1991

ТЕХНИЧЕСКІЙ ОТДѢЛЪ
ИМЕНИ
М. И. ...
Студ. Библ. Инст. Инж. П. С.

Дата 2007

39152

ПРОФЕССОРЪ С. К. КУНИЦКІЙ.

КОНСПЕКТЪ ПО ОСНОВНЫМЪ НАЧАЛАМЪ РАЗСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ - НЕОПРЕДѢЛИМЫХЪ ФЕРМЪ.

1910 годъ.

Изданіе Студенческой Библіотеки И.И.П.С.

Литографія Трофимова. СПБ. Можайская 3.

1975

ТЕХНИЧЕСКIЙ ОТ...
Студ. Библ. Инст. Инж. П...

КОНСПЕКТЪ ПО ОСНОВНЫМЪ НАЧАЛАМЪ РАЗСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДѢЛИМЫХЪ ФЕРМЪ.

Изъ статики твердаго тѣла извѣстно, что въ случаѣ равновѣсія плоской неизмѣняемой системы виртуальная работа приложенныхъ къ ней силъ равна нулю, т.е.:

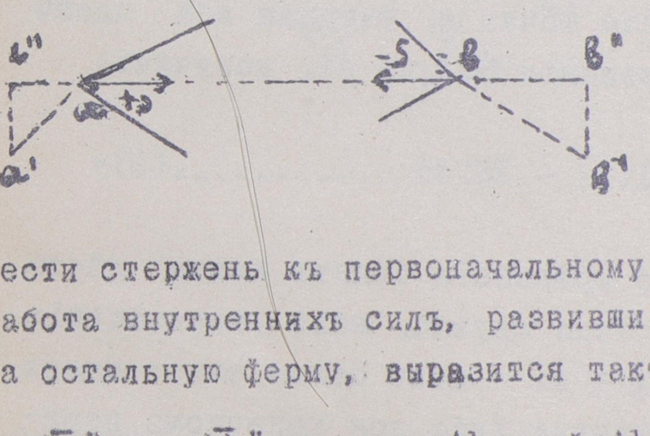
$$\Sigma P \mathrm{Cos}[P,v]dv = 0,$$

гдѣ: P - одна изъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на тѣло;

dv - безконечно малое перемѣщеніе точки приложенія этой силы на нѣкоторое направленіе v;

Cos[P,v] - Cos угла между силой P и направленіемъ перемѣщенія.

Для упругихъ тѣлъ, къ которымъ принадлежатъ фермы, составленныя изъ отдѣльныхъ упругихъ стержней, соединенныхъ идеальнеми шарнирами, въ выраженіи виртуальной работы необходимо различать работу силъ внѣшнихъ и работу силъ внутреннихъ или силъ упругости. Можно доказать, что работа внутреннихъ силъ упругости всегда отрицательна. Дѣйствительно, при растяженіи стержня ab, входящаго въ составъ какой либо фермы проекціи перемѣщенія его конечныхъ точекъ на направленіе стержня направлены наружу, внутреннія же силы упругости, замѣняющія дѣйствіе стержня на остальную ферму, направлены во внутрь стержня, какъ стремящіяся привести стержень къ первоначальному виду; при такихъ условіяхъ работа внутреннихъ силъ, развившихся въ стержнѣ и дѣйствующихъ на остальную ферму, выразится такъ:

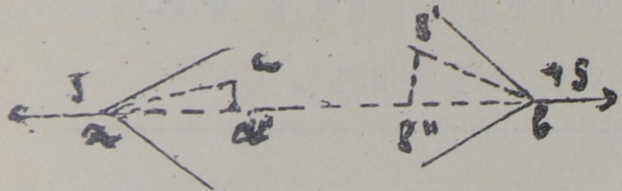


$$-\overline{aa''}.s - \overline{bb''}.s = -s.\Delta l,$$ гдѣ Δl - удлиненіе стержня.

Изд. Студ. Библiотеки И.И.П.С. 1910 г.

Литографія Трофимова. СПБ. Можайская 3.

При сжатіи стержня произойдетъ обратное явленіе: внутреннія силы направлены наружу, а перемѣщеніе угловыхъ точекъ - во внутрь стержня, слѣдовательно и въ этомъ случаѣ работа внутреннихъ силъ - величина отрицательная, т.е.



$- \overline{aa''}.s - \overline{bb''}.s = - s\Delta l.$

Итакъ дѣйствительная работа внутреннихъ силъ всегда отрицательна.

Если ферма подъ вліяніемъ внѣшней нагрузки находится въ равновѣсіи, выдѣливъ какой нибудь узелъ a, находящійся подъ дѣйствіемъ внѣшней силы P и внутреннихъ силъ S, замѣняющихъ собой дѣйствіе стержней на этотъ узелъ, можемъ выразить условіе равновѣсія этого узла слѣдующимъ равенствомъ:

$$P' + \Sigma S' = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (1), \text{ гдѣ}$$

P' - проекція силы P на нѣкоторую ось mn, проходящую черезъ узелъ a и не совпадающую ни съ одной изъ линій дѣйствія приложенныхъ къ узлу силъ;
S' - проекція одной изъ внутреннихъ силъ S на ту же прямую.

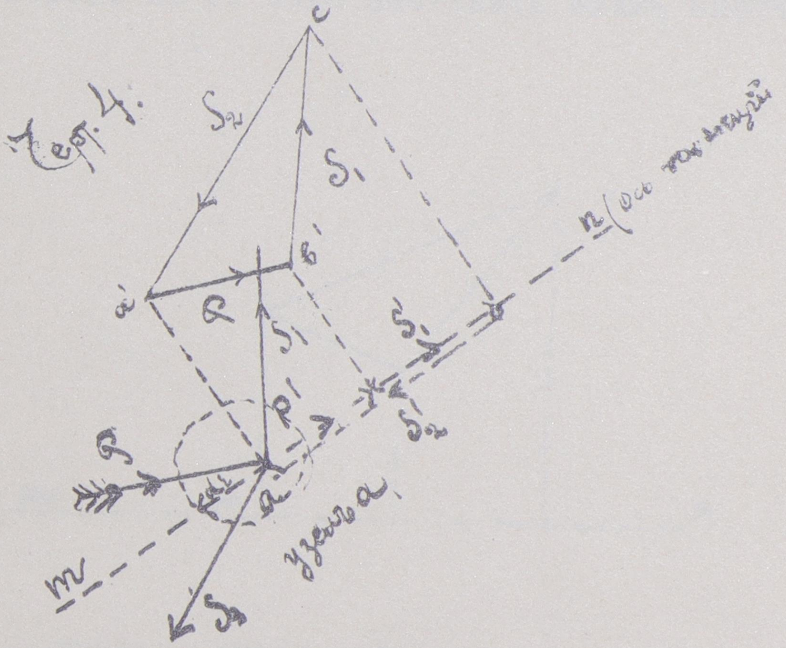
Возьмемъ на прямой mn произвольный отрѣзокъ $aa_1 = di$ и примемъ его за возможное перемѣщеніе точки a; умножая всѣ члены уравненія (1) на di, получимъ:

$$P'di = - \Sigma S'di \; ....(2).$$

Это уравненіе будетъ имѣть мѣсто въ томъ случаѣ, если перемѣщеніе $aa_1 = di$ - есть безконечно-малая величина (ибо при конечномъ перемѣщеніи узла углы между силами и прямой mn, а слѣдовательно и проекціи силъ на прямую mn измѣняютъ свои величины). Кромѣ того, чтобы примѣнить это равенство для всѣхъ узловъ, необходимо допустить слѣдующія два ограниченія:

Къ стр. 5-ой послѣ 13-ой строчки слѣдуетъ:

Доказательство слѣдуетъ изъ чертежа 4-го. Въ узлѣ a, находящемся въ равновѣсіи, сходятся три силы: данная сила P и усиліе въ стержнѣ S_1 и S_2. Пусть возможное перемѣщеніе точки a есть di, отложенное по линіи mn. Спроектируемъ на ось mn замкнутый многоугольникъ силъ P, S_1 и S_2, именно треугольникъ a'b'c' Сумма проекцій этихъ силъ на ось mn равна нулю. Проекція силы P, которую назовемъ P' направлена въ сторону противоположную отрѣзку di Возможная работа этой силы будетъ $-P'di$, а для силъ S виртуальная работа будетъ $(S_2' - S_1')di > 0$. Слѣдовательно, виртуальная работа силъ внѣшнихъ обратна по знаку виртуальной работѣ силъ внутреннихъ.



Опечатка къ стр. 11-ой, строка 8-ая сверху передъ $\frac{\partial A_0}{\partial \underline{X}_a}$ поставить знакъ минусъ.

1. Перемѣщенія для разныхъ узловъ должны быть совмѣстны между собой, т.е. должны быть отнесены къ одной и той же системѣ нагрузокъ.
2. Перемѣщенія должны быть согласны со связями системы, т.е. должны соотвѣтствовать лишь удлиненіямъ или укороченіямъ стержней.

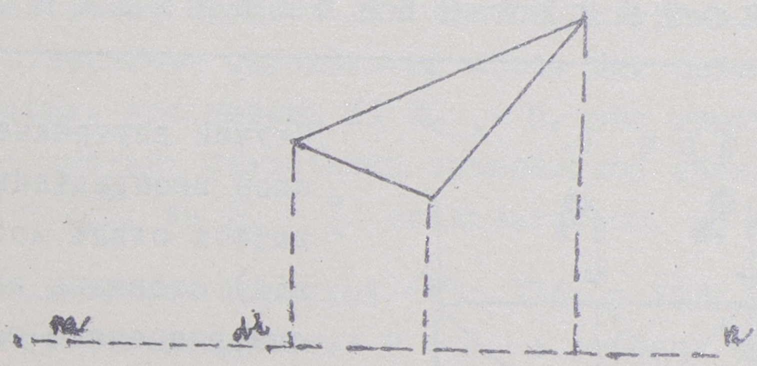
Распространяя при этихъ ограниченіяхъ равенство (2) на всѣ узлы, получимъ:

$$\Sigma P'di + \Sigma\Sigma S'dj = 0, \quad \text{или}$$

$$\Sigma P'di + \Sigma S'di = 0,$$ (гдѣ знакъ $\Sigma\Sigma$ замѣнимъ для удобства однимъ знакомъ Σ).

Для виртуальной работы можно доказать, что работа внутреннихъ силъ равна и противоположна работѣ внѣшнихъ.

Поэтому, если принять работу внѣшнихъ силъ за положительную, то передъ $\Sigma S'di$ надо поставить знакъ минусъ.



слѣдовательно, $\Sigma P'di - \Sigma S'di = 0$, или

$$\Sigma P'di = \Sigma S'di \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Но $\Sigma P'di = \Sigma P Cos(P,mn)di = \Sigma P di Cos(P,mn) = \Sigma P\Delta p$, гдѣ

$\Delta p = di Cos(P,mn)$, т.е. равно проекціи перемѣщенія di на направленіе дѣйствія силы P. Что же касается правой части уравненія (3), то въ виду разсмотрѣнія совмѣстнаго перемѣщенія стержней фермы, а также и того, что деформація каждаго стержня вызывается перемѣщеніемъ обоихъ узловъ, связанныхъ этимъ перемѣщенія/ стержнемъ, соединяемъ попарно проекціи этихъ узловъ на направленіе стержня; въ такомъ случаѣ $di' + di'' = \overline{aa_1} + \overline{bb_1}$ и

$$S'(di' + di'') = S'(\overline{aa_1} + \overline{bb_1}) = S\cos(S_0 mn)[\overline{aa_1} + \overline{bb_1}]$$

Но $[\overline{aa_1} + \overline{bb_1}]\cos.(S, mn) = \Delta l$ = суммѣ проекцій перемѣщенія узловъ по направленію дѣйствія силы или удлиненію стержня, слѣдовательно, $\Sigma S'di = \Sigma S\Delta l$ и равенство (3) приметъ видъ:

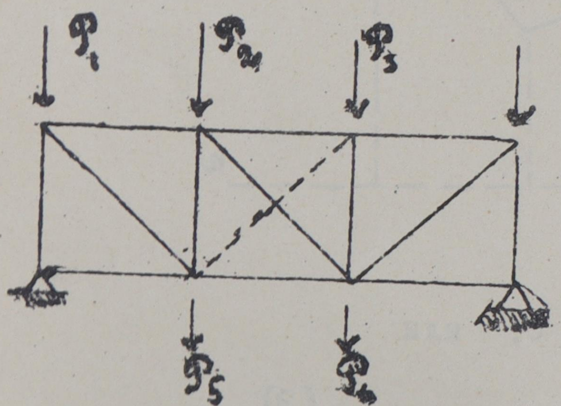
$$\Sigma P\Delta p = \Sigma S\Delta l \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Выдѣливъ опорныя реакціи C и соотвѣтствующія имъ проекціи перемѣщеній ΔC изъ лѣвой части равенства (4) въ отдѣльный членъ, получимъ:

$$\Sigma P\Delta p + \Sigma C\Delta c = \Sigma S\Delta l \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (I)$$

ОСНОВНОЕ ВЫРАЖЕНІЕ НАЧАЛА ВОЗМОЖНЫХЪ ПЕРЕМѢЩЕНІЙ.

Примѣръ I.



Случай внутренней статической неопредѣлимости. Ферма имѣетъ одинъ добавочный (лишній) стержень ab. Для разсматриваемаго случая равенство (I) приметъ слѣдующій видъ:

$\Sigma P\Delta p = \Sigma S\Delta l$, ибо членъ $\Sigma C\Delta c$ равенъ нулю, такъ какъ опора A неподвижна и для точки A $\Delta c = 0$, для опоры же B проекція Δc перемѣщенія точки B на направленіе реакціи тоже равна нулю. Такъ какъ величины Δp и Δl не зависятъ отъ силъ P и S, а ограничены только вышеупомянутыми условіями, то мы можемъ примѣнить равенство (I) для силъ P и S принадлежащихъ къ одной системѣ нагрузокъ, а Δp и Δl – къ другой. (Замѣтимъ здѣсь, что равенство (I) при линейной зависимости между P и Δp можетъ существовать и въ случаѣ конечныхъ перемѣщеній узловыхъ точекъ фермы, что и имѣетъ мѣсто почти во всѣхъ случаяхъ практики, за исключенiемъ кругового изгиба, продольнаго изгиба и случая весьма пологихъ арокъ). Положимъ, что на данную ферму дѣйствуетъ система силъ $P_1\ P_2 \ldots\ldots\ldots P_6$. Отбросивъ добавочный стержень ab, превратимъ нашу ферму въ статически-опредѣлимую, замѣнивъ дѣйствiе стержня ab на ферму двумя равными и прямо противоположными силами $\overline{X}$. Въ такомъ случаѣ усилiе въ любомъ стержнѣ m вслѣдствiе линейной зависимости между усилiями въ стержняхъ и дѣйствующими на ферму силами выразится такъ:

$$S_m = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots\ldots + \alpha_6 P_6 + \gamma_m \overline{X} = S_0 + \gamma_m \overline{X},\ \text{гдѣ}$$

α_n - представляетъ собой усилiе въ стержнѣ m, полученное при частномъ случаѣ загруженiя, когда силы $\overline{X}$ и P за исключенiемъ P_n равны нулю, а $P_n = 1$;

γ_n - есть усилiе въ стержнѣ m, полученное при дѣйствiи одной только силы $x = 1$ и при отсутствiи внѣшней нагрузки, т.е. силы $P = 0$.

Для полученiя $\Sigma\alpha_n P_n = S_0$ необходимо положить $\overline{X} = 0$ и построить дiаграмму Кремона для данной нагрузки $P_1 P_2 \ldots\ldots P_6$ и основной статически опредѣлимой сѣти. Для добавочнаго стержня ab (обозначимъ его черезъ K) $S_{0,K} = 0$, ибо этотъ стержень не входитъ въ составъ статически опредѣлимой сѣти, -слѣдовательно $S_K = 0 + \gamma_K \overline{X}$, но $S_K = \overline{X}$, слѣдовательно, $\gamma_K = 1$.

Воспользуемся формулой (4): $\Sigma P\Delta p = \Sigma S\Delta l$ для случая фиктивной нагрузки, когда сиыл $P = 0$, а внѣшняя сила $\overline{X} = 1$. Тогда получимъ:

$$-1(\overline{aa_1}) - 1(\overline{bb_1}) = \Sigma S\Delta l = \Sigma[S_0 + \gamma\overline{X}] = \Sigma\gamma\Delta l;$$

$$-1(\overline{aa_1}) - 1(\overline{bb_1}) = -1(\overline{aa_1} + \overline{bb_1}) = -1\Delta l_K,\ \text{слѣдоват.:}$$

$$-\Delta l_K = \Sigma\gamma\Delta l,$$

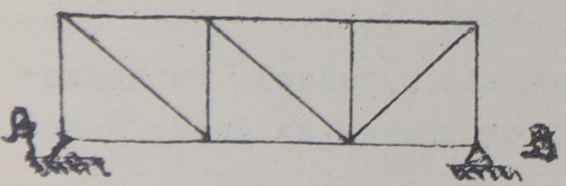
но $\Delta l_K = \dfrac{\overline{X}l_K}{\varepsilon F_K} = \overline{X}\rho_K$, а $\Delta l = \dfrac{Sl}{\varepsilon F} = S\rho = [S_0 + \gamma_K\overline{X}]\rho$, слѣдов.:

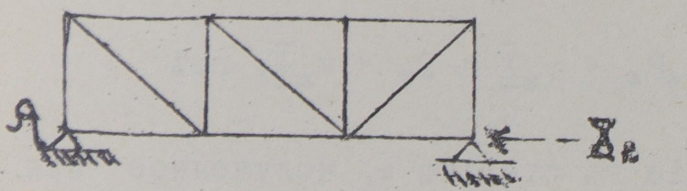
$$-\overline{X}\rho_K = \Sigma\gamma[S_0 + \gamma\overline{X}]\rho = \Sigma\gamma S_0\rho + \Sigma\gamma^2\overline{X}\rho\ \text{или окончательно:}$$

$$\gamma_K\overline{X}\rho_K + \Sigma\gamma S_0\rho + \Sigma\gamma^2\overline{X}\rho = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

ибо $\gamma_k = 1$. Изъ равенства II можно опредѣлить искомое усилiе $\bar{X}$ въ добавочномъ стержнѣ К.

П р и м ѣ р ъ II.





Случай внѣшней статической неопредѣлимости. Обѣ опоры неподвижны. Замѣнимъ неподвижную опору В подвижной и для возвращенiя фермы въ первоначальныя условiя, приложимъ нѣкоторую силу $\bar{X}_B$, дѣйствующую отъ правой руки къ лѣвой, т.е. во сторону обратную возможному перемѣщенiю правой опоры отъ дѣйствiя внѣшней нагрузки. Тогда на основанiи формулы: $S = S_0 + \gamma\bar{X}_B$, опредѣлимъ, полагая $\bar{X}_B = 0$, по дiаграммѣ Кремона $S_0 = \Sigma\alpha_n P_n$. Принимая затѣмъ силы $P = 0$, а силу $\bar{X}_B = 1$, найдемъ на основанiи формулы: $\Sigma P\Delta p = \Sigma S\Delta l$ слѣдующее:

$$- 1x\delta = \Sigma\gamma\Delta l = \Sigma\gamma S\rho = \Sigma\gamma\rho[S_0 + \gamma\bar{X}_B],$$

но *) $\delta = \delta_P + \delta_{\bar{X}_B} = 0$, (ибо опора неподвижна), а потому

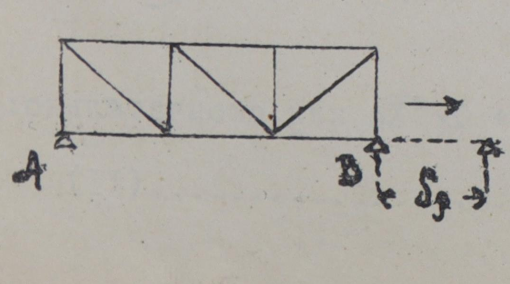
$$\Sigma\gamma(S_0 + \gamma\bar{X}_B)\rho = \Sigma\gamma\rho S_0 + \Sigma\gamma^2\rho\bar{X}_B = 0 \text{ ....III.}$$

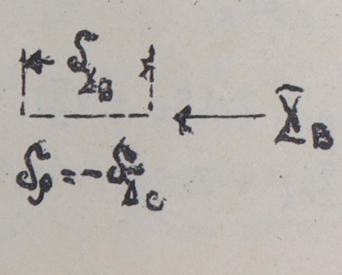
Къ этому же виду могло быть приведено и уравненiе II, если въ ттетiй членъ включить и первый. Въ случаѣ нѣсколькихъ статически-неопредѣлимыхъ параметровъ составляемъ необходимое дополнительное число уравненiй вида II или III, которыя вмѣстѣ съ тремя условiями статическаго равновѣсiя:

$\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma M = 0$ дадутъ возможность опредѣлить всѣ неизвѣстныя величины.

---

*)





ТЕХНИЧЕСКИЙ ОТДЕЛ
Студ.Библ.Инст.Инж.

Т е о р е м а Б е т т и. Пользуясь формулой (4), можемъ написать слѣдующія равенства:

$$\Sigma P_m \Delta p_{m,n} = \Sigma S_m \Delta l_n$$

$$\Sigma P_n \Delta p_{n,m} = \Sigma S_n \Delta l_m$$

значекъ m обозначаетъ одну систему нагрузокъ, а n - другую.

Но $\Delta l_n = \frac{S_n l}{\varepsilon F} = S_n \rho$; $\Delta l_m = \frac{S_m l}{\varepsilon F} = S_m \rho$,

слѣдовательно:

$$\Sigma P_m \Delta p_{m,n} = \Sigma S_m S_n \rho$$

$$\Sigma P_n \Delta p_{n,m} = \Sigma S_n S_m \rho$$

отсюда:

$$\Sigma P_m \Delta p_{m,n} = \Sigma P_n \Delta p_{n,m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{IV.}$$

Т е о р е м а М а к с у э л я - о взаимности перемѣщеній. Полагая въ формулѣ IV $P_m = P_n = 1$, найдемъ:

$$\Delta p_{m,n} = \Delta p_{n,m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{V.}$$

т.е. перемѣщеніе точки m по направленію дѣйствія силы P_n равно перемѣщенію точки n по направленію силы P_m при $P_n = P_m = 1$.

Т е о р е м а п р о и з в о д н о й р а б о т ы д е ф о р м а ц і и.

Извѣстно, что работа деформаціи для сквозной фермы выражается такой формулой:

$$A = \frac{1}{2} \Sigma \frac{S^2 l}{\varepsilon F} = \frac{1}{2} \Sigma S^2 \rho$$

съ другой стороны, какъ извѣстно, работа постоянной силы P при вытягиваніи или сжатіи какого нибудь бруска на величину Δp, выражаемая произведеніемъ $P\Delta p$ равна 2A - удвоенной работѣ деформаціи упругаго тѣла, т.е. работа внѣшней силы P расходуется такъ, что $1/2$ ея идетъ на упругую деформацію тѣла, а другая $1/2$

вызываніе въ немъ динамическихъ эффектовъ, т.е. на колебаніе упругаго тѣла около положенія равновѣсія и поглощается треніемъ, сопротивленіемъ воздуха и нагрѣваніемъ. Итакъ:

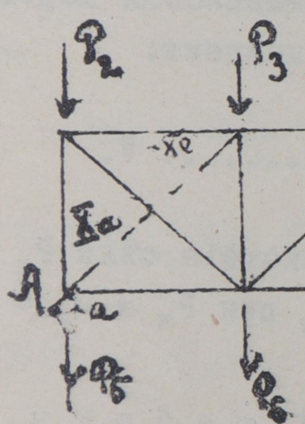
$$P\Delta p = 2A = 2\cdot\frac{1}{2}\,\frac{S^2 l}{\varepsilon F} = S^2\rho.$$

Распространяя это равенство на всю систему стержней и на всѣ силы P, получимъ:

$$\Sigma P\Delta p = 2A = \Sigma\frac{S^2 l}{\varepsilon F} = \Sigma S^2\rho = \Sigma S\Delta l;$$ окончательно:

$$\Sigma P\Delta p = \Sigma S\Delta l.$$

Разсмотримъ слѣдующій случай, въ которомъ узелъ а неподвижно закрѣпленъ. Тогда равенство $-1(\overline{aa_1}) - 1(\overline{bb_1}) = \Sigma S\Delta l = \Sigma\gamma\Delta l$, соотвѣтствующее случаю загруженія фермы, при которомъ силы $P_1, P_2 \ldots\ldots P_6$ равны нулю, а сила $\overline{X} = 1$, для разсматриваемаго случая (т.е. случая неподвижности узла а) перепишется такъ:



$$1(-bb_1) = \Sigma S\Delta l = \Sigma\gamma\Delta l = -1\delta \ldots\ldots (5).$$

Взявъ теперь производную по $\overline{X}_a$ отъ работы деформаціи A_0, найдемъ, что

$$\frac{\partial A_0}{\partial \overline{X}_a} = \frac{1}{2}\,\Sigma 2S\frac{\partial S}{\partial \overline{X}_a}\cdot\frac{l}{EF} = \Sigma S\rho\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

ибо $\frac{\partial S}{\partial X_a} = \gamma$, такъ какъ $S = S_0 + \gamma\overline{X}_a$, а при $S_0 = 0$ $S = \gamma\overline{X}_a$

Изъ неравенствъ (5) и (6) слѣдуетъ, что

$$-\delta = \Sigma S\gamma\rho = \frac{\partial A_0}{\partial \overline{X}_a},$$ т.е.

частная производная работы деформаціи по силѣ представляетъ значеніе проекціи перемѣщенія точки приложенія этой силы. Въ этомъ и заключается теорема о производной работѣ деформаціи.

НАЧАЛО НАИМЕНЬШЕЙ РАБОТЫ.

Итакъ мы получили:

$$\delta = \frac{\partial A_0}{\partial \overline{X}_a} = \Delta l_\kappa, \text{ ибо } \delta = \Delta l_\kappa, \text{ слѣдовательно:}$$

$$-\frac{\partial A_0}{\partial \overline{X}_a} = \Delta l_\kappa = \overline{X}\frac{l_\kappa}{\varepsilon F_\kappa} = \overline{X}_a \rho_\kappa = \gamma_\kappa \overline{X}_a \rho_\kappa \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

ибо γ_κ для стержня k равно 1.

Съ другой стороны $-\frac{\partial A_0}{\partial \overline{X}_a} = -\Sigma S\gamma\rho$, слѣдовательно, по равенству (7):

$$\gamma_\kappa \overline{X}_a \rho_\kappa = -\Sigma S\gamma\rho,$$

но $S = S_0 + \gamma\overline{X}_a$, а потому

$$-\Sigma\gamma\rho(S_0 + \gamma\overline{X}_a) = \gamma_\kappa \overline{X}_a \rho_\kappa \quad \text{или}$$

$$\Sigma\gamma\rho(S_0 + \gamma\overline{X}_a) + \gamma_\kappa \overline{X}_a \rho_\kappa = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Если взять выраженіе работы всѣхъ стержней, т.е. необходимыхъ и добавочныхъ, то получимъ:

$$A = \frac{1}{2}\Sigma\frac{S^2 l}{\varepsilon F} + \frac{1}{2}\frac{\overline{X}_a^2 l_\kappa}{\varepsilon F_\kappa} \quad \text{или}$$

$$A = \frac{1}{2}\Sigma S^2\rho + \frac{1}{2}\overline{X}_a^2\rho_\kappa.$$

Взявъ частную производную по $\overline{X}_a$ отъ этого выраженія, получимъ вышенаписанное равенство (8), если принять во вниманіе, что $S = S_0 + \gamma \underline{X}_a$, а такъ какъ вторая часть равенства (8) есть 0, то

$$\frac{\partial A}{\partial \underline{X}_a} = 0,$$

что и выражаетъ собой начало наименьшей работы. Вторая производная

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \underline{X}_a^2} > 0.$$

Совершенно безразлично, какимъ изъ приведенныхъ началъ пользоваться для раскрытія статической неопредѣлимости фермъ, т.е. можно пользоваться уравненіемъ работы или началомъ возможныхъ перемѣщеній, можно воспользоваться теоремой о производной работы деформаціи или, наконецъ, началомъ наименьшей работы; во всякомъ случаѣ, необходимо составить дополнительныя къ условіямъ статическаго равновѣсія уравненія, число которыхъ должно быть равно числу статически неопредѣлимыхъ параметровъ. Ясно также, что всѣ эти начала приведутъ къ одному результату, т.е. дадутъ одинаковые выводы, такъ какъ двѣ послѣднія теоремы являются, какъ видно изъ вывода, простымъ слѣдствіемъ начала возможныхъ перемѣщеній.

БИБЛИОТЕКА
Б... ...ого
инс...ута ...женеров
желез... дорожного
транспорта

-------oooooooOOOOOOOOOOOoooooo-------