

## Список литературы

- 1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
- 2 Журавков, М. А. Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.
- 3 Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.
- 4 Zhuravkov, M. A. Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E. I. Starovoitov – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.
- 5 Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : IDEAL PRESS, 2023. – 381 с.
- 6 Starovoitov, É. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, no 5. – P. 474–481.
- 7 Горшков, А. Г. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. – С. 45–52.
- 8 Fedotenkov, G. V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // Lobachevskii journal of mathematics. – 2019. – Vol. 40, no 4. – P. 439–447.
- 9 Vakhneev, S. Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – 18(4). – P. 699–704.
- 10 Pronina, P. F. Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects / P. F. Pronina, O. V. Tushavina, E. I. Starovoitov // Periódico Tchê Química. – 2020. – Vol. 17, no. 35. – P. 753–764.
- 11 Леоненко, Д. В. Резонансные колебания упругих круговых трехслойных пластин, скрепленных с основанием Пастернака / Д. В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – № 4. – С. 98–104.
- 12 Маркова, М. В. Постановка начально-краевой задачи об осесимметричных колебаниях круговой трёхслойной пластины переменной толщины / М. В. Маркова, Д. В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика. – 2022. – № 36. – С. 3–10.
- 13 Маркова, М. В. Собственные колебания круговой трёхслойной ступенчатой пластины / М. В. Маркова // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 147–158.
- 14 Козел, А. Г. Решение задачи об изгибе упругопластической круговой пластины на основании пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2019. – № 34. – С. 165–171.
- 15 Захарчук, Ю. В. Упругое деформирование круговых трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем осесимметричными нагрузками / Ю. В. Захарчук // Теоретическая и прикладная механика. – 2022. – С. 34–41.
- 16 Нестерович, А. В. Радиальное и тангенциальное неосесимметричное нагружение круговой трехслойной пластины / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2020. – № 13. – С. 116–121.
- 17 Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field / É. I. Starovoitov [et al.] // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol. 88, no 4. – P. 1023–1029.
- 18 Лачугина, Е. А. Задача о свободных колебаниях пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XII Междунар. науч.-практ. конф. : в 2 ч., Гомель, 24–25 ноябр. 2022 г. ; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2022. – Ч. 2. – С. 202–204.
- 19 Лачугина, Е. А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими наполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.

УДК 539.3

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

*Д. В. ЛЕОНЕНКО*

*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

Распространенное использование тонкостенных элементов в сферах строительства и машиностроения выдвинуло требование к разработке методов для анализа и расчета подобных структур [1–3]. Исследование статического нагружения однослойных круглых пластин было предметом изучения как отечественных [4, 5], так и зарубежных исследователей [6]. В последнее время активно проводятся исследования, посвященные колебаниям пластин с переменной толщиной [7, 8]. Также внимание уделяется упругому изгибу ступенчатых пластин [9]. Здесь проводится постановка задачи осесимметричного поперечного изгиба круглой трехслойной пластины с переменной ступенчатой толщиной и нелинейным характером деформаций материала.

Ступенчатая пластина разбивается на две области постоянной толщины. На внешнюю поверхность каждой из областей действуют осесимметричные распределенные нагрузки  $q_1(r)$ ,  $q_2(r)$ . За ис-

комые величины принимаются прогиб пластины  $w_l(r)$ , относительный сдвиг в заполнителе  $\psi_l(r)$  и радиальное перемещение координатной плоскости  $u_l(r)$  на каждом участке  $l$ , которые не зависят от окружной координаты  $\varphi$ . На границе областей принимаем равенство перемещений и обобщенных внутренних усилий.

С помощью вариационного принципа Лагранжа и соотношений теории малых упругопластических деформаций получена система дифференциальных уравнений равновесия на каждом участке  $l$ :

$$L_2(a_{1l}u_l + a_{2l}\psi_l - a_{3l}w_{l,r}) = p_\omega, \quad L_2(a_{2l}u_l + a_{4l}\psi_l - a_{5l}w_{l,r}) = h_\omega, \\ L_3(a_{3l}u_l + a_{5l}\psi_l - a_{6l}w_{l,r}) = -q_l + q_\omega.$$

Полученная система дифференциальных уравнений является нелинейной, поэтому для ее решения используем метод последовательных приближений Ильюшина.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T22УЗБ-015).*

#### Список литературы

- 1 Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 1 (22). – С. 31–35.
- 2 Леоненко, Д. В. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Д. В. Леоненко, Э. И. Старовойтов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 162–169.
- 3 Леоненко, Д. В. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2014. – № 1. – С. 59–63.
- 4 Коренева, Е. Б. Аналитические методы расчета пластин переменной толщины и их практические приложения / Е. Б. Коренева. – М.: АСВ, 2009. – 240 с.
- 5 Коваленко, А. Д. Круглые пластины переменной толщины / А. Д. Коваленко. – М.: Физматгиз, 1959. – 294 с.
- 6 Vivio, F. Closed form solutions of axisymmetric bending of circular plates having non-linear variable thickness / F. Vivio, V. Vullo // Int. J. Mech. Sci. – 2010. – No. 52 – P. 1234–1252.
- 7 Kang, J. H. Three-dimensional vibration analysis of thick, circular and annular plates with nonlinear thickness variation / J. H. Kang // Comput. Struct. – 2003. – No. 81. – P. 1663–1675.
- 8 Маркова, М. В. Вынужденные колебания круговой трёхслойной пластины ступенчато-переменной толщины, возбуждаемые ударным воздействием / М. В. Маркова // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 28–36.
- 9 Leonenko, D. V. Elastic bending of a three-layer circular plate with step-variable thickness / D. V. Leonenko // Механика машин, механизмов и материалов. – 2021. – № 1 (54). – С. 25–29.

УДК 539.3

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ КРУГОВОГО ТРЁХСЛОЙНОГО ЭЛЕМЕНТА

М. В. МАРКОВА

*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

Композитные слоистые элементы обладают явными преимуществами перед элементами конструкций, выполненными из одного однородного материала. Сочетая в рамках единого совместно работающего пакета свойства разнородных материалов, мы можем не только наделить проектируемый элемент требуемыми показателями по тепло-, электропроводности и магнитной непроницаемости, но и добиться снижения совокупной собственной массы при обеспечении требуемых показателей по жёсткости и прочности.

В данной работе будет рассмотрен один из способов оптимизации поперечного сечения трёхслойной круговой пластины, основанный на локальном изменении толщины несущих слоёв.

Построение механико-математической модели деформирования трёхслойного пакета основано на гипотезе ломаной нормали [1]. Уравнения движения получены из вариационного принципа Гамильтона [2, 3] в виде (1):

$$\Delta_r \Delta_r w + Dm \Delta_r \ddot{w} + DM_1 \ddot{w} = Dq, \\ u = b_1 w_{,r} + rC_1 + \frac{C_2}{r} - \frac{m_1}{r} \int r \ddot{w} dr, \quad \psi = b_2 w_{,r} + rC_3 + \frac{C_4}{r} - \frac{m_2}{r} \int r \ddot{w} dr, \quad (1)$$