

комые величины принимаются прогиб пластины $w_l(r)$, относительный сдвиг в заполнителе $\psi_l(r)$ и радиальное перемещение координатной плоскости $u_l(r)$ на каждом участке l , которые не зависят от окружной координаты φ . На границе областей принимаем равенство перемещений и обобщенных внутренних усилий.

С помощью вариационного принципа Лагранжа и соотношений теории малых упругопластических деформаций получена система дифференциальных уравнений равновесия на каждом участке l :

$$L_2(a_{1l}u_l + a_{2l}\psi_l - a_{3l}w_{l,r}) = p_\omega, \quad L_2(a_{2l}u_l + a_{4l}\psi_l - a_{5l}w_{l,r}) = h_\omega, \\ L_3(a_{3l}u_l + a_{5l}\psi_l - a_{6l}w_{l,r}) = -q_l + q_\omega.$$

Полученная система дифференциальных уравнений является нелинейной, поэтому для ее решения используем метод последовательных приближений Ильюшина.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T22УЗБ-015).

Список литературы

- 1 Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2013. – № 1 (22). – С. 31–35.
- 2 Леоненко, Д. В. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Д. В. Леоненко, Э. И. Старовойтов // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 162–169.
- 3 Леоненко, Д. В. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2014. – № 1. – С. 59–63.
- 4 Коренева, Е. Б. Аналитические методы расчета пластин переменной толщины и их практические приложения / Е. Б. Коренева. – М.: АСВ, 2009. – 240 с.
- 5 Коваленко, А. Д. Круглые пластины переменной толщины / А. Д. Коваленко. – М.: Физматгиз, 1959. – 294 с.
- 6 Vivio, F. Closed form solutions of axisymmetric bending of circular plates having non-linear variable thickness / F. Vivio, V. Vullo // *Int. J. Mech. Sci.* – 2010. – No. 52 – P. 1234–1252.
- 7 Kang, J. H. Three-dimensional vibration analysis of thick, circular and annular plates with nonlinear thickness variation / J. H. Kang // *Comput. Struct.* – 2003. – No. 81. – P. 1663–1675.
- 8 Маркова, М. В. Вынужденные колебания круговой трёхслойной пластины ступенчато-переменной толщины, возбуждаемые ударным воздействием / М. В. Маркова // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2022. – № 3 (52). – С. 28–36.
- 9 Leonenko, D. V. Elastic bending of a three-layer circular plate with step-variable thickness / D. V. Leonenko // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2021. – № 1 (54). – С. 25–29.

УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ КРУГОВОГО ТРЁХСЛОЙНОГО ЭЛЕМЕНТА

М. В. МАРКОВА

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Композитные слоистые элементы обладают явными преимуществами перед элементами конструкций, выполненными из одного однородного материала. Сочетая в рамках единого совместно работающего пакета свойства разнородных материалов, мы можем не только наделить проектируемый элемент требуемыми показателями по тепло-, электропроводности и магнитной непроницаемости, но и добиться снижения совокупной собственной массы при обеспечении требуемых показателей по жёсткости и прочности.

В данной работе будет рассмотрен один из способов оптимизации поперечного сечения трёхслойной круговой пластины, основанный на локальном изменении толщины несущих слоёв.

Построение механико-математической модели деформирования трёхслойного пакета основано на гипотезе ломаной нормали [1]. Уравнения движения получены из вариационного принципа Гамильтона [2, 3] в виде (1):

$$\Delta_r \Delta_r w + Dm \Delta_r \ddot{w} + DM_1 \ddot{w} = Dq, \\ u = b_1 w_{,r} + rC_1 + \frac{C_2}{r} - \frac{m_1}{r} \int r \ddot{w} dr, \quad \psi = b_2 w_{,r} + rC_3 + \frac{C_4}{r} - \frac{m_2}{r} \int r \ddot{w} dr, \quad (1)$$

где w, ψ, u – прогиб пластины, сдвиг в заполнителе и радиальное смещение координатной поверхности соответственно; Δ_r – оператор Лапласа; D, m_i, M_1, b_i – коэффициенты, зависящие от плотности, упругих свойств материалов и толщины слоёв пластины; q – внешняя нагрузка; C_i – константы интегрирования, определяемые из граничных условий на опоре и в центральной точке пластины.

Система уравнений, описывающая квазистатическое деформирование, получена путём обнуления инерционных слагаемых в системе (1) и имеет вид (2):

$$\Delta_r \Delta_r w = Dq, \quad u = b_1 w_{,r} + rC_1 + \frac{C_2}{r}, \quad \psi = b_2 w_{,r} + rC_3 + \frac{C_4}{r}. \quad (2)$$

Рассмотрим пластины различных форм, но равной материалоемкости (рисунок 1).

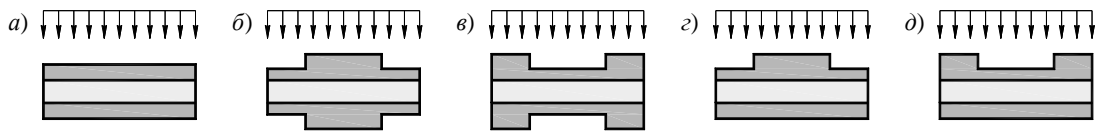


Рисунок 1 – Формы трёхслойных пластин:

a – пластина с постоянной толщиной всех слоёв;

b – пластина со ступенчатым уширением верхнего и нижнего слоя в центральной части; *c* – пластина со ступенчатым сужением верхнего и нижнего слоев в центральной части;

d – пластина со ступенчатым уширением верхнего слоя в центральной части

Рассматриваемый пакет представлен материалами Д16Т – фторопласт-4 – Д16Т. Физико-механические характеристики материалов: дюралюминий (Д16Т) – $\rho_{1,2} = 2700 \text{ кг/м}^3$; $K_{1,2} = 0,8 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $G_{1,2} = 0,267 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; фторопласт-4 – $\rho_3 = 2150 \text{ кг/м}^3$; $K_3 = 345 \cdot 10^6 \text{ Па}$, $G_3 = 90 \cdot 10^6 \text{ Па}$.

Геометрические параметры: общий радиус пластины 1 м; радиус уширенной части 0,707 м; толщина срединного заполнителя 0,3 м; толщина плоского лицевого слоя пластин 0,03 м; толщина ступенчатого лицевого слоя на наиболее узком участке составляет 0,02 м, на наиболее широком – 0,04 м.

Внешний контур пластин жёстко закреплён. При этом на контуре пластин должны выполняться следующие условия:

$$w = 0; \quad u = 0; \quad w_{,r} = 0; \quad \psi = 0. \quad (3)$$

Начальные условия приняты однородными.

Решение для пластины ступенчатого профиля строится с помощью функции Хевисайда [4] из частных решений для каждого участка постоянной толщины. При этом для ступенчатой пластины дополнительно к граничным условиям (3) необходимо потребовать выполнение равенства всех перемещений и внутренних усилий в точке сопряжения участков различной толщины [5].

Сравнительный анализ будем вести по величине возникающих в пластинах прогибов. Пластины загружены равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью 100 кПа. На рисунке 2 представлены графики изменения прогибов вдоль радиусов рассматриваемых пластин при квазистатическом и динамическом (в момент достижения первого максимального прогиба) деформировании.

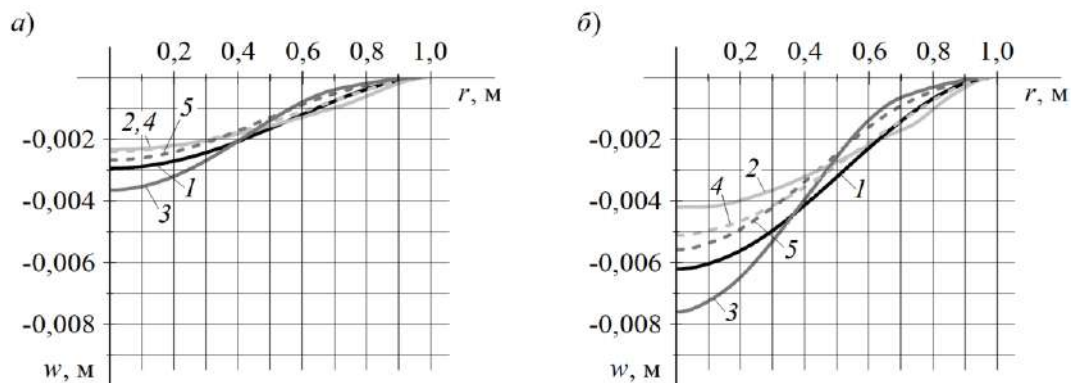


Рисунок 2 – Изменение прогиба вдоль радиуса пластины при квазистатическом (а) и динамическом (б) деформировании:

1 – пластина с постоянной толщиной всех слоёв; *2* – пластина со ступенчатым уширением верхнего и нижнего слоя в центральной части; *3* – пластина со ступенчатым сужением верхнего и нижнего слоя в центральной части; *4* – пластина со ступенчатым уширением верхнего слоя в центральной части; *5* – пластина со ступенчатым сужением верхнего слоя в центральной части

Из приведённых графиков видно, что как при квазистатическом, так и при динамическом деформировании наименьший прогиб возникает в пластине, имеющей уширение обоих внешних слоёв в центральной части. Её прогиб при квазистатическом деформировании на 20 % меньше, при динамическом – на 32 % меньше, чем прогиб, возникающий в пластине с той же материалоемкостью при постоянной вдоль радиуса толщине всех слоёв.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T22M-072).

Список литературы

- 1 Старовойтов, Э. И. Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // Механика композитных материалов. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120.
- 2 Леоненко, Д. В. Колебания круговых трёхслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2014. – № 1. – С. 59–63.
- 3 Маркова, М. В. Вынужденные колебания круговой трёхслойной пластины ступенчато-переменной толщины / М. В. Маркова // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2022. – № 3 (132). – С. 121–127.
- 4 Зорич, В. А. Математический анализ. Ч. I / В. А. Зорич. – 6-е изд. доп. – М. : МЦНМО, 2012. – 710 с.
- 5 Леоненко, Д. В. Колебания круговой трёхслойной пластины под действием линейной во времени внешней нагрузки / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 1. – С. 49–63.

УДК 539.3

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ПЛАСТИНЫ

М. В. МИР-САЛИМ-ЗАДЕ

Институт математики и механики, г. Баку, Азербайджан

Рассматривается упругая пластина, ослабленная бесконечным рядом одинаковых отверстий. Пластина подкреплена регулярной системой стрингеров и подвергается однородному растяжению вдоль стрингеров напряжением $\sigma_y^\infty = \sigma_0$. Вблизи контуров отверстий имеются прямолинейные трещины. Задача состоит в определении равнопрочного контура отверстий, при котором трещины не будут расти, а также напряженно-деформированного состояния перфорированной клепаной пластины и величин сосредоточенных сил P_{mn} , заменяющих действие стрингеров. Граничные условия задачи имеют вид:

– на неизвестных контурах L_m ($m = 0, 1, 2, \dots$) отверстий –

$$\begin{aligned} \sigma_n &= 0, & \tau_{nt} &= 0, \\ \sigma_t &= \sigma_* = \text{const}; \end{aligned} \quad (1)$$

– на берегах трещин –

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad a + m\omega \leq |x| \leq b + m\omega.$$

Здесь величина σ_* для упругой пластины подлежит определению, а для упругопластической принимается условие пластичности [1]

$$f(\sigma_n, \sigma_t, \tau_{nt}) = 0, \quad (2)$$

где f – заданная функция. При этом полагается, что пластическая область впервые появляется на контуре отверстия, и, охватывая сразу весь контур, не проникает вглубь.

Требуется найти такую форму отверстий, при которой роста трещин не произойдет, а тангенциальное нормальное напряжение σ_t , действующее на контурах отверстий, будет постоянной величиной. Необходимо чтобы на контурах отверстий выполнялось условие (1), а в окрестности вершин трещин – условие

$$K_I^{a+m\omega} = 0, \quad K_I^{b+m\omega} = 0, \quad (3)$$