О варіаціонномъ исчисленіи и приложеніяхъ его къ геометріи и механикѣ.

Экстраорд. проф. Н. Богуславскаго.

1. Дифференціальное исчисленіе, разсматриваемое съ теоретической точки зрѣнія, имѣетъ ввиду розысканіе безконечно малыхъ приращеній функцій, происходящихъ отъ безконечно малыхъ измѣненій перемѣннаго.

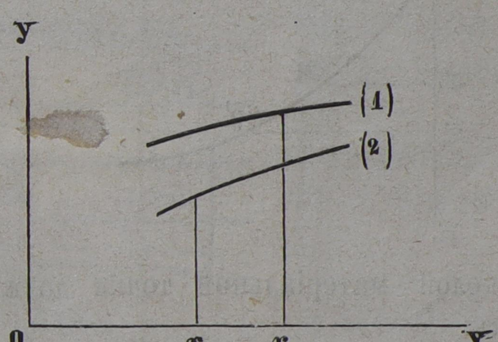
Какъ извѣстно, дифференціальный методъ имѣетъ обширныя примѣненія въ геометріи и въ механикѣ. Но въ этихъ наукахъ приходится встрѣчаться съ вопросами, гдѣ необходимо разсматривать безконечно малыя приращенія, зависящія нетолько отъ измѣненія перемѣннаго, но также и отъ измѣненія состава самой функціи.

Возьмемъ два уравненія кривыхъ

$$y = F(x) \quad \ldots \ldots (1)$$

$$y = f(x) \quad \ldots \ldots (2)$$

отнесенныхъ къ прямоугольнымъ осямъ координатъ



Для какой либо абсцисы x_1, составимъ разность ординатъ обѣихъ кривыхъ, то найдемъ:

$$F(x_1) - f(x_1).$$

Разсматривая эту разность, легко видѣть, что перемѣнная въ ней остается таже самая и что разность происходитъ отъ измѣненія лишь состава функціи.

Подобнымъ образомъ, взявъ разность ординатъ двухъ кривыхъ для различныхъ абсцисъ, найдемъ ее таковою:

$$F(x_1) - f(x).$$

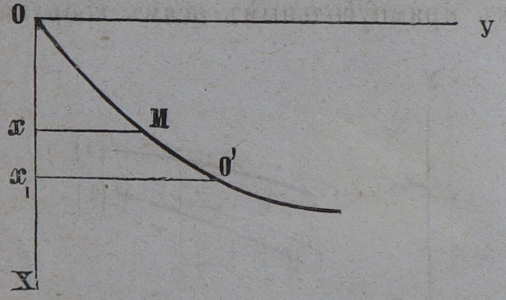
Очевидно, эта разность происходитъ, какъ отъ измѣненія перемѣнной, такъ и отъ измѣненія состава функціи.

Если подобныя разности безконечно малы, то ихъ называютъ *варіаціями* и обозначаютъ такъ $\delta f(x)$. Такимъ образомъ при помощи варіаціи можно перейдти отъ одной функціи къ другой ей смежной функціи.

Первый, встрѣтившійся съ вопросами, гдѣ необходимо было разсматривать варіаціи функцій, былъ Иванъ Бернули.

По крайней мѣрѣ, онъ первый предложилъ въ 1696 г. рѣшить задачу о брахистохронѣ, или линіи наискорѣйшаго ската. Задача эта заключается въ слѣдующемъ: даны двѣ точки о и о′, требуется найдти такую кривую, проходящую чрезъ нихъ, чтобы тяжелая матеріальная точка, двигаясь по этой кривой, проходила бы пространство отъ о до о′ въ наискорѣйшее время.

Отнесемъ эти точки къ прямоугольнымъ осямъ координатъ, взявъ начало въ точкѣ о. Тогда, положивъ, что кривая найдена, возьмемъ на ней точку, М абсциса которой x.



Скорость тяжелой матеріальной точки должна выражаться въ этотъ случаѣ такъ:

$$V = \sqrt{2gx}.$$

Но съ другой стороны скорость есть производная пройденнаго пространства по времени, слѣдовательно найдемъ:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2\,gx}$$

откуда $$dt = \frac{ds}{\sqrt{2\,gx}}.$$

Интегрируя правую часть въ предѣлахъ отъ о до x_1, dt нужно будетъ интегрировать въ предѣлахъ отъ о до Т, слѣдовательно найдемъ:

$$T = \int_0^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{2\,gx}}.$$

Такимъ образомъ, чтобы рѣшить предложенный вопросъ, необходимо найти наименьшее значенiе для Т. Но Т выражается опредѣленнымъ интеграломъ или опредѣленнымъ числомъ, поэтому кажется, съ перваго раза, невозможнымъ рѣшить этотъ вопросъ. Разысканiе наименьшей величины, по способу излагаемому въ дифференцiальномъ исчисленiи, не привело бы насъ ни къ какому результату.

Поэтому, здѣсь приходится употребить другой прiемъ, именно: найдти такую подъинтегральную функцiю, которая бы сдѣлала опредѣленный интегралъ наименьшимъ. Для чего необходимо изъ всѣхъ смежныхъ функцiй выбрать соотвѣтствующую. Но переходъ отъ одной функцiи къ другой ей смежной можетъ быть сдѣланъ при помощи варiацiи.

Есть, конечно, очень много вопросовъ, гдѣ необходимо искать наибольшее или наименьшее значенiе опредѣленныхъ интеграловъ, такъ напримѣръ:

1) Дана плоская кривая, найдти вторую кривую данной длины такого свойства, чтобы площадь, заключенная между нею и данною кривою, была бы наибольшая.

2) Между двумя данными точками провести такую кривую, чтобы поверхность, происходящая отъ вращенiя этой кривой вокругъ данной оси, была наименьшая.

3) Изъ всѣхъ кривыхъ одинаковой длины выбрать такую, которая, вращаясь около данной оси, производила бы наибольшую, или наименьшую поверхность.

4) Изъ всѣхъ кривыхъ одинаковой длины, найдти такую, которая, вращаясь около данной оси, образуетъ наибольшiй или наименьшiй объемъ.

5) Найдти такую кривую линію, которая, вращаясь около данной оси, образовала бы постоянную поверхность, содержащую наибольшій или наименьшій объемъ.

6) Опредѣлить форму твердаго однороднаго тѣла, оказывающаго наибольшее притяженіе на матеріальную точку по данному направленію.

7) Найдти форму тѣла, которое, вращаясь на оси, претерпѣвало бы наименьшее сопротивленіе.

8) Найдти такую кривую, которая имѣла бы наибольшій или наименьшій моментъ инерціи относительно данной точки.

9) Найдти наименьшее разстояніе между двумя точками въ свободномъ пространствѣ и на данной поверхности.

10) Найдти положеніе равновѣсія гибкой нерастяжимой нити, концы которой прикрѣплены къ двумъ неподвижнымъ точкамъ.

11) Найдти, какое положеніе должна занимать гибкая неростяжимая нить, чтобы центръ тяжести ея занималъ возможно низшее мѣсто.

12) Найдти поверхность, величина которой между данными предѣлами была бы возможно малая.

13) Какой видъ должна имѣть поверхность данной величины, для того, чтобъ ея центръ тяжести занималъ возможно низшее мѣсто.

14) Извѣстный объемъ однороднаго вещества ограниченъ сверху горизонтальною плоскостью, снизу кривою поверхностью данной величины, спрашивается, какой видъ должна имѣть эта поверхность, для того чтобы центръ тяжести объема занималъ возможно низшее мѣсто и т. п.

Во всѣхъ подобнаго рода вопросахъ приходится искать наибольшее или наименьшее значеніе опредѣленныхъ интеграловъ, напримѣръ такого вида:

$$\int_a^b v\,dx \text{ или } \int_a^b\int_a^b v\,dx\,dy$$

Въ первомъ случаѣ подъинтегральная функція имѣетъ одинъ изъ слѣдующихъ видовъ:

$$f(x,\ y\ y'\ y''\ y'''\ldots)$$

$$f(x,\ y\ y'\ y''\ldots\ z\ z'\ z''\ldots)$$

$$f(x,\ y\ y'\ y''\ldots\ z\ z'\ z''\ldots\ u\ u'\ u''\ldots\ )$$

гдѣ x простая перемѣнная, а y, z, u, функціи x—а; y' y''... z' z''... u' u'' послѣдовательныя производныя y z и u по x.

Во второмъ случаѣ, подъинтегральная функція имѣетъ видъ:

$$f(x\ y\ z\ z'\ z''\ z'''\ z_{,}\ z_{,,}\ z_{,,,}\ z_{,}'\ z_{,}''\ z_{,,}'\ldots)$$

или

$$f(x\ y\ z\ z'\ z''\ z_{,}\ z_{,,}\ z_{,}'\ldots\ u\ u'\ u''\ u_{,}\ u_{,,}\ u_{,}'\ldots)$$

гдѣ x и y простыя перемѣнныя, z и u функціи этихъ перемѣнныхъ, а z и u со значками производныя z и u по x и по y. При чемъ значки вверху означаютъ производныя по x, значки внизу производныя по y.

Всѣ подобнаго рода вопросы Иванъ Бернули, знаменитый его братъ Яковъ Бернули и другіе современные имъ геометры рѣшали довольно искусственными пріемами, пока наконецъ Эйлеръ въ 1744 г. не далъ общаго метода для рѣшенія подобнаго рода вопросовъ въ сочиненіи озаглавленномъ имъ «Methodus inveniendi linias curvas, maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperemetrici, lattissimo sensu accepti».

Сочиненіе оригинальное, говоритъ Лагранжъ, блестящее повсюду глубиною и плодотворностью метода, но недостаточно просто изложенное, какъ того можно было бы ожидать отъ предмета принадлежащаго чистому анализу. Поэтому, начиная съ 1755 года, Лагранжъ въ рядѣ мемуаровъ [1]) исправилъ недостатки метода Эйлера и первый ввелъ для обозначенія варіацій характеристику δ. Эйлеръ въ двухъ мемуарахъ 1866 года, помѣщенныхъ имъ въ Nouveaux Commentaires de st-Petersburg, призналъ Лагранжа изобрѣтателемъ варіаціоннаго исчисленія.

Но, во всякомъ случаѣ, всѣ считаютъ, что варіаціонное исчисленіе создано усиліями обоихъ великихъ геометровъ, Эйлера и Лагранжа.

Что касается простыхъ интеграловъ, то все это было сдѣлано Эйлеромъ и Лагранжемъ. Розысканіе варіацій частныхъ производныхъ,

[1]) Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima les minima des formules integrales indeterminés (1760—61).

Application de la méthode exposée dans le mémoire precedent à la soluton differents probbemes de dinamique (1760—61).

Sur la méthode des variations. (1766—1769).

а также варіацій двойныхъ интеграловъ представляло долгое время для геометровъ большія затрудненія, пока наконецъ Пуасонъ, въ 1816 году, нашелъ варіацію двойнаго интеграла, а также Гаусъ далъ варіацію элемента площади, а затѣмъ рѣшилъ задачу maxima двойнаго интеграла.

Нашъ геометръ Остроградскій разсужденіями очень простыми дошелъ до варіацій частныхъ производныхъ, что ему облегчило вывести варіацію кратнаго интеграла [1]). Наконецъ Сарюсъ въ своихъ изслѣдованіяхъ о варіаціонномъ исчисленіи [2]) замѣчательнымъ образомъ сблизилъ варіаціонное исчисленіе съ измѣненіемъ постоянныхъ произвольныхъ въ опредѣленныхъ интегралахъ. При этомъ онъ ввелъ обозначеніе подстановки и далъ формулу для варіацій кратнаго интеграла, хотя въ формѣ менѣе симетричной, нежели формула Остроградскаго, но болѣе удобной въ приложеніяхъ. Коши ввелъ обозначеніе двойной и тройной подстановки. Муаньо упростилъ формулы Сарюса и Коши. Лежандръ пытался дать правило различія maxima отъ minima, но едва-ли можно считать, что рѣшилъ этотъ вопросъ. Якоби далъ три теоремы для этого различія, доказанныя Гессе въ журналѣ Креля за 1859 годъ.

2. Сдѣлавъ этотъ краткій историческій обзоръ, приступимъ къ изложенію правилъ розысканія наибольшихъ и наименьшихъ значеній опредѣленныхъ интеграловъ. Съ этою цѣлью необходимо построить формулу для варіаціи опредѣленнаго интеграла. А для этого надо дать болѣе ясное, въ аналитическомъ смыслѣ, опредѣленіе варіаціи и построить нѣсколько промежуточныхъ формулъ.

Эйлеръ давалъ такое опредѣленіе варіаціи. Если F (x) функція, полученная чрезъ измѣненіе состава дѣйствій функціи f(x), то всегда, онъ говоритъ, можно положить:

$$F(x) = f(x) + t\omega(x).$$

гдѣ $\omega(x)$ какая угодно функція x, и t произвольная неизмѣримо малая величина. Величину $t\omega(x)$ Эйлеръ называлъ варіаціей.

Эйлеръ замѣтилъ также, что понятіе о варіаціи можетъ быть сближено съ понятіемъ о частныхъ дифференціалахъ и вообще съ поня-

[1]) Memoires l'academie de science de St. Petersburg. 1834 г.

[2]) Memoires des savants etrangers. T. X. 1848 г.

тіемъ о дифференціалѣ. Онъ разсуждалъ такъ: если составъ функціи $f(x)$ измѣнимъ неизмѣримо мало и получимъ въ результатѣ $F(x)$, содержащую нѣсколько произвольныхъ величинъ или параметровъ, такъ напримѣръ, если допустить $F(x)=\Phi(x,a)$, гдѣ Φ совершенно произвольная функція, подчиненная лишь тому условію, что она превращается въ $f(x)$, когда произвольный параметръ a сдѣлается равнымъ опредѣленной величинѣ, напримѣръ равной α, то это можетъ быть выражено такъ: $f(x) = \Phi(x,\alpha)$. И варіація функціи $f(x)$ будетъ:

$$\delta f = F(x) - f(x) = \Phi(x,a) - \Phi(x,\alpha)$$

Прибавимъ и отнимемъ отъ a по α и разность $a - \alpha$ назовемъ $\delta\alpha$, тогда:

$$F(x) - f(x) = \Phi(x,\alpha + \delta\alpha) - \Phi(x,\alpha).$$

Разлагая правую часть по теоремѣ Тайлора въ строку, по степенямъ приращенія $\delta\alpha$, найдемъ:

$$F(x) - f(x) = \frac{\partial\Phi(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,\delta\alpha + \frac{\partial^2\Phi(x,\alpha)}{\partial\alpha^2}\,\frac{\delta\alpha^2}{2} + \ldots$$

$\delta\alpha$ неизмѣримо—малая величина, поэтому въ разложеніи правой части можно ограничиться первымъ членомъ и сказать:

$$\delta f = F(x) - f(x) = \frac{\partial\Phi(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,\delta\alpha.$$

Такимъ образомъ, *варіація функціи по Эйлеру есть произведеніе изъ безконечно малой величины на производную произвольной функціи по тому параметру и для того его значенія, для котораго произвольная функція обращается въ данную.*

Пояснимъ это примѣромъ.

Пусть данная функція $f(x)$ равна x^2, а произвольная функція $F(x)$ пусть будетъ такого вида $x^2 - 1 + e^{(a-\alpha)\,\omega(x)}$, слѣдовательно:

$$f(x) = x^2,$$

$$F(x) = x^2 - 1 + e^{(a-\alpha)\,\omega(x)},$$

здѣсь $\omega(x)$ произвольная функція, слѣдовательно $F(x)$ можно считать такою же.

Въ этомъ примѣрѣ при a равномъ α, $F(x)$ переходитъ въ $f(x)$

$$\frac{dF}{da} = \omega(x)e^{(a-\alpha)\,\omega(x)} \quad \text{и}$$

$$\left[\frac{dF}{da}\right]_{a=\alpha} = -\,\omega(x)$$

Такимъ образомъ, варіація функціи x^2 будетъ $\omega(x)$,

Что касается функціи Ф, то можно сказать, что произвольность ея ограничена еще тѣмъ условіемъ, чтобы она была изъ рода такихъ функцій, которыя допускаютъ разложеніе ихъ по теоремѣ Тайлора.

Мы будемъ обозначать варіацію, происходящую отъ измѣненія въ составѣ дѣйствій, чрезъ $\omega(x)$ или просто ω, также согласно Остроградскому называть *усѣченной* и обозначать чрезъ $\delta_1 f$, слѣдовательно:

$$\delta_1 f = \omega$$

Коши называетъ усѣченную варіацію — *собственной*.

Если въ функціи $f(x)$ заставимъ варіировать и дѣйствія f и перемѣнную x, то найдемъ:

$$\delta f = F(z) - f(x)$$

отнимая и прибавляя $f(z)$, можно будетъ написать:

$$\delta f = F(z) - f(z) + f(z) - f(x)\ ,$$

Первые два члена представляютъ собою разность, зависящую отъ измѣненія состава дѣйствій, слѣдующіе два члена представляютъ собою разность, зависящую отъ измѣненія перемѣннаго. Слѣдовательно, 2-я разность приведетъ насъ къ дифференціалу функціи, но для общности мы ее будемъ называть дифференціальной варіацией и обозначать согласно Остроградскому чрезъ $\delta_2 f$. Такимъ образомъ, можемъ написать:

$$\delta f = \delta_1 f + \delta_2 f = \omega + \frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x \tag{1}$$

Причемъ, вмѣсто dx, въ этомъ случаѣ, мы будемъ ставить δx.

3. Если для варіированія будетъ дана функція $f(p)$, гдѣ p есть, въ свою очередь, функція x, то, расматривая сначала p простымъ перемѣннымъ, на основаніи формулы (1), найдемъ:

$$\delta f = \tilde{\omega} + \frac{\partial f}{\partial p}\,\delta p$$

Причемъ $\tilde{\omega}$ будетъ варіацией въ составѣ дѣйствій f, а δp варіація p. На основаніи той же формулы, трактуя p, какъ функцію x—са, найдемъ

$$\delta p = \omega + \frac{dp}{dx}\,\delta x$$

исключая изъ этихъ двухъ равенствъ δp найдемь:

$$\delta f = \tilde{\omega} + \frac{\partial f}{\partial p}\omega + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}\delta x$$

Предполагая затѣмъ, что составъ дѣйствій f не варіируетъ, надо будетъ положить $\tilde{\omega} = o$. Кромѣ того, замѣчая, что

$$\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}\delta x = \frac{df}{dx}\delta x$$

должны сказать, что $\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}\delta x$ есть ничто другое, какъ дифференціальная варіація функціи f(x), а потому окончательно напишемъ

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial p}\omega + \delta_2 f$$

Слѣдовательно, на основаніи формулы (I) $\frac{\partial f}{\partial p}\omega$ представляетъ собою варіацію въ составѣ дѣйствій коими p связано съ x, т. е. вар. усѣченую.

4. Если будетъ дапа функція для варіированія, зависящая отъ нѣсколькихъ функцій, напримѣръ такая:

$$f(p\ q\ r\ \ldots)$$

то можно будетъ написать для варіаціи каждой изъ этихъ функцій слѣдующія формулы:

$$\delta p = \omega + \frac{\partial p}{\partial x}\delta x$$

$$\delta q = \omega_1 + \frac{\partial q}{\partial x}\delta x \qquad (2)$$

$$\delta r = \omega_2 + \frac{\partial r}{\partial x}\delta x$$

Для варіаціи функціи, f можно будетъ написать формулу:

$$\delta f = \frac{df}{dx}\delta x + \delta_1 f$$

Причемъ $\delta_1 f$ представитъ собою сумму усѣченныхъ варіацій, происходящихъ отъ варіированія дѣйствій связывающихъ p съ x, отъ варіированія дѣйствій связывающихъ q съ x и т. д., слѣдовательно, въ данномъ случаѣ, на основаніи сказаннаго выше, напишемъ:

$$\delta_1 f = \frac{\partial f}{\partial p}\omega + \frac{\partial f}{\partial q}\omega_1 + \frac{\partial f}{\partial r}\omega_2 + \qquad (3)$$

Внося это въ предыдущую формулу и развивая $\frac{df}{dx}$, какъ слѣдуетъ, найдемъ:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}\delta x + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dx}\delta x + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{dr}{dx}\delta x$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial p}\omega + \frac{\partial f}{\partial q}\omega_1 + \frac{\partial f}{\partial r}\omega_2 + \ldots$$

а, принимая во вниманіе формулы (2), найдемъ:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial p}\delta p + \frac{\partial f}{\partial q}\delta q + \frac{\partial f}{\partial r}\delta r + \ldots \tag{4}$$

5. Примѣнимъ эту формулу къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ, положимъ напримѣръ:

$$f(p\,q\,r\ldots) = p \pm q \pm r$$

тогда $\frac{\partial f}{\partial p} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial q} = \pm 1$, $\frac{\partial f}{\partial r} = \pm 1$, слѣдовательно:

$$\delta(p \pm q \pm r) = \delta p \pm \delta q \pm \delta r$$

т. е. варіація алгебраической суммы равна алгебраической суммѣ варіацій отъ каждаго слагаемаго порознь.

6. Положимъ, что

$$f(p\,q\,r\ldots) = p \times q \times r, \text{ тогда}$$

$\frac{\partial f}{\partial p} = q \times r$, $\frac{\partial f}{\partial q} = p \times r$, $\frac{\partial f}{\partial r} = p \times q$, слѣдовательно:

$$\delta(p \times q \times r) = \delta p \times q \times r + \delta q \times p \times r + \delta r \times q \times r$$

Т. е. варіація произведенія равна варіаціи перваго множителя на всѣ остальные, плюсъ варіація второго множителя на всѣ остальные, плюсъ варіація 3-го множителя на всѣ остальные и т. д.

7. **Теорема**. *Результатъ не измѣняется отъ перестановки знаковъ варіированія и дифференцированія.*

Для варіаціи дифференціальной это само собой разумѣется, такъ какъ здѣсь и дифференцированіе и варіированіе совершается по одной и той же буквѣ и, слѣдовательно, дифференціалъ варіаціи деффиренціальной есть ни что другое, какъ второй дифференціалъ. Такимъ образомъ, высказанное предложеніе надо доказать только относительно варіаціи усѣченной. Пусть усѣченная варіація функціи y будетъ $\omega(x)$, тогда напишемъ:

$$\delta_1 y = \omega(x) \tag{5}$$

Измѣнимъ здѣсь x въ x+dx, тогда y измѣнится въ y + dy, слѣдо-
довательно:

$$\delta_1 (y + dy) = \omega (x + dx)$$

Раскладывая въ рядъ правую часть, ограничиваясь только двумя членами, а къ лѣвой части прикладывая теорему относительно варіаціи суммы, найдемъ:

$$\delta_1 \, y + \delta_1 \, dy = \omega (x) + d\omega (x)$$

вслѣдствіе уравненія 5-го изъ послѣдняго равенства имѣемъ:

$$\delta_1 \, dy = d\omega (x)$$

Или же, опять на основаніи того же уравненія (5), окончательно получаемъ:

$$\delta_1 \, dy = d\delta_1 \, y$$

И такъ, варіація отъ дифференціала функціи, или перемѣнной равна дифференціалу отъ варіаціи той-же функціи, или перемѣнной.

8. **Теорема**. *Варіація неопредѣленнаго интеграла равна интегралу отъ варіаціи подъинтегральной функціи.*

$$\text{Пусть } w = \int v dx$$

Продифференцируемъ показанное равенство, результатъ проваріируемъ и наконецъ второй результатъ проинтегрируемъ, то, послѣдовательно, получимъ:

$$dw = v dx$$

$$\delta dw = \delta (v dx)$$

или, переставляя другъ вмѣсто друга δ и d, найдемъ:

$$d\delta w = \delta (v dx)$$

откуда $$\delta w = \int \delta (v dx)$$

или

$$\delta \int v dx = \int \delta (v dx)$$

Ту же самую теорему можемъ доказать для интеграла опредѣленнаго, для чего возьмемъ формулу Лейбница:

$$\int_a^b v dx = \text{Lim} \Big[(a_1 - a) v_0 + (a_2 - a_1) v_1 + \ldots \\ \ldots\ldots + (b - a_n) v_n \Big] \qquad (6)$$

Приложивъ характиристику δ въ обоимъ частямъ, найдемъ:

$$\delta \int_a^b v dx = Lim \Big[\delta \{ (a_1 - a) v_0 \} +$$

$$+ \delta \{ (a_2 - a_1) v_1 \} + \ldots \delta \{ (b - a_n) v_n \} \Big] \quad (7)$$

Но если общее выраженіе каждаго изъ членовъ формулы (6) таково: vdx, то общее выраженіе членовъ, стоящихъ въ прямыхъ скобкахъ формулы 7, будетъ таково: $\delta (v\, d\, x)$, слѣдовательно:

$$\delta \int_a^b v dx = \int_a^b \delta (v dx)$$

9. Найдемъ варіацію функціи $v = f\,(x\, y\, y'\, y'')$ гдѣ x простая перемѣнная, y ея функція, а y' и y'' первая и вторая производная y по x.

На основаніи формулы 3-ей имѣемъ:

$$\delta v = \delta_2 v + \delta_1 v = \frac{dv}{dx} \delta x + \delta_1 v \quad (8)$$

Если варіацію въ составѣ дѣйствій связывающихъ y съ x-омъ обозначимъ чрезъ ω, то варіаціи производныхъ y по x, очевидно, выразятся производными отъ ω, а потому

$$\delta_1 v = \frac{\partial v}{\partial y} \omega + \frac{\partial v}{\partial y'} \omega' + \frac{\partial v}{\partial y''} \omega'' \quad (9)$$

10. Найдемъ варіацію функціи vdx, причемъ v имѣетъ прежнее значеніе, слѣдовательно, можно написать:

$$\delta (v\, d\, x) = \delta v\, dx + v \delta dx$$

или

$$\delta (vdx) = \delta v\, dx + v d\delta x$$

Вмѣсто δv внесемъ сюда его выраженіе изъ формулы 8-й, найдемъ:

$$\delta (vdx) = \frac{dv}{dx} \delta x\, dx + \delta_1 v\, dx + v d\delta x$$

или

$$\delta (vdx) = dv\, \delta x + v d\delta x + \delta_1 v \delta x$$

Но очевидно также, что:

$$dv \delta x + v\, d\delta x = d\,(v \delta x)$$

слѣдовательно:

$$\delta (v\delta x) = d\,(v\delta x) + \delta_1 v dx \quad (10)$$

11. Интегрируя это равенство въ обоихъ частяхъ, получимъ:

$$\int \delta\,(\mathrm{v d x}) = \mathrm{v}\delta\mathrm{x} + \int \delta_1\,\mathrm{v}\,\mathrm{dx}$$

или

$$\delta \int (\mathrm{v dx}) = \mathrm{v}\delta\mathrm{x} + \int \delta_1\,\mathrm{vdx} \tag{11}$$

Эту послѣднюю формулу для варіаціи неопредѣленнаго интеграла не оставляютъ въ такомъ видѣ, а преобразовываютъ, относя преобразованіе ко второму члену. На основаніи формулы (9) этотъ второй членъ имѣетъ видъ такой:

$$\int \delta_1 \mathrm{vdx} = \int \left\{\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}\,\omega + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}'}\,\omega' + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}''}\,\omega''\right\} \mathrm{dx}$$

Разбивая интегралъ правой части на сумму интеграловъ и прикладывая къ третьему и второму члену формулу интегрированія по частямъ, найдемъ:

$$\int \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}''}\,\omega''\,\mathrm{dx} = \int \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}''}\,\mathrm{d}\omega' = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}''}\,\omega' - \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}''}\right)\omega'\,\mathrm{d\,x}$$

или

$$\int \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}''}\,\omega''\mathrm{d\,x} = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}''}\,\omega' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}''}\right)\omega + \int \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}''}\right)\omega\,\mathrm{d\,x}$$

точно также

$$\int \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}'}\,\omega'\,\mathrm{d\,x} = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}'}\,\omega - \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}'}\right)\omega\,\mathrm{d\,x}$$

Принимая это во вниманіе, формула (11) перейдетъ въ такую:

$$\int \mathrm{vdx} = \mathrm{v}\delta\mathrm{x} + \left\{\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}''}\right)\right\}\omega + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}''}\,\omega' +$$

$$\int \left\{\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}'}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}''}\right)\right\}\omega\mathrm{dx} \tag{12}$$

Это и есть формула для варіаціи простаго неопредѣленнаго интеграла.

12. Если бы функція v заключала не двѣ производныхъ y по x, а n, то, очевидно, прикладывая тотъ же самый пріемъ, нашли бы:

$$\delta \int \mathrm{vdx} =$$

$$\mathrm{v}\delta\mathrm{x} + \left\{\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}''}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}'''}\right) - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{dx}^{n-1}}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}^n}\right)\right\}\omega +$$

$$\left\{\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}''} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}'''}\right) + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{dx}^{n-2}}\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}^n}\right)\right\}\omega' + \ldots\,.$$

$$+\frac{dv}{dy^{n}}\,\omega^{(n-1)}+$$

$$\int\left\{\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial v}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dv}{dy''}\right)+\dots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{dv}{dy^n}\right)\right\}\omega dx$$

Обозначая для краткости:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y'}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial v}{\partial y''}\right)&=A\\ \frac{dv}{dy''}&=B\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial v}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y''}\right)=K\qquad(14)$$

формула (12) напишется такъ:

$$\delta\int v dx=v\delta x+A\omega+B\omega'+\int K\,\omega\,d\,x\qquad(15)$$

13. Если бы функція v зависила отъ перемѣннаго независимаго трехъ функцій зависящихъ отъ этого перемѣннаго и двухъ производныхъ каждой функціи по перемѣнному независимому т. е. если бы

$$v=f\;(s,\;x\;x'\;x''\;y\;y'\;y''\;z\;z'\;z''),$$

то варіація неопредѣленнаго интеграла $\int vdx$ была бы найдена точно такимъ же образомъ, и формула для нея была-бы такова:

$$\begin{aligned}\delta\int vds=v\delta s+A'\omega+B'\omega'+\int K'\omega ds\\ +A'_1\omega_1+B'_1\omega'_1+\int K'_1\omega_1 ds\qquad(16)\\ +A'_2\omega_2+B'_2\omega_2'+\int K_2'\omega_2 ds\end{aligned}$$

Причемъ ω была бы усѣченной варіаціей x, ω_1—усѣченной варіаціей y и ω_2 усѣченной варіаціей z. A', B', K', A'_1 B_1 K'_1 A'_2 B'_2 K'_2 имѣли бы такой же видъ, какъ (13) и (14), причемъ необходимо было бы x замѣнить s-омъ, а y замѣнять попеременно x-мъ, y-омъ и z-мъ.

14. Если отъ неопредѣленныхъ интеграловъ перейдемъ къ опредѣленнымъ, то изъ формулъ 15 и 16 найдемъ:

$$\delta\int_a^b vdx=v_b\,\delta b-v_a\,\delta a+A_b\,\omega_b-A_a\,\omega_a+B_b\,\omega'_b-B_a\,\omega'_a+\int_a^b K\,\omega\,dx\qquad(17)$$

$$\left.\begin{aligned}\delta\int_a^b vds = v_b\,\delta b - v_a\,\delta a + A'_b\,\omega_b - A'_a\,\omega_a + B'_b\,\omega'_b - B'_a\,\omega'_a + \int_a^b K'\omega\, ds \\ + A'_{1_b}\,\omega_{1_b} - A'_{1_a}\omega_{1_a} + B'_{1_b}\,\omega'_{1_b} - B'_{1_a}\,\omega'_{1_a} + \int_a^b K'_1\omega_1\, ds \\ + A'_{2_b}\,\omega'_{2_b} - A'_{2_a}\omega'_{2_a} + B'_{2_b}\,\omega'_{2_b} - B'_{2_a}\omega'_{2_a} + \int_a^b K'_2\omega_2\, ds\end{aligned}\right\}(18)$$

Гдѣ v_b, v_a, A_b A_a ω_b $\dot{\omega}_a$... и т. д суть значенія v, A, ω, когдавомѣст простой перемѣнной внесемъ значеніе b или a.

Разысканіе наибольшихъ и наименьшихъ значеній опредѣленныхъ интеграловъ.

15. Мы имѣли выше слѣдующую формулу:

$$F(x) - f(x) = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\delta a + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}\frac{\delta\alpha^2}{2} + \frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha^3}\frac{\delta\alpha^3}{6} + \dots$$

Причемъ $\frac{\partial\Phi}{\partial a}\delta\alpha = \delta f\,(x)$ т. е. варіаціи перваго порядка, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}\delta\alpha^2$ представляетъ собою, слѣдовательно, варіацію втораго порядка, которую будемъ обозначать $\delta^2 f\,(x)$; $\frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha^3}\delta\alpha^3$ варіацію третьяго порядка и т. д. поэтому, написанная выше формула можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

$$F(x) - f(x) = \delta f(x) + \frac{\delta^2 f(x)}{2} + \frac{\delta^3 f(x)}{6} \qquad (19)$$

Если отъ варіированія функція увеличивается, то мы должны сказать, что F(x) больше f(x), а въ этомъ случаѣ лѣвая часть должна быть положительною, слѣдовательно такою же должпа быть и правая часть. Но знакъ правой части, какъ суммы безконечно малыхъ членновъ, зависитъ отъ знака перваго члена, а потому мы должны сказать, что если отъ варіированія функція увеличивается, то первая варіація должна быть положительною т. е.

$$\delta f > o$$

Точно такими же разсужденіями выведемъ, что, если отъ варіированія функція уменьшается, то первая варіація должна быть отрицательной т, е.

$$\delta f < o$$

Если функція, при варіированіи, увеличивалась, затѣмъ вдругъ начала уменьшаться, то слѣдовательно, она перешла чрезъ наибольшее состояніе; до перехода чрезъ это состояніе, на основаніи вышесказаннаго, первая варіація была положительной, а послѣ перехода функціи чрезъ наибольшее состояніе первая варіація была отрицательной. Слѣдовательно, въ моментъ перехода функціи чрезъ наибольшее состояніе, первая варіація функціи переходитъ изъ положительной въ отрицательную т. е. переходитъ чрезъ нуль.

И такъ, для того чтобы функція имѣла наибольшее состояніе, первая ея варіація должна обращаться въ нуль т. е.

$$\delta f = o$$

Точно такими же разсужденіями нашли бы, что для наименьшаго состоянія функціи первая ея варіація должна также обращаться въ нуль.

Слѣдовательно, если состояніе функціи f(x) есть наибольшее или наименьшее, то можемъ написать предъидущую (19) формулу такъ:

$$F(x) - f(x) = \frac{\delta^2 f}{2} + \frac{\delta^3 f}{6} +$$

Если f(x) есть наибольшее состояніе функціи, то лѣвая часть должна быть отрицательной, а, слѣдовательно, вторая варіація должна быть отрицательной т. е.

$$\delta^2 f < o$$

Если f(x) есть наименьшее состояніе функціи, то лѣвая часть должна быть положительною, а, слѣдовательно, 2-ая варіація должна быть положительною т. е.

$$\delta^2 f > o$$

Въ приложеніяхъ рѣдко приходится обращаться ко второй варіаціи, такъ какъ въ большинствѣ вопросовъ приходится разыскивать или однѣ наибольшія состоянія функціи, или однѣ наименьшія состоянія.

Итакъ, чтобы найдти наибольшее или наименьшее значеніе опредѣленнаго интеграла, необходимо приравнять первую его варіацію нулю. Такимъ образомъ, на основаніи формулы 17-ой, имѣемъ:

$$v_b\,\delta b - v_a\,\delta a + A_b\,\omega_b - A_a\,\omega_a + B_b\,\omega'_b - B_a\,\omega'_a + \int K\omega dx = o \quad (20')$$

Такъ какъ подъ интеграломъ $\int K\omega dx$ находится произвольная функція ω, то интегралъ этотъ не можетъ быть найденъ и, слѣдовательно, для того, чтобы удовлетворить написанному условію, необходимо приравнять, какъ внѣинтегральную часть, такъ и самый интегралъ отдѣльно нулю. Но исчезаніе интеграла, вслѣдствіе произвольности функціи ω можетъ совершаться лишь на счетъ множителя K, а потому, вмѣсто написаннаго уравненія, имѣемъ два слѣдующихъ:

$$v_b\,\delta b - v_a\,\delta a + A_b\,\omega_b - A_a\,\omega_a + B_b\,\omega'_b - B_a\,\omega'_a = o \quad (20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial v}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y''}\right) = o \quad (21)$$

Это же самое можно доказать еще слѣдующими разсужденіями: такъ какъ ω величина произвольная, то всегда можно выбрать ее такою, что лѣвая часть уравненія (20′) будетъ отлична отъ нуля, а потому, чтобы выполнялось изчезаніе 1-ой варіаціи, необходимо должны существовать условія 20 и 21.

Уравненіе (21) есть дифференціальное уравненіе въ общемъ случаѣ четвертаго порядка, слѣдовательно интегралъ его будетъ вида:

$$y = \varphi\,(x,\ c_1\ c_2\ c_3\ c_4) \quad (22)$$

Постоянныя произвольныя здѣсь опредѣлятся изъ особыхъ условій. Такъ если a и b числа опредѣленныя, а значеніе y и его производной для предѣловъ даны въ числахъ, то варіаціи ихъ будутъ нули, кромѣ того δb и δa будутъ также нули, слѣдовательно (20) сведется на тожество $o = o$.

Вслѣдствіе же того, что даны предѣльныя значенія y и его производной, на основаніи (22), будемъ имѣть такихъ четыре уравненія

$$\begin{aligned} y_b &= \varphi\,(b,\ c_1\ c_2\ c_3\ c_4). \\ y'_b &= \varphi'\,(b,\ c_1\ c_2\ c_3\ c_4). \\ y_a &= \varphi\,(a,\ c_1\ c_2\ c_3\ c_4). \\ y'_a &= \varphi'\,(a,\ c_1\ c_2\ c_3\ c_4). \end{aligned} \quad (23).$$

Присоединяя къ этимъ четыремъ уравненіямъ и (22), получимъ такимъ образомъ пять уравненій, изъ которыхъ четыре постоянныхъ произвольныхъ вполнѣ будутъ опредѣлены.

Если a и b числа опредѣленныя, а предѣльныхъ значеній для y и его производной не дано, то ω_b ω_a ω'_b и ω'_a будутъ величины произвольныя, δb и δa будутъ нулями, и, въ этомъ случаѣ, чтобы удовлетворить (20), необходимо будетъ коефиціенты при неопредѣленныхъ множителяхъ положить равными нулю, что доставитъ:

$$A_b = o; \qquad A_a = o$$
$$B_b = o; \qquad B_a = o \tag{24}$$

четыре уравненія, которыя вмѣстѣ съ уравненіемъ (22), послужатъ къ опредѣленію четырехъ постоянныхъ произвольныхъ.

Если, наконецъ, одинъ изъ предѣловъ a или b число неопредѣленное, тогда или δb или δa останется также произвольнымъ и, слѣдовательно, къ четыремъ равенствамъ (23) или (24) присоединяется еще одно изъ слѣдующихъ уравненій:

$$v_b = o \text{ или: } v_a = o.$$

Присоединяя къ пяти полученнымъ такимъ образомъ уравненіямъ еще 22-ое найдемъ, какъ четыре постоянныя произвольныя c_1 c_2 c_3 c_4, такъ и одинъ изъ предѣловъ.

16. Окончимъ теперь задачу о брахистахронѣ. Намъ надо было найдти наименьшее значеніе интеграла:

$$T = \int_o^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{2gx}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_o^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{x}}$$

Преобразуемъ подъинтегральную функцію:

$$\frac{ds}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{x}} = \frac{dx\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{x}}$$

Такимъ образомъ подъинтегральная функція будетъ имѣть видъ:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{x}}$$

Какъ видно, она не зависитъ ни отъ y'' ни отъ y'', поэтому производныя v по y и y'' равны нулю, вслѣдствіе чего уравненіе (21) обращается въ такое:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial v}{\partial y'}\right)=o$$

Интегрируя его находимъ:

$$\frac{\partial v}{\partial y'}=c$$

гдѣ c постоянная произвольная. Составивъ самымъ дѣломъ производную v по y', послѣднее равенство приведемъ къ такому:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\ \sqrt{x}}=c$$

Для однородности формулы допустимъ $c=\frac{1}{\sqrt{a}}$, тогда,

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\sqrt{\frac{x}{a}}$$

разрѣшая это послѣднее уравненіе относительно y', найдемъ:

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

Но это есть дефференціальное уравненіе циклоиды. Къ интегралу можно придти рядомъ такихъ преобразованій:

$$y=\int\sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx=\int\frac{xdx}{\sqrt{x\,(a-x)}}=-\,{}^1/_2\int\frac{(a-2x)\,dx-adx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

$$y=-\,{}^1/_2\int\frac{(a-2x)dx}{\sqrt{ax-x^2}}+\frac{a}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}=-\sqrt{ax-x^2}-\frac{a}{2}\int\frac{d\left(-\frac{2x}{a}\right)}{\sqrt{\frac{4ax-x^2}{a^2}}}$$

$$y=-\sqrt{ax-x^2}-\frac{a}{2}\int\frac{d\left(\frac{a-2x}{a}\right)}{\sqrt{\frac{a^2-(a^2-4ax+x^2)}{a^2}}}=-\sqrt{ax-x^2}=-\frac{a}{2}\int\frac{d\left(\frac{a-2x}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{a-2x}{a}\right)^2}}$$

$$y=\frac{a}{2}\ \mathrm{arcos}\left(\frac{a-2x}{a}\right)-\sqrt{ax-x^2} \qquad (25)$$

Тоже самое можно было получить и другимъ путемъ: положивъ

$$x=\frac{a}{2}\left(1-\cos\varphi\right)\ , \qquad (25')$$

гдѣ φ нѣкоторый вводный уголъ, дифференцируя это равенство и внося въ уравненіе

$$dy = \sqrt{\frac{x}{a-x}}\, dx,$$

найдемъ:

$$y = \frac{a}{2}\left(u - \operatorname{sn} \varphi\right)$$

Исключая же изъ этого уравненія и (25') величину φ, дойдемъ до уравненія (25).

Такимъ образомъ брахистахронѣ можетъ удовлетворить циклоида.

Объ относительныхъ наибольшихъ и наименьшихъ состояніяхъ опредѣленныхъ интеграловъ.

17. Данъ интегралъ:

$$\int_a^b v_1\, ds, \text{ гдѣ } v_1 = f\,(s\; x\; x'\; x'' \ldots y\; y'\; y'' \ldots z\; z'\; z'')$$

и требуется найдти x, y, z функціи x, которыя сдѣлали бы опредѣленный интегралъ

$$\int_a^b v_1\, dx \tag{26}$$

наибольшимъ или наименьшимъ, причемъ эти функціи должны, кромѣ того, удовлетворять одному или нѣсколькимъ уравненіямъ:

$$u = o \quad ; \quad u_1 = o \tag{27}$$

Чтобы рѣшеніе этого вопроса привести къ розысканію наибольшаго или наименьшаго состоянія нѣкотораго опредѣленнаго интеграла, умножимъ уравненія (2) на αds, $\alpha_1 ds$, гдѣ α и α_1 неопредѣленныя функціи s—a, такія что лѣвыя части уравненій

$$\alpha\, u\, ds = o \quad \alpha_1\, u_1\, ds = o$$

дѣлаются нѣкоторыми полными дифференціалами.

Вслѣдствіе чего можно будетъ написать:

$$\int \alpha\; u ds = c$$

$$\int \alpha_1\, u_1\, ds = c_1$$

c и c_1 постоянныя произвольныя. Варіируя въ обѣихъ частяхъ написанныя равенства, найдемъ:

$$\delta \int \alpha u \, ds = o$$

$$\delta \int \alpha_1 u_1 \, ds = o$$

и слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} \delta \int_a^b \alpha_1 u \, ds = o \\ \delta \int_a^b \alpha_1 u_1 \, ds = o \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Такъ какъ данный интегралъ (26) долженъ быть наибольшимъ, или наименьшимъ, то варіація его должна быть равна нулю т. е.

$$\delta \int_a^b v_1 \, ds = o$$

Складывая это уравненіе съ (28), найдемъ:

$$\delta \int_a^b \left\{ v_1 + \alpha u + \alpha_1 u_1 \right\} ds = o$$

Такъ какъ это уравненіе существуетъ совмѣстно съ 27 и 26, то тѣ функціи x, y u z, которыя сдѣлаютъ его наибольшимъ или наименьшимъ, сдѣлаютъ таковымъ же интегралъ $\int_a^b v_1 dx$ и удовлетворятъ уравненіямъ (27).

Для того же, чтобы

$$\delta \int_a^b \left\{ v_1 + \alpha u + \alpha_1 u_1 \right) ds$$

исчезала, на основаніи уравненія 18 и разсужденій какія мы употребляли выше, необходимо чтобы имѣли мѣсто слѣдующія условія:

$$K' = o \;, \; K'_1 = o \; K'_2 = o \qquad (29)$$

18. Приложимъ это къ примѣру.

Найдти кратчайшее разстояніе между двумя точками лежащими на поверхности данной уравненіемъ u=o.

Такъ какъ элементъ дуги поверхности выражается формулой

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad , \quad \text{откуда}$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \text{ или}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 = o$$

слѣдовательно можно сказать: чтобы рѣшить предложенную задачу, нужно найдти наименьшее состояніе интеграла

$$\int_{s_0}^{s_1} ds$$

При чемъ x, y и z должны удовлетворять двумъ уравненіямъ

$$u = 0 \quad \text{и} \qquad (30)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 = 0$$

Или необходимо и достаточно найти условія наименьшаго состоянія интеграла

$$\int \left\{ 1 + \alpha u + \alpha_1 \left(x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 \right) \right\} ds$$

Обратимся съ этою цѣлью къ уравненіямъ (29) и напишемъ ихъ какъ слѣдуетъ:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial v}{\partial x'}\right) + \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x''}\right) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial v}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y''}\right) = 0 \qquad (31)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial v}{\partial z'}\right) + \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{\partial v}{\partial z''}\right) = 0$$

Подъинтегральная функція v въ нашемъ случаѣ такова:

$$v = 1 + \alpha u + \alpha_1 \left(x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 \right)$$

Какъ видно, она не зависитъ отъ x'', y'' z'', слѣдовательно $\frac{\partial v}{\partial x''}$ $\frac{\partial v}{\partial y''}$ и $\frac{\partial v}{\partial z''}$ суть нули и потому, чтобы составить уравненія (29), для нашего случая необходимо найти производныя v по x, y, z, x', y', z; онѣ будутъ таковы:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial v}{\partial x'} = 2\,\alpha_1\, x'$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \alpha \frac{\partial u}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial v}{\partial y'} = 2\,\alpha_1\, y'$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \alpha \frac{\partial u}{\partial z} \; ; \; \frac{\partial v}{\partial z'} = 2\,\alpha_1\, z'$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial v}{\partial x'}\right) = 2\,\frac{d\alpha_1}{ds}\, x' + 2\,\alpha_1\, x''$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial v}{\partial y'}\right) = 2\,\frac{d\alpha_1}{ds}\, y' + 2\,\alpha_1\, y''$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial v}{\partial z'}\right) = 2\,\frac{d\alpha_1}{ds}\, z' + 2\,\alpha_1\, z''$$

Слѣдовательно уравненія (31) напишутся въ такой формѣ:

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial \alpha}{\partial s} x' - 2 \alpha_1 x'' = 0$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial \alpha}{\partial s} y' - 2 \alpha_1 y'' = 0 \qquad (32)$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial z} - 2 \frac{\partial \alpha}{\partial s} z' - 2 \alpha_1 z'' = 0$$

Умножая первое на x', второе на y', третье на z', складывая результаты умноженія и принимая во вниманіе (30) и ихъ производныя, найдемъ:

$$2 \frac{\partial \alpha}{\partial s} = 0, \text{ откуда}$$

$$2 \alpha_1 = \text{const}$$

а вслѣдствіе этихъ двухъ равенствъ уравненія (32) переходятъ въ такія:

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} - cx'' = 0$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial y} - cy'' = 0$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial z} - cz'' = 0$$

Откуда, послѣ исключенія α и c, найдемъ:

$$\frac{x''}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{y''}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{z''}{\frac{\partial u}{\partial z}} \qquad (33)$$

Это уравненіе представляетъ собою въ общемъ видѣ уравненіе кривой кратчайшаго разстоянія на поверхности. Кривыя кратчайшаго разстоянія на поверхности называются *геодезическими линіями*.

Знаменатели въ уравненіи (33) суть величины пропорціональныя косинусамъ угловъ составляемыхъ съ осями координитъ, числители же пропорціональны косинусамъ угловъ составленныхъ радіусомъ кривизны съ тѣми же осями координатъ кривой.

Отсюда вытекаетъ свойство геодезической линіи: *нормаль къ поверхности и радіусъ кривизны геодезической линіи въ той же точкѣ направлены по одной прямой.*

Уравненіе геодезической линіи начерченной на элипсоидѣ, полуоси котораго a, b, c получится если по уравненію элипсоида

$$u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$