Из приведённых графиков видно, что как при квазистатическом, так и при динамическом деформировании наименьший прогиб возникает в пластине, имеющей уширение обоих внешних слоёв в центральной части. Её прогиб при квазистатическом деформировании на 20 % меньше, при динамическом – на 32 % меньше, чем прогиб, возникающий в пластине с той же материалоёмкостью при постоянной вдоль радиуса толщине всех слоёв.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т22М-072).

Список литературы

1 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // Механика композитных материалов. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120.

2 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. − 2014. − № 1. − С. 59−63.

3 **Маркова, М. В.** Вынужденные колебания круговой трёхслойной пластины ступенчато-переменной толщины / М. В. Маркова // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2022. – № 3 (132). – С. 121–127.

4 **Зорич, В. А.** Математический анализ. Ч. I / В. А. Зорич. – 6-е изд. доп. – М. : МЦНМО, 2012. – 710 с.

5 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговой трёхслойной пластины под действием линейной во времени внешней нагрузки / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 1. – С. 49–63.

УДК 539.3

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ПЛАСТИНЫ

М. В. МИР-САЛИМ-ЗАДЕ
Институт математики и механики, г. Баку, Азербайджан

Рассматривается упругая пластина, ослабленная бесконечным рядом одинаковых отверстий. Пластина подкреплена регулярной системой стрингеров и подвергается однородному растяжению вдоль стрингеров напряжением $\sigma_y^\infty = \sigma_0$. Вблизи контуров отверстий имеются прямолинейные трещины. Задача состоит в определении равнопрочного контура отверстий, при котором трещины не будут расти, а также напряженно-деформированного состояния перфорированной клепаной пластины и величин сосредоточенных сил P_{mn}, заменяющих действие стрингеров. Граничные условия задачи имеют вид:

– на неизвестных контурах L_m (m = 0, 1, 2, …) отверстий –

$$\sigma_n = 0, \qquad \tau_{nt} = 0,$$
$$\sigma_t = \sigma_* = \text{const}; \tag{1}$$

– на берегах трещин –

$$\sigma_y = 0, \qquad \tau_{xy} = 0 \qquad a + m\omega \le |x| \le b + m\omega.$$

Здесь величина σ_* для упругой пластины подлежит определению, а для упругопластической принимается условие пластичности [1]

$$f(\sigma_n, \sigma_t, \tau_{nt}) = 0, \tag{2}$$

где f – заданная функция. При этом полагается, что пластическая область впервые появляется на контуре отверстия, и, охватывая сразу весь контур, не проникает вглубь.

Требуется найти такую форму отверстий, при которой роста трещин не произойдет, а тангенциальное нормальное напряжение σ_t, действующее на контурах отверстий, будет постоянной величиной. Необходимо чтобы на контурах отверстий выполнялось условие (1), а в окрестности вершин трещин – условие

$$K_{\mathrm{I}}^{a\,+\,m\omega} = 0, \qquad K_{\mathrm{I}}^{b\,+\,m\omega} = 0, \tag{3}$$

где $K_{\mathrm{I}}^{a+m\omega}$, $K_{\mathrm{I}}^{b+m\omega}$ – коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности вершин трещин. Так как трещины расположены симметрично, $K_{\mathrm{I}}^{a+m\omega} = K_{\mathrm{I}}^{-a-m\omega}$, $K_{\mathrm{I}}^{b+m\omega} = K_{\mathrm{I}}^{-b-m\omega}$.

Неизвестный контур L_m (m = 0, 1, 2, …) отверстий будем искать как близкий к круговому. Представим его в виде $r = \rho(\theta) = \lambda + \varepsilon H(\theta)$. Здесь $\varepsilon = R_{\max}/\lambda$ – малый параметр; $R_{\max}$ – наибольшая высота неровности профиля контура L_m отверстия от окружности $r = \lambda$. Без уменьшения общности рассматриваемой задачи, принимается, что неизвестная функция $H(\theta)$ симметрична относительно осей координат и может быть представлена в виде ряда Фурье $H(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k} \cos 2k\theta$. Функции (напряжения, перемещения, сосредоточенные силы P_{mn} и коэффициенты интенсивности напряжений K_{I}) будем искать в виде разложений по малому параметру, в которых пренебрегаем для упрощения членами, содержащими ε степени выше первой.

С учетом известных формул [2] для компонент напряжений σ_n и τ_{nt} краевые условия задачи примут следующий вид:

1) в нулевом приближении:

– на контуре $r = \lambda$ $\quad \sigma_r^{(0)} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = 0;$

– на берегах трещин $\quad \sigma_y^{(0)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0 \quad a + m\omega \le |x| \le b + m\omega;$

2) в первом приближении:

– на контуре $r = \lambda$ $\quad \sigma_r^{(1)} = N, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = T,$

– на берегах трещин $\quad \sigma_y^{(1)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0 \quad a + m\omega \le |x| \le b + m\omega.$

Задача в нулевом приближении сводится к определению двух аналитических функций: $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Psi^{(0)}(z)$ – из условий

$$\Phi^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} - e^{2i\theta}\left[\bar{\tau}\Phi'^{(0)}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau)\right] = 0 \qquad \text{при } \tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega, \tag{4}$$

$$\Phi^{(0)}(x) + \overline{\Phi^{(0)}(x)} + x\overline{\Phi'^{(0)}(x)} + \overline{\Psi^{(0)}(x)} = 0 \qquad a + m\omega \le |x| \le b + m\omega. \tag{5}$$

Решение краевой задачи (4), (5) ищем в виде

$$\Phi^{(0)}(z) = \Phi_0^{(0)}(z) + \Phi_1^{(0)}(z) + \Phi_2^{(0)}(z), \qquad \Psi^{(0)}(z) = \Psi_0^{(0)}(z) + \Psi_1^{(0)}(z) + \Psi_2^{(0)}(z).$$

Для определения потенциалов $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Psi^{(0)}(z)$ строятся две бесконечные системы алгебраических уравнений и сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $g^{(0)}(x)$. Сингулярное интегральное уравнение и построенные алгебраические системы содержат величины сосредоточенных сил $P_{mn}^{(0)}$. Чтобы определить эти величины, используем закон Гука и метод «склеивания» двух асимптотик искомого решения. Используя процедуру алгебраизации [3, 4] сингулярное интегральное уравнение при дополнительном условии, которое обеспечивает однозначность перемещений при обходе контуров трещин, сводим к системе M линейных алгебраических уравнений для определения M неизвестных $g^{(0)}(\tau_m)$ (m = 1, 2, …, M).

Для коэффициентов интенсивности напряжений около окрестности вершин трещин при $x = a + m\omega$ в нулевом приближении имеем

$$K_{\mathrm{I}}^{(0)} = \sqrt{\pi(b-a)} \sum_{m=1}^{M} (-1)^{m+M} g^{(0)}(t_m) \operatorname{tg}\frac{2m-1}{4M}\pi,$$

около вершин трещин $x = b + m\omega$:

$$K_{\mathrm{I}}^{(0)} = \sqrt{\pi(b-a)} \sum_{m=1}^{M} (-1)^{m} g^{(0)}(t_m) \operatorname{ctg}\frac{2m-1}{4M}\pi.$$

После нахождения решения в нулевом приближении строим решение задачи в первом приближении. Полученные системы уравнений первого приближения не являются замкнутыми, так как в правые части этих систем входят коэффициенты d_{2k} разложения функции $H(\theta)$ в ряд Фурье. Для построения недостающих уравнений используем граничное условие (1) при дополнительных ограничениях (3). Для построения недостающих уравнений, позволяющих определить коэффициенты d_{2k}, требуется, чтобы обеспечивалось распределение напряжений на контурах отверстий, близкое к равномерному. Снижение концентрации напряжений на контурах отверстий осуществляем путем минимизации критерия $U=\sum_{i=1}^{M}\left[\sigma_t(\theta_i)-\sigma_*\right]^2 \to \min$, где σ_* − неизвестное оптимальное значение нормального тангенциального напряжения в поверхностном слое отверстия.

Поставленная задача оптимизации состоит в том, чтобы найти значения неизвестных коэффициентов d_{2k}, обеспечивающие наилучшим образом величины функции $\sigma_t(\theta_i)$ согласно условию (1) при дополнительных ограничениях (3). Таким образом, приходим к задаче на условный экстремум функции $U(\sigma_*, d_{2k})$, когда коэффициенты d_{2k} связаны с дополнительным условием

$$K_{\mathrm{I}}^{(0)a+m\omega}+\varepsilon K_{\mathrm{I}}^{(1)a+m\omega}=0, \qquad K_{\mathrm{I}}^{(0)b+m\omega}+\varepsilon K_{\mathrm{I}}^{(1)b+m\omega}=0.$$

Для решения задачи на условный экстремум используем метод неопределенных множителей Лагранжа.

Построенные системы уравнений позволяют определить форму равнопрочного контура отверстий, напряженно-деформированное состояние перфорированной стрингерной пластины, а также оптимальное значение нормального тангенциального напряжения σ_*.

Список литературы

1 **Ишлинский, А. Ю.** Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 704 с.

2 **Мусхелишвили, Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 708 с.

3 **Панасюк, В. В.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – Киев : Наук. думка, 1976. – 442 с.

4 **Мирсалимов, В. М.** Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука. 1987. – 256 с.

УДК 517.958

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В СТЕНКАХ КОЛЬЦЕВОГО КАНАЛА С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ВЫПОЛНЕННОГО ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА С ДРОБНОЙ И КВАДРАТИЧНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Л. И. МОГИЛЕВИЧ, Е. В. ПОПОВА, М. В. ПОПОВА
Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., Российская Федерация

Неразрушающие методы контроля состояния изделий на базе возбуждения в них волн деформации и анализа их эволюции широко применяются для диагностики состояния поверхности [1], контроля состояния упругих конструкций, таких как элементы транспортной инфраструктуры, зданий и сооружений, в том числе стенок трубопроводов [2]. Подходы линейной волновой динамики хорошо развиты [3], но внедрение новых материалов, имеющих нелинейные механические свойства, требует создания фундаментального задела в нелинейной волновой динамике. Предлагаемое исследование нацелено на разработку математической модели для исследования эволюции нелинейных уединенных волн деформации в стенках кольцевого канала, заполненного вязкой несжимаемой жидкостью. В силу осевой симметрии канала исследован осесимметричный случай, когда его стенки рассматриваются как две бесконечно длинные цилиндрические оболочки, выполненные из несжимаемого материала. Другими словами, полагаем, что коэффициент Пуассона материала оболочек равен ½. Кроме того, считаем, что материал рассматриваемых оболочек одинаковый и для него принят нелинейный физический закон, свя-