

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНЫ С ЛИНЕЙНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ НЕСУЩИМИ СЛОЯМИ

А. В. ЧЕРНЯК

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

При работе трехслойных конструкций, содержащих жесткие и прочные внешние несущие слои и более мягкий срединный наполнитель, конструкция обладает хорошими прочностными и жесткостными свойствами при минимуме весовых характеристик. Поэтому очевидна потребность в разработке эффективных методов расчета напряженно-деформированного состояния подобного рода конструкций.

Деформирование и колебания трехслойных элементов конструкций уже было исследовано в работах многих авторов. Так, в монографиях [1–5] рассматриваются подходы к построению математических моделей трехслойных конструкций со слоями постоянной толщины. Динамическое деформирование трехслойных пластин рассматривалось в работах [6–12]. Деформирование трехслойных стержней, пластин и оболочек при квазистатических нагрузках в работах [12–17]. Трехслойные пластины с переменными несущими слоями рассматривались в работах [18, 19].

Приведем вывод уравнений равновесия для трехслойной сэндвич-пластины с линейно изменяющимися толщинами несущих слоев:

$$h_1(r) = h_0 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right), \quad h_2(r) = h_0 \left(1 + \frac{r}{2r_0} \right).$$

Задача решается в цилиндрической системе координат r, φ, z . Предполагается, что для внешних слоев справедливы гипотезы Кирхгофа, для толстого жесткого наполнителя принимается гипотеза Тимошенко – деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины и поворачивается на некоторый дополнительный угол. Перпендикулярно внешнему слою действует распределенная нагрузка $q = q(r)$. На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

Система уравнений равновесия в усилиях получена вариационным методом Лагранжа и имеет вид

$$\begin{cases} H_{rr} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q = 0 \\ M_{rrr} + \frac{1}{r}(2M_{rr} - M_{\varphi r}) = -q. \end{cases}$$

Подставив выражения внутренних усилий через перемещения в эти уравнения равновесия, получим систему линейных дифференциальных уравнений в перемещениях для определения искомых функций $\psi(r), w(r)$:

$$\begin{aligned} & a_4^+ \psi_{,rr} + \left[\frac{a_4^+}{r} - \frac{c^2 K_0^+ h_0}{r_0} \right] \psi_{,r} - \left[\frac{a_4^+}{r} + \frac{c^2 K_0^- h_0}{r_0} \right] \frac{\psi}{r} - a_5^+ w_{,rrr} - \left[\frac{a_5^+}{r} + \frac{ch_0^2 K_0^+ r}{2r_0^2} - \frac{(ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^+}{r_0} \right] w_{,rr} + \\ & + \left[\frac{a_5^+}{r} - \frac{ch_0^2 K_0^- r}{2r_0^2} + \frac{(ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^-}{r_0} \right] \frac{w_{,r}}{r} - 2cG_3 \psi = 0, \\ & a_5^+ \psi_{,rrr} + \left[\frac{2a_5^+}{r} + \frac{ch_0^2 K_0^+ r}{r_0^2} - \frac{(2ch_0^2 + 2c^2 h_0) K_0^+}{r_0} \right] \psi_{,rr} - \\ & - \left[\frac{a_5^+}{r^2} - \frac{ch_0^2}{2r_0^2} (3K_0^+ + K_0^-) + \left(\frac{2ch_0^2 + 2c^2 h_0}{r_0 r} \right) \left(K_0^+ + \frac{K_0^-}{2} \right) \right] \psi_{,r} + \\ & + \left[\frac{a_5^+}{r^2} - \frac{ch_0^2}{2r_0^2} (3K_0^+ - K_0^-) + \frac{3(2ch_0^2 + 2c^2 h_0) K_0^+}{2r_0 r} \right] \frac{\psi}{r} - a_6^+ w_{,rrr} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{2a_6^+}{r} - \frac{2h_0^3 K_0^+ r^2}{r_0^3} + \frac{(h_0^3 + ch_0^2) K_0^+ r}{r_0^2} - \frac{(h_0^3 + 2ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^+}{r_0} \right] w_{,rrr} + \\
& + \left[\frac{a_6^+}{r} + \frac{h_0^3 r}{r_0^3} \left(\frac{5}{2} K_0^+ + K_0^- \right) - \left(\frac{h_0^3 + ch_0^2}{r_0^2} \right) (2K_0^+ + K_0^-) + \left(\frac{h_0^3 + 2ch_0^2 + c^2 h_0}{r_0 r} \right) (K_0^+ + K_0^-) \right] w_{,rr} - \\
& - \left[\frac{a_6^+}{r^2} + \frac{h_0^3 r}{r_0^3} \left(3K_0^+ - \frac{K_0^-}{2} \right) - \left(\frac{h_0^3 + ch_0^2}{r_0^2} \right) (K_0^+ - K_0^-) + \frac{(h_0^3 + 2ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^+}{r_0 r} \right] \frac{w_{,r}}{r} = -q.
\end{aligned}$$

Краевая задача замыкается добавлением к полученным уравнениям граничных условий на контуре пластины.

Список литературы

- 1 **Горшков, А. Г.** Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
- 2 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.
- 3 **Журавков, М. А.** Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.
- 4 **Zhuravkov, M. A.** Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.
- 5 **Абдусаттаров, А.** Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : IDEAL PRESS, 2023. – 381 с.
- 6 **Fedotkov, G. V.** Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // Lobachevskii journal of mathematics. – 2019. – Vol. 40, no 4. – P. 439–447.
- 7 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2014. – № 1. – С. 59–63.
- 8 **Vakhneev, S.** Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – 18(4). – P. 699–704.
- 9 **Pronina, P. F.** Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects / P. F. Pronina, O. V. Tushavina, E. I. Starovoitov // Periódico Tchê Química. – 2020. – Vol. 17, no. 35. – P. 753–764.
- 10 **Трацевская, Е. Ю.** Демпфирующие свойства слабосвязных трехфазных грунтов / Е. Ю. Трацевская // Литосфера. – 2019. – № 2(51). – С. 115–121.
- 11 **Маркова, М. В.** Собственные колебания круговой трёхслойной ступенчатой пластины / М. В. Маркова // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – № 14 (14). – С. 147–158.
- 12 **Захарчук, Ю. В.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – № 11. – С. 80–87.
- 13 **Леоненко, Д. В.** Напряженно-деформированное состояние физически нелинейной трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / Д. В. Леоненко, А. С. Зеленая // Механика машин, механизмов и материалов. – 2018. – № 2 (43). – С. 77–82.
- 14 **Козел, А. Г.** Решение задачи об изгибе упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2019. – № 34. – С. 165–171.
- 15 **Нестерович, А. В.** Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика. – 2020. – № 35. – С. 246–252.
- 16 **Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field / É. I. Starovoitov [et al.] // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol. 88, no 4. – P. 1023–1029.**
- 17 **Черняк, А. В.** Изгиб сэндвич-пластины с внешними слоями, линейно изменяющимися по толщине / А. В. Черняк // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 235–240.
- 18 **Черняк, А. В.** Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины с переменными толщинами несущих слоев / А. В. Черняк // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XII Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 160-летию Бел. ж. д. В 2 ч., Гомель, 24–25 ноября 2022 г. / под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2022. – Ч. 2. – С. 269–271.