...Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

# НАХОЖДЕНІЕ
# ТОЧЕКЪ КАСАНІЯ ПЛОСКОСТЕЙ
# КЪ
# ЛИНЕЙЧАТЫМЪ ПОВЕРХНОСТЯМЪ.

(РАЗВИТІЕ ТЕОРЕМЫ CHASLES'а).

СОСТАВИЛЪ
Антонъ Ярковскій.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9.
1900.

Изданіе Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.



# НАХОЖДЕНІЕ
# ТОЧЕКЪ КАСАНІЯ ПЛОСКОСТЕЙ
## КЪ
# ЛИНЕЙЧАТЫМЪ ПОВЕРХНОСТЯМЪ.

(РАЗВИТІЕ ТЕОРЕМЫ CHASLES'а).



СОСТАВИЛЪ
Антонъ Ярковскій.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9.
1900.

# Нахожденіе точекъ касанія плоскостей къ линейчатымъ поверхностямъ.

**(Развитіе теоремы Chasles'a.)**

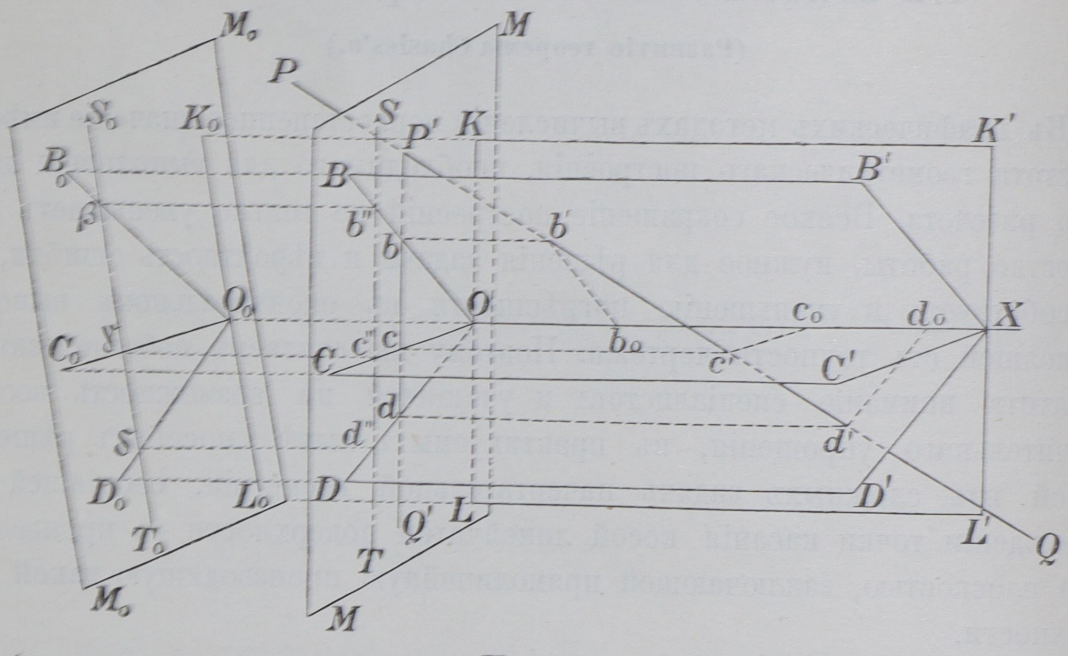
Въ графическихъ методахъ вычисленій первостепенное значеніе имѣетъ простота геометрическаго построенія, необходимаго для выполненія даннаго разсчета. Всякое сокращеніе построеній не только уменьшаетъ количество работы, нужное для рѣшенія задачи и вѣроятность ошибки, но способствуетъ и уменьшенію погрѣшности въ окончательномъ выводѣ, зависящей отъ точности чертежа. Поэтому мы считаемъ небезполезнымъ обратить вниманіе спеціалистовъ и учащихся на возможность весьма значительнаго упрощенія, въ практикуемыхъ нынѣ способахъ рѣшенія одной изъ сложныхъ задачъ начертательной геометріи, состоящей въ нахожденіи точки касанія косой линейчатой поверхности съ произвольною плоскостью, заключающей прямолинейную производящую такой поверхности.

Линейчатыми называются поверхности, описываемыя непрерывнымъ перемѣщеніемъ прямой линіи, подчиняющейся во время перемѣщенія нѣкоторому закону, при чемъ разныя положенія этой прямой называются производящими. Если законъ таковъ, что двѣ безконечно близкихъ производящихъ не пересѣкаются и взаимно не параллельны, то поверхность принимаетъ названіе косой и ее можно представить себѣ въ видѣ непрерывнаго ряда косыхъ элементовъ, заключающихся между каждыми двумя безконечно близкими производящими, не могущими быть заключенными въ одну плоскость. Плоскость, заключающая одну изъ двухъ безконечно близкихъ производящихъ, можетъ пересѣчь вторую производящую въ одной только точкѣ. Точка на первой производящей ближайшая къ этому мѣсту пересѣченія и будетъ тою, гдѣ данный косой элементъ наиболѣе приближается въ поперечномъ направленіи къ совпаденію съ заданной плоскостью; точка эта и есть точка касанія данной плоскости къ линейчатой поверхности.

Для нахожденія такъ опредѣленной точки касанія, наиболѣе общимъ способомъ слѣдуетъ считать примѣненіе теоремы Chasles'a, впервые указанное въ русской литературѣ въ капитальномъ руководствѣ къ начертательной геометріи профессора В. И. Курдюмова *).

Теорему эту мы изложимъ слѣдующимъ образомъ.

Пусть намъ даны въ пространствѣ двѣ не пересѣкающихся и не параллельныхъ прямыхъ $OX$ и $PQ$ (черт. 1). Проводимъ плоскость $MM$ нормальную къ прямой $OX$; черезъ линію $OX$ проведемъ четыре плоскости, изъ коихъ плоскость $KK'L'L$—параллельна прямой $PQ$, (назовемъ ее плоскостью ассимптотической прямыхъ $OX$ и $PQ$), а три остальныхъ—$XOBB'$, $XOCC'$ и $XODD'$—направлены произвольно; линіи $KL$, $OB$, $OC$




Черт. 1.

и $OD$ представляютъ собою пересѣченія всѣхъ четырехъ плоскостей съ плоскостью $MM$. Линія $Q'P'$ представляетъ прямоугольную проекцію прямой $PQ$ на плоскости $MM$, и какъ таковая, должна быть параллельна $KL$. Назовемъ точки пересѣченія линіи $P'Q'$ съ линіями $OB$, $OC$ и $OD$ послѣдовательно буквами $b$, $c$ и $\partial$, точки пересѣченія перпендикуляровъ, возставленныхъ въ этихъ точкахъ къ плоскости $MM$, съ линіей $PQ$, обозначенныя буквами $b'$, $c'$ и $\partial'$, укажутъ мѣста пересѣченія линіи $PQ$ съ плоскостями $XOBB'$, $XOCC'$ и $XODD'$. Основанія же перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ $b'$, $c'$ и $\partial'$ на линію $OX$, обозначенныя буквами $b_0$, $c_0$ и $\partial_0$ укажутъ мѣста на линіи $OX$, ближайшія къ означеннымъ пересѣченіямъ вспомогательныхъ плоскостей съ линіей $PQ$.

Вслѣдствіе взаимной параллельности перпендикуляровъ $b'b$, $c'c$ и $\partial'\partial$,

---

*) В. И. Курдюмовъ. Курсъ начертательной геометріи; проекціи ортогональныя, ч. II 1897 г. По любезно данному намъ Профессоромъ объясненію, этотъ способъ въ иностранной литературѣ приведенъ у Jules Pillet. Traité de géométrie descriptive. Paris et Leipzig. 1897.

разсѣкающихъ стороны треугольника $QP'Q'$, должны имѣть мѣсто равенства

$$\frac{bb'-cc'}{bc}=\frac{cc'-\partial\partial'}{c\partial}=\frac{bb'-\partial\partial'}{b\partial}$$

но изъ чертежа ясно, что $bb'=Ob_0$, $cc'=Oc_0$ и $\partial\partial'=O\partial_0$; слѣдовательно:

$$\frac{b_0\,c_0}{bc}=\frac{c_0\,\partial_0}{c\partial}=\frac{b_0\,\partial_0}{b\partial}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Если пучокъ линій $OB$, $OC$ и $OD$ пересѣчемъ другой линіей параллельной ассимптотической плоскости, напримѣръ $ST$ (точки пересѣченія которой съ линіями пучка обозначимъ черезъ $b''$, $c''$ и $\partial''$), то вслѣдствіе параллельности прямыхъ $P'Q'$ и $ST$, очевидно:

$$\frac{b''\,c''}{b\,c}=\frac{c''\partial''}{c\,\partial}=\frac{b''\partial''}{b\,\partial}$$

и слѣдовательно, изъ равенства (1) имѣемъ:

$$\frac{b''\,c''}{b_0\,c_0}=\frac{c''\partial''}{c_0\,\partial_0}=\frac{b''\partial''}{b_0\partial_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Если взятыя двѣ не пересѣкающіяся и не параллельныя линіи $OX$ и $PQ$ разсматривать, какъ пару безконечно близкихъ производящихъ косой линейчатой поверхности, то (согласно приведенному выше опредѣленію точки касанія между такою поверхностью и плоскостью, заключающей одну изъ ея производящихъ), точка $b_0$—есть точка касанія плоскости $XOBB'$ къ линейчатой поверхности, элементъ которой опредѣляется направленіемъ двухъ прямыхъ $OX$ и $PQ$; равнымъ образомъ: $c_0$—точка касанія къ той-же поверхности плоскости $XOCC'$ и $\partial_0$— точка касанія плоскости $XODD'$.

За симъ, равенство (2) можетъ быть прочитано такъ: *взаимныя разстоянія между точками касанія къ линейчатой поверхности плоскостей, заключающихъ одну изъ ея производящихъ, пропорціональны отрѣзкамъ, отсѣкаемымъ этими плоскостями на произвольной линіи, проведенной въ плоскости нормальной къ той-же производящей параллельно ассимптотической плоскости.*

Собственно говоря, по крайней мѣрѣ въ извѣстныхъ намъ источникахъ, теорема Chasles'а излагается иначе, а именно: въ доказательство вводится еще понятіе о точкѣ кратчайшаго разстоянія линіи $OX$ отъ линіи $PQ$, которая называется центральною точкою и о плоскости, проведенной черезъ линію $OX$ перпендикулярно къ ассимптотической, которая называется центральною плоскостью, и теорема гласитъ, что разстоянія точекъ касанія косой линейчатой поверхности съ плоскостями, заключающими одну изъ ея производящихъ, отъ центральной точки пропорціональны тангенсамъ угловъ, образуемыхъ этими плоскостями съ центральною плоскостью.

Мы сочли нужнымъ это послѣднее изложеніе теоремы замѣнить вышеприведенною самостоятельною формулировкою, такъ какъ послѣдняя гораздо проще съ точки зрѣнія геометрической и, какъ будетъ видно изъ послѣдующаго, прямо приводитъ къ тому обобщенію, которое составляетъ предметъ настоящей статьи.

Изъ теоремы слѣдуетъ:

1) Если дано направленіе трехъ плоскостей, заключающихъ одну производящую линейчатой поверхности и взаимныя разстоянія между точками касанія этихъ плоскостей къ поверхности, то помощью этихъ данныхъ можно найти направленіе линій параллельныхъ ассимптотической плоскости, заключающей ту же производящую, а слѣдовательно и саму эту плоскость.

Дѣйствительно: пусть чертежъ 2-й представляетъ плоскость $MM$ нормальную къ производящей, а три взаимно пересѣкающіяся въ точкѣ $O$ линіи $BB'$, $CC'$ и $DD'$—пересѣченія съ этой плоскостью трехъ плоскостей заключающихъ ту же производящую, при чемъ разстояніе между точками касанія плоскостей $BB'$ и $CC'$ равно данному отрѣзку $a$, разстояніе между точками касанія плоскостей $CC'$ и $DD'$ = отрѣзку $b$ и разстояніе между точками касанія плоскостей $BB$ и $DD = a+b$. Помощью показаннаго на чертежѣ построенія (линія $\alpha\gamma$ проведена параллельно $DD'$) находимъ такую прямую $\beta\delta$, отрѣзки которой $\beta\gamma$ и $\gamma\delta$ между линіями $BB'$, $CC'$ и $DD'$ удовлетворяли-бы условію:

$$\frac{\beta\gamma}{a} = \frac{\gamma\delta}{b} = \frac{\beta\delta}{a+b}$$

Нетрудно убѣдиться, что для даннаго направленія прямыхъ пересѣкающихся въ точкѣ $O$ и для даннаго отношенія между отрѣзками $a$ и $b$, этому условію *могутъ* удовлетворить *только* линіи параллельныя найденной прямой $\beta\delta$, а такъ какъ, въ силу приведенной теоремы, тому же уравненію *должны* удовлетворять линіи, лежащія въ плоскости $MM$ и параллельныя ассимптотической плоскости, то слѣдовательно и линія $\beta\delta$ параллельна послѣдней.

Проведя чрезъ точку $O$ линію $KL$ параллельную $\beta\delta$, получаемъ пересѣченіе ассимптотической плоскости съ плоск. $MM$.

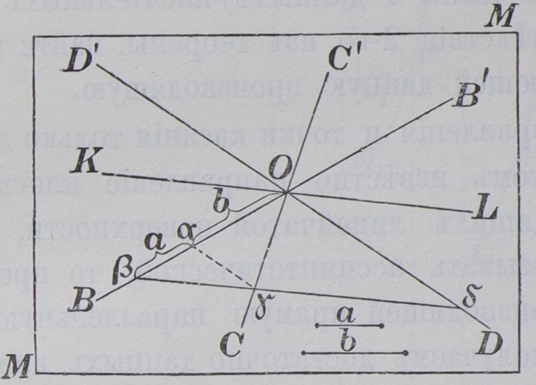
2) Если даны направленіе ассимптотической плоскости, заключающей данную производящую линейчатой поверхности, направленіе двухъ плоскостей, заключающихъ ту же производящую и точки касанія этихъ послѣднихъ плоскостей, то можемъ найти точку касанія любой плоскости даннаго направленія, заключающей производящую; дѣйствительно:

Пусть на черт. 1 прямая $ST$ представляетъ линію параллельную ассимптотической плоскости, точки $b''$ и $c''$ — мѣста пересѣченія съ этой линіей двухъ плоскостей $XOBB'$ и $XOCC'$, точки касанія которыхъ — $b_0$ и $c_0$ даны и точка $\partial''$ — мѣсто пересѣченія съ линіей $ST$ третьей данной плоскости $XODD'$, положеніе точки касанія которой неизвѣстно.

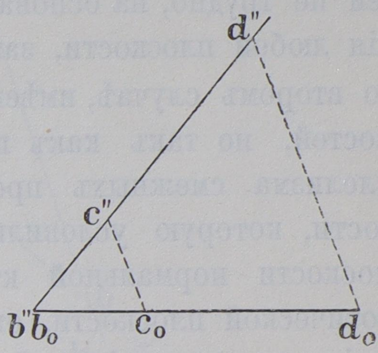
Помощью простѣйшаго геометрическаго построенія, показаннаго на чертежѣ 3, находимъ такую точку $\partial_0$ разстоянія которой отъ точекъ $b_0$ и $c_0$, удовлетворяли-бы условіямъ:

$$\frac{b''c''}{b_0c_0} = \frac{c''\partial''}{c_0\partial_0} = \frac{b''\partial''}{b_0\partial_0}$$

но условіямъ этимъ можетъ удовлетворить *только одна* точка, а изъ теоремы извѣстно, что этимъ-же условіямъ *должна* удовлетворять




Черт. 2.




Черт. 3.

точка касанія третьей плоскости; слѣдовательно, найденныя разстоянія $b_0\ \partial_0$ и $c_0\ \partial_0$ опредѣлятъ на производящей $OX$ положеніе точки касанія плоскости $XODD'$.

Еслибы вмѣсто плоскости $XODD'$ была взята другая какая либо плоскость, заключающая $OX$ и пересѣкающая $ST$ въ промежуткѣ между точками $b''$ и $c''$, то очевидно и точка касанія этой плоскости оказалась бы между точками $b_0$ и $c_0$. По мѣрѣ безконечнаго удаленія точки пересѣченія третьей плоскостью линіи $ST$ отъ точекъ $b''$ и $c''$ и точка касанія плоскости должна безпредѣльно удаляться отъ точекъ $b_0$ и $c_0$; а такъ какъ при этомъ третья плоскость приближается къ совпаденію съ асимптотической, то эта послѣдняя можетъ считаться такою плоскостью, точка касанія которой безконечно удалена отъ показанныхъ на чертежѣ точекъ касанія другихъ плоскостей.

Переходимъ къ примѣненію приведенной теоремы.

Условія, которыми обыкновенно задаются въ начертательной геометріи линечайтыя поверхности, сводятся къ двумъ случаямъ: 1) когда заданы три линіи (прямыя или кривыя), по которымъ должна непрерывно перемѣщаться производящая прямая, и которыя называются направляющими и 2) когда заданы двѣ такія направляющія и плоскость, которой должна быть параллельна производящая (плоск. параллелизма). *)

Въ первомъ случаѣ, для каждаго положенія производящей мы имѣемъ три точки пересѣченія ея съ направляющими; въ каждой изъ этихъ точекъ можемъ провести прямую касательную къ направляющей, причемъ плоскость, проведенная черезъ производящую и касательную къ одной направляющей, будетъ касаться къ линейчатой поверхности въ мѣстѣ пересѣченія производящей съ этой направляющей. Такимъ путемъ получаемъ направленія и точки касанія трехъ плоскостей, заключающихъ данную производящую и слѣдовательно, на основаніи слѣдствія 1-го изъ теоремы, можемъ на плоскости нормальной къ производящей построить прямую параллельную ассимптотической плоскости, а помощью этой прямой и двухъ (изъ числа 3 данныхъ) касательныхъ плоскостей не трудно, на основаніи слѣдствія 2-го изъ теоремы, найти точку касанія любой плоскости, заключающей данную производящую.

Во второмъ случаѣ, имѣемъ направленія и точки касанія только двухъ плоскостей, но такъ какъ при этомъ извѣстно направленіе плоскости параллелизма смежныхъ производящихъ линейчатой поверхности, т. е. плоскости, которую условились называть ассимптотической, то проведя на плоскости нормальной къ производящей прямую параллельную ассимптотической плоскости, опять получаемъ достаточно данныхъ для нахожденія, на основаніи слѣдствія 2-го, точекъ касанія любой заданной плоскости, заключающей производящую.

Разсмотримъ на частномъ примѣрѣ способъ примѣненія изложенной теоремы.

На чертежѣ 4 въ ортогональныхъ проекціяхъ даны три кривыя—направляющія линейчатой поверхности $CD$ ($C'D'$), $EF$ ($E'F'$) и $GH$ ($G'H'$) Пусть $ab$ ($a'b'$) обозначаетъ одно положеніе прямой производящей, чрезъ которую проходитъ плоскость $P$, обозначенная слѣдами $P_h$ и $P_v$; требуется найти на указанной производящей точку касанія этой плоскости къ линейчатой поверхности.

Проводимъ прямыя касательныя къ даннымъ направляющимъ въ точкахъ $c$ ($c'$), $e$ ($e'$) и $g$ ($g'$); пусть эти касательныя будутъ $c\partial$ ($c'\partial'$), $ef$ ($e'f_{\prime}$) и $gh$ ($g'h'$). Три плоскости, проведенныя черезъ каждую изъ этихъ касательныхъ и черезъ производяшую, будутъ касаться къ линейчатой поверхности соотвѣтственно въ точкахъ $c$ ($c'$), $e$ ($e'$) и $g$ ($g'$).

Для того, чтобы получить на чертежѣ въ неискаженномъ видѣ какъ

---

*) Направляющія могутъ быть заданы прямо или косвенно, а плоск. параллелизма м. б. постоянная или мгновенная—направляющій конусъ.

разстоянія между означенными точками касанія, такъ и пучокъ линій пересѣченія всѣхъ четырехъ плоскостей, проходящихъ черезъ производящую $ab$ $(a'b')$, съ плоскостью нормальною къ этой послѣдней, нужно всю систему повернуть такъ, чтобы линія $ab$ $(a'b')$ пришла въ положеніе перпендикулярное къ одной изъ плоскостей проекцій. Это сложное построеніе показано на чертежѣ 5, изъ котораго видно, что послѣ вращенія прямая приняла положеніе $a_2b$ $(b')$—нормальное къ вертикальной плоскости про-

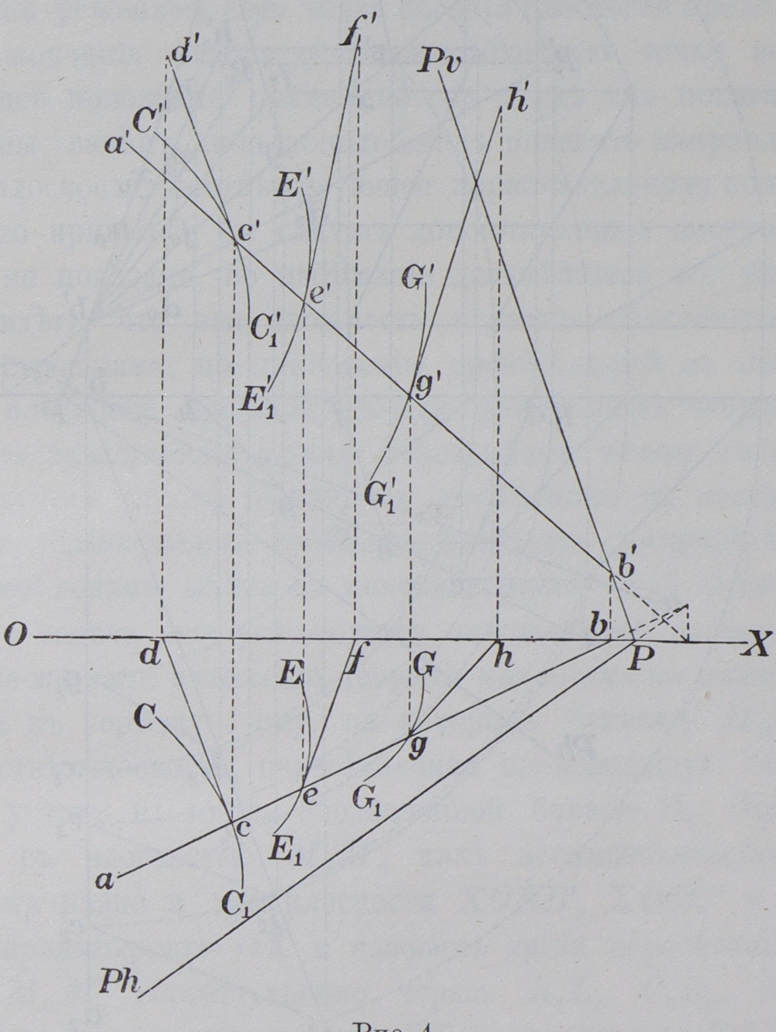



Рис. 4.

екцій, касательныя приняли положенія $c_2\partial_2$ $(b'\partial'_2)$, $e_2f_2$ $(b'f'_2)$ и $g_2h_2$ $(b'h'_2)$; вертикальный слѣдъ $b'P_v$ данной плоскости $P$ спроектировался на вертикальной плоскости проекцій въ $b'p_v''$. Въ повернутомъ положеніи вертикальными слѣдами плоскостей, проходящихъ черезъ производящую и черезъ касательныя, будутъ вертикальныя проекціи этихъ послѣднихъ, т. е. линіи $b'\partial'_2$, $b'f'_2$ и $b'h'_2$, а вертикальнымъ слѣдомъ данной плоскости $P$ будетъ линія $b'p_v''$. Разстоянія между точками касанія спроектировались на горизонтальной проекціи безъ искаженія и равны $c_2e_2$ и $e_2g_2$. Отложивъ на линіи $b'h'_2$, начиная отъ точки $b'$, послѣдовательно отрѣзки $b'a_0 = c_2e_2$ и $a_0h_0 =$

$= e_2 g_2$ и проведя черезъ точку $a_0$ линію параллельную $b'\partial'_2$ до пересѣченія съ линіей $b'f'_2$ въ точкѣ $f_0$, разсѣчемъ пучекъ прямыхъ $b'\partial'_2$ $b'f'$,

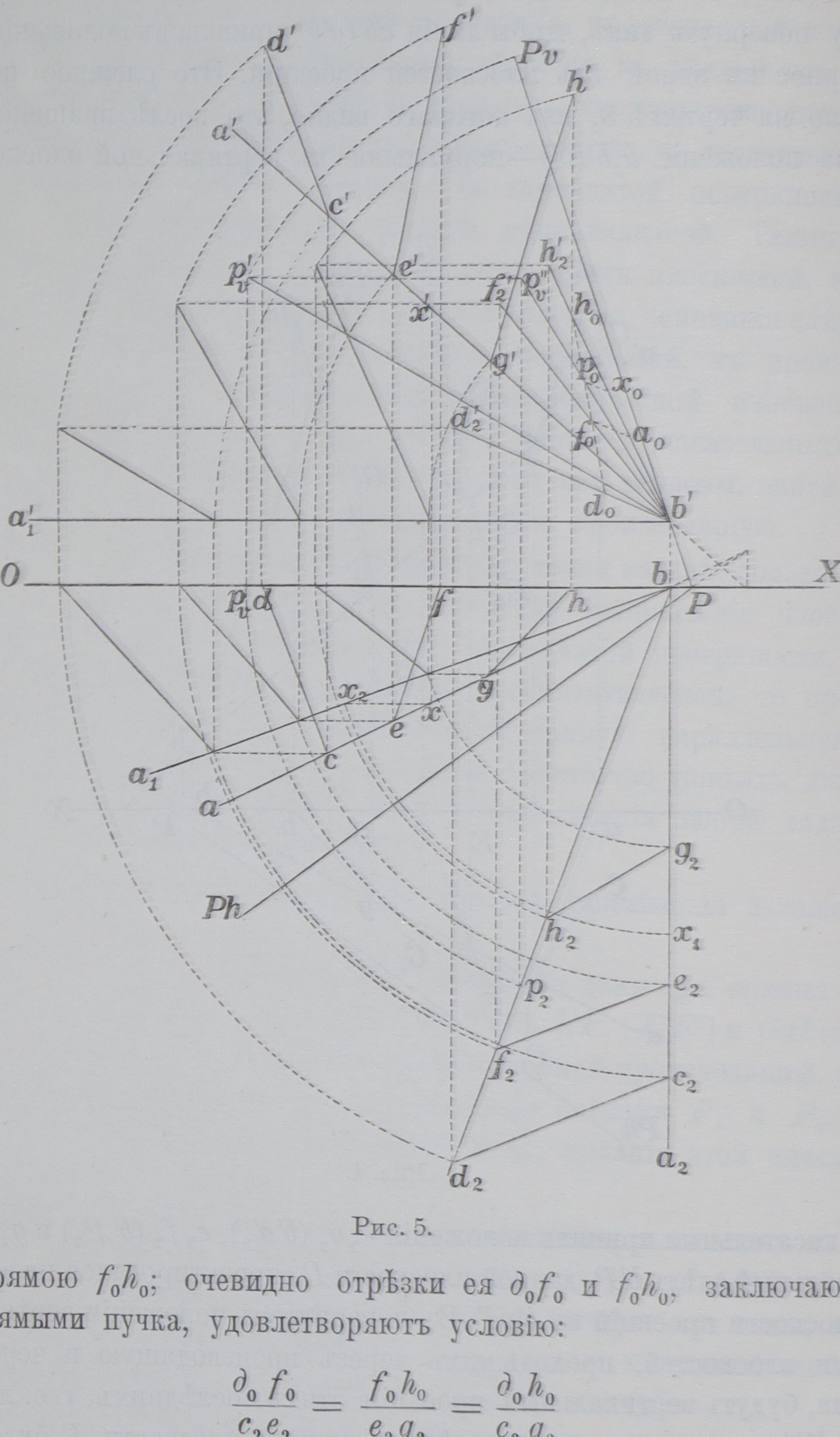



Рис. 5.

и $b'h'_2$ прямою $f_0h_0$; очевидно отрѣзки ея $\partial_0 f_0$ и $f_0h_0$, заключающіеся между прямыми пучка, удовлетворяютъ условію:

$$\frac{\partial_0 f_0}{c_2 e_2} = \frac{f_0 h_0}{e_2 g_2} = \frac{\partial_0 h_0}{c_2 g_2}$$

и слѣдовательно прямая $\partial_0 h_0$ параллельна ассимптотической плоскости, заключающей производящую $a_2$ $b$ $(b')$; а такъ какъ прямая $\partial_0 h_0$ пересѣкается линіей $b'p_v''$ въ точкѣ $p_0$, то отыскиваемъ на горизонтальной проекціи $a_2b$ такую точку $x_1$, чтобы удовлетворялись условія:

$$\frac{p_0h_0}{x_1g_2} = \frac{p_0f_0}{x_1e_2} = \frac{f_0h_0}{e_2g_2}\ .$$

(для чего на вертикальной плоск. проекцій проводимъ линію $p_0x_0$ параллельно $f_0a_0$ и отрѣзокъ $h_0x_0$ откладываемъ на горизонтальной проекціи $ba_2$ отъ точки $g_2$ по направленію къ $e_2$).

На основаніи приведенной теоремы имѣемъ, что точка $x_1$, удовлетворяющая этимъ условіямъ, есть точка касанія плоскости проходящей черезъ $b'p''$. Для окончанія задачи остается найденную точку перенести на первоначальное положеніе прямой $ab$ ($a'b'$), гдѣ она показана буквами $x$ ($x'$). Еслибы зачѣмъ либо понадобилось показать направленіе ассимптотической плоскости, соотвѣтствующее первоначальному положенію производящей, то пришлось бы сдѣлать дополнительное построеніе, которое на чертежѣ не показано, во избѣжаніе дальнѣйшаго его усложенія.

Можно видѣть, что вся сложность чертежа обусловлена вспомогательными построеніями, по приведенію производящей въ положеніе нормальное къ плоскости проекцій. Когда примѣняется теорема Chasles'а, опредѣляющая зависимость между положеніями точекъ касанія плоскостей и тангенсами угловъ наклоненія послѣднихъ къ центральной плоскости, то не только нельзя избѣжать сложныхъ построеній (такъ какъ при этомъ необходимо имѣть въ неискаженномъ видѣ углы между плоскостями), но задача еще усложняется нахожденіемъ центральной точки. Предлагаемое-же нами изложеніе теоремы приводитъ къ нижеслѣдующему.

Вернемся къ чертежу 1-ому, на которомъ буквами $M_0M_0$ показана въ пространствѣ плоскость, пересѣкающая производящую $OX$ подъ *произвольнымъ* угломъ въ точкѣ, обозначенной буквою $O_0$. Продолжимъ до пересѣченія съ плоскостью $M_0M_0$ какъ ассимптотическую плоскость $KK'L'L$, такъ равно и три плоскости $XOBB'$, $XOCC'$ и $XODD'$, заключающія производящую $OX$ и назовемъ линіи пересѣченія этихъ плоскостей съ $M_0M_0$ соотвѣтственно черезъ $K_0L_0$, $O_0B_0$, $O_0C_0$ и $O_0D_0$. Плоскость, проведенная черезъ линію $ST$ (параллельную $KL$) параллельно ассимптотической, пересѣчется съ плоскостью $M_0M_0$ по линіи $S_0T_0$, которая будетъ очевидно параллельна $K_0L_0$. Точки пересѣченія линіи $S_0T_0$ съ линіями $O_0B_0$, $O_0C_0$ и $O_0D_0$, показанныя на чертежѣ буквами $\beta$, $\gamma$ и $\delta$, вслѣдствіе перпендикулярности всѣхъ проведенныхъ плоскостей къ плоскости $MM$ будутъ очевидно находиться на пересѣченіи съ плоскостью $M_0M_0$ перпендикуляровъ, возстановленныхъ къ плоскостн $MM$ соотвѣтственно въ точкахъ $b''$, $c''$ и $\partial''$. Засимъ ясно, что величины отрѣзковъ сѣкущихъ $ST$ и $S_0T_0$ будутъ связаны отношеніями:

$$\frac{b''c''}{\beta\gamma} = \frac{c''\partial''}{\gamma\delta} = \frac{b''\partial''}{\beta\delta}.$$

Сопоставляя эти отношенія съ приведенными отношеніями (2):

$$\frac{b''c''}{b_0c_0}=\frac{c''\partial''}{c_0\partial_0}=\frac{b''\partial''}{b_0\partial_0},$$

получаемъ слѣдующую зависимость:

$$\frac{b_0c_0}{\beta\gamma}=\frac{c_0\partial_0}{\gamma\delta}=\frac{b_0\partial_0}{\beta\gamma},\quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

которая, въ силу изложеннаго выше, можетъ быть прочитана такъ:

*Взаимныя разстоянія между точками касанія къ линейчатой поверхности плоскостей, заключающихъ одну изъ ея производящихъ, пропорціональны отрѣзкамъ, отсѣкаемымъ этими плоскостями на любой линіи параллельной ассимптотической плоскости.*

Отсюда, подобно тому, какъ это мы показали выше по отношенію къ предъидущей теоремѣ, выводимъ такія слѣдствія:

1) Если извѣстны направленія и точки касанія трехъ плоскостей, заключающихъ данную производящую линейчатой поверхности, то на основаніи этихъ данныхъ можно построить линію пересѣченія ассимптотической плоскости, заключающей ту же производящую, съ любой плоскостью, пересѣкающей послѣднюю.

Для этого нужно на пересѣкающей плоскости (пусть чертежъ 2 представляетъ плоскость пересѣкающую производящую подъ произвольнымъ угломъ) построить линіи пересѣченія съ нею, трехъ данныхъ плоскостей, заключающихъ производящую — $BB'$, $CC'$ и $DD'$, а затѣмъ построить такую прямую $\beta\delta$, чтобы отрѣзки ея удовлетворяли отношенію:

$$\frac{\beta\gamma}{a}=\frac{\gamma\delta}{b}=\frac{\beta\delta}{a+b},$$

гдѣ: $a$=разстоянію между точками касанія плоскостей, проходящихъ черезъ $BB'$ и $CC'$; $b$ = разстоянію между точками касанія плоскостей, проходящихъ черезъ $CC'$ и $DD'$; $a+b$ = разстоянію между точками касанія плоскостей, проходящихъ черезъ $BB'$ и $DD'$.

Такъ какъ означенному отношенію *могутъ* удовлетворять *только* линіи взаимно-параллельныя и такъ какъ ему *должны* удовлетворять линіи параллельныя ассимптотической плоскости, заключающей данную производящую, то прямая $\beta\delta$ — параллельна ассимптотической плоскости, а слѣдовательно направленіе этой послѣдней опредѣлено.

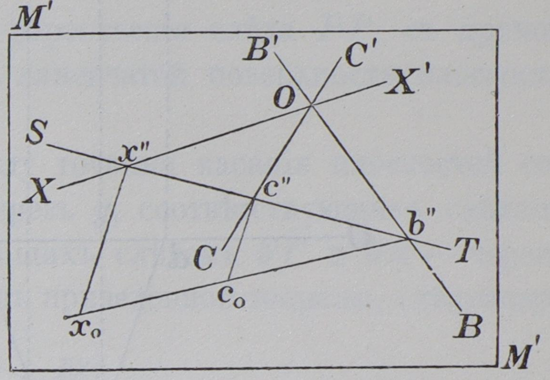
2) Если извѣстны направленія и точки касанія двухъ плоскостей, заключающихъ данную производящую линейчатой поверхности, а также направленіе ассимптотической плоскости, заключающей ту же производящую, то на основаніи этихъ данныхъ можно построить точку касанія къ линейчатой поверхности любой плоскости, заключающей эту производящую.

Для этого нужно: на какой-либо плоскостн $M'M'$ (черт. 6), пересѣкающей данную производящую, построить линіи $BB'$ и $CC'$ пересѣченія этой плоскости съ двумя данными плоскостями, заключающими производящую и провести линію $ST$, параллельную ассимптотической плоскости.

Затѣмъ построить линію $XX'$ пересѣченія съ плоскостью $M'M'$ той плоскости, точку касанія которой нужно найти и опредѣлить съ помощью показаннаго на чертежѣ построенія величины $x_0c_0$ и $x_0b''$ изъ условій:

$$\frac{x_0c_0}{x''c''} = \frac{c_0b''}{c''b''} = \frac{x_0b''}{x''b''};$$

гдѣ: 1) $x''$, $c''$ и $b''$ представляютъ точки пересѣченія линіи $ST$ съ линіями $XX'$ $CC'$ и $BB'$ и 2) отрѣзокъ $b''c_0$—данное намъ разстояніе между точками касанія двухъ данныхъ плоскостей, проходящихъ черезъ $BB'$ и $CC'$.



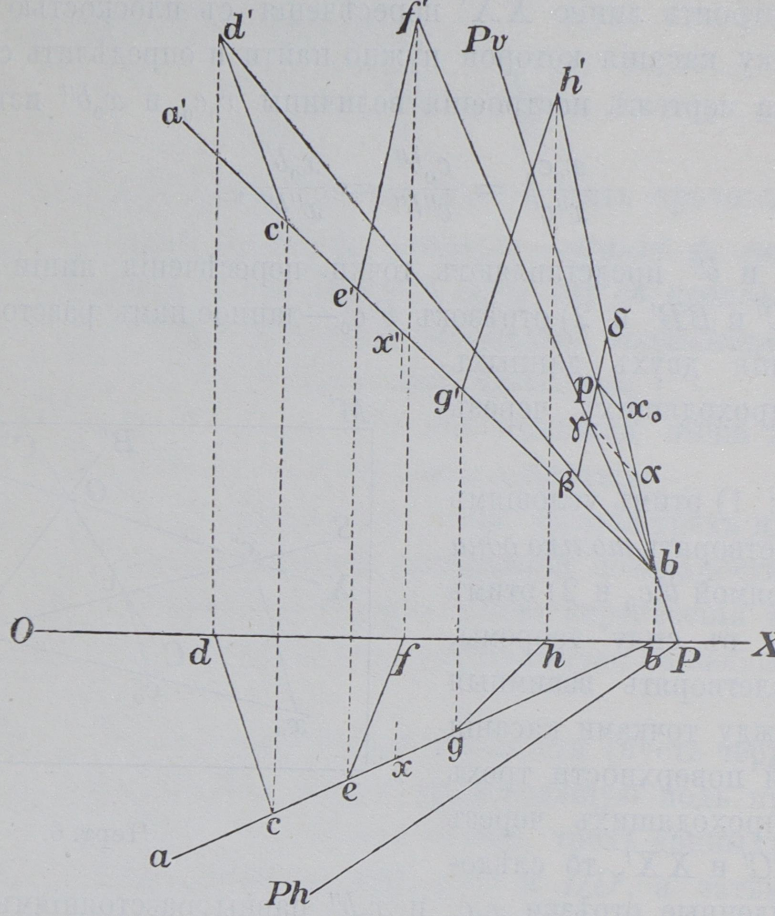

Черт. 6.

Такъ какъ: 1) этимъ условіямъ *можетъ* удовлетворять *только одна* точка $x_0$ па прямой $b''c_0$ и 2) этимъ же условіямъ, въ силу теоремы, *должны* удовлетворять взаимныя разстоянія между точками касанія къ линейчатой поверхности трехъ плоскостей, проходящихъ черезъ линіи $BB'$, $CC'$ и $XX'$, то слѣдовательно, найденные отрѣзки $x_0c_0$ и $x_0b''$ равны разстояніямъ точки касанія плоскости, проходящей черезъ $XX'$, отъ точекъ касанія плоскостей, проходящихъ черезъ $BB'$ и $CC'$; а такъ какъ эти послѣднія точки касанія извѣстны, то значитъ и точка касанія плоскости проходящей черезъ $XX'$ опредѣлена.

Въ приведенной обобщенной формѣ теорема даетъ возможность всѣ построенія, необходимыя для нахожденія ассимптотической плоскости и взаимныхъ разстояній между точками касанія, производить не на плоскости нормальной къ производящей, а на любой плоскости, пересѣкающейся съ данною производящею; напримѣръ, на плоскости проекцій въ проекціяхъ ортогональныхъ, или на плоскости картины въ перспективной проекціи и слѣдовательно—не прибѣгать къ вращенію и къ другимъ подобнымъ вспомогательнымъ построеніямъ.

На сколько упрощается при этомъ работа можно видѣть изъ черт. 7, на которомъ, какъ и на чертежахъ 4 и 5, показана та же производящая $ab$ ($a'b'$), три прямыя касательныя къ направляющимъ—$cd$ ($c'd'$), $ef$ ($e'f'$) и $gh$ ($g'h'$) и плоскость ($P_h$, $P_v$), которая заключаетъ производящую $ab$ ($a'b'$) и точку касанія которой требуется найти.

Такъ какъ точки $d'$, $f'$ и $h'$ — слѣды касательныхъ на вертикальной плоскости проекцій, то соединяя ихъ съ вертикальнымъ слѣдомъ данной производящей $b'$, получимъ три линіи $b'd'$, $b'f'$ и $b'h'$, которыя будутъ слѣ-




Черт. 7.

дами трехъ плоскостей, заключающихъ производящую $ab$ $(a'b')$ и касающихся къ линейчатой поверхности соотвѣтственно въ точкахъ $c$ $(c')$, $e$ $(e')$ и $g$ $(g')$.

На линіи $b'h'$ откладываемъ длину $b'\alpha = c'e'$ и длину $\alpha\delta = e'g'$; черезъ точку $\alpha$ проводимъ линію параллельную $b'd'$, а затѣмъ черезъ точку $\gamma$ пересѣченія этой послѣдней линіи съ прямой $b'f'$ и черезъ точку $\delta$ проводимъ прямую $\beta\delta$; отрѣзки этой прямой очевидно будутъ удовлетворять уравненіямъ:

$$\frac{\beta\gamma}{c'e'} = \frac{\gamma\delta}{e'g'} = \frac{\beta\delta}{c'g'}.$$

Въ ортогональныхъ проекціяхъ, какъ и во всѣхъ проекціяхъ, гдѣ проектирующія линіи взаимно-параллельны, истинное разстояніе между точками одной и той же прямой пропорціональны разстояніямъ между ихъ проекціями; поэтому, называя истинныя разстоянія между точками $c$ $(c')$ и $e$ $(e')$

черезъ $CE$, между точками $e$ $(e')$ и $g$ $(g')$—черезъ $EG$ и между точками $c$ $(c')$ и $g$ $(g')$—черезъ $CG$, имѣемъ:

$$\frac{c'e'}{CE} = \frac{e'g'}{EG} = \frac{c'g'}{CG}$$

и слѣдовательно:

$$\frac{\beta\gamma}{CE} = \frac{\gamma\delta}{EG} = \frac{\beta\delta}{CG}.$$

Это отношеніе показываетъ, что отрѣзки построенной прямой пропорціональны взаимнымъ разстояніямъ между точками касанія трехъ плоскостей, проходящихъ черезъ образующую $ab$ $(a'b')$ и, слѣдовательно, прямая эта, въ силу слѣдствія 1-го изъ указанной теоремы, параллельна ассимптотической плоскости.

А если это такъ, то по точкѣ $p$—пересѣченія слѣда $PP_v$ съ прямой $\beta\delta$ можемъ судить о точкѣ касанія къ линейчатой поверхности плоскости $P$, а именно:

Назвавъ взаимныя разстоянія между точками касанія плоскостей соотвѣтствующихъ слѣдамъ $b'h'$ и $b'P_v$ черезъ $y$, соотвѣтствующихъ слѣдамъ $b'P_v$ и $b'f'$ — черезъ $z$ и соотвѣтствующихъ слѣдамъ $b'f'$ и $b'h'$ — черезъ $EG$, имѣемъ, въ силу слѣдствія 2-го изъ приведенной теоремы, слѣдующее соотношеніе:

$$\frac{y}{p\delta} = \frac{z}{p\gamma} = \frac{EG}{\delta\gamma}.$$

Но принимая во вниманіе, что вертикальная проекція линіи $EG$ равна $e'g' = \alpha\delta$ и назвавъ вертикальную проекцію отрѣзка $y$ черезъ $\eta$ и отрѣзка $z$ черезъ $\zeta$, имѣемъ для ортогональныхъ проекцій:

$$\frac{y}{\eta} = \frac{z}{\zeta} = \frac{EG}{\alpha\delta}$$

и слѣдовательно:

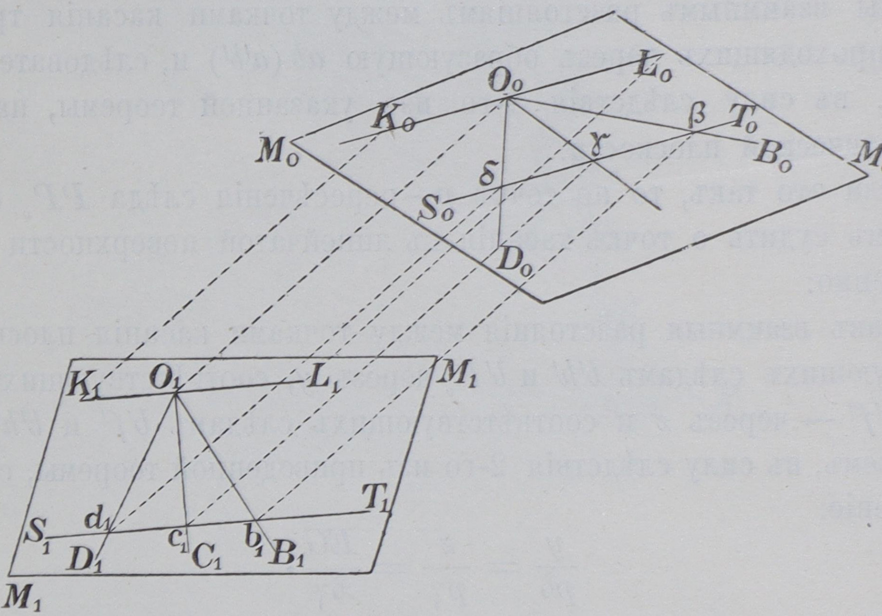
$$\frac{\eta}{p\delta} = \frac{\zeta}{p\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\delta\gamma}.$$

Величину отрѣзковъ $\eta$ и $\xi$ находимъ, проведя черезъ точку $p$ линію параллельную $\gamma\alpha$ до пересѣченія ея съ линіею $b'h'$ въ точкѣ $x_0$; ясно, $\delta x_0 = \eta$ и $x_0\alpha = \zeta$. Откладывая отрѣзокъ $\delta x_0$ на вертикальной плоскости проекцій отъ точки $g'$ по направленію къ точкѣ $e'$, находимъ точку $x'$—вертикальную проекцію искомой точки касанія плоскости $(P_h, P_v)$ къ линейчатой поверхности.

Такимъ образомъ весь трудъ по рѣшенію задачи свелся къ построенію *шести* вспомогательныхъ линій $\partial'b'$, $f'b'$, $h'b'$, $\alpha\gamma$, $\gamma\delta$ и $px_0$, вмѣсто тѣхъ многосложныхъ построеній, которыя показаны на чертежѣ 5.

Но примѣненіе приведенной обобщенной теоремы оказывается особенно цѣлесообразнымъ при рѣшеніи задачъ въ косоугольныхъ проекціяхъ *), въ которыхъ вращенія, нахожденія плоскостей нормальныхъ къ линіямъ и т. п. вспомогательныя дѣйствія требуютъ несравненно большаго труда, чѣмъ въ проекціяхъ ортогональныхъ.

Въ виду однако же того обстоятельства, что принимать плоскость чертежа за сѣкущую плоскость не всегда удобно, а иногда и совершенно невозможно (напр. когда производящая параллельна плоскости чертежа),




Черт. 8.

мы считаемъ необходимымъ еще нѣсколько дополнить приведенную теорему, а именно:

Пусть на черт. 8 литерами $M_0\,M_0$ показана въ пространствѣ плоскость, пересѣкающая производящую въ точкѣ $O_0$ и три плоскости, заключающія производящую,—по линіямъ $O_0\,B_0$, $O_0\,C_0$ и $O_0\,D_0$.

Положимъ что мы, зная величины взаимныхъ рзстояній между точками касанія означенныхъ трехъ плоскостей (точки эти назовемъ сотвѣтственно черезъ $b_0$, $c_0$ и $d_0$), сдѣлали на плоскости $M_0\,M_0$ построеніе, необходимое для нахожденія линіи параллельной ассимптотической плоскости, т. е. нашли линію $S_0\,T_0$, отрѣзки которой удовлетворяютъ условіямъ:

$$\frac{\beta\gamma}{b_0 c_0} = \frac{\gamma\delta}{c_0 d_0} = \frac{\beta\delta}{b_0 d_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4)$$

*) Подъ косоугольными проекціями подразумѣваемъ такія, при которыхъ проектирующія линіи, будучи параллельны между собою, вообще не перпендикулярны къ плоскости проекцій, т. е. къ плоскости чертежа.

Уже выше, при рѣшеніи задачи, показанномъ на чертежѣ 7, было доказано, что для построенія линіи параллельной ассимптотической плоскости, нѣтъ необходимости опредѣлять абсолютныя величины разстояній между точками касанія $b_0$, $c_0$ и $d_0$ и что можно для этого пользоваться отрѣзками имъ пропорціональными. Поэтому, если напримѣръ, вмѣсто абсолютныхъ величинъ $b_0 c_0$, $c_0 d_0$ и $b_0 d_0$ имѣемъ на чертежѣ прамо- или косоугольныя проекціи ихъ $b_1' c_1'$, $c_1' d_1'$ и $b_1' d_1'$, то для опредѣленія направленія сѣкущей $S_0\ T_0$ можемъ воспользоваться этими послѣдними, руководствуясь отношеніями:

$$\frac{\beta\gamma}{b_1' c_1'} = \frac{\gamma\delta}{c_1' d_1'} = \frac{\beta\delta}{b_1' d_1'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Проведя на плоскости $M_0\,M_0$ черезъ точку $O_0$ прямую $K_0\,L_0$ паралелльную $S_0\,T_0$, получимъ линію пересѣченія съ этой плоскостью ассимптотической плоскости, соотвѣтствующей данной производящей.

Всѣ линіи, показанныя на плоскости $M_0\,M_0$, спроектируемъ взаимно параллельными лучами произвольнаго направленія на произвольно взятую въ пространствѣ плоскость, показанную на чертежѣ 8 буквами $M_1\,M_1$ и обозначимъ проекціи показанныхъ на плоскости $M_0\,M_0$ точекъ соотвѣтственными буквами съ указателемъ ($_1$).



Не требуетъ особыхъ доказательствъ: 1) что проекціи $K_1\,L_1$ и $S_1\,T_1$ двухъ прямыхъ взаимно параллельныхъ линій $K_0\,L_0$ и $S_0\,T_0$ будутъ взаимно параллельны и что обратно, двѣ прямыя $K_0\,L_0$ и $S_0 T_0$, лежащія въ одной плоскости $M_0\,M_0$ и проектирующіяся на другой плоскости въ видѣ параллельныхъ прямыхъ $K_1\,L_1$ и $S_1\,T_1$,—взаимно параллельны и 2) что разстоянія между проекціями, $d_1$, $c_1$ и $b_1$ точекъ $\delta$, $\gamma$ и $\beta$ будутъ пропорціональны разстояніямъ между самими точками, т. е.

$$\frac{\beta\delta}{b_1\,d_1} = \frac{\beta\gamma}{b_1\,c_1} = \frac{\gamma\delta}{c_1\,d_1}$$

Принимая во вниманіе все изложенное, легко приходимъ къ заключенію, что для рѣшенія разсматриваемыхъ задачъ о нахожденіи точки касанія нѣтъ необходимости совмѣщать съ плоскостью чертежа сѣкущую плоскость $M_0\,M_0$ и что для этого вполнѣ достаточно имѣть на чертежѣ *проекцію* этой плоскости и всѣхъ показанныхъ на ней линій, дѣйствительно:

1) Если на чертежѣ имѣемъ (пусть плоскость $M_1\,M_1$ изображаетъ плоскость чертежа) три проекціи сѣченія вспомогательной плоскостью $M_0\,M_0$ трехъ касательныхъ плоскостей—$O_1\,B_1$, $O_1\,C_1$ и $O_1 D_1$ и если намъ извѣстны проекціи трехъ точекъ касанія этихъ плоскостей $b_1'$, $c_1'$ и $d_1'$, то построивъ на нашемъ чертежѣ (способомъ показаннымъ выше на черт. 2,

такую сѣкущую прямую, чтобы отрѣзки ея $b_1 c_1$, $c_1 d_1$ и $b_1 d_1$ удовлетворяли отношеніямъ

$$\frac{b_1 c_1}{b_1' c_1'} = \frac{c_1 d_1}{c_1' d_1'} = \frac{b_1 d_1}{b_1' d_1'},$$

мы тѣмъ самымъ получаемъ на чертежѣ проекцію одной изъ линій, проведенныхъ на плоскости $M_0 M_0$ параллельно ассимптотической плоскости.

2) Если на чертежѣ имѣемъ проекцію $S_1 T_1$ линіи $S_0 T_0$, проведенной на плоскости $M_0 M_0$ параллельно ассимптотической плоскости, а также проекціи $O_1 B_1$, $O_1 C_1$ и $O_1 D_1$ сѣченій плоскостью $M_0 M_0$ трехъ плоскостей заключающихъ производящую и если намъ извѣстны проекціи точекъ касанія двухъ изъ этихъ плоскостей, напр. $b_1'$ и $c_1'$, то построивъ (способомъ показаннымъ на черт. 3 или 6) точку $d_1'$, разстояніе которой отъ точекъ $b'_1$ и $c'_1$ удовлетворяло бы отношеніямъ

$$\frac{b_1' c_1'}{b_1 c_1} = \frac{c_1' d_1'}{c_1 d_1} = \frac{b_1' d_1'}{b_1 d_1},$$

мы тѣмъ самымъ получимъ точку, удовлетворяющую отношеніямъ:

$$\frac{b_1' c_1'}{\beta\gamma} = \frac{c_1' d_1'}{\gamma\delta} = \frac{b_1' d_1'}{\beta\delta},$$

а слѣдовательно, будемъ имѣть проекцію точки касанія плоскости, проходящей черезъ производящую и черезъ $O_0 D_0$.

Способъ примѣненія изложеннаго видѣнъ изъ нижеслѣдующаго примѣра:

Пусть линіи $OX$, $OY$ и $OZ$ (на чертежѣ 9) представляютъ въ косоугольной проекціи ($Q \parallel V$) оси прямоугольныхъ координатъ.

Даны: 1) одно изъ положеній прямой производящей линейчатой поверхности — $AB$; точки $A$ и $B$ — мѣста встрѣчи данной производящей съ координатными плоскостями; линія $Ab$ — вторичная проекція линіи $AB$ на плоскости $XOY$.

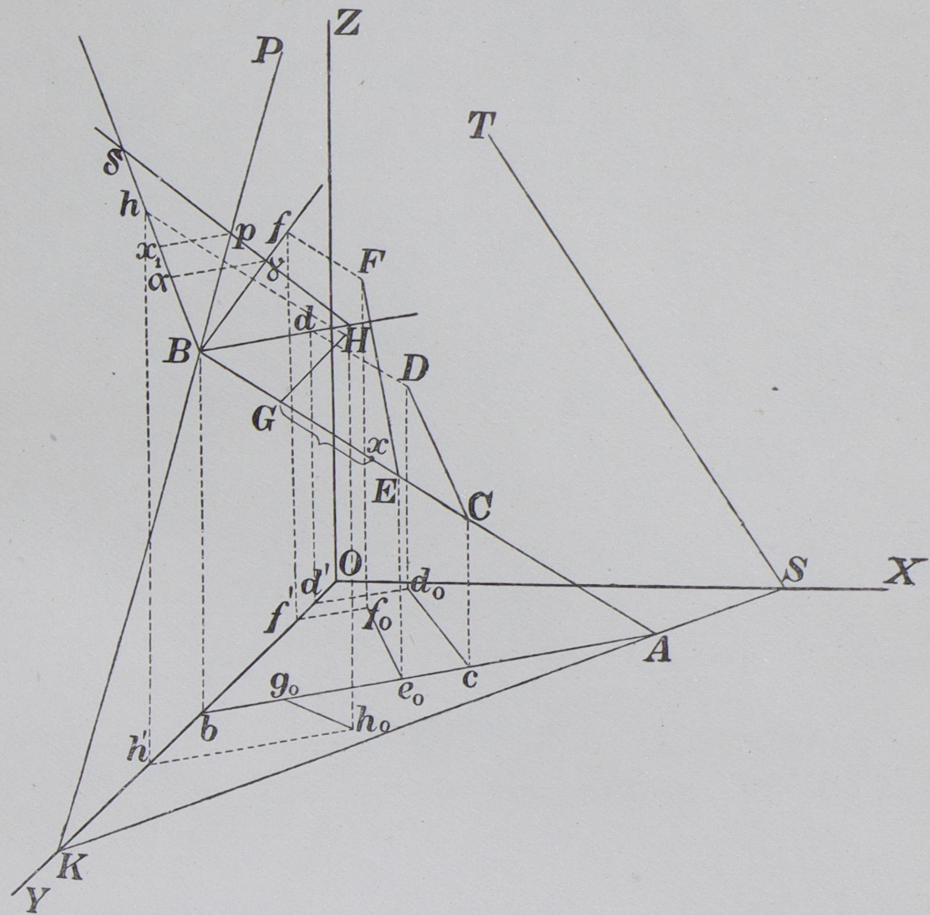
2) Три прямыя $CD$ $(c_0 d_0)$, $EF$ $(e_0 f_0)$ и $GH$ $(g_0 h_0)$ — касательныя къ направляющимъ линейчатой поверхности, съ которыми производящая $AB$ пересѣкается въ точкахъ $C$ $(c_0)$, $E$ $(e_0)$ и $G$ $(g_0)$; эти послѣднія очевидно будутъ точками касанія къ линейчатой поверхности плоскостей, заключающихъ $AB$ и проходяшихъ черезъ касательныя,

3) Ломанная линія $PKST$, представляющая линіи пересѣченія съ координатными плоскостями нѣкоторой плоскости П, заключающей производящую $AB$.

Требуется найти на производящей $AB$ точку касанія плоскости П.

Проведя отъ точекъ $h_0$, $f_0$ и $d_0$ линіи параллельныя вторичной проекціи $AB$ — до пересѣченія съ координатной осью $OY$ въ точкахъ $h'$, $f'$ и $d'$, черезъ эти послѣднія точки проводимъ линіи параллельныя $OZ$ до пересѣченія ихъ соотвѣтственно съ линіями, проведенными черезъ точки $H$, $F$ и $D$ параллельно $AB$. Точки пересѣченія $h$, $f$ и $d$ соединяемъ съ точкою $B$ и получаемъ такимъ образомъ пучекъ трехъ прямыхъ $Bd$, $Bf$ и $Bh$—косоугольную проекцію пересѣченія трехъ касательныхъ плоскостей съ координатною плоскостью $YOZ$.

Произведемъ въ плоскости чертежа слѣдующія построенія: на линіи $Bh$, начиная отъ точки $B$ откладываемъ послѣдовательно отрѣзокъ




Черт. 9.

$B\alpha = CE$ и отрѣзокъ $\alpha\delta = FG$; черезъ точку $\alpha$ проводимъ линію параллельную $Bd$ до пересѣченія ея съ линіей $Bf$ въ точкѣ $\gamma$; черезъ точки $\gamma$ и $\delta$ приводимъ прямую; она параллельна косоугольной проекціи линіи пересѣченія ассимптотической плоскости съ координатною плоскости $YOZ$.

Черезъ точку пересѣченія прямыхъ $\gamma\delta$ и $PR$, обозначенную буквою $p$, проводимъ прямую параллельную $\alpha\gamma$ до пересѣченія ея съ линіей $Bh$ въ точкѣ $x_1$.

Отложивъ на линіи $BA$, отъ точки $G$ по направленію къ $E$ отрѣзокъ $\delta x_1$, получаемъ точку $x$—искомое мѣсто касанія плоскости.