

РАСЧЕТ МАРШРУТОВ СЛЕДОВАНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ В СЕТИ

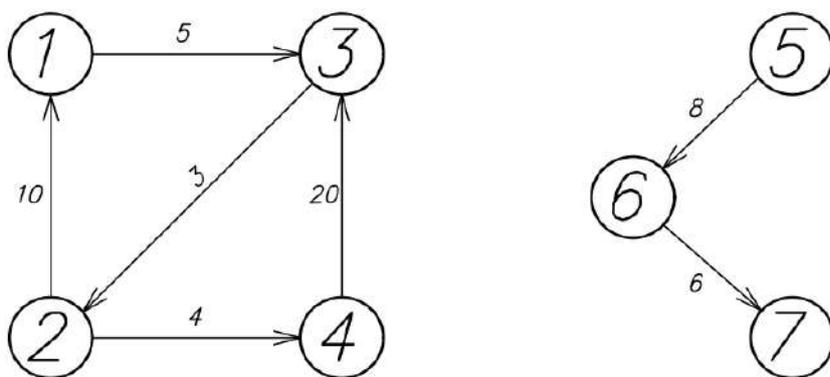
Ю. О. ПАЗОЙСКИЙ, Е. В. ЩЕРБИНИНА

Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва

Рассмотрим транспортную сеть, в которой протекают транспортные потоки однородной продукции. Основным критерием, определяющим выбор оптимального варианта маршрутов следования транспортных потоков по сети, является минимизация затрат, которые связаны с продвижением этих потоков по участкам сети. Прежде чем определить оптимальный вариант маршрутов, необходимо проверить связность сети – наличие возможности добраться из каждого пункта сети в любой другой. Определение связности сети позволит определить ее узкие места – пункты или группы пунктов, не имеющие с остальными существующих возможных маршрутов, по которым возможно обеспечить движение транспортных потоков, или пункты, связанные однонаправленно, то есть имеющие либо только входящие потоки, либо исходящие. Знание наличия узких мест позволит определить необходимость прокладки новых маршрутов, которые сделают сеть связанной.

Для решения этой задачи предлагается использовать теорию графов и алгоритм Флойда – Варшалла.

Рассмотрим предлагаемый метод на примере решения следующей задачи. Заданы: полигон, состоящий из 7 пунктов возможного зарождения или погашения транспортных потоков 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, существующие пути сообщения между пунктами, затраты, связанные с продвижением транспортного потока от одного пункта к другому. Представим данный полигон в виде взвешенного ориентированного графа $G = (V(G), E(G))$, где пункты возможного зарождения и погашения транспортных потоков – это вершины $V(G)$, при этом существующие пути сообщения – это дуги $E(G)$, вес которых – затраты на перемещение транспортных единиц из одного пункта в другой. Орграф G приведен на рисунке 1.

Рисунок 1 – Расчетный полигон, представленный в виде орграфа G

Составим входную матрицу смежности для орграфа G . Элементы матрицы принимают значение в соответствии с формулой 1, где $D_0[i, j]$ – элемент матрицы смежностей, v_i и v_j – две произвольные вершины орграфа G , e_{ij} – вес ребра e , соединяющего вершины v_i и v_j , E – множество ребер орграфа G [2].

$$D_0[i, j] = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j \\ e_{ij}, & \text{если вершина, а } v_i \text{ смежна } v_j, i \neq j, (i, j) \in E, \\ \infty, & \text{если } i \neq j, (i, j) \notin E \end{cases} \quad (1)$$

Составим матрицу предшествования B_0 , которая показывает, каким путем мы идем из вершины v_i в v_j . Элементы матрицы принимают значение в соответствии с формулой (2), где $B_0[i, j]$ – элемент матрицы; V – множество вершин орграфа G .

$$B_0[i, j] = i, \quad i \neq j, \quad i \in V. \quad (2)$$

Матрица смежностей D_0 и матрица предшествования B_0 представлены на рисунке 2.

j \ i	1	2	3	4	5	6	7
1	0	∞	5	∞	∞	∞	∞
2	10	0	∞	4	∞	∞	∞
3	∞	3	0	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	20	0	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	∞	0	8	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	6
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

j \ i	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	2	3	4	5	6	7
4	1	2	3	4	5	6	7
5	1	2	3	4	5	6	7
6	1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6	7

Рисунок 2 – матрица смежностей D_0 и матрица предшествований B_0 орграфа G

Теперь, используя алгоритм Флойда – Варшалла найдем кратчайшие пути между всеми парами вершин. При каждой итерации k элементы матрицы принимают значения в соответствии с формулой (3) [3], где $D_k[i, j]$ – элемент матрицы инцидентности k -й итерации, e_{ij}^{k-1} – значение элемента матрицы $k-1$ итерации, $e_{i,k}^{k-1} + e_{k,j}^{k-1}$ – сумма элементов матрицы k -й итерации, проходящих через вершину k . При этом элементы матрицы предшествий B_k принимают значения в соответствии с формулой (4):

$$D_k[i, j] = \min(e_{ij}^{k-1}, e_{i,k}^{k-1} + e_{k,j}^{k-1}), \quad i \neq j, (i, j) \in E, (i, k) \in E, (k, j) \in E \quad (3)$$

$$B_k[i, j] = \begin{cases} 0, & \text{если } i=j, \\ i_{k-1}, & \text{если } D_k[i, j] = D_{k-1}[i, j], i \neq j, (i, j) \in E, \\ i_k, & \text{если } D_k[i, j] \neq D_{k-1}[i, j], i \neq j, (i, j) \in E \end{cases} \quad (4)$$

Значения матриц D_k и B_k с полученными кратчайшими маршрутами представлены на рисунке 3, жирным шрифтом отмечены ячейки матриц, которые были изменены в ходе итераций, конечное число итераций – 7.

j \ i	1	2	3	4	5	6	7
1	0	8	5	12	∞	∞	∞
2	10	0	15	4	∞	∞	∞
3	13	3	0	7	∞	∞	∞
4	33	23	20	0	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	∞	0	8	14
6	∞	∞	∞	∞	∞	0	6
7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

j \ i	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	3	3	5	6	7
2	1	2	1	4	5	6	7
3	2	2	3	2	5	6	7
4	3	3	3	4	5	6	7
5	1	2	3	4	5	6	6
6	1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6	7

Рисунок 3 – Результат расчета кратчайших маршрутов графа G: D_7 – матрица инцидентности 7-й итерации; B_7 – матрица предшествий – маршрут следования из каждой вершины в любую другую

На рисунке 3, наглядно видно, что рассматриваемый граф несвязный: столбцы и строки 5, 6, 7 – заполнены знаком «∞» относительно столбцов и строк 1, 2, 3, 4. Это означает, что пункты возможного зарождения или погашения транспортных потоков 5, 6, 7 не имеют связи с пунктами 1, 2, 3, 4, или можно сказать, между ними отсутствуют возможные маршруты следования транспортных потоков. Если в орграфе знаком «∞» заполнена только одна ячейка или часть ячеек строки или столбца, это означает, что рассматриваемый орграф является слабо связным, т. е. связным неориентированным графом, полученным из орграфа путем замены дуг на рёбра [3]. Так как рассматривается транспортная сеть, слабо связный орграф указывает на пункты, связанные с остальными однонаправленно, то есть данный пункт имеет только либо входящие транспортные потоки, либо только исходящие. В рассматриваемом примере подграф 5, 6, 7 является слабо связным: вершина 5 имеет только исходящую дугу, а вершина 7 – только входящую. Результат анализа рисунка 3 – рассматриваемая транспортная сеть несвязанная.

Сделаем сеть связанной. Для этого необходимо орграф G сделать связным. Граф называется связным, если любые две его вершины связаны [1]. Так как мы рассматриваем орграф, то, чтобы обеспечить его связность, необходимо и достаточно, чтобы в каждую вершину входило и выходило минимум по одной дуге [3]. Соединим каждую из вершин 1, 2, 3, 4 с вершинами 5, 6, 7 так, чтобы каждая имела минимум по одной входящей и исходящей дуге, зададим вес дугам. Примечание: вес дуг определяется затратами, связанными с продвижением транспортных потоков по новым маршрутам. Полученный орграф G' представлен на рисунке 4. Рассмотренным выше методом составим матрицы смежности D'_0 и предшествий B'_0 (представлены на рисунке 5, а)) и определим кратчайшие маршруты в орграфе. Результат расчетов представлен на рисунке 5, б).

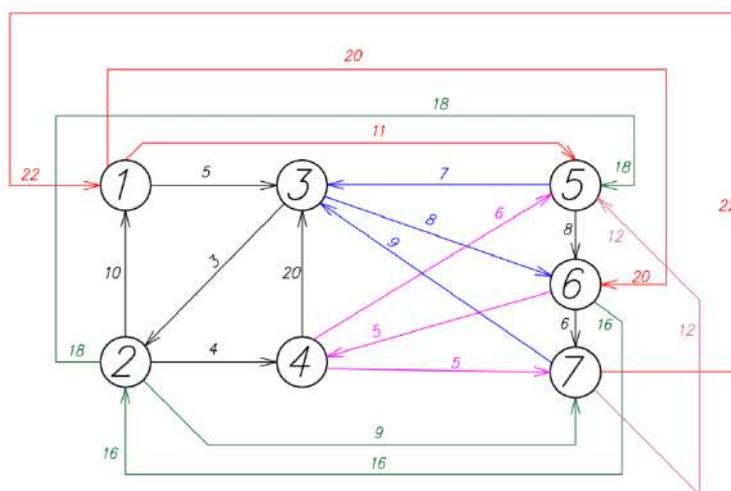


Рисунок 4 – Расчетный полигон с добавленными дугами, представленный в виде орграфа G'

В соответствии с полученными результатами откорректирован граф G' : дуги 1–5 и 2–5 не используются при построении кратчайших маршрутов. Откорректированный граф представлен на рисунке 6, где пунктирными линиями показаны дуги 2–9 и 7–2, от которых можно отказаться, тогда маршрут из вершины 7 в вершину 1 пройдет через вершины 7–3–2–1, длина полученного маршрута – равняется весу дуги 7–1 – 22 у. е., а во всех маршрутах, в которых задействована дуга 2–7, последнюю можно заменить дугами 2–4–7. Данные маршруты остались задействованы в матрице инцидентности D'_7 орграфа G' , так как они были в матрице смежностей, которая является «исходными данными» для расчета, а в соответствии с формулой (4) новое значение ячейке таблицы присваивается только если оно меньше существующего. Таким образом, в зависимости от требований, предъявляемых к транспортной сети, полученные данные необходимо подвергать логическому контролю. Необходимость сохранения полученных новых маршрутов, таких как 7–1 и 2–7, определяется параметрами существующей транспортной сети: пропускная способность участков, перерабатывающая способность пунктов возможного зарождения или погашения транспортных потоков. В случае если пропускная способность участка 4–7 или 3–2 исчерпаны, то маршруты 7–1 и 2–7 необходимы; если же пропускная способность участков 4–7 и 3–2 позволяют обеспечить пропуск потока, курсирующего по полученному маршруту 7–1 и 2–7, то от этих маршрутов можно отказаться.

С перерабатывающей способностью промежуточных пунктов аналогично: если мощности промежуточных пунктов на маршруте следования (для назначения 7–1 промежуточными пунктами будут 3, 2, для назначения 2–7 – пункт 4) позволяют обрабатывать транспортные потоки маршрутов 1–7 и 2–7, то от новых маршрутов можно отказаться, в противном случае их нужно оставить.

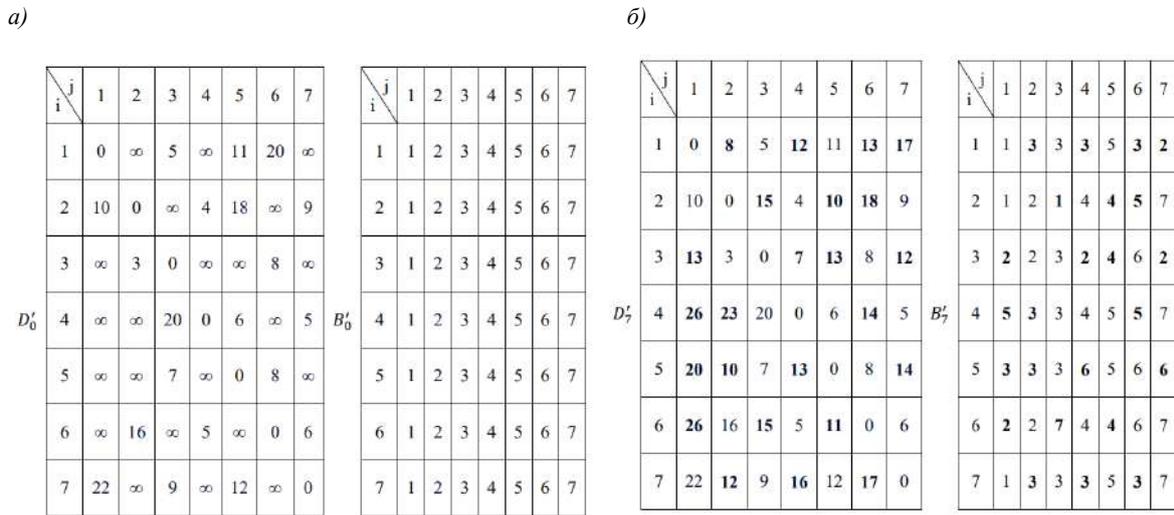


Рисунок 5 – Матрица смежностей D_0 и матрица предшествований B_0 орграфа G' (а), результат расчета кратчайших маршрутов орграфа G' (б)

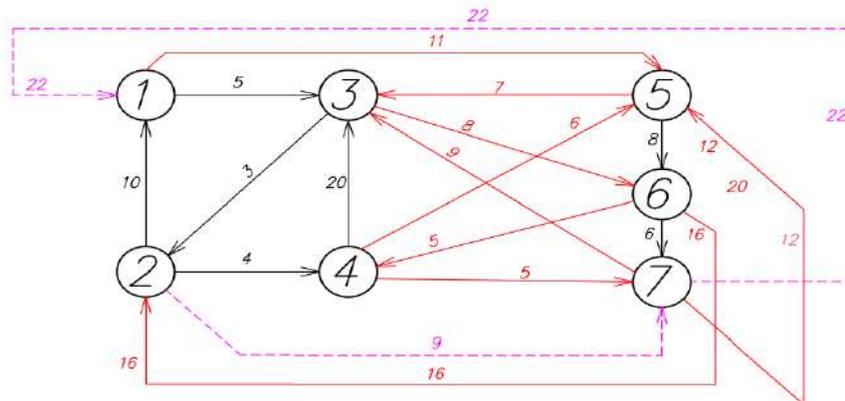


Рисунок 6 – Граф G' с участвующими в коротких маршрутах дугами

В статье рассмотрен простой пример транспортной сети – при его графической реализации (см. рисунок 1) наглядно видно отсутствие связей между пунктами, однако при работе с транспортными сетями с большим количеством пунктов возможного зарождения или погашения транспортных потоков, с большим числом возможных маршрутов следования транспортных потоков между ними определить связанность сети затруднительно. Предложенная методика позволяет наглядно в табличном виде представить транспортную сеть и определить ее связанность, в том числе определить между какими конкретными пунктами связь отсутствует. Также методика позволяет определить наиболее экономически выгодные варианты прокладки новых маршрутов, которые обеспечат связанность транспортной сети. Одним из достоинств данного метода является возможность его автоматизации – написание компьютерной программы.

Список литературы

- 1 Теория Графов / Д. В. Карпов. – М. : МЦНМО, 2022. – 560 с. – ISBN : 978-5-4439-1690-3.
- 2 Алгоритмы: построение и анализ / Т. Х. Кормен [и др.]. – 2-е изд. – М. : Вильямс, 2009. – ISBN : 978-5-8459-0857-5.
- 3 Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари ; пер. с англ. и предисл. В. П. Козырева ; под ред. Г. П. Гаврилова. – 2-е изд. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 296 с. – ISBN: 5-354-00301-6.

УДК 007.52: 656.11