\omega}{dt}$ и ω^2 и подставляя въ указанную формулу, находимъ при помощи (9) той-же главы

$$\rho \frac{d\rho}{dt} = \sqrt{-h \left[\rho^2 + \frac{(Bh-l^2)(Ch-l^2)}{BChl^2} \right] \left[\rho^2 + \frac{(Ch-l^2)(Ah-l^2)}{CAhl^2} \right] \left[\rho^2 + \frac{(Ah-l^2)(Bh-l^2)}{ABhl^2} \right]} \quad (2)$$

Полученное соотношение служит одним из дифференциальных уравнений герполодии и определяет радиус вектор этой кривой, какъ функцию времени.

На основаніи неравенствъ (3) предыдущей главы мы видимъ изъ (2), что герполодіа заключена между двумя кругами, общій центръ которыхъ находится въ точкѣ G встрѣчи неизмѣнной прямой съ плоскостью катанія.

Радиусы этихъ круговъ при

$$\frac{Bh-l^2}{B} > 0$$

равны

$$\sqrt{-\frac{(Bh-l^2)(Ch-l^2)}{BChl^2}}; \quad \sqrt{-\frac{(Ch-l^2)(Ah-l^2)}{CAhl^2}},$$

а при

$$\frac{Bh-l^2}{B} < 0$$

соотвѣтственно

$$\sqrt{-\frac{(Ah-l^2)(Bh-l^2)}{ABhl^2}}; \quad \sqrt{-\frac{(Ch-l^2)(Ah-l^2)}{CAhl^2}}.$$

Наконецъ, при

$$Bh-l^2=0$$

одинъ изъ круговъ стягивается въ точку G , а радиусъ другого равенъ

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{ABC}} \dots \dots \dots (3)$$

Остается еще найти зависимость амплитуды θ герполодии отъ времени.

Замѣтимъ, что $\frac{d\theta}{dt}$, очевидно, выражаетъ угловую скорость около неизмѣнной прямой плоскости, содержащей эту прямую и мгновенную ось. Эту скорость мы опредѣлили въ § 1 главы IV (2), какъ функцию угла ζ между названными двумя прямыми. Помножая указанную формулу на ρ^2 и помня, какъ это видно изъ треугольника GOJ , что

$$\rho \operatorname{ctg} \zeta = \rho \operatorname{ctg} GOJ = \frac{\sqrt{h}}{l},$$

находимъ

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{l^2} \rho^2 + \frac{(Ah-l^2)(Bh-l^2)(Ch-l^2)}{ABChl^3} \dots \dots \dots (4)$$

Полученное уравнение при помощи формулы (2) опредѣляетъ амплитуду θ герполодіи, какъ функцію времени.

Раздѣливъ соотношеніе (2) на (4), находимъ искомое дифференціальное уравненіе герполодіи.

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho \sqrt{-h \left[\rho^2 + \frac{(Bh-l^2) Ch-l^2}{BChl^2} \right] \left[\rho^2 + \frac{(Ch-l^2)(Ah-l^2)}{CAhl^2} \right] \left[\rho^2 + \frac{(Ah-l^2)(Bh-l^2)}{ABhl^2} \right]}}{\frac{h}{l} \rho^2 + \frac{(Ah-l^2)(Bh-l^2)(Ch-l^2)}{ABChl^3}} \quad (5)$$

§ 2. Уравненіе герполодіи въ случаѣ $Bh - l^2 = 0$.

Разсмотримъ теперь нѣкоторые частные случаи.

Если катящаяся поверхность вращается около одной изъ своихъ главныхъ осей, то герполодія, очевидно, обращается въ точку.

Если катящеюся поверхностью служитъ поверхность вращенія, то, какъ легко убѣдиться изъ уравненій движенія, угловая скорость ω тѣла постоянна *), слѣдовательно, изъ (1) заключаемъ, что герполодія должна быть кругомъ.

Наконецъ, пусть

$$Bh - l^2 = 0, \quad \dots \dots \dots (6)$$

и пусть средняя ось поверхности не служитъ постоянною осью вращенія.

Условіе (6), возможное только при B большемъ нуля, т. е., только въ случаѣ эллипсоида и однополаго гиперболоида, показываетъ, какъ извѣстно, что разстояніе плоскости катанія отъ точки опоры равно средней полуоси катящейся поверхности.

Уравненіе (5) герполодіи при условіи (6) даетъ

$$\frac{d\rho}{\rho \sqrt{\frac{k^2}{B} - \rho^2}} = \sqrt{B} d\theta, \quad \dots \dots \dots (7)$$

гдѣ

$$k = \sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}}. \quad \dots \dots \dots (8)$$

Интегрируя соотношеніе (7), находимъ, обозначая черезъ θ_0 произвольное постоянное:

$$\frac{2k}{\rho \sqrt{B}} = e^{k(\theta - \theta_0)} + e^{-k(\theta - \theta_0)} \quad \dots \dots \dots (9)$$

*) Ср. гл. V § 4.

Полагая въ этомъ уравненіи θ равнымъ θ_0 , мы на основаніи (8) заключаемъ, что θ_0 выражаетъ значеніе амплитуды θ въ моментъ касанія герполодіи (9) къ кругу (3). Если этотъ моментъ примемъ за начальный и если будемъ отсчитывать углы θ отъ начального радіуса вектора, то

$$\theta_0 = 0,$$

и уравненіе (9) герполодіи принимаетъ форму

$$\frac{2k}{\sqrt{B} \cdot \rho} = e^{k\theta} + e^{-k\theta} \dots \dots \dots (10)$$

При θ равнымъ безконечности ρ равно нулю, слѣдовательно, точка G встрѣчи неизмѣнной прямой съ плоскостью катанія служитъ асимптотическимъ полюсомъ для герполодіи (10).

Кривая (10) обладаетъ слѣдующимъ любопытнымъ свойствомъ:

„Пусть мы нашли геометрическое мѣсто конца полярной подкасательной герполодіи въ случаѣ $Bh - l^2 = 0$ и пусть мы построили новую кривую изъ этого геометрическаго мѣста подобнымъ-же путемъ. Докажемъ, что новая кривая будетъ подобна данной герполодіи“ *).

Извѣстно, что, если μ обозначаетъ уголъ касательной съ радіусомъ векторомъ кривой, то

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\theta}}.$$

Полярною подкасательною S_t называется длина, считаемая по перпендикуляру къ радіусу вектору точки касанія отъ начала координатъ до точки пересѣченія этого перпендикуляра съ касательною, слѣдовательно,

$$S_t = \rho \operatorname{tg} \mu = \frac{\rho^2}{\frac{d\rho}{d\theta}}.$$

Отсюда заключаемъ, что если обозначимъ черезъ (ρ_1, θ_1) координаты геометрическаго мѣста конца подкасательной, то

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta; \quad \rho_1 = \frac{\rho^2}{\frac{d\rho}{d\theta}}.$$

*) *Routh, The advanced part* и т. д. стр. 104. Ex

Если то-же построение повторимъ для кривой (ρ_1, θ_1) , то придемъ къ новой кривой (ρ_2, θ_2) , для которой

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1; \quad \rho_2 = \frac{\rho_1^2}{\frac{d\rho_1}{d\theta_1}},$$

или же при помощи предыдущихъ формулъ

$$\theta_2 = \theta; \quad \rho_2 = \frac{-\rho^3}{2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2}}.$$

Дифференцируя дважды уравнение (10) герполодии, находимъ

$$-\frac{2}{k\sqrt{B}\rho_2} = e^{\frac{k\theta_2}{2}} + e^{-\frac{k\theta_2}{2}}.$$

Очевидно, что кривая, опредѣляемая этимъ уравненіемъ, подобна герполодии (10).

§ 3. Преобразование уравнений герполодии, указанное Darboux.

Вернемся снова къ общему случаю

$$\frac{Bh - l^2}{B} > 0.$$

Уравнения (4) и (2) герполодии можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$\left. \begin{aligned} x^2 \frac{dx}{dt} &= mx^2 + n; \\ x \frac{dx}{dt} &= k \sqrt{-F(x^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

гдѣ m, n, k постоянныя, а $F(x)$ обозначаетъ цѣлую кубическую функцію съ коэффициентомъ при высшей степени, равнымъ единицѣ.

Пусть α, β, γ будутъ корнями уравненія

$$F(x) = 0, \quad (12)$$

тогда, сравнивая соотношенія (11) съ (4) и (2), находимъ

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{bh}{l^2}, \quad n = \frac{(Ah - l^2)(Bh - l^2)(Ch - l^2)}{ABChl^3}, \quad k^2 = h; \\ \alpha &= \frac{(Bh - l^2)(Ch - l^2)}{BChl^2}, \quad \beta = \frac{(Ch - l^2)(Ah - l^2)}{CAhl^2}, \quad \gamma = -\frac{(Ah - l^2)(Bh - l^2)}{ABhl^2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Эти шесть уравнений содержатъ всего пять неизвѣстныхъ h, l, A, B, C , слѣдовательно, между количествами $m, n, k, \alpha, \beta, \gamma$ должна существовать нѣкоторая зависимость, которая, какъ видно изъ (13), можетъ быть представлена въ формѣ:

$$\alpha \beta \gamma = -\frac{n^2}{k^2},$$

или

$$n^2 = k^2 \cdot F(0). \quad (14)$$

Опредѣляя изъ (13) количества h, l, A, B, C , находимъ

$$\left. \begin{aligned} h &= k^2; \quad l = \frac{k^2}{m}; \\ \frac{1}{A} &= \frac{m^2}{k^2} + \frac{m \cdot n}{k^2 \alpha}; \quad \frac{1}{B} = \frac{m^2}{k^2} + \frac{m \cdot n}{k^2 \beta}; \quad \frac{1}{C} = \frac{m^2}{k^2} + \frac{m \cdot n}{k^2 \gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Затѣмъ, изъ опредѣленія функціи $F(x)$ и изъ уравненій (11) и (14) очевидно, что мы имѣемъ

$$\text{при } x = -\infty; \quad F(x) < 0;$$

$$\text{при } x = 0; \quad F(x) > 0;$$

$$\text{при } x > 0; \quad F(x) < 0;$$

$$\text{при } x = +\infty; \quad F(x) > 0;$$

Отсюда заключаемъ, что корни α, β, γ уравненія (12) всѣ дѣйствительны, слѣдовательно, мы можемъ на основаніи соотношеній (15) утверждать, что количества h, l, A, B, C , опредѣляемые изъ уравненій (13), будутъ также дѣйствительными.

Обозначимъ теперь черезъ ds элементъ дуги герполодіи. Тогда изъ (11) имѣемъ

$$\rho^2 \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = (m\rho^2 + n)^2 - k^2 F(\rho^2). \quad (16)$$

На основаніи формулы (14) мы видимъ, что правая часть написаннаго уравненія дѣлится на ρ^2 , слѣдовательно,

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = -k^2 \rho^4 + M\rho^2 + N.$$

При соединении въ этомъ соотношеніи первое изъ уравненій (11), переходя въ слѣдующему опредѣленію герлолодіи, данному *Darboux* *):

„Герлолодіею называется кривая, описываемая движущеюся точкою, тангенціальная скорость которой выражается линейною функциею отъ квадрата радиуса вектора этой точки, а квадратъ линейной скорости — квадратною функциею того-же аргумента, при чемъ коэффициентъ при высшемъ членѣ последней функции отрицателенъ“.

Прежде чѣмъ идти дальше, сдѣлаемъ еще одно небольшое преобразование.

Мы видимъ, что въ уравненіи (2) и (4) герлолодіи количества $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$ входятъ вполне симметрично.

Постараемся въ этихъ уравненіяхъ замѣнить названные количества коэффициентами функции

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{A}\right) \left(x - \frac{1}{B}\right) \left(x - \frac{1}{C}\right) = x^3 - Px^2 + Qx - R. \quad (17)$$

Подставивъ въ этомъ соотношеніи x равнымъ $\frac{h}{l^2}$, находимъ на основаніи (13)

$$m = \frac{l^3}{h} f\left(\frac{h}{l^2}\right). \quad (18)$$

Рассмотримъ теперь функцию

$$F(\rho^2) = (\rho^2 - \alpha)(\rho^2 - \beta)(\rho^2 - \gamma).$$

Замѣчая, что по (13)

$$\rho^2 - \alpha = \frac{Al^2 \rho^2}{Alh - l^2} \left[\frac{h\rho^2 + ml}{l^2 \rho^2} - \frac{1}{A} \right],$$

получаемъ

$$F(\rho^2) = \frac{l^3 \rho^6}{h m} f(u), \quad (19)$$

гдѣ

$$u = \frac{h\rho^2 + ml}{l^2 \rho^2}, \quad (20)$$

*) *Besprekous, Cours de Méc. t. II. стр. 495.*

откуда на основаніи (18)

$$\rho^2 = \frac{\frac{l^2}{h} f\left(\frac{h}{l^2}\right)}{u - \frac{h}{l^2}} \quad (21)$$

Введемъ теперь на мѣсто ρ переменное u , тогда уравненія (11) герполодіи на основаніи (21), (13), (18), (19) принимаютъ форму:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= lu; \\ \left(\frac{du}{dt}\right)^2 &= -4l^2 f(u) \left(u - \frac{h}{l^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Соотношеніе (21) и второе изъ (22) показываютъ, что

$$f\left(\frac{h}{l^2}\right) \left(u - \frac{h}{l^2}\right) > 0;$$

$$f(u) \left(u - \frac{h}{l^2}\right) < 0,$$

или на основаніи (17)

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{h}{l^2} - \frac{1}{A}\right) \left(\frac{h}{l^2} - \frac{1}{B}\right) \left(\frac{h}{l^2} - \frac{1}{C}\right) \left(u - \frac{h}{l^2}\right) &> 0; \\ \left(u - \frac{1}{A}\right) \left(u - \frac{1}{B}\right) \left(u - \frac{1}{C}\right) \left(u - \frac{h}{l^2}\right) &< 0; \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Помня, что

$$\frac{1}{A} < \frac{h}{l^2} < \frac{1}{C},$$

заключаемъ изъ (23), что

„количество u должно измѣняться всегда въ томъ изъ промежутковъ $\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}\right)$ и $\left(\frac{1}{B}, \frac{1}{C}\right)$, который не содержитъ $\frac{h}{l^2}$, слѣдовательно, u никогда не можетъ сдѣлаться равнымъ $\frac{h}{l^2}$ “.

§ 4. Точки перегиба герполоди.

Выведенныя въ предыдущемъ параграфѣ формулы мы приложимъ къ весьма интересному вопросу о точкахъ перегиба герполоди. Постараемся доказать, что

„герполодіа, соотвѣтствующая вращенію *Euler*'а, точекъ перегиба имѣть не можетъ“.

Вопросъ о точкахъ перегиба герполоди служилъ еще очень недавно предметомъ многочисленныхъ работъ. Впервые приведенная теорема была доказана *Hess*'омъ ¹⁾ въ 1880 году. Но, повидимому, статья *Hess*'а, по крайней мѣрѣ, во Франціи осталась неизвѣстною, ибо три года спустя разсматриваемый нами вопросъ снова ставится на очередь.

Hermite далъ формулу, выражающую условіе присутствія этихъ точекъ въ эллиптическихъ функціяхъ времени, но вслѣдствіе ошибки въ знакѣ *Hermite*'у не удалось доказать упомянутое положеніе.

Sparre ²⁾, провѣряя вычисленія *Hermite*'а, исправилъ этотъ недостатокъ и довелъ доказательство до конца.

Французскіе ученые считаютъ, что *Sparre* первый доказалъ отсутствіе точекъ перегиба герполоди въ случаѣ *Euler*'а.

Послѣ *Sparre*'а занимались тѣмъ-же вопросомъ *Franke* ³⁾, *Mannheim* ⁴⁾, *S. Germain* ⁵⁾, *Résal* ⁶⁾ и др.

Раньше этихъ ученыхъ, даже раньше *Sparre*'а, изслѣдованіемъ герполоди занимался *Barbarin* ⁷⁾. Его работа, *Note sur l'herpolhodie*, относится къ 1882 г., но она пролежала въ редакціи *Nouvelle Annales* до 1885 г., такъ что появилась въ печати позже замѣтки *Sparre*'а.

То доказательство, которое мы приведемъ, принадлежитъ *Darboux* и помѣщено въ его примѣчаніяхъ къ курсу механики *Despeyroux* ⁸⁾.

Радиусъ кривизны плоской кривой дается черезъ полярныя координаты (ρ , θ) слѣдующею формулою

$$R_1 = \frac{-ds^3}{\rho d^2\rho d\theta - 2d\rho^2 d\theta - \rho^2 d\theta^3}.$$

¹⁾ *Hess*, Ueber das Rollen einer Fläche II Grades и т. д. München. 1880.

²⁾ *Sparre*, Sur l'herpolhodie de Poinso. Compt. rend. IC. 1884.

³⁾ *Franke*, Sur la courbure de l'herpolhodie. Compt. rend. C. 1885.

⁴⁾ *Mannheim*, Sur l'herpolhodie. *ibid*.

⁵⁾ *S. Germain*, Sur l'herpolhodie. *ibid*.

⁶⁾ *Résal*, Note sur la courbure de l'herpolhodie. Journ. de l'Ec. Polyt. LV. 1885.

⁷⁾ *Barbarin*, Note sur l'herpolhodie. Nouv. Ann. (3) IV. 1885.

⁸⁾ *Despeyroux*, Cours de Méc. Note XVII. § II.

Преобразуемъ это выраженіе слѣдующимъ очевиднымъ образомъ:

$$R_1 = \frac{-2 d\rho \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3}{\rho^5 \left[2 \frac{d\rho}{\rho^4} \frac{d^2\rho}{d\theta^2} - 4 \frac{d\rho}{\rho^5} \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - 2 \frac{d\rho}{\rho^3} \right]} = \frac{-\frac{2}{\rho^5} \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3 d\rho}{d \left[\frac{1}{\rho^4} \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 \right]} = \frac{\rho \frac{d\rho}{du}}{\frac{d}{du} \left[\frac{1}{\rho^4} \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 \right]}^{-\frac{1}{2}},$$

гдѣ u независимое переменное.

Приложимъ эту формулу къ герполодіи (11).

При помощи (16) и (22), находимъ

$$\frac{1}{\rho^4} \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2} - \frac{k^2 F(\rho^2)}{\rho^6 l^2 u^2},$$

или на основаніи (19), (18), (21), (17)

$$\frac{1}{\rho^4} \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{\frac{l^2}{h} f\left(\frac{h}{l^2}\right)} \left[\frac{R}{u^2} - \frac{Q}{u} + P - \frac{h}{l^2} \right].$$

Подставляя найденное значеніе для $\frac{1}{\rho^4} \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2$ въ выраженіе для радіуса кривизны, получаемъ на основаніи (21)

$$R_1 = \sqrt{\frac{l^2}{h} f\left(\frac{h}{l^2}\right)} \frac{\left[Pu^2 - \frac{h}{l^2} u^2 - Qu + R \right]^{\frac{3}{2}}}{\left(u - \frac{h}{l^2} \right)^2 (Qu - 2R)}.$$

Въ точкахъ перегиба радіусъ кривизны, какъ извѣстно, становится безконечно большимъ. Такъ какъ u не можетъ равняться $\frac{h}{l^2}$, то лишь при

$$u = 2 \frac{R}{Q} \dots \dots \dots (24)$$

могутъ появиться точки перегиба на кривой.

Докажемъ, что, если катящеюся поверхностью служитъ эллипсоидъ инерціи, то u не можетъ принимать значеніе, указанное въ (24).

При помощи (17) представимъ условіе (24) въ формѣ:

$$u = \frac{2}{A + B + C} \dots \dots \dots (25)$$

Для эллипсоида инерціи

$$B + C > A,$$

слѣдовательно, условіе (25) даетъ

$$u < \frac{1}{A},$$

что противорѣчитъ положенію, доказанному въ концѣ предыдущаго параграфа. Отсюда заключаемъ, что герполодія, соотвѣтствующая вращенію *Euler*'а, точекъ перегиба имѣть не можетъ.

Разсмотримъ теперь случай, когда катящеюся поверхностью служитъ произвольный трехосный эллипсоидъ.

Пусть

$$A > B > C > 0.$$

Написавъ въ условіи (25) на мѣсто C нуль, на мѣсто $A - B$, мы, очевидно, увеличимъ правую часть, слѣдовательно, условіе (25) показываетъ, что

$$u < \frac{1}{B}.$$

Отсюда заключаемъ на основаніи теоремы предыдущаго параграфа, что герполодія въ разсматриваемомъ нами случаѣ не можетъ имѣть точекъ перегиба, если разстояніе плоскости катанія отъ точки опоры меньше средней полуоси эллипсоида.

Въ случаѣ однополаго гиперboloида, когда

$$A < 0; \quad B > C > 0,$$

представимъ условіе (25) въ формѣ:

$$u > \frac{1}{B},$$

слѣдовательно, герполодія для случая однополаго гиперboloида не можетъ имѣть точекъ перегиба, если разстояніе плоскости катанія отъ точки опоры больше средней полуоси этой поверхности.

Пусть теперь это разстояніе меньше средней оси, но пусть извѣстно, что абсолютная величина количества A больше разности количествъ B и C , т. е. пусть

$$|A| > B - C.$$

Тогда условіе (25) даетъ

$$u > \frac{1}{C},$$

что невозможно, слѣдовательно, также и въ этомъ случаѣ герполодія, соотвѣтствующая разсматриваемому нами однополуму гиперboloиду, точекъ перегиба имѣть не можетъ.

Для двуполого гиперboloида

$$0 > A > B; \quad C > 0$$

квадратъ разстоянія плоскости катанія отъ точки опоры всегда больше квадрата средней полуоси этой поверхности, слѣдовательно, по извѣстному правилу u должно измѣняться между $\frac{1}{A}$ и $\frac{1}{B}$, т. е.

$$u < 0.$$

Отсюда заключаемъ, что герполодія, соотвѣтствующая двуполуму гиперboloиду, не можетъ имѣть точекъ перегиба, если сумма абсолютныхъ величинъ количествъ A и B меньше количества C .

§ 5. Колебательное движеніе радіуса вектора герполодіи.

Воспользуемся еще формулами § 3 для изслѣдованія вопроса о колебательномъ движеніи радіуса вектора герполодіи.

Если возможно такое движеніе, то долженъ существовать моментъ, когда

$$\frac{dh}{dt} = 0,$$

а, слѣдовательно, по (22)

$$u = 0.$$

Разсматривая соотношенія (23) для u , равнаго нулю, находимъ

$$\left(\frac{h}{l^2} - \frac{1}{A}\right) \left(\frac{h}{l^2} - \frac{1}{B}\right) \left(\frac{h}{l^2} - \frac{1}{C}\right) < 0;$$

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{C} < 0.$$

Отсюда заключаемъ, что радіусъ векторъ герполодіи можетъ совершать колебательное движеніе только въ томъ случаѣ, когда катящаяся

поверхностью служить однополый гиперболоидъ, и когда пологія обхватываетъ большую ось этой поверхности.

Доказанная теорема даетъ намъ возможность уяснить себѣ такъ наз. интерпретацію *Jacobi*.

Пусть данное твердое тѣло совершаетъ вращеніе *Euler*'а, и пусть точка касанія эллипсоида инерціи этого тѣла съ плоскостью катанія пробѣгаетъ всю пологію въ теченіе времени *T*.

Очевидно, что черезъ промежутокъ *T* отъ начала движенія твердое тѣло придетъ въ такое положеніе, какъ будто-бы это тѣло повернулось на нѣкоторый уголъ θ около нормали къ плоскости катанія.

Вообразимъ себѣ, что мы въ началѣ движенія сообщили твердому тѣлу постоянную вращательную скорость

$$\Omega = -\frac{\theta}{T}$$

около нормали къ плоскости катанія.

Новое сложное движеніе будетъ по теоремѣ *Sylvester*'а (§ 5 гл. VI) вращеніемъ *Poinsot*, и очевидно, что радіусъ векторъ герполоиди, соотвѣствующій этому движенію, будетъ совершать колебательное движеніе.

Отсюда слѣдующая интерпретація *Jacobi*:

„Всякое вращеніе *Euler*'а можетъ быть разложено на постоянное вращеніе около нормали къ плоскости катанія и на нѣкоторое колебательное движеніе *Poinsot*. Это послѣднее представляется катаніемъ однополаго гиперболоида по плоскости, параллельной плоскости катанія во вращеніи *Euler*'а, и пологія для него обхватываетъ большую ось гиперболоида“.

ГЛАВА VIII.

Полодія, какъ пересѣченіе двухъ концентрическихъ и соосныхъ поверхностей II порядка.

§ 1. Условіе, при которомъ пересѣченіе двухъ концентрическихъ и соосныхъ поверхностей II порядка можно разсматривать, какъ полодію.

Вращеніе *Poinsot*, опредѣляемое уравненіями (2) главы I, будетъ механически возможно, какъ извѣстно, только тогда, когда произвольныя постоянныя h и l , входящія въ интегралы движенія (форм. 3, 4 гл. I), удовлетворяютъ нѣкоторымъ неравенствамъ (форм. 3 гл. VI).

Можно показать, что если дано какое либо механически возможное вращеніе *Poinsot*, то всегда существуетъ другое, также механически возможное, вращеніе *Poinsot*, для котораго проекціи на подвижныя оси координатъ мгновенной угловой скорости въ каждый моментъ равны и прямопротивоположны соотвѣтствующимъ величинамъ для перваго движенія *).

Два такихъ движенія *Poinsot* носятъ названіе сопряженныхъ вращеній *Darboux*.

Мы не будемъ входить въ подробности теоріи сопряженныхъ вращеній *Darboux*, такъ какъ это не относится къ поставленной нами задачѣ. Замѣтимъ только слѣдующее. Изъ самаго опредѣленія этихъ движеній ясно, что для нихъ полодія должна быть общою, такъ что эта кривая получается въ пересѣченіи катящихся поверхностей, соотвѣтствующихъ тому и другому изъ вращеній *Darboux*.

*) См., напр., *Сусловъ*, Теорема *Jacobi* о разложеніи движенія симметричнаго тяжелаго гироскопа. Труды Отд. Физ. Наукъ О. Л. Е. А. и Э. т. VII. 1895.

Въ настоящей главѣ мы рассмотримъ тѣ условія, при которыхъ пересѣченіе двухъ концентрическихъ и соосныхъ поверхностей II порядка можетъ быть разсматриваемо, какъ полодія. Изслѣдованіе этого вопроса приведетъ насъ къ новымъ опредѣленіямъ полодіи и герполодіи, дающимъ болѣе ясное и отчетливое представленіе о характерѣ названныхъ кривыхъ.

Съ такой точки зрѣнія эти кривыя были изслѣдованы впервые *Darboux* *), изложенія котораго мы и будемъ придерживаться въ настоящей главѣ.

Пусть концентрическія и соосныя поверхности II порядка

$$\left. \begin{aligned} A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 &= D'; \\ A''x^2 + B''y^2 + C''z^2 &= D'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

пересѣкаются на полодіи (форм. 4 гл. VI):

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1;$$

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \frac{l^2}{h}.$$

Тогда уравненія этой кривой должны являться слѣдствіями соотношеній (1), слѣдовательно,

$$\begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A^2 & B^2 & C^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Введя обозначенія:

$$\left. \begin{aligned} B'C'' - B''C' &= m; \\ C'A'' - C''A' &= n; \\ A'B'' - A''B' &= p \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

представимъ полученныя условія въ формѣ:

$$mA + nB + pC = 0; \quad mA^2 + nB^2 + pC^2 = 0.$$

Эти уравненія, опредѣляющія отношенія квадратовъ двухъ полюсей катящейся поверхности къ квадрату третьей, допускаютъ вообще два рѣ-

*) *Despeyrous, Cours de Méc. t. II. Note XVIII. § 4. 5.*

шенія, которыя, какъ легко убѣдиться, будутъ дѣйствительными, если

$$m \cdot n \cdot p (m + n + p) < 0. \quad (3)$$

Въ случаѣ

$$m \cdot n \cdot p (m + n + p) = 0$$

кривая пересѣченія поверхностей (1) будетъ либо сферическою, либо плоскою кривою.

Итакъ, мы можемъ утверждать, что если удовлетворяется условіе (3), то кривая пересѣченія двухъ концентрическихъ и соосныхъ поверхностей II порядка, опредѣляемыхъ уравненіями (1), можно разсматривать и при томъ двумя различными способами, какъ полодію.

§ 2. Теорема de La Gournerie.

Постараемся, прежде всего, выразить координаты x, y, z какой либо точки разсмотрѣнной въ § 1 кривой (1), какъ функціи одного параметра ρ . Присоединяя къ уравненіямъ (1) соотношеніе

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta \cdot \rho,$$

мы, очевидно, всегда можемъ распорядиться постоянными $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такъ, чтобы

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= m(a - \rho); \\ y^2 &= n(b - \rho); \\ z^2 &= p(c - \rho), \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (4)$$

гдѣ a, b, c — постоянныя количества, и величины m, n, p даются формулами (2).

Изъ соотношеній (4) мы видимъ, что точка (x, y, z) кривой пересѣченія (1) должна лежать на поверхности

$$\frac{x^2}{a - \rho} + \frac{y^2}{b - \rho} + \frac{z^2}{c - \rho} = m + n + p. \quad (5)$$

Полученное уравненіе, въ которомъ количество ρ будемъ разсматривать, какъ параметръ, опредѣляетъ семейство софокусныхъ поверхностей II порядка.

Въ случаѣ, когда

$$m + n + p = 0,$$

уравненіе (5) выражаетъ семейство конусовъ, и кривая (4), какъ мы видѣли выше, лежитъ на сферѣ.

Этотъ случай мы не будемъ разсматривать.

Помножая уравненія (1) на множители, соотвѣтственно выбранные, мы всегда можемъ сдѣлать

$$m + n + p = 1$$

и уравненіе (5) писать въ формѣ

$$\frac{x^2}{a - \rho} + \frac{y^2}{b - \rho} + \frac{z^2}{c - \rho} = 1. \quad (6)$$

Разсмотримъ касательную къ кривой (4). Косинусы угловъ этой касательной съ осями координатъ пропорціональны соотвѣтственно

$$\frac{m}{x}, \quad \frac{n}{y}, \quad \frac{p}{z},$$

или на основаніи тѣхъ-же уравненій (4)

$$\frac{x}{a - \rho}, \quad \frac{y}{b - \rho}, \quad \frac{z}{c - \rho}.$$

Отсюда заключаемъ, что касательная къ кривой (4) въ какой либо ея точкѣ направлена по нормали къ поверхности (6) въ той-же точкѣ.

Далѣе, изъ уравненій (4) очевидно, что для всѣхъ дѣйствительныхъ точекъ кривой каждое изъ количествъ

$$a - \rho \quad b - \rho \quad c - \rho$$

не можетъ мѣнять знака, слѣдовательно, параметръ ρ не можетъ проходить ни черезъ одно изъ значеній a , b , c .

На основаніи сказаннаго приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

„Кривая пересѣченія двухъ концентрическихъ и соосныхъ поверхностей II порядка нормальна къ безконечно большому числу софокусныхъ поверхностей II порядка, образующихъ одно изъ семействъ ортогональной системы“.

Какъ слѣдствіе доказаннаго положенія, мы можемъ, очевидно, утверждать, что

„всякая кривая, расположенная на двухъ концентрическихъ и соосныхъ поверхностяхъ II порядка, можетъ быть всегда рассматри-

ваема, какъ пересѣченіе двухъ дѣйствительныхъ софокусныхъ поверхностей, для которыхъ она служитъ общею линіею кривизны“.

Эта теорема дана *de La Gournerie* *).

§ 3. Приложение теоремы *de La Gournerie* къ пологіи.

Зададимся теперь задачею опредѣлить параметры ρ_1 и ρ_2 тѣхъ софокусныхъ поверхностей, которыя пересѣкаются по кривой (4).

Изъ теоріи эллиптическихъ координатъ извѣстно, что

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{(a-\rho)(a-\rho_1)(a-\rho_2)}{(a-b)(a-c)}; \\ y^2 &= \frac{(b-\rho)(b-\rho_1)(b-\rho_2)}{(b-c)(b-a)}; \\ z^2 &= \frac{(c-\rho)(c-\rho_1)(c-\rho_2)}{(c-a)(c-b)}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Сравнивъ эти уравненія съ формулами (4), находимъ

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{(a-\rho_1)(a-\rho_2)}{(a-b)(a-c)}; \\ n &= \frac{(b-\rho_1)(b-\rho_2)}{(b-c)(b-a)}; \\ p &= \frac{(c-\rho_1)(c-\rho_2)}{(c-a)(c-b)}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Далѣе легко видѣть, что количества ρ_1 и ρ_2 служатъ корнями слѣдующаго уравненія относительно переменнаго u :

$$\frac{(a-\rho_1)(a-\rho_2)}{(a-u)(a-b)(a-c)} + \frac{(b-\rho_1)(b-\rho_2)}{(b-u)(b-a)(b-c)} + \frac{(c-\rho_1)(c-\rho_2)}{(c-u)(c-a)(c-b)} = 0,$$

или на основаніи (8)

$$\frac{m}{a-u} + \frac{n}{b-u} + \frac{p}{c-u} = 0. \dots \dots \dots (9)$$

*) *De La Gournerie, Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques. p. 163.*

Итакъ, мы можемъ утверждать, что уравненіе (9) имѣетъ своими корнями искомыя параметры ρ_1 и ρ_2 .

Допустимъ, что мы изъ (9) нашли количества ρ_1 и ρ_2 и подставили ихъ въ соотношеніе (6). Тогда имѣемъ уравненія тѣхъ софокусныхъ поверхностей, которыя пересѣкаются по кривой (4). Составимъ общую линейную комбинацію этихъ уравненій

$$\left(\frac{1}{a-\rho_1} + \frac{\lambda}{a-\rho_2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{b-\rho_1} + \frac{\lambda}{b-\rho_2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{c-\rho_1} + \frac{\lambda}{c-\rho_2}\right)z^2 = 1 + \lambda,$$

гдѣ λ произвольный множитель.

Обозначая

$$k = \frac{\rho_1 \lambda + \rho_2}{1 + \lambda},$$

приводимъ предыдущее уравненіе къ формѣ:

$$\frac{(a-k)x^2}{(a-\rho_1)(a-\rho_2)} + \frac{(b-k)y^2}{(b-\rho_1)(b-\rho_2)} + \frac{(c-k)z^2}{(c-\rho_1)(c-\rho_2)} = 1. \quad (10)$$

Полученное соотношеніе служить, очевидно, самымъ общимъ уравненіемъ той поверхности II порядка, на которой расположена кривая (4).

Пусть теперь формулы (4) опредѣляютъ пологію. Найдемъ то значеніе для k , при которомъ уравненіе (10) выражаетъ катящуюся поверхность,

Для этой цѣли выразимъ аналитически, что разстояніе касательной плоскости къ поверхности (10) въ точкѣ кривой (4) находится на постоянномъ разстояніи отъ центра. Получаемъ:

$$\frac{(a-k)^2 x^2}{(a-\rho_1)^2 (a-\rho_2)^2} + \frac{(b-k)^2 y^2}{(b-\rho_1)^2 (b-\rho_2)^2} + \frac{(c-k)^2 z^2}{(c-\rho_1)^2 (c-\rho_2)^2} = const.$$

Подставляя въ это соотношеніе на мѣсто x^2 , y^2 , z^2 ихъ величины изъ формулъ (7) и приравнявъ нулю коэффициентъ при ρ , находимъ

$$\frac{(a-k)^2}{(a-\rho_1)(a-\rho_2)(a-b)(a-c)} + \frac{(b-k)^2}{(b-\rho_1)(b-\rho_2)(b-a)(b-c)} + \frac{(c-k)^2}{(c-\rho_1)(c-\rho_2)(c-a)(c-b)} = 0, \quad (11)$$

или

$$\frac{(\rho_1-k)^2}{(a-\rho_1)(b-\rho_1)(c-\rho_1)} = \frac{(\rho_2-k)^2}{(a-\rho_2)(b-\rho_2)(c-\rho_2)}.$$

Это уравнение, какъ и слѣдовало ожидать *), опредѣляетъ два значенія для k , которыя будутъ дѣйствительными, если

$$\frac{(a-\rho_1)(b-\rho_1)(c-\rho_1)}{(a-\rho_2)(b-\rho_2)(c-\rho_2)} > 0.$$

Пусть

$$a > b > c; \rho_1 > \rho_2.$$

Тогда изъ выведеннаго неравенства находимъ

$$a > \rho_1 > b; \rho_2 > c,$$

слѣдовательно, параметръ ρ_2 соотвѣтствуетъ эллипсоиду, параметръ ρ_1 — двуполому гиперболоиду.

Отсюда заключаемъ, что

„кривая пересѣченія двухъ софокусныхъ поверхностей II порядка, принадлежащихъ двумъ различнымъ семействамъ ортогональной системы, служитъ полодіею только тогда, когда третье семейство упомянутой системы будетъ семействомъ однополыхъ гиперболоидовъ“.

Предполагается по прежнему, что наша кривая пересѣченія не лежитъ на сферѣ.

Итакъ, полодія нормальна къ семейству софокусныхъ однополыхъ гиперболоидовъ.

Прежде чѣмъ итти дальше, докажемъ еще слѣдующую теорему:

„Если построить однополый гиперболоидъ, который нормаленъ къ данной кривой пересѣченія въ какой либо ея точкѣ M , то двѣ прямолинейныя производящія этого гиперболоида, проходящія черезъ M , будутъ служить нормальми въ той-же точкѣ къ двумъ поверхностямъ, для которыхъ данная кривая служитъ полодіею“.

Дѣйствительно, обозначимъ черезъ x, y, z координаты точки M и перенесемъ начало координатъ въ эту точку. Тогда однополый гиперболоидъ (6) будетъ опредѣляться въ новыхъ координатахъ (ξ, η, ζ) слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\frac{\xi^2}{a-\rho} + \frac{\eta^2}{b-\rho} + \frac{\zeta^2}{c-\rho} + \frac{2x\xi}{a-\rho} + \frac{2y\eta}{b-\rho} + \frac{2z\zeta}{c-\rho} = 0.$$

*) Ср. § 1 наст. гл.

Уравненія нормали въ точкѣ M къ поверхности (10) будутъ

$$\frac{\xi}{(a-k)x} = \frac{\eta}{(b-k)y} = \frac{\zeta}{(c-k)z} = \mu.$$

$$\frac{(a-\rho_1)(a-\rho_2)}{(b-\rho_1)(b-\rho_2)} = \frac{(c-\rho_1)(c-\rho_2)}{(c-\rho_1)(c-\rho_2)}$$

Найдемъ точку пересѣченія этой нормали съ гиперболоидомъ:

$$\left[\frac{(a-k)^2 x^2}{(a-\rho)(a-\rho_1)^2(a-\rho_2)^2} + \frac{(b-k)^2 y^2}{(b-\rho)(b-\rho_1)^2(b-\rho_2)^2} + \frac{(c-k)^2 z^2}{(c-\rho)(c-\rho_1)^2(c-\rho_2)^2} \right] \mu^2 +$$

$$+ 2 \left[\frac{(a-k)x^2}{(a-\rho)(a-\rho_1)(a-\rho_2)} + \frac{(b-k)y^2}{(b-\rho)(b-\rho_1)(b-\rho_2)} + \frac{(c-k)z^2}{(c-\rho)(c-\rho_1)(c-\rho_2)} \right] \mu = 0.$$

Подставляя въ это соотношеніе на мѣсто x^2 , y^2 , z^2 ихъ величины изъ формулъ (7), мы находимъ, что коэффициентъ при μ^2 на основаніи (11) обращается въ нуль; что же касается до коэффициента при 2μ , то онъ равенъ

$$\frac{a-k}{(a-b)(a-c)} + \frac{b-k}{(b-c)(b-a)} + \frac{c-k}{(c-a)(c-b)} = 0.$$

Отсюда заключаемъ, что вся нормаль лежитъ на однополѣ гиперболоидѣ, чѣмъ и доказывается теорема.

§ 4. Новое опредѣленіе полодіи.

Приложимъ преобразование *Jvory* къ точкамъ однополаго гиперболоида.

Пусть имѣемъ однополый гиперболоидъ

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1. \quad (12)$$

Разсмотримъ точку (x', y', z') , координаты которой опредѣляются изъ слѣдующихъ соотношеній:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x'}{\sqrt{a+\lambda}} &= \frac{x}{\sqrt{a}}; \\ \frac{y'}{\sqrt{b+\lambda}} &= \frac{y}{\sqrt{b}}; \\ \frac{z'}{\sqrt{c+\lambda}} &= \frac{z}{\sqrt{c}}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

въ которыхъ λ нѣкоторый параметръ.

Изъ написанныхъ уравненій находимъ

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = \frac{x'^2}{a+\lambda} + \frac{y'^2}{b+\lambda} + \frac{z'^2}{c+\lambda}. \quad (14)$$

Условимся давать количеству λ такія значенія, чтобы поверхность

$$\frac{x'^2}{a+\lambda} + \frac{y'^2}{b+\lambda} + \frac{z'^2}{c+\lambda} = 1 \quad (15)$$

была также однополымъ гиперболоидомъ. Тогда мы можемъ утверждать, что если точка (x, y, z) взята на поверхности (12), то точка (x', y', z') по (14) будетъ лежать на однополымъ гиперболоидѣ, софокусномъ съ первымъ.

Станемъ измѣнять параметръ λ , оставляя количества x, y, z неизмѣнными. Тогда точка (x', y', z') будетъ переходить отъ одной поверхности семейства (15) къ другой.

Опредѣлимъ характеръ такого перехода.

Дифференцируя уравненія (13), рассматривая количества x, y, z , какъ постоянныя, находимъ

$$dx' = \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{a}} \frac{d\lambda}{\sqrt{a+\lambda}};$$

$$dy' = \frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{b}} \frac{d\lambda}{\sqrt{b+\lambda}};$$

$$dz' = \frac{1}{2} \frac{z}{\sqrt{c}} \frac{d\lambda}{\sqrt{c+\lambda}}.$$

Если поверхность (15) бесконечно близка съ поверхностью (12), то послѣднія уравненія даютъ:

$$\frac{dx'}{\frac{x}{a}} = \frac{dy'}{\frac{y}{b}} = \frac{dz'}{\frac{z}{c}}.$$

Отсюда заключаемъ, что точка (x', y', z') при измѣненіи параметра λ и неизмѣнныхъ x, y, z будетъ перемѣщаться по кривой, нормальной къ семейству однополыхъ гиперболоидовъ (15).

Сравнивая сказанное съ теоремой, доказанной въ предыдущемъ параграфѣ, приходимъ къ слѣдующему новому опредѣленію пологіи:

„Полодіею называется геометрическое мѣсто точекъ, соотвѣствующихъ одной данной точкѣ однополаго гиперболоида (12) на семействѣ софокусныхъ однополыхъ гиперболоидовъ (15).“

§ 5. Теорема Greenhill'a.

Преобразование *Jvory* (13), какъ гомографическое, не измѣняетъ порядка тѣхъ функцій, къ аргументамъ которыхъ оно прилагается. Следовательно, если точку (x, y, z) заставимъ двигаться по какой либо производящей гиперboloида (12), то точка (x', y', z') будетъ перемѣщаться по соотвѣтствующей производящей гиперboloида (15), для котораго параметръ λ имѣетъ нѣкоторое опредѣленное значеніе.

Разсмотримъ какую либо производящую гиперboloида (12) и приложимъ ко всѣмъ точкамъ ея преобразование *Jvory* при λ бесконечно маломъ. Тогда концы произвольно взятаго отрѣзка на этой производящей перемѣстятся по нормалямъ къ поверхности, кромѣ того, по предыдущему, взятый отрѣзокъ останется прямолинейнымъ, следовательно, и длина его не претерпитъ измѣненія.

Отсюда теорема, данная *Greenhill*'омъ:

„Однополый гиперboloидъ можно деформировать такъ, чтобы его производящія оставались прямолинейными, и длины сторонъ косыхъ четырехугольниковъ, образованныхъ этими производящими, не измѣнялись. Тогда, если положеніе центра и направленія главныхъ осей поверхности остаются неизмѣнными, то деформированная поверхность всегда будетъ гиперboloидомъ, софокуснымъ со своимъ первоначальнымъ положеніемъ. При этомъ траекторія каждой точки гиперboloида будетъ нормальна къ послѣдовательнымъ его положеніямъ“.

Если теперь припомнимъ предложеніе, доказанное въ концѣ § 3, то убѣдимся, что всякая точка M деформирующагося гиперboloида описываетъ пологію, соотвѣтствующую такой поверхности II порядка, для которой одна изъ производящихъ гиперboloида, проходящихъ черезъ M , служитъ нормалью во всѣхъ своихъ послѣдовательныхъ положеніяхъ.

Итакъ, различныя точки одной и той-же производящей гиперboloида описываютъ пологіи, соотвѣтствующія такимъ поверхностямъ, для которыхъ эта производящая служитъ общею нормалью.

Этотъ результатъ, очевидно, вполне согласенъ съ теоремою *Sylvester*'а, доказанною въ § 5 гл. VI.

§. 6. Деформація однополаго гиперboloида, при которой одна изъ его производящихъ остается неподвижною.

Формулы (13) преобразования *Jvory* показываютъ, что двумъ діаметрально противоположнымъ точкамъ деформирующагося гиперboloида со-

отвѣтствуютъ въ другомъ его какомъ либо положеніи снова двѣ діаметрально противоположныя точки.

Изъ аналитической геометріи извѣстно, что двѣ параллельныя производящія однополаго гиперboloида лежатъ въ плоскости, проходящей черезъ центръ этой поверхности.

Отсюда заключаемъ, что параллельныя производящія при деформациі остаются параллельными.

Мы видѣли, что всякая точка M гиперboloида описываетъ пологію той поверхности, для которой одна изъ производящихъ, проходящихъ черезъ M , служитъ нормалю во всѣхъ своихъ послѣдовательныхъ положеніяхъ. По самому опредѣленію кривой, называемой пологіею, мы можемъ утверждать, что плоскость, проходящая черезъ M перпендикулярно къ разсматриваемой производящей, будетъ находиться во время деформациі на постоянномъ разстояніи отъ общаго центра этой поверхности и гиперboloида.

Проведемъ теперь черезъ двѣ точки, расположенныя на двухъ параллельныхъ производящихъ, плоскости, перпендикулярныя къ направленію этихъ производящихъ. Изъ доказаннаго выше слѣдуетъ, что эти плоскости во время деформациі будутъ находиться на постоянномъ разстояніи другъ отъ друга.

Отсюда очевидно, что если будемъ деформировать однополый гиперboloидъ указаннымъ способомъ, оставляя при этомъ одну изъ его производящихъ g неподвижной, то всѣ точки производящей g_1 , параллельной g , будутъ описывать плоскости, перпендикулярныя къ g . Что же касается до произвольной точки на гиперboloидѣ, то она опишетъ сферу, центръ которой лежитъ на неподвижной производящей g , а радіусъ равенъ неизмѣнному по длинѣ отрѣзку производящей второй системы между взятою точкою и производящею g .

Возьмемъ теперь третью производящую g_2 , принадлежащую вмѣстѣ съ g къ одной и той же системѣ. Какъ извѣстно, g_2 должна пересѣчь производящую g_1 , слѣдовательно, на производящей g_2 найдется всегда такая точка, которая во время деформациі будетъ описывать плоскость. Всѣ остальные точки производящей g_2 будутъ, по предыдущему, описывать сферы, центры которыхъ лежатъ на прямой g .

Если еще припомнимъ, что положеніе всякой прямой опредѣляется четырьмя условіями, то убѣдимся въ справедливости слѣдующей теоремы:

„Заставимъ неизмѣняемую прямую g_2 тремя своими точками описывать сферы, имѣющія свои центры на одной прямой g . Тогда всегда существуетъ точка на g_2 , которая описываетъ плоскость, пер-

пендикулярную къ g . Всѣ остальные точки прямой g_2 описываютъ сферы, имѣющія свои центры на прямой g .

§ 7. Новый приемъ получения герполодіи.

Пусть имѣемъ центральную поверхность II порядка, на которой начерчена полодія. Эта кривая, какъ извѣстно, будетъ нормальна къ семейству софокусныхъ однополыхъ гиперболоидовъ, имѣющихъ общій центръ въ центрѣ данной поверхности.

Разсмотримъ одинъ изъ гиперболоидовъ этого семейства, соотвѣтствующій какой либо точки M полодіи. Замѣнимъ рассматриваемый нами гиперболоидъ вторымъ, гомотетичнымъ съ первымъ относительно точки M . Коэффициентъ гомотетичности пусть равенъ $\frac{1}{2}$.

Легко видѣть, что производящія перваго гиперболоида, проходящія черезъ M , будутъ служить производящими и для втораго гиперболоида черезъ ту-же точку M .

Второй гиперболоидъ будетъ проходить черезъ центръ данной поверхности, и эта послѣдняя точка и точка M будутъ служить діаметрально противоположными точками для втораго гиперболоида, слѣдовательно, черезъ центръ данной поверхности будутъ проходить двѣ производящія втораго гиперболоида, параллельныя производящимъ черезъ M .

Пусть теперь данная центральная поверхность II порядка совершаетъ вращеніе *Poinsot*. Тогда первый гиперболоидъ будетъ деформироваться извѣстнымъ намъ способомъ, а такъ какъ второй подобенъ первому, то и второй гиперболоидъ будетъ подвергаться аналогичной деформации.

По самому опредѣленію вращенія *Poinsot* и на основаніи теоремы, доказанной въ концѣ § 3, мы заключаемъ, что одна изъ производящихъ втораго гиперболоида, проходящихъ черезъ M , будетъ сохранять въ пространствѣ постоянное направленіе, перпендикулярное къ плоскости катанія, слѣдовательно, производящая, параллельная этой, сохранитъ постоянное положеніе, такъ какъ проходитъ черезъ точку опоры.

Если еще припомнимъ, что касательная къ полодіи, а слѣдовательно, и къ герполодіи перпендикулярна къ касательной плоскости обоихъ гиперболоидовъ, то приходимъ къ слѣдующему способу вычерчиванія герполодіи:

„Будемъ деформировать гиперболоидъ такъ, чтобы одна изъ его производящихъ совпадала съ перпендикуляромъ, опущеннымъ

изъ точки опоры на плоскость катанія. Тогда точка M этого гипер-
болоида, діаметрально противоположная точкѣ опоры, не будетъ
выходить изъ плоскости катанія. Если, кромѣ того, заставимъ точку
 M двигаться въ этой плоскости нормально къ послѣдовательнымъ
положеніямъ гиперболоида, то кривая, описываемая точкою M , бу-
детъ герполодіею“.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ:

Стр. 11, въ 6 строкѣ сверху вмѣсто „момента“ должно быть „моменты“.

Стр. 24, въ 13 строкѣ сверху вмѣсто $\xi = sn y$ должно быть $\zeta = sn y$.

Стр. 31, въ 7 строкѣ сверху вмѣсто *SMS* должно быть *SMS'*.

Стр. 40, въ послѣдн. стр. послѣ слова „что“ вставить слово „центральный“.

Стр. 43, въ послѣдней строкѣ вмѣсто „угла ζ “ должна быть „дуги n_1 “.

Стр. 48, въ 3 строкѣ снизу вмѣсто „декартовы“ должно быть „декартовыя“.

Стр. 70, въ 11 стр. сверху вмѣсто „асипмтоти-“ должно быть „асимптоти-“.

Стр. 92, въ 12 строкѣ сверху вмѣсто $\frac{Bh-l^2}{B} > 0$ должно быть $\frac{Bh-l^2}{B}$
не равно 0.

Стр. 104, въ послѣдней строкѣ вмѣсто „поверхностей“ должно быть „поверхностяхъ“.
