

различной формой образующей (цилиндре, сфере, конусе, торе и тороиде) при однородных и неоднородных полях внешних сил.

Предложенное решение задачи о безмоментном состоянии оболочек из СПФ может, во-первых, рассматриваться как частное решение задачи моментной теории оболочек из СПФ, а также использоваться при предварительном проектировании тонкостенных элементов с памятью формы.

*Работа выполнена в рамках Государственного задания ИПРИМ РАН (№ 121112200124-1).*

#### Список литературы

- 1 Краевые задачи механики для сплавов с памятью формы / А. А. Мовчан [и др.] // Ученые записки Казанского Университета – Сер.: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157, № 3. – С. 97–110.
- 2 Сильченко, Л. Г. Явление потери устойчивости при мартенситной неупругости / Л. Г. Сильченко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2002. – Т. 8, № 2. – С. 161–169.
- 3 Устойчивость стержней из никелида титана, нагружаемых в режиме мартенситной неупругости / А. А. Мовчан [и др.] // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2012. – № 3. – С. 72–80.
- 4 Sil'chenko, L. G. Stability of a cylindrical shell made of a shape-memory alloy / L. G. Sil'chenko, A. A. Movchan, T. L. Sil'chenko // International Applied Mechanics. – 2014. – Vol. 50, no. 2. – P. 171–178.
- 5 Nushtaev, D. V. Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions / D. V. Nushtaev, S. I. Zhavoronok // IFAC-PapersOnline. – 2018. – P. 873–878.
- 6 Nushtaev, D. V. Abnormal buckling of thin-walled bodies with shape memory effects under thermally induced phase transitions / D. V. Nushtaev, S. I. Zhavoronok // Advanced Structured Materials. – 2019. – Vol. 110. – P. 493–524.
- 7 Мовчан, А. А. Экспериментальное исследование и теоретический анализ потери устойчивости пластин из никелида титана, обусловленной прямым термоупругим фазовым превращением под действием сжимающей нагрузки / А. А. Мовчан, С. А. Казарина, А. Л. Сильченко // Деформация и разрушение материалов. – 2023. – № 7. – С. 2–11.
- 8 Мовчан, А. А. Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях / А. А. Мовчан, И. А. Мовчан, Л. Г. Сильченко // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2010. – № 3. – С. 118–130.
- 9 Машинин, А. Е. Краевые задачи термомеханики для цилиндра и сферы из сплава с памятью формы / А. Е. Машинин, А. А. Мовчан // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 3. – С. 113–128.
- 10 Eremeyev, V. A. The nonlinear theory of elastic shells with phase transitions / V. A. Eremeyev, W. Pietraszkiewicz // Journal of Elasticity. – 2004. – Vol. 74, no. 1. – P. 67–86.
- 11 Pietraszkiewicz, W. Extended non-linear relations of elastic shells undergoing phase transitions / W. Pietraszkiewicz, V. Eremeyev, V. Konopinska // ZAMM. – 2007. – Vol. 7, no. 2. – P. 150–159.
- 12 Жаворонок, С. И. Об уравнениях совместности деформаций и постановках задач в обобщенных усилиях теории оболочек с фазово-структурными переходами / С. И. Жаворонок // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XI Междунар. науч.-практ. конф. – 2021. – С. 130–132.
- 13 Zhavoronok, S. I. Constitutive relations and compatibility equations for thin shape memory alloy shells / S. I. Zhavoronok // AIP Conference Proceedings. – 2022. – Vol. 2611. – P. 100004.
- 14 Zhavoronok, S. I. On the incremental constitutive relations and compatibility equations for thin shape memory alloy shells undergoing non-isothermal phase transitions / S. I. Zhavoronok // Composites: Mechanics, Computations, Applications. – 2023. – Vol. 14, no. 1. – P. 1–27.
- 15 Kurbatov, A. S. On the theory of shape memory membrane shells undergoing thermoelastic phase transitions / A. S. Kurbatov, S. I. Zhavoronok // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44, no. 6. – P. 2326–2335.
- 16 Мовчан, А. А. Инкрементальные определяющие соотношения для объемной доли мартенситной фазы в сплавах с памятью формы / А. А. Мовчан, В. В. Давыдов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т. 16, № 4-2. – С. 653–661.
- 17 Movchan, A. A. Method of analytical inverting of nonlinear constitutive relations of the combined model of phase and structural deformation of shape memory alloys / A. A. Movchan // AIP Conference Proceedings. – 2022. – Vol. 2611. – P. 100005.

УДК 620.178.156.6

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЯТИСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ

*Е. А. ЛАЧУГИНА*

*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

Композитные элементы конструкций, в том числе и пятислойные пластины, широко используются в различных областях современной техники. В результате за последние 50 лет в механике деформируемого твердого тела появилось целое направление, связанное с исследованием деформиру-

вания слоистых пластин и оболочек. Поэтому построение математической модели осесимметричных собственных колебаний круговой пятислойной пластины является актуальным.

Методы расчета и постановки краевых задач для слоистых элементов конструкций рассмотрены в монографиях [1–5]. Колебания неоднородных пластин и оболочек при периодических и нестационарных нагрузках исследовались в публикациях [6–13]. Статьи [14–17] посвящены квазистатическому деформированию трехслойных пластин. Постановка задачи о колебаниях пятислойной круговой пластины разрабатывалась в [18–19].

Здесь для симметричной по толщине упругой круговой пятислойной пластины с легкими заполнителями приведена система дифференциальных уравнений, описывающих собственные колебания пятислойной круговой пластины с двумя легкими заполнителями. Вывод уравнений движения проведен в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , которая связана со срединной плоскостью центрального слоя. В тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности. В заполнителях не учитывается работа касательных напряжений.

На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ( $\psi = 0$  при  $r = r_0$ ). Рассматривается осесимметричная задача, поэтому тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а искомые прогиб пластины  $w$  и относительный сдвиг в заполнителе  $\psi$  не зависят от координаты  $\varphi$ .

Система уравнения движения получена при помощи вариационного принципа Лагранжа и принципа Даламбера:

$$\begin{aligned} L_2(a_4\psi - a_5w, r) &= 0, \\ L_3(a_3\psi - a_6w, r) - M_0\ddot{w} &= 0, \end{aligned}$$

где  $M_0\ddot{w}$  – поперечные инерционные силы,  $M_0 = (\rho_1h_1 + \rho_2h_2 + \rho_3h_3 + \rho_4h_4 + \rho_5h_5)r_0^2$ ;  $a_i$  – коэффициенты

$$\begin{aligned} a_4 &= \left[ 2K_2^+ h_2 h_3^2 + 2K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right], \quad a_5 = \left[ K_2^+ h_2 h_3 (h_1 + 2h_3 + h_2) + 2K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right], \\ a_6 &= \left[ 2K_2^+ h_2 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right], \\ a_7 &= \left[ 2K_2^- h_2 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + K_1^- \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^- h_3 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right], \\ K_k + \frac{4}{3}G_k &\equiv K_k^+, \quad K_k - \frac{2}{3}G_k \equiv K_k^-, \end{aligned}$$

$G_k, K_k$  – модули сдвига и объемного деформирования;  $L_2, L_3$  – линейные дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv \left( \frac{1}{r}(rg), r \right), r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_{rr}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g)), r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_{rr}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Начальные условия движения принимаются однородными, на контуре должны выполняться условия жесткой заделки

$$u = \psi = w = w, r = 0, \text{ при } r = r_0.$$

Трансцендентное уравнение для вычисления собственных чисел  $\beta_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) следует из граничных условий. При жесткой заделке контура пластины имеем

$$I_1(\beta r_0)J_0(\beta r_0) + I_0(\beta r_0)J_1(\beta r_0) = 0.$$

Частоты собственных колебаний  $\omega_n$  связаны с собственными числами следующими соотношениями:

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}; \quad M^4 = M_0 D; \quad D = \frac{a_4}{a_4 a_6 - a_5^2}.$$

Перемещения в рассматриваемой пластине предполагается определять методом разложения в ряд по системе собственных ортонормированных функций.

*Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-25».*

## Список литературы

- 1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
- 2 Журавков, М. А. Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.
- 3 Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.
- 4 Zhuravkov, M. A. Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E. I. Starovoitov – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.
- 5 Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : IDEAL PRESS, 2023. – 381 с.
- 6 Starovoitov, É. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, no 5. – P. 474–481.
- 7 Горшков, А. Г. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. – С. 45–52.
- 8 Fedotenkov, G. V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // Lobachevskii journal of mathematics. – 2019. – Vol. 40, no 4. – P. 439–447.
- 9 Vakhneev, S. Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – 18(4). – P. 699–704.
- 10 Pronina, P. F. Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects / P. F. Pronina, O. V. Tushavina, E. I. Starovoitov // Periódico Tchê Química. – 2020. – Vol. 17, no. 35. – P. 753–764.
- 11 Леоненко, Д. В. Резонансные колебания упругих круговых трехслойных пластин, скрепленных с основанием Пастернака / Д. В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – № 4. – С. 98–104.
- 12 Маркова, М. В. Постановка начально-краевой задачи об осесимметричных колебаниях круговой трёхслойной пластины переменной толщины / М. В. Маркова, Д. В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика. – 2022. – № 36. – С. 3–10.
- 13 Маркова, М. В. Собственные колебания круговой трёхслойной ступенчатой пластины / М. В. Маркова // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 147–158.
- 14 Козел, А. Г. Решение задачи об изгибе упругопластической круговой пластины на основании пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2019. – № 34. – С. 165–171.
- 15 Захарчук, Ю. В. Упругое деформирование круговых трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем осесимметричными нагрузками / Ю. В. Захарчук // Теоретическая и прикладная механика. – 2022. – С. 34–41.
- 16 Нестерович, А. В. Радиальное и тангенциальное неосесимметричное нагружение круговой трехслойной пластины / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2020. – № 13. – С. 116–121.
- 17 Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field / É. I. Starovoitov [et al.] // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol. 88, no 4. – P. 1023–1029.
- 18 Лачугина, Е. А. Задача о свободных колебаниях пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XII Междунар. науч.-практ. конф. : в 2 ч., Гомель, 24–25 ноябр. 2022 г. ; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2022. – Ч. 2. – С. 202–204.
- 19 Лачугина, Е. А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими наполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.

УДК 539.3

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

*Д. В. ЛЕОНЕНКО*

*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

Распространенное использование тонкостенных элементов в сферах строительства и машиностроения выдвинуло требование к разработке методов для анализа и расчета подобных структур [1–3]. Исследование статического нагружения однослойных круглых пластин было предметом изучения как отечественных [4, 5], так и зарубежных исследователей [6]. В последнее время активно проводятся исследования, посвященные колебаниям пластин с переменной толщиной [7, 8]. Также внимание уделяется упругому изгибу ступенчатых пластин [9]. Здесь проводится постановка задачи осесимметричного поперечного изгиба круглой трехслойной пластины с переменной ступенчатой толщиной и нелинейным характером деформаций материала.

Ступенчатая пластина разбивается на две области постоянной толщины. На внешнюю поверхность каждой из областей действуют осесимметричные распределенные нагрузки  $q_1(r)$ ,  $q_2(r)$ . За ис-