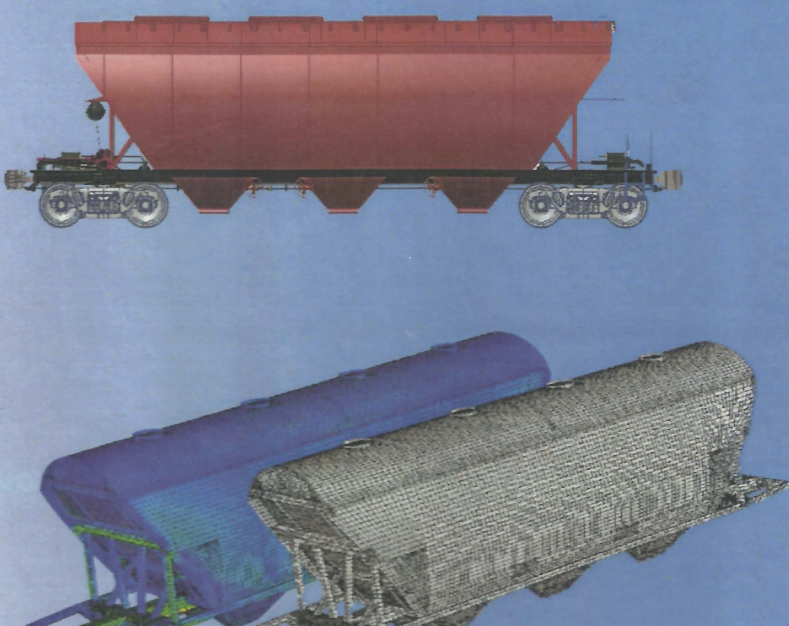
В. В. ПИГУНОВ, А. В. ПИГУНОВ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ВАГОНОВ



МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра вагонов

В. В. ПИГУНОВ, А. В. ПИГУНОВ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ВАГОНОВ

Утверждено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебника для студентов учреждений высшего образования
по специальности «Подвижной состав железнодорожного транспорта»

Гомель 2022

УДК 624.04+629.45/45
ББК 38.112+39.24
П32

Р е ц е н з е н т ы: кафедра теоретической механики и механики материалов Белорусского национального технического университета (заведующий кафедрой д-р физ.-мат. наук, профессор *Ю. В. Василевич*);
заместитель начальника службы вагонного хозяйства Белорусской железной дороги *А. В. Динкевич*

Пигунов, В. В.

П32 Строительная механика вагонов : учеб. / В. В. Пигунов, А. В. Пигунов ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2022. – 255 с.
ISBN 978-985-554-992-6

Рассмотрены вопросы кинематического анализа и расчета стержневых статически неопределимых вагонных конструкций, приведены основы теории упругости и основные положения расчета пластин и оболочек, образующих элементы вагонов. Изложены вариационные методы расчета стержневых конструкций и метод конечных элементов, позволяющий рассчитывать конструкции любой сложности. Рассматриваются также расчеты на прочность при действии повторно-переменных динамических нагрузок, которые являются основными при оценке прочности элементов ходовых частей и автосцепного устройства вагонов.

Основные методы расчета поясняются примерами расчета конкретных вагонных конструкций.

Предназначен для студентов всех форм обучения специальности «Подвижной состав железнодорожного транспорта» и может быть использован инженерно-техническими работниками в их практической деятельности.

УДК 624.04+629.45/45
ББК 38.112+39.24

ISBN 978-985-554-992-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Строительная механика – наука о принципах и методах расчета конструкций на прочность, жесткость и устойчивость при статических и динамических воздействиях. Она рассматривает те же вопросы, что и сопротивление материалов, только объектом исследования является не отдельный элемент конструкции, а *совокупность многих элементов, образующих конструкцию.*

Особенностью *строительной механики вагонов* является то, что здесь эти вопросы рассматриваются применительно к вагонным конструкциям, к которым относятся кузова вагонов, а также отдельные части кузовов, тележек и др.

Любая проектируемая конструкция, в том числе и конструкция вагона, должна удовлетворять требованиям прочности, жесткости, устойчивости и экономичности. Достаточная прочность и жесткость позволяют вагону воспринимать действующие на него эксплуатационные нагрузки без повреждений и недопустимых изменений формы. При этом прочность вагонной конструкции должна обеспечиваться при возможно меньшей затрате металла, то есть конструкция должна удовлетворять требованиям экономичности. В связи с этим весьма важное значение имеет совершенствование методов расчета. По мере совершенствования методов расчета на прочность конструкции проектируются всё более легкими и гибкими. Вследствие этого появляется необходимость проверки их на жесткость и устойчивость.

Рассчитывают конструкцию исходя из *внешних воздействий* на нее и ее *сопротивления* этим воздействиям. Внешние воздействия разделяют на силовые, температурные и другие (например, обусловленные неточностью изготовления). Сопротивление представляет собой основную функцию несущей конструкции. Оно определяется физическими характеристиками и геометрическими параметрами элементов и их соединений.

Строительная механика является теоретической базой для создания надежных, прочных и экономичных конструкций.

Учебник написан в соответствии с действующей программой по курсу «Строительная механика вагонов». Его особенностью является то, что в нем рассматриваются методы расчета вагонных конструкций не только на статические нагрузки, относящиеся к разделу статики строительной механики, но и расчеты на прочность при действии повторно-переменных динамических нагрузок. Расчеты на повторно-переменные нагрузки являются основными при оценке прочности элементов ходовых частей и автосцепного устройства вагонов. Основные методы расчета поясняются примерами расчета конкретных вагонных конструкций.

Вопросы динамики и устойчивости вагонных конструкций в учебник не вошли, так как они изучаются студентами в дисциплине «Динамика вагонов».

Рассматриваются расчетные модели вагонных конструкций, вопросы кинематического анализа и расчета статически неопределимых стержневых систем методами сил и перемещений.

Стержневые системы, которые рассматриваются в данном учебнике, находят достаточно широкое применение в несущих конструкциях вагонов.

В то же время специалисту в своей практической деятельности приходится иметь дело с более сложными системами, в состав которых помимо стержней входят элементы и других типов: пластины и оболочки и др.

Поэтому в учебнике приводятся основные положения теории упругости, излагаются основы теории расчета тонких пластин и оболочек, а также вопросы устойчивости элементов вагонов, выполненных из пластин и оболочек.

Большое внимание уделено вариационным методам расчета стержневых систем и методу конечных элементов, который широко применяется при расчете конструкций любой сложности.

Учебник предназначен для студентов всех форм обучения, но может быть использовано также и инженерно-техническими работниками в их практической деятельности.

1 РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ ВАГОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

1.1 Классификация несущих систем вагонных конструкций и действующих на них нагрузок

Всякую реальную **вагонную конструкцию** можно представить в виде с и с т е м ы, состоящей из трех элементов: стержней, пластин и оболочек.

Стержень (рисунок 1.1, *а*) – элемент, у которого один размер (l) больше двух остальных (a и b).

Пластина (рисунок 1.1, *б*) – элемент, у которого один размер (δ) намного меньше остальных (a и b).

Оболочка (рисунок 1.1, *в*) – элемент, у которого поверхность не плоская, как у пластины, а криволинейная.

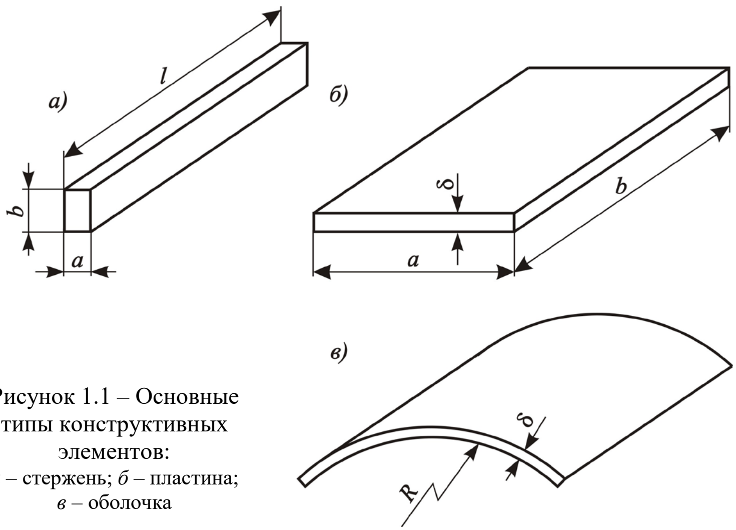


Рисунок 1.1 – Основные типы конструктивных элементов:
а – стержень; *б* – пластина;
в – оболочка

В зависимости от элементов, образующих вагонные конструкции, различают следующие несущие системы:

1) *стержневые* – конструкции, составленные из стержней (балки, рамы). Например, конструкции надрессорных балок, рам тележек и платформ;

2) *подкрепленные листовые* (подкрепленные пластины и оболочки) – конструкции, составленные из металлических листов обшивки, подкрепленных набором стержней. Например, конструкции крышек люков и боковых стен полувагонов, а также кузовов пассажирских и некоторых грузовых вагонов;

3) *смешанные (комбинированные)* – конструкции, составленные из стержневых систем и подкрепленных листовых. Например, конструкция кузова полувагона. В таком кузове рама является стержневой системой, а стены – подкрепленными листовыми.

Для расчета любой конструкции необходимо знать действующие на нее нагрузки.

Примечание – Нагрузками называют внешние силы, действующие на элементы конструкции.

Нагрузки можно классифицировать:

- по времени действия – постоянные и временные;
- способу приложения – объемные и поверхностные;
- характеру изменения во времени – статические и динамические.

Постоянные нагрузки действуют на конструкцию в течение всего срока службы (собственный вес), а *временные* – в отдельные промежутки времени (полезная нагрузка, давление ветра, центробежная сила, силы инерции).

Объемные нагрузки прикладываются ко всем внутренним точкам конструкции (собственный вес), а *поверхностные* – к поверхности конструкции и разделяются на сосредоточенные и распределенные. *Сосредоточенные* действуют по весьма малой поверхности – теоретически в одной точке (давление колеса на рельс, реакции опор и др.), а *распределенные* – непрерывно по некоторой площади или длине и могут быть равномерно и неравномерно распределенными. Примеры распределенных нагрузок:

– *равномерно распределенная по площади* – давление груза на настил пола кузова вагона q_1, Н/м^2. Действует непрерывно по площади пола (рисунок 1.2, *а*);

– *равномерно распределенная по длине элемента* – равномерно распределенная по площади пола нагрузка q_1 передается на опорные балки рамы в виде нагрузки, равномерно распределенной по длине балки q_2, Н/м (рисунок 1.2, *б*);

– *неравномерно распределенная нагрузка* – давление сыпучего груза на боковые стены кузова p (рисунок 1.2, *в*).

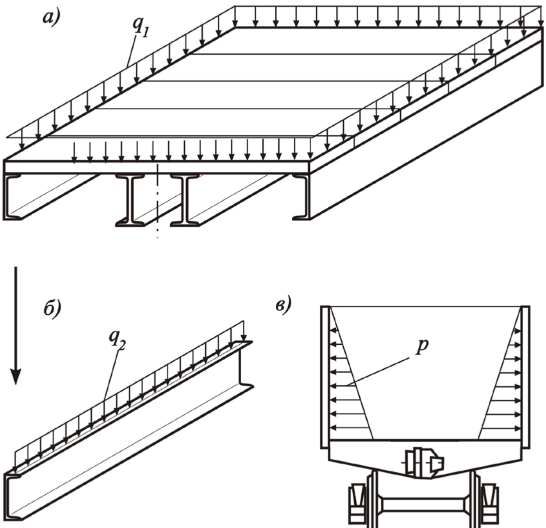


Рисунок 1.2 – Основные виды распределенных нагрузок:
а – равномерно распределенная по площади;
б – равномерно распределенная по длине;
в – неравномерно распределенная

Статические нагрузки изменяют свое значение сравнительно медленно и плавно, без толчков и вибраций (собственный вес, вес груза) от нуля до своего конечного значения, а затем остаются неизменными. Поэтому ускорениями точек конструкции и силами инерции, возникающими при движении, можно пренебречь. *Динамические нагрузки* изменяют свое значение в сравнительно короткие промежутки времени и вызывают значительные ускорения элементов конструкции (силы взаимодействия колес с рельсами, между вагонами и др.).

Динамические нагрузки подразделяются на мгновенно приложенные, ударные и повторно-переменные.

Мгновенно приложенная нагрузка возрастает от нуля до максимума в течение долей секунды. Такие нагрузки возникают при трогании с места железнодорожного состава.

Ударная нагрузка отличается тем, что в момент ее приложения тело, вызывающее нагрузку, обладает определенной кинетической нагрузкой. Такая нагрузка возникает, например, в результате соударения вагонов между собой или с локомотивом.

Повторно-переменная нагрузка характерна своей периодичностью. Такую нагрузку испытывают элементы ходовых частей и автосцепного устройства вагонов.

В расчетной практике нагрузки, действующие на элементы вагона, по направлению их действия подразделяются на вертикальные, боковые и продольные.

1.2 Реальные вагонные конструкции и их расчетные схемы

Любая конструкция помимо элементов, обеспечивающих функциональное назначение данного объекта, обязательно имеет несущие элементы, составляющие «силовой» каркас и предназначенные для восприятия нагрузок и различных силовых воздействий на конструкцию. Поэтому элементы, составляющие любую конструкцию, в том числе и вагонную, принято разделять на несущие и ненесущие.

Несущие элементы обеспечивают конструкции необходимые прочность и жесткость при воздействии эксплуатационных нагрузок и образуют *несущую конструкцию*. Расчет несущей конструкции какого-либо элемента вагона с полным учетом особенностей его работы ввиду сложности часто не представляется возможным. Отсюда возникает необходимость в замене несущей конструкции расчетной схемой.

Расчетная схема – это упрощенное схематическое изображение реальной несущей конструкции. Для составления расчетной схемы требуется выполнить анализ конструкции и выявить главные несущие элементы, которые войдут в расчетную схему, и второстепенные элементы, которые при оценке прочности и жесткости системы могут быть отброшены как «неработающие» при действии нагрузки. *Главные несущие элементы* образуют скелет конструкции, который берет на себя всю внешнюю нагрузку и собственный вес, включая вес и мысленно отброшенных *второстепенных элементов*, рассматриваемых по отношению к оставшимся элементам как внешняя нагрузка.

Выбор расчетной схемы зависит также от действующей на конструкцию нагрузки. Так, при расчете на вертикальные нагрузки расчетная схема может отличаться от той, которая выбирается при расчете на продольные нагрузки. Например, при анализе конструкции кузова платформы, рассчитываемой на действие вертикальных нагрузок, к второстепенным ненесущим элементам можно отнести вспомогательные продольные и поперечные балки, имеющие малую жесткость в вертикальном направлении.

При составлении расчетных схем необходимо учитывать способы соединения между собой элементов конструкции. Места соединения элементов называют узлами, которые могут отличаться различными конструктивными решениями. Например, в узлах могут быть введены шарниры, позволяющие свободно поворачиваться концевым сечениям стержней относительно друг друга. Моменты на концах стержней в этом случае равны нулю.

При наличии сварных соединений в металлических конструкциях стержни, сходящиеся в узлах, соединены жестко, и все стержни в узле поворачиваются совместно. В расчетных схемах действительное соединение стержней, которое выполнено сварными швами или заклепками, иногда нельзя отнести ни к шарнирному, ни к жесткому. В расчетных же схемах используются только эти два способа соединения. На расчетной схеме условно изображаются:

- *элементы несущей конструкции;*
- *опорные связи;*
- *нагрузки.*

Для выполнения расчета необходимо также знать *размеры элементов расчетной схемы и физико-механические свойства материала*, используемого для их изготовления.

Таким образом, под р а с ч е т н о й м о д е л ь ю понимают геометрическую схему конструкции с действующей нагрузкой и данными, характеризующими физико-механические свойства материала. В целом расчетная схема должна как можно лучше отражать действительную работу несущей конструкции и в то же время быть доступной для практического расчета.

Рассмотрим реальную вагонную конструкцию на примере кузова вагона и возможные варианты расчетных схем. Характерная конструктивная схема кузова вагона показана на рисунке 1.3.

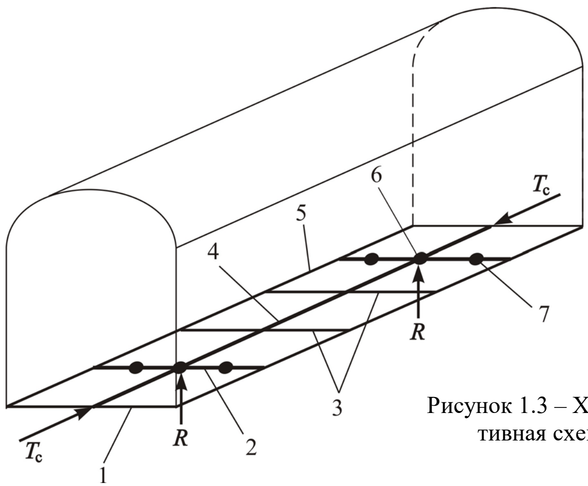


Рисунок 1.3 – Характерная конструктивная схема кузова вагона

Основанием кузова является р а м а, воспринимающая все основные нагрузки, действующие на вагон. Она представляет собой систему продольных и поперечных элементов (балок): концевой *1*, шкворневой *2*, промежуточной поперечной *3*, хребтовой *4* и боковой продольной *5*. Рама имеет опоры: центральную (пятник *6*) и боковые (скользуны *7*). На конструктивной схеме кузова тонкими линиями показаны боковые стены и крыша.

П р и м е ч а н и е – Кроме характерных балок, показанных на схеме, в рамах крытых вагонов, платформ и других вагонов могут применяться дополнительные продольные и поперечные балки, на которые опирается настил пола.

На раму действует полезная нагрузка, а также сосредоточенные продольные силы $T_с$, передаваемые на раму автосцепкой, и вертикальные реакции опор кузова R. Полезная нагрузка непосредственно воздействует на настил пола и передается на продольные и поперечные балки рамы.

Основным (усиленным) продольным элементом рамы является *хребтовая балка*, которая воспринимает продольные силы $T_с$. В современных конструкциях вагонов хребтовая балка изготовляется из стального прокатного профиля:

- два зета № 31 и двутавр № 19 – полувагон (рисунок 1.4, *а*);
- два зета № 31 – крытый грузовой, полувагон с глухим полом и глухим кузовом (рисунок 1.4, *б*);
- два двутавра № 70 – платформа (рисунок 1.4, *в*);
- два швеллера № 30 – пассажирские вагоны, рамные цистерны (рисунок 1.4, *г*).

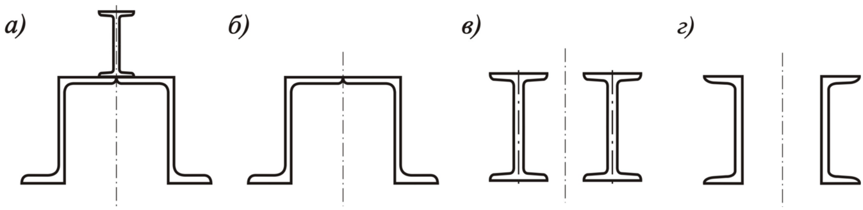


Рисунок 1.4 – Сечения хребтовой балки основных типов вагонов:
а – два зета № 31 и двутавр № 19; *б* – два зета № 31; *в* – два двутавра № 70;
г – два швеллера № 30

Основным (усиленным) поперечным элементом рамы являются *шкворневые балки*, которые воспринимают вертикальные реакции R. Шкворневые балки выполняются сварными замкнутого коробчатого сечения (два вертикальных и два горизонтальных листа).

Боковые продольные балки являются одновременно и нижними продольными элементами боковых стен.

Концевые поперечные балки выполняют коробчатого сечения (сварные или в виде проката), а *промежуточные поперечные балки* – в виде двутавра или швеллера.

Поперечные балки, работающие на изгиб, с целью снижения их массы выполняют, как правило, в форме бруса равного сопротивления изгибу.

Анализ реальной конструкции кузова позволяет выявить:

- основные несущие элементы;

• вспомогательные несущие элементы;

• ненесущие элементы (элементы функционального назначения).

Основные несущие элементы участвуют в восприятии основных эксплуатационных нагрузок. Они образуют основную несущую конструкцию и включаются в расчетную схему.

Вспомогательные несущие элементы участвуют в восприятии только некоторых нагрузок (полезная нагрузка, распор сыпучих грузов и др.) и в передаче их на основную несущую конструкцию. К ним можно отнести деревянный настил пола, деревянную обшивку стен, откидные борта платформ, крышки люков и торцовые створчатые двери полувагонов, а также вспомогательные продольные и поперечные балки, имеющие малую жесткость в вертикальной или в горизонтальной плоскости – при расчете кузова на действие вертикальных или горизонтальных нагрузок соответственно.

Ненесущие специальные элементы не участвуют в восприятии нагрузки, но необходимы для перевозки пассажиров и грузов. К ним относятся двери, окна, изоляция, установки кондиционирования воздуха и др.

Различают т р и о с н о в н ы х т и п а несущих конструкций кузовов (рисунок 1.5):

• с несущей рамой (платформы, транспортеры);

• несущими рамой и боковыми стенами (полувагоны);

• несущими рамой, боковыми стенами и крышей (пассажирские и крытые грузовые вагоны).

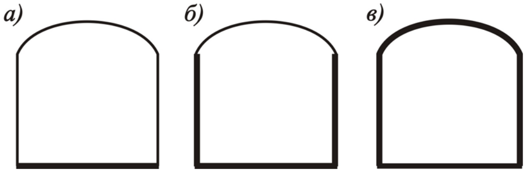


Рисунок 1.5 – Основные типы несущих конструкций кузовов: *а* – с несущей рамой; *б* – с несущими рамой и стенами; *в* – с несущими рамой, стенами и крышей

Р а с ч е т н ы е с х е м ы несущих конструкций кузовов можно представить в виде:

1) *стержневых систем* – для кузовов платформ с несущей рамой (рисунок 1.6, *а*);

2) *комбинированных систем* – для кузовов полувагонов (рисунок 1.6, *б*) и крытых грузовых вагонов с деревянным настилом пола (рисунок 1.6, *в*). В кузове полувагона рама – стержневая система, стены – подкрепленные стержнями пластинчатые системы; в кузове крытого грузового вагона рама – стержневая система, а стены и крыша – П-образная подкрепленная оболочка с вырезами;

3) *подкрепленных листовых систем* – для кузовов пассажирских вагонов, имеющих кузов в виде замкнутой подкрепленной оболочки с вырезами (рисунок 1.6, *г*).

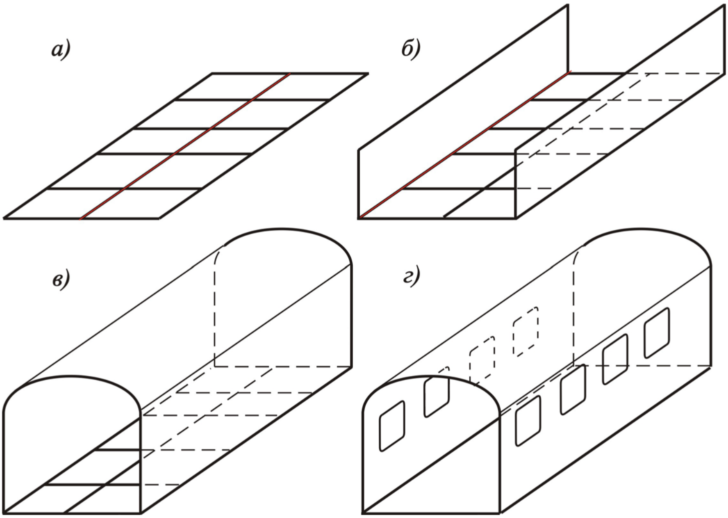


Рисунок 1.6 – Расчетные схемы несущих конструкций кузовов:
а – стержневая; *б, в* – комбинированные; *г* – подкрепленная листовая

Рассмотрим, например, составление расчетной схемы для кузова вагона-платформы с деревянным настилом пола, рассчитываемого на продольные силы. Как уже отмечалось, вагон-платформа имеет кузов с несущей рамой. Конструкция и конструктивная схема рамы показаны на рисунке 1.7, *а*, *б*. Она образована совокупностью балок: хребтовой *1*, концевых *2*, раскосов *3*, шкворневых *4*, боковых продольных *5*, основных поперечных *6*, вспомогательных поперечных *7* и продольных *8*.

Расчетная схема рамы будет образована линиями, проходящими через центры тяжести сечений ее элементов. Поскольку центры тяжести поперечных сечений продольных и поперечных балок рамы платформы расположены не в одной плоскости и продольные балки имеют переменное сечение (рисунок 1.7, *в*), рассматриваемая расчетная схема будет пространственной (рисунок 1.8, *а*). В элементах таких систем возникают деформации растяжения или сжатия, а также изгиб в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

В результате анализа конструктивной схемы выявляем главные несущие элементы рамы, которые образуют несущую конструкцию и должны войти в расчетную схему. К ним можно отнести раскосы *3*, а также балки: хребтовую *1*, концевые *2*, шкворневые *4*, основные поперечные *6* и продольные боковые *5*. В расчетную схему несущей конструкции не включаем вспомогательные поперечные *7* и продольные *8* балки, предназначенные для поддержания настила пола. На конструктивной схеме они показаны тонкими линиями. Эти балки из-за относительно большой гибкости в горизонтальной плоскости несущественно влияют на общую картину деформации рамы.

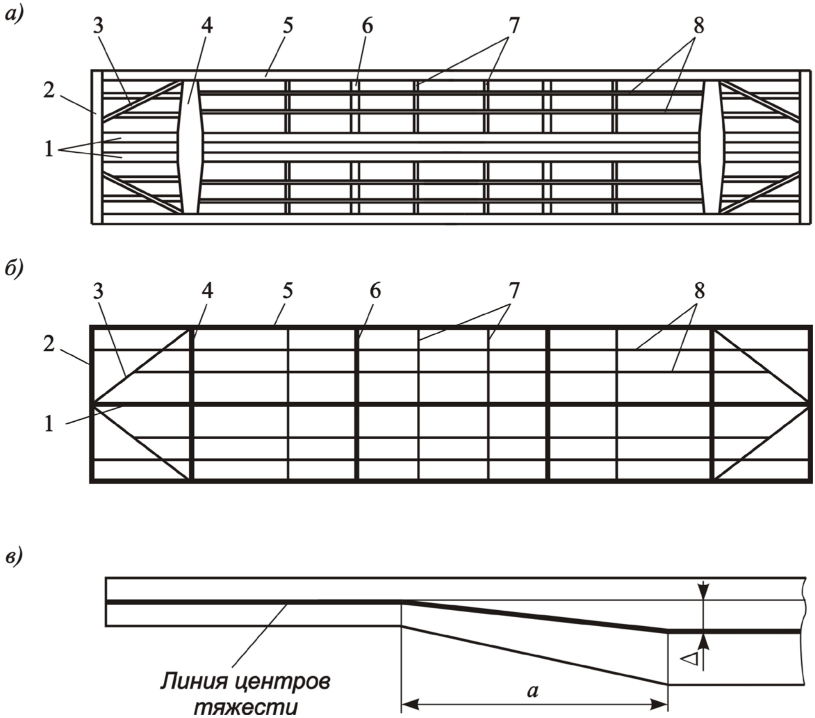


Рисунок 1.7 – Конструктивная схема рамы вагона-платформы:
а – реальная конструкция; *б* – конструктивная схема рамы;
в – конструктивная схема боковой и хребтовой балок

Однако такую расчетную схему можно упростить, расположив осевые линии поперечных и продольных балок в одной плоскости. В этом случае расчетную схему можно считать плоской стержневой (рисунок 1.8, *б*). Полученная расчетная схема является достаточно сложной статически неопределимой системой (число неизвестных силовых факторов при расчете методом сил составляет 42), и ее также нужно по возможности упростить.

Отметим, что некоторые элементы, которые являются основными при работе на вертикальные нагрузки, оказываются второстепенными при действии продольных сил. Поэтому из расчетной схемы можно исключить промежуточные поперечные балки *6* (см. рисунок 1.7, *б*) ввиду их малой жесткости в горизонтальной плоскости (рисунок 1.8, *в*). Число неизвестных в этом случае уменьшится до 30.

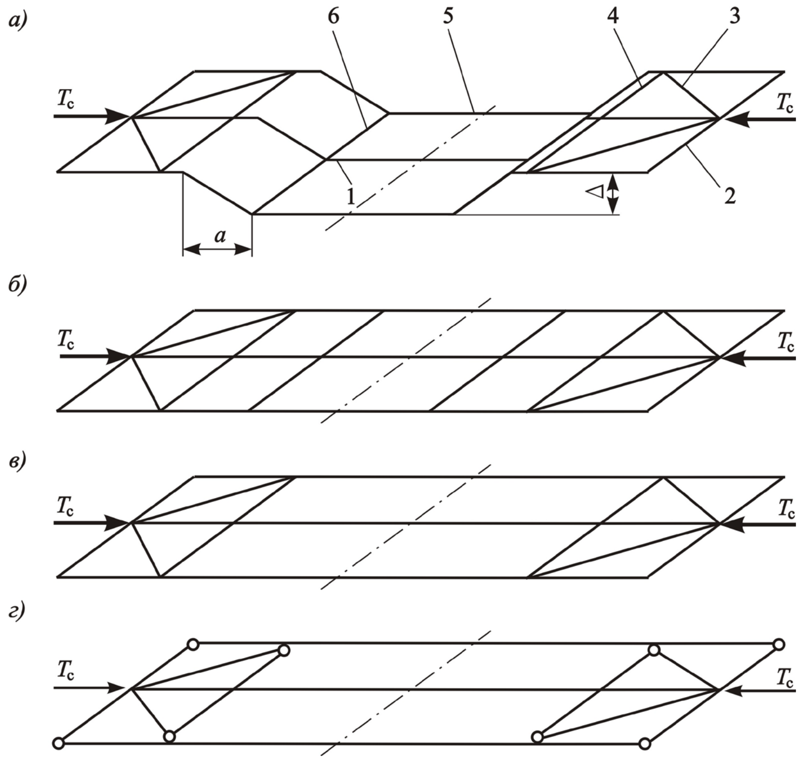


Рисунок 1.8 – Расчетные схемы рамы вагона-платформы:
а – пространственная; *б*, *в* – плоская; *г* – плоская с введенными шарнирами

Расчетную схему можно упростить и дальше, пренебрегая сопротивлением боковых балок изгибу, что равноценно введению шарнирного соединения поперечных балок с боковыми. Окончательный вариант стержневой расчетной схемы рамы платформы показан на рисунке 1.8, *г.* В такой расчетной схеме число неизвестных будет сокращено до 18.

1.3 Методы оценки несущей способности вагонных конструкций

При проектировании вагонных конструкций должна быть обеспечена необходимая несущая способность всех элементов, предназначенных для восприятия эксплуатационных нагрузок.

Несущая способность конструкции – способность ее сопротивляться действующим нагрузкам без потери прочности, жесткости и устойчивости. Для оценки несущей способности элементов вагона производят расчеты на статическую и усталостную прочность, на устойчивость и жесткость (прогибы).

Расчет на статическую прочность. Применяется при оценке несущей способности элементов кузовов и ходовых частей.

Условие статической прочности

$$\sigma_э \le [\sigma] \quad \text{или} \quad n_{ст} = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_э} \ge [n_{ст}], \tag{1.1}$$

где $\sigma_э$ – эквивалентное напряжение в опасной точке опасного поперечного сечения рассматриваемого элемента от всех видов эксплуатационных нагрузок;

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение;

$n_{ст}$ – расчетный коэффициент запаса статической прочности;

$\sigma_{пред}$ – предельное напряжение, при достижении которого появляются признаки непосредственного разрушения или возникает пластическая деформация,

$$\sigma_{пред} = \sigma_т, \quad [\sigma] = \sigma_{пред} / [n];$$

$[n_{ст}]$ – требуемый (нормативный) коэффициент запаса прочности.

Расчет на усталостную прочность. Производится при оценке несущей способности элементов, работающих в условиях интенсивного вибрационного нагружения (ходовые части, автосцепное устройство).

Условие усталостной прочности

$$n = \frac{\sigma_{rд}}{\sigma_{ад}} \ge [n], \tag{1.2}$$

где n – расчетный коэффициент запаса усталостной прочности;

$[n]$ – допускаемый коэффициент запаса усталостной прочности;

$\sigma_{rд}$ – предел выносливости элемента;

$\sigma_{ад}$ – амплитуда максимальных переменных динамических напряжений.

Расчет на устойчивость. Используется при расчете гибких элементов, работающих на сжатие (продольные элементы каркаса, плоские и криволинейные участки обшивки)

Условие устойчивости

$$n_{\text{у}} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{сж}}} \geq [n_{\text{у}}]\text{, или}\quad n_{\text{у}} = \frac{F_{\text{кр}}}{F} \geq [n_{\text{у}}]\text{,} \tag{1.3}$$

где $n_{\text{у}}$, $[n_{\text{у}}]$ – соотвественно расчетный и допускаемый коэффициенты запаса устойчивости;

$\sigma_{\text{кр}}$ – критическое напряжение сжатия, соответствующее критическому значению сжимающей силы $F_{\text{кр}}$;

$\sigma_{\text{сж}}$ – фактическое напряжение сжатия элемента (из расчета на прочность, соответствующее фактическому значению сжимающей силы F).

П р и м е ч а н и е – Критическое значение сжимающей силы $F_{\text{кр}}$ – наибольшее значение центрально приложенной сжимающей нагрузки, до которого прямолинейная форма равновесия стержня устойчива.

Расчет на жесткость (прогибы). Применяется при проектировании элементов, чрезмерные деформации (прогибы) которых могут явиться причиной нарушения работоспособности вагона, а также при проектировании рессор, пружин, амортизаторов.

Условие жесткости

$$f \leq [f], \tag{1.4}$$

где f, $[f]$ – максимальный и допускаемый прогибы соответственно.

2 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

2.1 Общие сведения о стержневых системах

В конструкциях вагонов широко используются стержневые элементы. Они образуют рамы тележек и кузовов вагонов, подкрепляют оболочечные и пластинчатые участки кузовов. Конструкции, состоящие из стержней, соединенных друг с другом в единую систему с помощью сварки, заклепок, болтов и др., образуют **стержневые системы.** Основной элемент стержневой системы – стержень: прямолинейный или криволинейный.

Различают плоские, пространственные и плоскопространственные стержневые системы.

П л о с к а я стержневая система – система, оси стержней которой и внешняя нагрузка расположены в одной плоскости.

П р о с т р а н с т в е н н а я стержневая система – система, оси стержней которой и внешняя нагрузка не лежат в одной плоскости.

П л о с к о п р о с т р а н с т в е н н а я стержневая система – система, оси стержней которой расположены в одной плоскости, а действующие нагрузки – перпендикулярно этой плоскости.

Р а с ч е т н ы е с х е м ы стержневых систем образуются линиями, проходящими через центры тяжести поперечных сечений стержней, т. е. геометрическими осями стержней (рисунок 2.1).

Различают два основных способа соединения стержней в расчетной схеме (рисунок 2.2): жесткое и шарнирное.

П р и м е ч а н и е – В жестких узлах сходящиеся стержни жестко скреплены друг с другом. Моменты в сечениях стержней около узла не равны нулю. Все стержни в узле поворачиваются совместно. В шарнирных узлах соединяемые стержни свободно поворачиваются относительно друг друга. Моменты в сечениях стержней около шарнира равны нулю.

В плоских системах шарнирное соединение стержней представляет собой связь в виде простого цилиндрического шарнира, в пространственных системах – в виде цилиндрического или шарового шарниров.

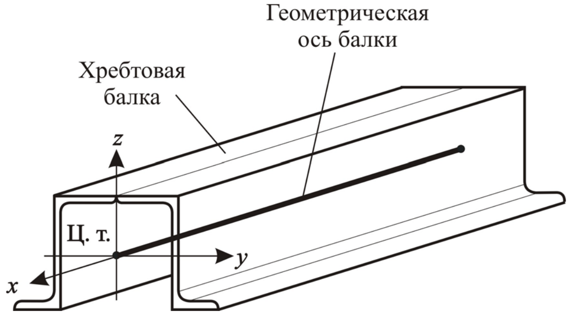


Рисунок 2.1 – Реальная конструкция и ее изображение на расчетной схеме

Цилиндрический шарнир (рисунок 2.3, *а*) обеспечивает свободный поворот стержней относительно одной оси (y), шаровой шарнир (рисунок 2.3, *б*) – относительно трех осей (x, y, z).

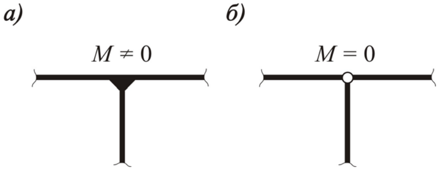


Рисунок 2.2 – Основные способы соединения стержней в расчетной схеме:
а – жесткое; *б* – шарнирное

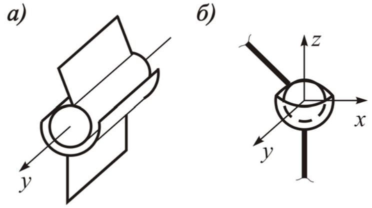


Рисунок 2.3 – Виды шарнирного соединения стержней:
а – цилиндрический шарнир; *б* – шаровой шарнир

В зависимости от способа соединения стержней между собой различают системы:

1) с жесткими соединениями стержней – рамы;
2) с шарнирными соединениями стержней – фермы;
3) комбинированные – рамы с шарнирами.

В данном учебнике основное внимание уделено расчету рам – стержневых систем, состоящих из стержней, соединенных жесткими и шарнирными узлами. Прежде чем приступить к расчету стержневой системы, необходимо установить, является ли система:

- геометрически изменяемой (или неизменяемой);
- статически определимой (или неопределимой).

Эти свойства системы выявляются в результате ее кинематического анализа. Расчету подлежат только геометрически неизменяемые системы.

Анализ образования стержневых систем рассмотрим ниже на примере плоских систем.

2.2 Анализ геометрической неизменяемости стержневых систем

Понятие о геометрической неизменяемости и степени свободы системы. *Геометрическая неизменяемость системы* характеризуется неизменяемостью ее форм и неподвижностью относительно основания. Изменение форм системы возможно лишь за счет деформации элементов. В частности, стержневая система является геометрически неизменяемой, если перемещения ее точек невозможны без изменения длин стержней.

Реальные конструкции должны быть геометрически неизменяемыми системами.

Расчетные схемы конструкций могут быть представлены в виде системы геометрически неизменяемых тел (*дисков*), соединенных между собой и с основанием *связями*. Роль диска может выполнять геометрически неизменяемая система (геометрически неизменяемая часть конструкции). В стержневой системе простейшим диском является стержень – прямолинейный или произвольной конфигурации. Землю (основание конструкции) также можно считать диском.

Установить, является ли рассматриваемая система геометрически неизменяемой, позволяет кинематический анализ, который должен предшествовать расчету системы. *Кинематический анализ системы* – проверка геометрической неизменяемости системы – включает два этапа:

1) определение степени свободы системы;

2) анализ структуры системы и условий опорных закреплений.

Таким образом, кинематический анализ системы начинают с установления степени ее свободы.

Рассмотрим определение степени свободы диска.

Как известно, положение отдельного диска на плоскости (рисунок 2.4) определяется тремя независимыми параметрами: координатами x и y произвольной точки A и углом наклона α прямой AB, проходящей через эту точку. Количество независимых геометрических параметров, определяющих положение диска в плоскости или пространстве, называют *числом степеней свободы диска.* Отсюда следует, что плоский диск имеет три степени свободы: два линейных перемещения и одно угловое.

Кинематические связи. Степень свободы диска или системы дисков можно ограничить путем введения различных устройств.

Устройство, устраняющее одну степень свободы, рассматривается как единичная кинематическая связь. Связь, препятствующая взаимному перемещению двух дисков в одном определенном направлении, называют элементарной. Различают два вида элементарных связей: *линейные* – связи, препятствующие линейным перемещениям дисков, и *угловые* – препятствующие угловым перемещениям.

Связи, соединяющие диск (систему) с основанием, называют *опорными* (внешними), а соединяющие элементы системы между собой – *внутренними.*

В качестве кинематических связей используют шарниры, соединительные и опорные стержни (опоры).

Шарниры используются для соединения дисков и бывают простыми (рисунок 2.5, *а*) и сложными, или кратными (рисунок 2.5, *б*). *Простой* шарнир соединяет два диска (стержня), *сложный* – более двух.

Каждый простой шарнир эквивалентен наложению двух кинематических связей, поскольку препятствует любым двум взаимным смещениям двух дисков (устраняет две степени свободы), оставляя возможность взаимного их поворота. *Сложный (кратный) шарнир эквивалентен (n – 1) простым шарнирам*, где *n* – число соединяемых дисков.

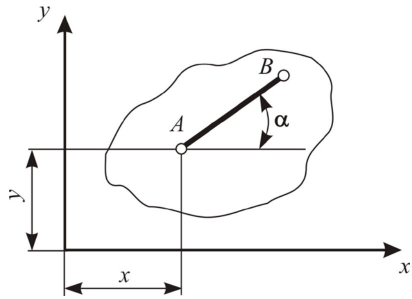


Рисунок 2.4 – Положение диска на плоскости

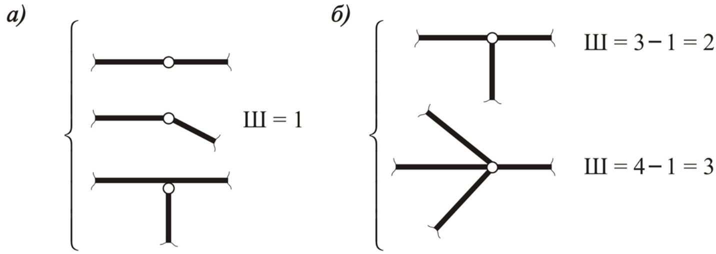


Рисунок 2.5 – Шарнирное соединение дисков (стержней):
а – простой шарнир; *б* – кратный шарнир

Стержень, оба конца которого шарнирно соединены с дисками, называют *соединительным*.

Различают следующие т и п ы о п о р (о п о р н ы х с в я з е й): цилиндрическая подвижная опора, цилиндрическая неподвижная опора и жесткая заделка.

Цилиндрическая подвижная опора (рисунок 2.6) эквивалентна наложению одной кинематической связи. Конструктивная схема опоры (см. рисунок 2.6, *а*) включает верхний и нижний балансиры, между которыми находится цилиндрический шарнир. Расчетную схему опоры (см. рисунок 2.6, *б*) принимают *в виде стержня с шарнирами по концам*. Опорный стержень устраняет одну степень свободы – линейное перемещение вдоль оси стержня, и в нем возникает реакция *R*.

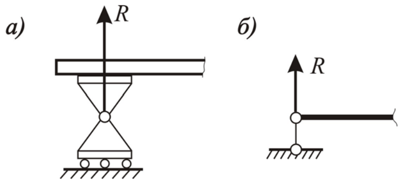


Рисунок 2.6 – Цилиндрическая подвижная опора:
а – конструктивная схема; *б* – расчетная схема

Цилиндрическая неподвижная опора (рисунок 2.7) *эквивалентна двум кинематическим связям.* Она препятствует линейным перемещениям системы в вертикальном и горизонтальном направлениях, т. е. устраняет две степени свободы. Расчетную схему опоры принимают *в виде двух опорных стержней,* расположенных под углом друг к другу. В опоре возникает реакция *V*, проходящая через центр шарнира, направление которой зависит от направления расчетной нагрузки. При расчетах ее обычно заменяют двумя составляющими *R* и *H*, направленными по вертикали и горизонтали соответственно.

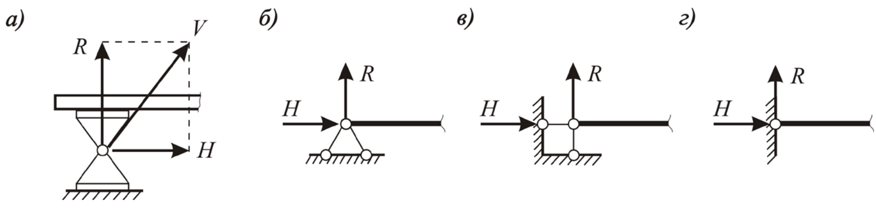


Рисунок 2.7 – Цилиндрическая неподвижная опора:
а – конструктивная схема; *б–г* – расчетные схемы

Жесткая заделка (рисунок 2.8) *эквивалентна трем кинематическим связям*. Она препятствует угловому (повороту) и двум линейным перемещениям (устраняет три степени свободы). В такой связи возникают три реакции: *R*, *H* и *M.* Расчетная схема заделки может быть представлена тремя опорными стержнями (см. рисунок 2.8, *в*). Стержневой эквивалент заделки поясняет появление в ней опорного момента *M*. Введенным стержням соответствуют опорные реакции R_A, R_B, *H*. Тогда $R = R_B - R_A$, $M = R_A a$, где *a* – глубина заделки.

П р и м е ч а н и е – Обратите внимание на то, что рассмотренные выше опорные связи удобно характеризовать числом опорных стержней. Так, цилиндрически неподвижная опора эквивалентна двум опорным стержням, заделка – трем. В свою очередь, каждый опорный стержень эквивалентен одной кинематической связи.

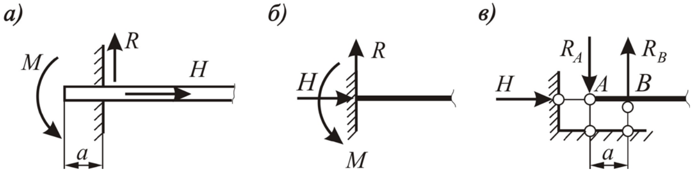


Рисунок 2.8 – Жесткая заделка:
а – конструктивная схема; *б, в* – расчетные схемы

В строительной механике стержневых систем используют также *связи, устраняющие одну степень свободы – угловые перемещения*, которые становятся возможными в системе в результате выделения из стержневой симметричной системы ее части. Связи, показанные на рисунке 2.9, устраняют повороты концевого сечения стержня соответственно в плоскостях *xOz* (относительно оси *Oy*), *xOy* (относительно оси *Oz*) и *yOz* (относительно оси *Ox*).

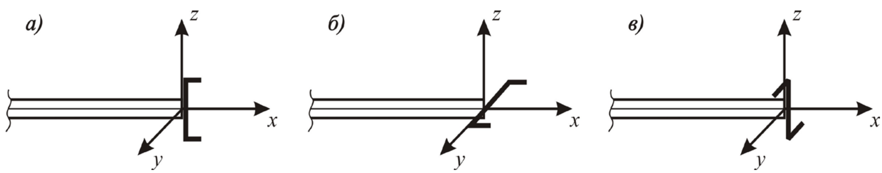


Рисунок 2.9 – Связи, устраняющие угловые перемещения в плоскости:
а – *xOz*; *б* – *xOy*; *в* – *yOz*

Степень свободы плоской стержневой системы. Диски, образующие систему, соединяются между собой шарнирами и стержнями и прикрепляются к земле с помощью опорных стержней (опор).

Степень свободы системы (степень геометрической изменяемости системы), состоящей из нескольких дисков, может быть определена по формуле

$$W = W_{\text{о}} - \text{С}_{\text{св}}, \qquad (2.1)$$

где $W_{\text{о}}$ – степень свободы системы без учета связей, $W_{\text{о}} = 3\text{Д}$;

Д – количество дисков;

$\text{С}_{\text{св}}$ – число связей, наложенных на систему,

$$\text{С}_{\text{св}} = 2\text{Ш} + \text{С}_{\text{оп}};$$

Ш – число простых шарниров, связывающих диски;

$\text{С}_{\text{оп}}$ – число опорных стержней.

Примечание – Для определения числа дисков Д, входящих в систему, необходимо предварительно отбросить все шарниры и опоры, а для определения числа шарниров Ш – все опорные стержни.

Тогда

$$W = 3\text{Д} - 2\text{Ш} - \text{С}_{\text{оп}}. \qquad (2.2)$$

Примечание – В формуле (2.2) учитывается, что:

- каждый диск имеет три степени свободы;
- каждый простой шарнир эквивалентен двум кинематическим связям (препятствует двум взаимным линейным смещениям соединяемых стержней, оставляя возможность взаимного их поворота);
- каждый опорный стержень эквивалентен одной линейной связи.

По результатам определения степени свободы системы по формуле (2.2) могут быть сделаны следующие заключения о расчетной схеме конструкции:

1) *если $W > 0$*, то система является *геометрически изменяемой*, так как не имеет достаточного количества связей и по определению не может служить в качестве расчетной схемы конструкции. Система, для которой $W = 1$, называется *механизмом*;

2) *если $W = 0$*, то система формально обладает необходимым минимумом связей, чтобы быть *геометрически неизменяемой и статически определимой;*

3) *если $W < 0$*, то система имеет избыточные связи. В этом случае можно утверждать, что система является *статически неопределимой*. Однако ничего определенного нельзя утверждать относительно кинематической неизменяемости системы.

Пример 2.1. Установить степень свободы системы (рамы), приведенной на рисунке 2.10, *а*.

Решение. Устанавливаем, что система имеет три диска (стержни *I*, *II*, *III*), т. е. Д = 3, и четыре шарнира, эквивалентных простым (Ш = 4). Для определения числа дисков отбрасываем все шарниры и опорные стержни (рисунок 2.10, *б*), для определения числа простых шарниров – все опорные стержни (рисунок 2.10, *в*). Цифры на последней схеме указывают кратность шарниров.

Число опорных стержней $\text{С}_{\text{оп}} = 3$.

Тогда $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 3 = -2 < 0$.

Следовательно, система является статически неопределимой (имеет две лишние связи) и может быть геометрически неизменяемой.

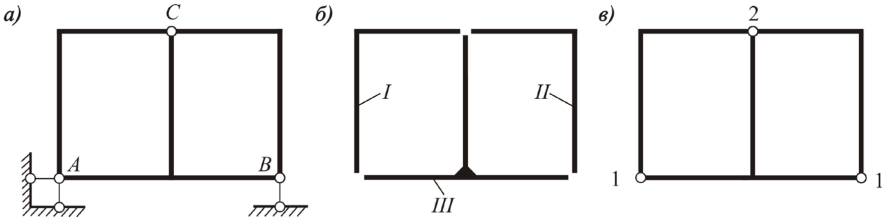


Рисунок 2.10 – К расчету степени свободы системы:
а – исходная система; *б* – схема для определения числа дисков; *в* – схема для определения числа простых шарниров

Пример 2.2. Установить степень свободы систем в виде шарнирного треугольника (рисунок 2.11, *а*) и шарнирного прямоугольника (рисунок 2.11, *б*).

Р е ш е н и е. Степень свободы рассматриваемых систем

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 3 = 0\,; \quad W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 3 = 1\,.$$

Следовательно, система в виде шарнирного треугольника обладает минимально необходимым числом связей (статически определима) и может быть геометрически неизменяемой.

Система в виде шарнирного прямоугольника представляет собой механизм, т.е. является геометрически изменяемой и не может быть использована в качестве конструкции.

Пример 2.3. Установить степень свободы системы, изображенной на рисунке 2.11, *в*.

Р е ш е н и е. Для рассматриваемой двухопорной рамы Д = 2, Ш = 1, $С_{оп} = 4$.

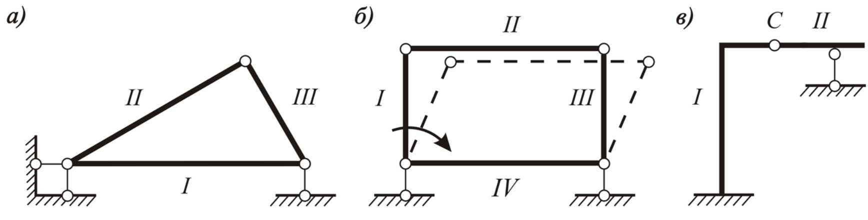


Рисунок 2.11 – К расчету степени свободы системы:
а – шарнирный треугольник; *б* – шарнирный прямоугольник; *в* – двухопорная рама

Степень свободы системы $W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0$.

Отсюда следует, что рассматриваемая система статически определима и может быть геометрически неизменяемой.

Степень свободы плоской шарнирно-стержневой системы. Шарнирно-стержневыми называют системы с шарнирными соединениями стержней. Степень свободы таких систем можно определить по формуле (2.2), как это мы делали для систем в виде шарнирных треугольника и прямоугольника. Однако для более сложных систем удобнее пользоваться другими.

Для шарнирно-стержневых систем выражения для $W_\text{о}$ и $\text{С}_\text{св}$ можно записать в виде

$$W_\text{о} = 2\text{У}, \quad \text{С}_\text{св} = \text{С} + \text{С}_\text{оп},$$

где У – число узлов системы;

С – число стержней системы;

$\text{С}_\text{оп}$ – число опорных стержней.

П р и м е ч а н и е – В приведенных выражениях для $W_\text{о}$ и $\text{С}_\text{св}$ учитывается, что общее число степеней свободы всех узлов, не связанных между собой стержнями, равно 2У [степень свободы шарнира (точки) равна двум], а каждый стержень системы (включая опорный) снимает у объединяемых им шарниров одну степень свободы, т. е. эквивалентен одной кинематической связи.

Тогда *степень свободы шарнирно-стержневой системы*

$$W = 2\text{У} - \text{С} - \text{С}_\text{оп}. \tag{2.3}$$

Пример 2.4. Установить степень свободы систем, изображенных на рисунке 2.12.

Р е ш е н и е. Для рассматриваемых систем У = 10, $\text{С}_\text{оп} = 3$, С = 13 – для первой системы, С = 17 – для второй, С = 21 – для третьей.

Степень свободы рассматриваемых систем: первой – $W = 2 \cdot 10 - 13 - 3 = 4$; второй – $W = 2 \cdot 10 - 17 - 3 = 0$; третьей – $W = 2 \cdot 10 - 21 - 3 = -4$.

Следовательно, первая шарнирно-стержневая система (см. рисунок 2.12, *а*) является геометрически изменяемой; вторая (см. рисунок 2.12, *б*) – статически определима и может быть геометрически неизменяемой; третья (см. рисунок 2.12, *в*) – статически неопределима, так как имеет избыточные связи.

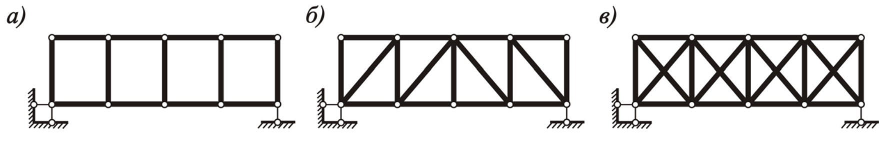


Рисунок 2.12 – Шарнирно-стержневые системы:
а – геометрически изменяемая; *б* – статически определимая; *в* – статически неопределимая

Анализ геометрической структуры системы. Для неизменяемых систем должно соблюдаться условие $W \leq 0$, т. е. количество наложенных кинематических связей $\text{С}_\text{св}$ должно быть не менее степени свободы системы $W_\text{о}$ (без учета связей).

Аналитическое условие $W \leq 0$ является необходимым, но недостаточным для утверждения о неподвижности и геометрической неизменяемости системы. Это связано с тем, что геометрическая неизменяемость системы зависит не только от числа связей, наложенных на диски, но и от их расположения. Чтобы узнать, является ли система действительно геометрически неизменяемой и неподвижной, проводят анализ геометрической структуры системы. Для этого в системе выделяют неизменяемые части (диски) и исследуют их соединение между собой.

Рассмотрим *основные принципы образования структурно неизменяемых систем:*

1) два диска (*I* и *II*) или диск с землей могут соединяться в неизменяемую систему (жестко) при помощи трех элементарных связей:

• либо шарниром *C* и стержнем *AB*, ось которого не проходит через центр шарнира (рисунок 2.13, *а, б*);

• либо тремя стержнями, оси которых не пересекаются в одной точке и непараллельны (рисунок 2.13, *в, г*);

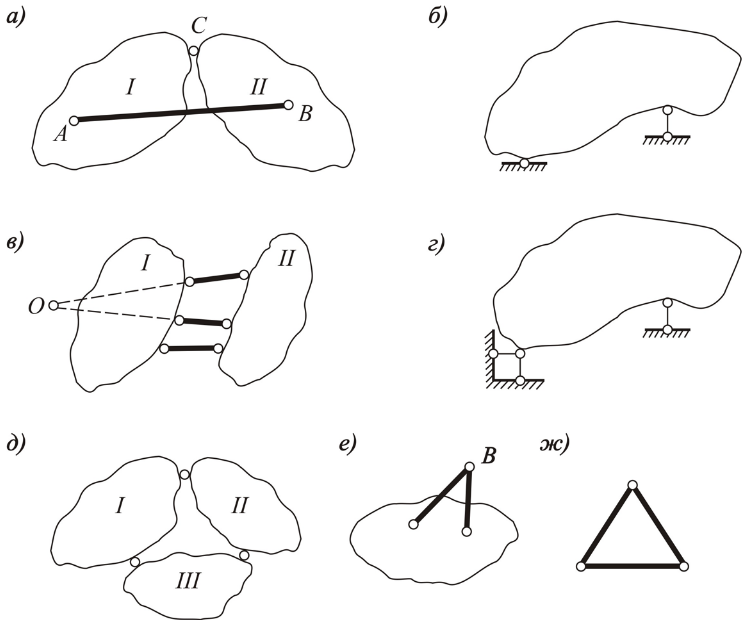


Рисунок 2.13 – Образование плоских неизменяемых систем:
а, б – соединение двух дисков шарниром и стержнем; *в, г* – соединение двух дисков тремя стержнями; *д* – соединение трех дисков тремя шарнирами; *е* – присоединение нового узла к диску; *ж* – шарнирно-стержневой треугольник

2) три диска (*I*, *II* и *III*)) могут быть соединены жестко тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (рисунок 2.13, *д*);

3) новый узел (*B*) может быть присоединен к диску при помощи диады – двух линейных связей (стержней), не лежащих на одной прямой (рисунок 2.13, *е*).

Все перечисленные способы могут быть сведены к шарнирно-стержневому треугольнику (рисунок 2.13, *ж*), который является геометрически неизменяемой фигурой.

Напомним, что в плоских стержневых системах простейшим диском является стержень, диском является и земля. Примеры неподвижного прикрепления стержневых систем к земле (диску) с помощью шарнира *A* и стержня в соответствии с указанными правилами приведены на рисунке 2.14, *а*; тремя стержнями – на рисунке 2.14, *б–г*.

При анализе стержневых систем на структурную неизменяемость их разбивают на диски, неизменяемость которых очевидна. В этом случае для анализа неизменяемости всей системы достаточно проанализировать соединение дисков между собой.

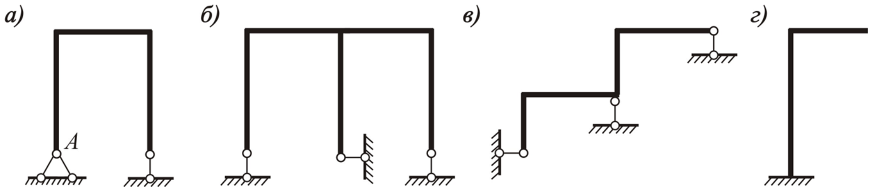


Рисунок 2.14 – Примеры неподвижного прикрепления стержневых систем к земле

Пример 2.5. Выполнить анализ структуры системы, приведенной на рисунке 2.10, *а*.

Так как три диска (стержни *I*, *II*, *III*) соединены тремя шарнирами *A*, *B* и *C*, не лежащими на одной прямой, они образуют единый жесткий диск. В свою очередь, этот диск присоединен к основанию (земле) тремя опорными стержнями, не пересекающимися в одной точке. Следовательно, система является неизменяемой, поскольку она образована в полном соответствии с основными принципами образования структурно неизменяемых систем.

Пример 2.6. Произвести анализ геометрической структуры шарнирно-стержневой системы, показанной на рисунке 2.11, *а*.

Аналогично предыдущему примеру три диска – стержня (*I*, *II*, *III*) соединены тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, и их можно рассматривать, как единый диск. Полученный диск связан неподвижно с землей с помощью трех опорных стержней, которые не пересекаются в одной точке. Таким образом, рассматриваемая система является неизменяемой.

Шарнирный треугольник является примером простейшей геометрически неизменяемой стержневой системы.

Пример 2.7. Исследуем систему, приведенную на рисунке 2.11, *в*.

Диск *I* жестко присоединен к земле заделкой (тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке). Диск *II* соединен с диском *I*, а следовательно, с землей, шарниром *C* и стержнем (ось стержня не пересекает ось шарнира). Следовательно, диски *I* и *II* можно объединить в единый блок, который неподвижно связан с землей. Таким образом, система на рисунке 2.11, *в* является геометрически неизменяемой.

Пример 2.8. Выполнить анализ структуры системы, приведенной на рисунке 2.12, *б*.

Анализ структуры рассматриваемой системы показывает, что она состоит из последовательно присоединенных шарнирных треугольников, т. е. представляет собой единый блок. Система неподвижно присоединена к земле тремя стержнями. Отсюда следует, что данная система геометрически неизменяема.

Таким образом, *последовательность проверки геометрической неизменяемости системы* следующая.

1 В системе выделяют диски – геометрически неизменяемые части, и устанавливают число наложенных на систему связей: шарниров и опорных стержней.

2 Определяют степень свободы системы W, используя формулы (2.2) или (2.3).

3 В случае выполнения условия $W \le 0$ проверяют еще геометрическую структуру системы, выделяя наиболее крупные геометрически неизменяемые части (диски) системы и исследуя их соединение между собой.

4 На основании расчета W и анализа геометрической структуры могут быть сделаны следующие заключения о расчетной схеме системы:

- если $W = 0$ и все соединения элементов допустимы, система является *геометрически неизменяемой и статически определимой;*
- если $W < 0$ и все соединения элементов допустимы, система является *геометрически неизменяемой и статически неопределимой*.

Мгновенно изменяемые системы. Все исключения из принципов образования геометрически неизменяемых систем приводят к мгновенно изменяемым системам.

Мгновенно изменяемой называют систему, точки которой получают конечные перемещения даже при бесконечно малых деформациях элементов. Поэтому такие системы неприменимы в качестве инженерных конструкций.

Система может стать мгновенно изменяемой, если в геометрически неизменяемой системе изменить длину каких-либо элементов или направление опорных стержней.

Геометрические признаки мгновенно изменяемых систем:

1) шарнир *A* находится на одной прямой со стержнем *1* (рисунок 2.15, *а*);

2) шарниры *A*, *B* и *C* лежат на одной прямой (рисунок 2.15, *б*);

3) стержни *1*, *2* и *3* пересекаются в одной точке или параллельны (рисунок 2.15, *в, г*).

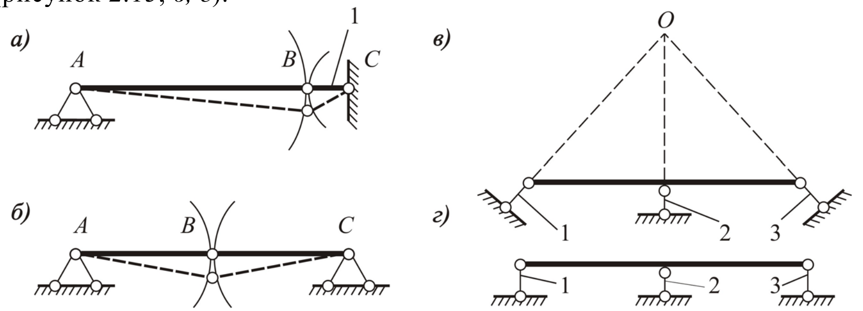


Рисунок 2.15 – Примеры плоских мгновенно изменяемых систем

На рисунке 2.15, *а*, *б* показаны системы из двух шарнирно соединенных стержней *AB* и *BC*, лежащих на одной прямой. Если мысленно разъединить стержни в шарнире *B*, то при повороте вокруг шарниров *A* и *C* их концы будут описывать окружности. Эти окружности пересекаются в точке *B*. Поскольку обе окружности имеют бесконечно малый элемент касания, то шарнир *B* под действием нагрузки может сместиться (соскользнуть) по вертикали на некоторую малую величину и система станет на это мгновение изменяемой. Как только это перемещение произойдет, шарниры *A*, *B*, *C* перестанут находиться на одной прямой и система уже будет неизменяемой.

Кинематическим признаком мгновенно изменяемой системы служит также наличие мгновенного центра ее вращения. В случае, изображенном на рисунке 2.15, *в*, мгновенный центр вращения системы *O* лежит на пересечении направлений опорных реакций. В результате система может совершать бесконечно малые перемещения путем вращения вокруг мгновенного центра. Такое же бесконечно малое смещение возможно и для системы, показанной на рисунке 2.15, *г*, поскольку оси параллельных опорных стержней пересекаются в бесконечности.

Мгновенно изменяемые системы недопустимо использовать в качестве инженерных конструкций. Усилия, возникающие в этих системах, могут оказаться неопределенными или достигнуть очень большого значения.

3 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

3.1 Статически неопределимые системы и особенности их расчета

Статически неопределимые системы. Как известно, *статически определимые системы* – это системы, для которых внутренние или внешние силы (реакции) могут быть определены с помощью уравнений статики (уравнений равновесия). *Статически неопределимые системы* – системы, расчет которых на основе одних уравнений статики (уравнений равновесия) невозможен. Для расчета таких систем необходимо к уравнениям равновесия добавить уравнения деформаций (перемещений).

К и н е м а т и ч е с к и м п р и з н а к о м статически неопределимых систем является наличие в их структуре лишних (избыточных) связей.

Статически неопределимые системы являются более сложными по сравнению со статически определимыми системами и требуют большей трудоемкости расчета. Однако они часто применяются в конструкциях и сооружениях, что обусловлено определенными свойствами этих систем.

О т л и ч и т е л ь н ы е с в о й с т в а статически неопределимых систем.

1 Повышенная надежность («живучесть») за счет наличия избыточных связей (резервирования). В такой системе выход из строя (удаление) некоторых лишних связей не ведет к изменяемости, а следовательно, к разрушению всей конструкции. Это приводит лишь к понижению степени статической неопределимости или переводит систему в разряд статически определимых. При этом конструкция может продолжать выполнять свои функции, однако, как правило, при несколько меньшей нагрузке.

2 Увеличенная жесткость и экономичность системы. При идентичном характере нагружения значения усилий в статически неопределимых системах, по сравнению со статически определимыми, получаются меньшими. Следовательно, такие системы и более экономичны.

3 Рациональное распределение усилий между элементами системы. Оно зависит не только от внешних сил, но и от соотношения между жесткостями сечений отдельных элементов. Более жесткие элементы воспринимают большие усилия, чем элементы более гибкие. При этом увеличение жесткости сечения какого-либо элемента приводит к некоторому увеличению усилия, воспринимаемого этим элементом. Статически неопределимая система «приспосабливается» к проектным размерам сечения элементов, загружая более мощные и разгружая более слабые.

4 Возникновение внутренних усилий при изменении температуры окружающей среды или при нагреве отдельных элементов конструкции, а также в случае наличия неточности при изготовлении и сборке.

Современные вагонные конструкции являются, как правило, сложными статически неопределимыми системами.

Особенности расчета статически неопределимых систем. Расчет статически неопределимых систем, имеющих избыточные связи, принципиально отличается от расчета статически определимых систем. Для расчета таких систем разработаны два классических метода: метод сил и метод перемещений.

В *методе сил* основными неизвестными являются силы (внешние или внутренние), а известными – перемещения в направлении этих сил. Для определения неизвестных составляются уравнения деформаций (перемещений).

В *методе перемещений* основными неизвестными являются перемещения (линейные и угловые) узлов системы. Для их определения составляются уравнения равновесия. Определив эти перемещения, находят внутренние силовые факторы в произвольных сечениях заданной системы.

Порядок расчета статически неопределимых систем методом сил (перемещений).

1 Установление степени статической (кинематической) неопределимости системы.

2 Выбор основной статически (кинематически) определимой системы.

3 Составление системы канонических уравнений метода сил (перемещений).

4 Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений.

5 Решение канонических уравнений для определения неизвестных усилий (перемещений).

6 Построение окончательных эпюр внутренних сил (M, Q и N) для заданной системы.

7 Определение расчетных напряжений и оценка прочности конструкции.

При расчете стержневых вагонных конструкций наибольшее распространение получил метод сил, который является одним из наиболее эффективных методов расчета, особенно на этапе выполнения проектировочных расчетов.

3.2 Установление степени статической неопределимости

Степень статической неопределимости системы равна числу лишних (избыточных) связей, которые следует удалить из статически неопределимой системы для обращения ее в статически определимую и геометрически неизменяемую.

П р и м е ч а н и е – Связи условно называют лишними вследствие того, что они не являются безусловно необходимыми для обеспечения неизменяемости системы.

Различают системы с *внешней или (и) внутренней статической неопределимостью*. В первом случае лишними являются внешние (опорные) связи (рисунок 3.1, *а, б*), во втором – внутренние (рисунок 3.1, *в*). Система, являющаяся внешне и внутренне статически неопределимой, показана на рисунке 3.1, *г*.

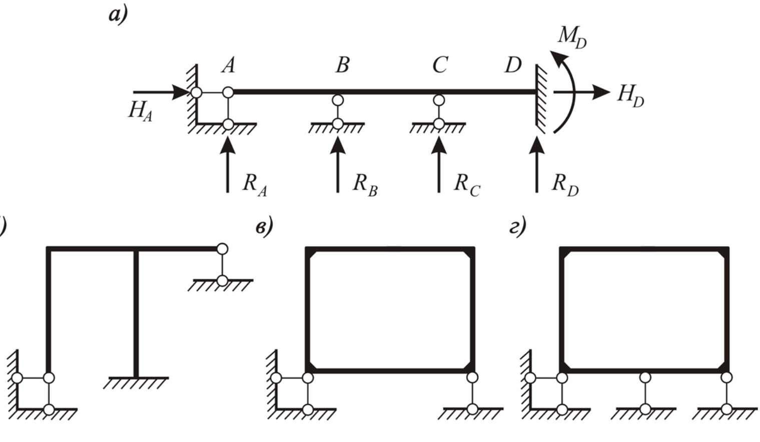


Рисунок 3.1 – Статически неопределимые системы с лишними связями:
а, *б* – внешними; *в* – внутренними; *г* – внешними и внутренними

Рассмотрим **два основных способа определения числа лишних связей в системе.**

П е р в ы й с п о с о б основывается на сопоставлении числа связей в системе с числом степеней свободы.

Число лишних связей внешне статически неопределимой системы (балки или рамы) вычисляется с использованием формулы

$$n = \text{С}_{\text{оп}} - \text{С}_{\min}, \tag{3.1}$$

где $\text{С}_{\text{оп}}$ – общее число опорных стержней системы;

C_{min} – число стержней, необходимых для обеспечения геометрической неизменяемости и неподвижности системы, для плоских систем $C_{min} = 3$.

Например, для трехпролетной балки, изображенной на рисунке 3.1, *а*, $n = 7 - 3 = 4$; для двухпролетной рамы (см. рисунок 3.1, *б*) $n = 6 - 3 = 3$.

Число лишних связей системы, состоящей из дисков, может быть определено исходя из формулы (2.2) и равно степени свободы системы *W*, взятой с обратным знаком:

$$n = -W = \text{С}_{\text{оп}} + 2\text{Ш} - 3\text{Д}. \quad (3.2)$$

Для рам, показанных на рисунке 3.2, *а–в*, число лишних связей соответственно:

$n = 9 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 5$; $n = 6 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 5$; $n = 6 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 3$.

В последнем случае (рисунок 3.2, *в*) рама представляет собой бесшарнирный замкнутый контур и содержит три лишние связи. В этом легко убедится, отбросив одну из опор рамы и заменив удаленные связи их реакциями (рисунок 3.2, *г*). В результате получим геометрически неизменяемую и неподвижную систему.

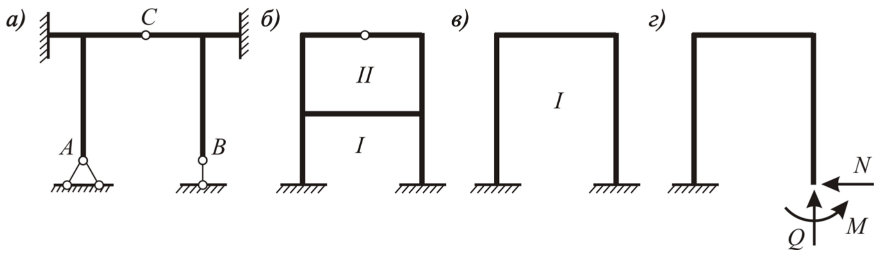


Рисунок 3.2 – К расчету числа лишних связей систем, состоящих из дисков:
а – двух; *б–г* – одного; *I, II* – номера замкнутых контуров

Формула (3.2) справедлива лишь в том случае, когда все диски системы являются системами без лишних связей (статически определимы). В противном случае необходимо учитывать статическую неопределимость дисков. Например, для прямоугольной рамы (см. рисунок 3.1, *в*), представляющей замкнутый контур, число лишних связей по формуле (3.2) $n = 3 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 0$. Однако это не означает, что система не имеет лишних связей. В действительности она имеет три лишних внутренних связи. Для превращения ее в статически определимую систему (консольную балку ломаного очертания) необходимо разрезать один из стержней и тем самым удалить три внутренние связи (рисунок 3.3). Удаленные связи должны быть заменены их реакциями N, Q и M.

Таким образом, *любой бесшарнирный замкнутый контур*, независимо от его формы и расположения в системе, *трижды статически неопределим, т. е. содержит три лишние связи*.

Введем в замкнутый контур шарнир (рисунок 3.4). В разрезе, проведенном по этому шарниру, будут действовать только два внутренних усилия: N и Q. Следовательно, такой контур имеет две лишние связи, т. е. дважды статически неопределим.

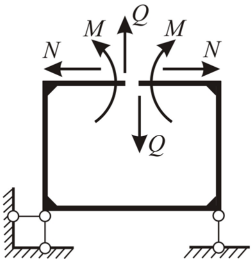


Рисунок 3.3 – К расчету числа лишних связей для замкнутого бесшарнирного контура

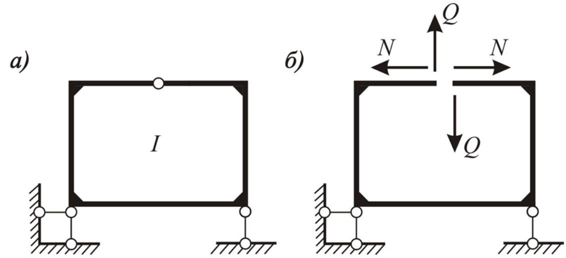


Рисунок 3.4 – К расчету числа лишних связей для замкнутого контура с шарниром:
а – исходная система; *б* – внутренние усилия, действующие в разрезе по шарниру

Введение в раму простого шарнира снимает одну связь (разрешает поворот одного сечения относительно другого) *и снижает общую степень статической неопределимости системы на единицу.*

Примечание – Шарнир может быть введен в любое место – на стержень или в узел рамы.

Число лишних связей системы, имеющей замкнутые контуры, удобно определять по формуле

$$n = 3К - Ш, \tag{3.3}$$

где К – число замкнутых контуров системы (в предположении отсутствия шарнирных соединений);

Ш – число простых шарниров системы (число врезанных шарниров с учетом их кратности).

Формула (3.3) является основной для определения степени статической неопределимости рам.

П р и м е ч а н и я

1 В формуле (3.3) учитывается, что каждый замкнутый бесшарнирный контур имеет три лишние связи, а каждый простой шарнир, введенный в такой контур, снимает одну связь, снижая степень статической неопределимости на единицу.

2 При расчете по формуле (3.3) рассматриваются шарниры (соединительные и опорные), эквивалентные простым. Напомним, что шарниры бывают простые и сложные. Простой шарнир соединяет два стержня, сложный – более двух (см. рисунок 2.5).

Сложный шарнир эквивалентен (*n* – 1) простым шарнирам, где *n* – число соединяемых стержней. Для использования формулы (3.3) необходимо каждый сложный шарнир заменить эквивалентным числом простых шарниров, используя выражение Ш = *n* – 1.

3 При установлении кратности опорных шарниров надо исходить из следующего:

- шарнирно-неподвижную опору (рисунок 3.5) можно изображать в виде одного шарнира, связывающего систему с землей. Земля здесь выступает в роли абсолютно жесткого стержня;
- в шарнирно-подвижной опоре, имеющей два шарнира, шарнир, связывающий опорный стержень с землей, всегда является простым.

На рисунке 3.6, *а* – *в* показаны варианты присоединения стержней системы к шарнирно-неподвижной и шарнирно-подвижной опорам. Кратность опорных шарниров обозначена цифрами.

Рисунок 3.5 – Схематическое изображение шарнирно-неподвижной опоры

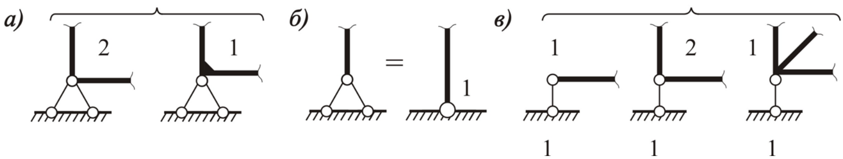


Рисунок 3.6 – Варианты присоединения стержней системы к опорам:
а, *б* – шарнирно-неподвижной; *в* – шарнирно-подвижной

Поясним применение формулы (3.3). Для рам, показанных на рисунках 3.2, *б* и 3.4, *а*, число лишних связей составляет $n = 3 \cdot 2 - 1 = 5$ и $n = 3 \cdot 1 - 1 = 2$ (римскими цифрами обозначены номера контуров). Для рам на рисунках 3.1, *в* и 3.2, *в* $n = 3 \cdot 1 - 0 = 3$. Полученные результаты совпадают с приведенными ранее.

Рассмотрим возможность использования формулы (3.3) для рамы, приведенной на рисунке 3.2, *а*.

Для получения бесшарнирных замкнутых контуров предполагаем, что опоры *A* и *B* являются жесткими заделками, а шарнир *C* отсутствует (рисунок 3.7, *а*). В результате имеем три контура: *I*, *II* и *III*. Далее представим, что в рассматриваемую раму с тремя бесшарнирными замкнутыми контурами введены шарниры – соединительный и опорные. При этом шарнирно-неподвижную опору *А* показываем в виде одного шарнира. Рама с введенными шарнирами показана на рисунке 3.7, *б*. Кратность шарниров обозначена цифрами. В рассматриваемой системе имеем Ш = 4. Тогда $n = 3 \cdot 3 - 4 = 5$, что совпадает с полученным ранее результатом.

Рассмотрим теперь раму, изображенную на рисунке 3.8.

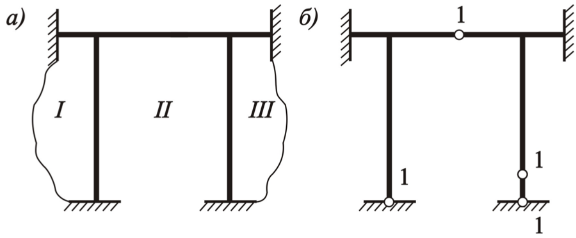


Рисунок 3.7 – К получению бесшарнирных замкнутых контуров системы:
а – с замкнутыми контурами;
б – с введенными шарнирами

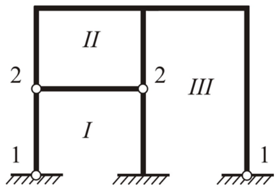


Рисунок 3.8 – К расчету числа лишних связей рамы

Эту раму можно представить состоящей из трех замкнутых контуров с введенными в нее двумя простыми и двумя сложным шарнирами. Каждый сложный шарнир эквивалентен двум простым. Кратность шарниров показана на схеме цифрами.

Число лишних связей системы – $n = 3 \cdot 3 - 6 = 3$.

Число лишних связей шарнирно-стержневых систем удобно определять исходя из формулы (2.3):

$$n = -W = \text{С} + \text{С}_{\text{оп}} - 2\text{У}. \qquad (3.4)$$

Так, для шарнирно-стержневой системы, приведенной на рисунке 2.12, *в*,

$$n = 21 + 3 - 2 \cdot 10 = 4 .$$

В т о р о й с п о с о б основывается на сопоставлении числа неизвестных усилий m в системе (числа связей в системе) с числом независимых уравнений статики s, которые можно составить для рассматриваемой системы.

Число лишних связей системы в этом случае может быть определено из выражения

$$n = m - s . \qquad (3.5)$$

Рассмотрим балку, изображенную на рисунке 3.1, *а*. Число неизвестных опорных реакций рамы равно 7, число уравнений статики для плоскости – 3, следовательно, $n = 7 - 3 = 4$.

В практических расчетах стержневых систем удобно выражать число неизвестных усилий m через число стержней С системы, а число уравнений статики s – через число узлов У. Тогда *число лишних неизвестных для стержневых систем*:

- с шарнирными узлами –

$$n = \text{С} - 2\text{У}; \tag{3.6}$$

- с жесткими узлами –

$$n = 3\text{С} - 3\text{У}; \tag{3.7}$$

- с жесткими и шарнирными узлами –

$$n = 3\text{С} - 3\text{У} - \text{Ш}. \tag{3.8}$$

П р и м е ч а н и е – В формулах (3.6)–(3.8) учитывается, что:

- в стержне с шарнирными узлами неизвестным является одно усилие (*N*), с жесткими узлами – три усилия (*M*, *N*, *Q*);
- для каждого шарнирного узла можно составить два уравнения статики ($\Sigma X = 0$, $\Sigma Z = 0$), для жесткого узла – три уравнения статики ($\Sigma X = 0$, $\Sigma Z = 0$, $\Sigma M = 0$);
- каждый простой шарнир приводит к появлению дополнительного уравнения статики и понижает степень статической неопределимости на единицу.

Рассмотрим шарнирно-стержневую систему, изображенную на рисунке 2.12, *в*.

П р и м е ч а н и е – При определении числа лишних неизвестных *для систем с шарнирными узлами* по формуле (3.6) под числом стержней С понимают общее число стержней системы, включая опорные.

Для рассматриваемой системы с учетом примечания С = 24, У = 10.

Число лишних связей $n = 24 - 2 \cdot 10 = 4$. Результат расчета совпадает с тем, что был получен для этой же системы при расчете по формуле (3.4).

Далее определим число лишних неизвестных для рамы с жесткими узлами, которая показана на рисунке 3.9, *а*.

П р и м е ч а н и е – При определении числа лишних неизвестных *для систем с жесткими узлами* по формуле (3.7) в число узлов У системы не включаются опорные узлы, поскольку в каждое из уравнений равновесия для этих узлов войдут три опорные реакции и дополнительных уравнений для вычисления усилий в стержнях при этом не появится.

С учетом примечания число узлов У = 6, С = 10.

Число лишних связей системы $n = 3 \cdot 10 - 3 \cdot 6 = 12$.

Аналогичный результат получим при использовании формулы (3.3), учитывая наличие четырех замкнутых контуров и отсутствие шарниров (Ш = 0): $n = 3 \cdot 4 = 12$.

Рассмотрим определение числа лишних связей для рам с жесткими и шарнирными узлами, приведенных на рисунках 3.8 и 3.9, *б* (кратность шарниров показана цифрами).

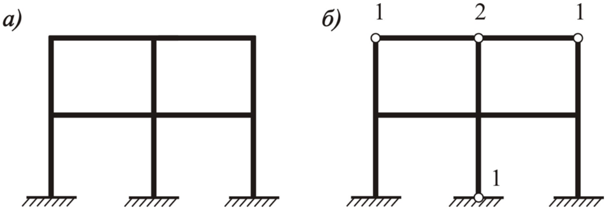


Рисунок 3.9 – К расчету числа лишних связей системы:
а – рама с жесткими узлами; *б* – рама с жесткими и шарнирными узлами

П р и м е ч а н и е – При расчете по формуле (3.8) в общее число узлов У системы не включаются опорные и учитывается кратность узлов.

Число лишних связей систем: $n = 3\cdot 8 - 3\cdot 5 - 6 = 3$; $n = 3\cdot 10 - 3\cdot 6 - 5 = 7$.

Для рамы, изображенной на рисунке 3.8, результат аналогичен полученному ранее по формуле (3.3).

Обратим внимание на то, что число лишних неизвестных (степень статической неопределимости) будет зависеть от способа приложения внешней нагрузки. Например, для балки с заделками по концам:

- для произвольно приложенной силы P (рисунок 3.10, *а*) –

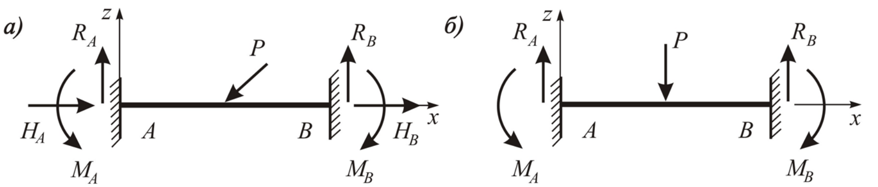
$$m = 6,\ s = 3\ (\Sigma X = 0,\ \Sigma Z = 0,\ \Sigma M_в = 0),\quad n = 6 - 3 = 3;$$

- вертикальной силы P (рисунок 3.10, *б*) –

$$m = 4,\ s = 2\ (\Sigma Z = 0,\ \Sigma M_в = 0),\quad n = 4 - 2 = 2;$$

- горизонтальной силы P (рисунок 3.10, *в*) –

$$m = 2,\ s = 1\ (\Sigma X = 0),\quad n = 2 - 1 = 1.$$



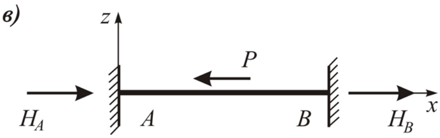


Рисунок 3.10 – Статически неопределимая система с нагрузкой:
а – с произвольно приложенной; *б* – вертикально приложенной; *в* – горизонтально приложенной

3.3 Выбор основной системы

Следующий этап расчета статически неопределимых систем по методу сил – выбор так называемой основной системы, которая используется для раскрытия статической неопределимости.

Основная система – это статически определимая и геометрически неизменяемая система. Она получается из заданной системы в два этапа:

1) устранением всех лишних связей;
2) введением взамен удаленных связей их реакций X_1, …, X_n.

Примечания

1 Это два условия эквивалентности заданной и основной систем.

2 Реакции связей – это неизвестные усилия, приложенные по направлению отброшенных связей.

3 Количество лишних связей равно степени статической неопределимости системы.

Для любой статически неопределимой системы всегда имеется множество вариантов основной системы. Трудоемкость расчета зависит от выбора из них самого рационального.

Способы получения основных систем, т. е. способы устранения лишних связей, рассмотрим на примере простейшей статически неопределимой системы – балки с жесткими заделками по концам, которая имеет три лишних связи (рисунок 3.11, *а*).

1 Удаление лишних внешних (опорных) связей (рисунок 3.11, *б*).

2 Удаление лишних внутренних связей путем рассечения стержня (рисунок 3.11, *в*).

3 Переход к другим видам опорных связей (рисунок 3.11, *г*).

4 Удаление лишних внутренних связей посредством введения шарниров, (рисунок 3.11, *д*).

5 Комбинированный – сочетание указанных выше способов (см. рисунок 3.11, *д*).

Поясним первые четыре способа.

Первый способ реализуется удалением правой заделки, которая эквивалентна трем кинематическим связям, препятствующим двум линейным перемещениям и повороту опорного сечения стержня. Удаленные связи заменены их реакциями: продольной силой X_1, поперечной силой X_2 и изгибающим моментом X_3. В результате получена статически определимая система – консоль (балка, защемленная одним концом).

Второй способ предполагает рассечение стержня. Разрезая стержень, мы удаляем три внутренние связи, так как позволяем смежным сечениям поворачиваться и смещаться в двух направлениях относительно друг друга. Поэтому действие отброшенных связей заменяем их реакциями X_1, X_2 и X_3.

Отметим, что для внутренних связей силы (реакции) X_1, X_2 и X_3 являются взаимными (групповыми). К смежным сечениям прикладываются равные и противоположные друг другу пары сил X_1, X_2 и X_3. Основная система представляет собой две статически определимые консоли.

Третий способ характеризуется тем, что жесткие заделки заменены на шарнирно-неподвижную и шарнирно-подвижную опоры. При переходе к шарнирно-подвижной опоре снимаются две связи – появляется возможность линейного смещения и поворота, при переходе к шарнирно-неподвижной опоре устраняется одна связь – становится возможным угловое смещение. Соответственно этим смещениям вводятся реакции. Полученная основная система представляет собой статически определимую двухопорную балку.

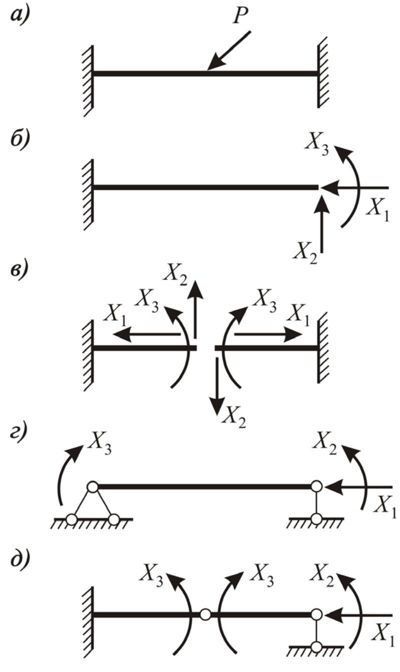


Рисунок 3.11 – Способы получения основных систем:
а – исходная система; *б–д* – варианты основных систем

Четвертый способ основан на включении шарнира, который устраняет связь, препятствующую повороту смежных сечений, и понижает степень статической неопределимости на единицу. Введенный шарнир устранил только одну связь, поэтому для снятия еще двух связей правую заделку заменяем шарнирно-подвижной опорой. Поскольку введенные шарниры частично устраняют внутренние связи, то данный способ применяют, как правило, в сочетании с другими.

Примечания

1 При разрезании плоского стержня (контура) удаляются три связи: две связи, препятствующие взаимным линейным перемещениям; одна связь, препятствующая взаимному угловому перемещению сечений контура в месте разреза.

2 При удалении шарнира удаляются две внутренние линейные связи.

3 При врезании в стержень (контур) шарнира удаляется одна связь (угловая).

При удалении связей системы необходимо следить за тем, чтобы получаемая конструкция была геометрически неизменяемая. Следовательно, не всякая система с удаленными связями может быть принята как основная.

На рисунке 3.12 приведены рама, которая имеет три лишних связи, и несколько возможных вариантов основных систем для нее. Последний вариант – пример неправильного выбора основной системы. В этом варианте рама расчленена на две системы: левая имеет две опорные связи и поэтому является геометрически изменяемой, правая – четыре опорные связи, т. е. статически неопределима.

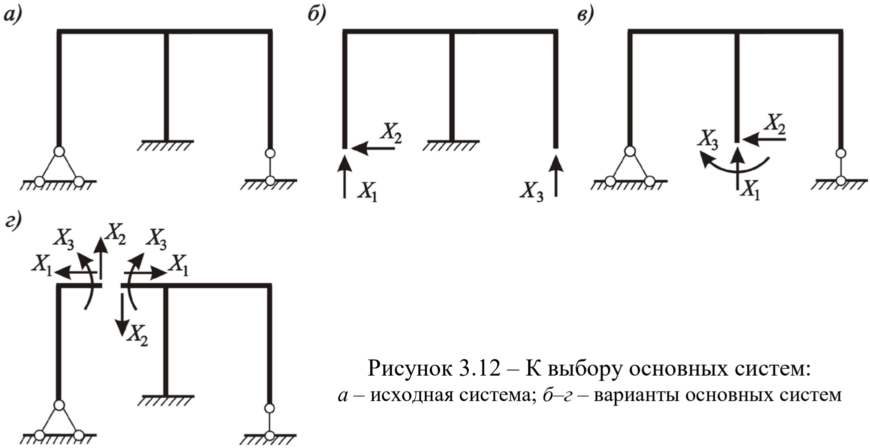


Рисунок 3.12 – К выбору основных систем:
а – исходная система; *б–г* – варианты основных систем

Устранение лишних связей не изменяет внутренних усилий, возникающих в системе, и ее деформаций, так как к ней прикладываются реакции отброшенных связей. Поэтому обе эти системы будут эквивалентными в статическом и кинематическом отношениях.

Таким образом, расчет статически неопределимых систем методом сил сводится искусственным путем к расчету равноценной по возникающим усилиям и перемещениям статически определимой основной системы.

3.4 Канонические уравнения метода сил

Канонические уравнения метода сил характеризуют кинематическую эквивалентность основной статически определимой и заданной статически неопределимой систем с n лишними неизвестными.

Система канонических уравнений имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\ldots+\delta_{1n}X_n+\Delta_{1p}=0;\\
&\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\ldots+\delta_{2n}X_n+\Delta_{2p}=0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_{n1}X_1+\delta_{n2}X_2+\ldots+\delta_{nn}X_n+\Delta_{np}=0,
\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

где δ_{ik} – коэффициент канонического уравнения (перемещение в основной системе точки приложения силы X_i по направлению этой силы, вызванное действием силы $X_k = 1$);

Δ_{ip} – свободный член канонического уравнения, выражающий перемещение той же точки по тому же направлению, вызванное внешней нагрузкой.

Первое уравнение выражает собой равенство нулю суммарного перемещения точки приложения силы X_1 по ее направлению, вызванное силами X_1, …, X_n и нагрузкой; второе уравнение – точки приложения силы X_2 по ее направлению и т. д.

П р и м е ч а н и я

1 Эти уравнения являются теми дополнительными уравнениями деформаций (перемещений), которые позволяют раскрыть статическую неопределимость системы.

2 Уравнения называют каноническими, т. к. они составляются по определенному правилу (канону).

3 Число уравнений равно числу отброшенных связей, т. е. степени статической неопределимости системы.

4 Коэффициенты при неизвестных в канонических уравнениях являются единичными перемещениями, свободные члены – грузовыми перемещениями.

3.5 Определение коэффициентов и свободных членов. Решение канонических уравнений

Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Коэффициенты и свободные членов канонических уравнений, являющиеся единичными и грузовыми перемещениями, вычисляются по формулам перемещений (интегралам Мора).

В случае плоской задачи

$$\delta_{ik} = \sum\int_0^l \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k}{EJ} ds + \sum\int_0^l \frac{\overline{N}_i \overline{N}_k}{EF} ds + \sum\int_0^l \frac{k\overline{Q}_i \overline{Q}_k}{GF} ds; \qquad (3.10)$$

$$\Delta_{ip} = \sum\int_0^l \frac{\overline{M}_i M_p}{EJ} ds + \sum\int_0^l \frac{\overline{N}_i N_p}{EF} ds + \sum\int_0^l \frac{k\overline{Q}_i Q_p}{GF} ds, \qquad (3.11)$$

где $\overline{M}_i$, $\overline{M}_k$, M_p – изгибающие моменты в основной системе соответственно от действия силовых факторов $X_i = 1$, $X_k = 1$ и от внешней нагрузки;

$\overline{N}_i$, $\overline{N}_k$, N_p – то же, продольные силы;

$\overline{Q}_i$, $\overline{Q}_k$, Q_p – то же, поперечные силы;

EJ , EF , GF – жесткость стержней соответственно при деформациях изгиба, растяжения-сжатия и сдвига;

k – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения.

Примечания

1 Интегрирование в формулах (3.10) и (3.11) производится в пределах длины каждого участка стержня, а суммирование – по всем участкам стержней рамы.

2 При использовании формул перемещений обычно не учитывают те слагаемые, влиянием которых можно пренебречь. Например, при расчете балок и рам пренебрегают деформациями растяжения-сжатия и сдвига.

3 В случае пространственной задачи формулы перемещений содержат не три, а шесть слагаемых (в соответствии с числом внутренних усилий, которые могут возникать в поперечных сечениях).

В практических расчетах для вычисления интегралов в формулах перемещений (3.10) и (3.11) необходимо построить эпюры M , N и Q от единичных силовых факторов $X_i = 1$, …, $X_n = 1$ (единичные эпюры) и от внешней нагрузки (грузовые эпюры) и перемножить их по правилу Симпсона или Верещагина.

Для построения эпюр основную систему поочередно загружают единичными силовыми факторами $X_i = 1$, …, $X_n = 1$ и внешней нагрузкой.

Перемножение эпюр производят по формулам:

- *если одна из эпюр нелинейная* (рисунок 3.13, *а*) –

$$\Delta_{ip} = \int_0^l \frac{\overline{M}_i M_p}{EJ} ds = \frac{l}{6EJ}(ac + 4ef + bd)\,; \tag{3.12}$$

- *если обе эпюры линейные* (рисунок 3.13, *б*) –

$$\left.\begin{aligned} \delta_{ik} &= \int_0^l \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k}{EJ} ds \\ \Delta_{ip} &= \int_0^l \frac{\overline{M}_i M_p}{EJ} ds \end{aligned}\right\} = \frac{l}{6EJ}(2ac + 2bd + ad + bc)\,, \tag{3.13}$$

где a, b – значения ординат эпюры изгибающих моментов $\overline{M}_i$ по концам участка стержня;

c, d – то же эпюр $\overline{M}_k$ или M_p;

e, f – то же посередине участка длиной l эпюр $\overline{M}_k$ или M_p;

l – длина участка стержня, на котором перемножаются эпюры.

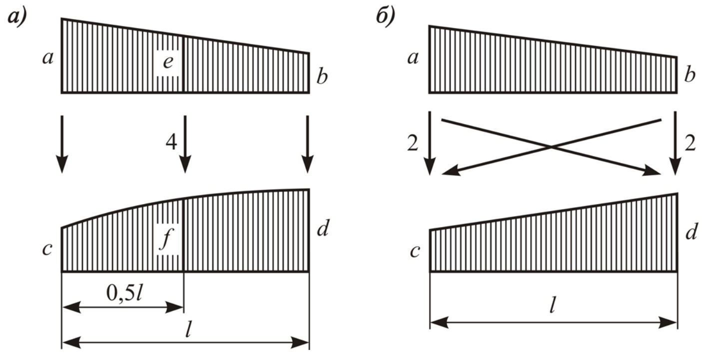


Рисунок 3.13 – Варианты перемножаемых эпюр:
а – линейной и нелинейной; *б* – двух линейных

Частные случаи формулы (3.13):

- *обе эпюры треугольные* (рисунок 3.14, *а*) –

$$\left.\begin{matrix}\delta_{ik}\\ \Delta_{ip}\end{matrix}\right\} = \frac{l}{6EJ}2bd\ ;$$

- *одна эпюра треугольная, другая – прямоугольная* (рисунок 3.14, *б*) –

$$\left.\begin{matrix}\delta_{ik}\\ \Delta_{ip}\end{matrix}\right\} = \frac{l}{6EJ}3bd\ ;$$

- *обе эпюры прямоугольные* (рисунок 3.14, *в*) –

$$\left.\begin{matrix}\delta_{ik}\\ \Delta_{ip}\end{matrix}\right\} = \frac{l}{6EJ}6bd\ .$$

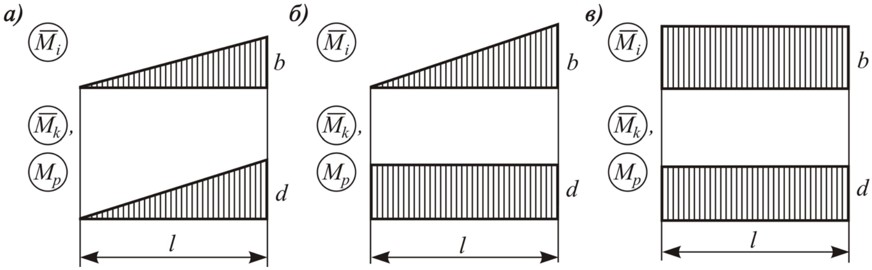


Рисунок 3.14 – Частные случаи перемножаемых линейных эпюр:
а – двух треугольных; *б* – треугольной и прямоугольной;
в – двух прямоугольных

Правило знаков при перемножении эпюр в приведенных формулах: произведения ординат эпюр, расположенных по одну сторону оси стержня, т. е. одного знака, берут со знаком плюс, а по разные стороны – со знаком минус.

При перемножении двух эпюр в виде «перекрученных» трапеций (рисунок 3.15) с учетом правила знаков имеем

$$\delta_{ik} = \frac{l}{6EJ}(-2ac - 2bd + ad + bc)\,. \qquad (3.14)$$

П р и м е ч а н и я

1 *Индексы* у коэффициентов и свободных членов *показывают*, какие эпюры перемножаются.

2 Главные коэффициенты δ_{ii} всегда положительны, побочные коэффициенты δ_{ik} и свободные члены Δ_{ip} могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Отрицательное значение δ_{ik} или Δ_{ip} означает, что направление перемещения противоположно принятому направлению единичной силы X_i в основной системе.

3 *Если одна из* перемножаемых *эпюр имеет ломаное очертание*, то ее разбивают на участки таким образом, чтобы она в пределах каждого участка была линейной, а жесткость сечения – постоянной (рисунок 3.16).

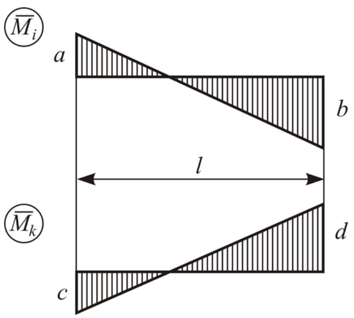


Рисунок 3.15 – Учет правила знаков при перемножении эпюр

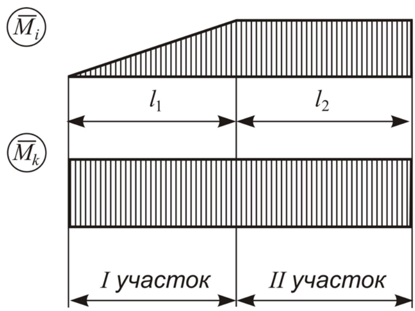


Рисунок 3.16 – Разбиение перемножаемых эпюр на участки

Контроль правильности определения коэффициентов и свободных членов. Для проверки полученных коэффициентов и свободных членов строится суммарная единичная эпюра $\overline{M}_s$ от совместного действия единичных силовых факторов $X_i = 1$, …, $X_n = 1$.

Ордината суммарной единичной эпюры

$$\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \ldots + \overline{M}_n\,. \qquad (3.15)$$

У н и в е р с а л ь н а я п р о в е р к а заключается в контроле выполнимости двух условий:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma\delta = \delta_{ss};\\ \Sigma\Delta = \Delta_{sp},\end{array}\right\} \qquad (3.16)$$

где $\Sigma\delta$ – сумма всех найденных коэффициентов при неизвестных,

$$\Sigma\delta = \delta_{11} + \delta_{12} + ... + \delta_{nn};$$

$\Sigma\Delta$ – сумма всех свободных членов,

$$\Sigma\Delta = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + ... + \Delta_{np};$$

δ_{ss} – перемещение, получаемое умножением эпюры $\overline{M}_s$ на саму себя;

Δ_{sp} – перемещение, получаемое перемножением эпюр $\overline{M}_s$ и M_p.

Если условия (3.16) не выполняются и расхождение между сравниваемыми величинами более 1 %, то для отыскания ошибки рекомендуется производить построчную проверку по условию

$$\Sigma\delta_i = \delta_{is}, \qquad (3.17)$$

где $\Sigma\delta_i$ – сумма коэффициентов при неизвестных i-го уравнения,

$$\Sigma\delta_i = \delta_{i1} + \delta_{i2} + ... + \delta_{in};$$

δ_{is} – перемещение, получаемое перемножением эпюр $\overline{M}_i$ и $\overline{M}_s$.

Решение канонических уравнений. Найденные и проверенные значения δ_{ik} и Δ_{ip} подставляют в канонические уравнения. Решают полученную систему уравнений относительно лишних неизвестных X_i сокращенным способом Гаусса или используя стандартную компьютерную программу решения линейных алгебраических уравнений.

3.6 Построение окончательных эпюр внутренних сил для заданной системы

Заключительным этапом расчета статически неопределимых систем является построение эпюр внутренних усилий.

Ординаты окончательных (суммарных) эпюр M, N и Q получают в результате суммирования по характерным точкам ординат эпюр от внутренних сил X_1, …, X_n и от внешней нагрузки:

$$\left.\begin{array}{l}M = \overline{M}_1X_1 + \overline{M}_2X_2 + ... + \overline{M}_nX_n + M_p;\\ N = \overline{N}_1X_1 + \overline{N}_2X_2 + ... + \overline{N}_nX_n + N_p;\\ Q = \overline{Q}_1X_1 + \overline{Q}_2X_2 + ... + \overline{Q}_nX_n + Q_p,\end{array}\right\} \qquad (3.18)$$

где $\overline{M}_i$, M_p – соответственно ординаты эпюр изгибающих моментов в рассматриваемом сечении основной системы от $X_i = 1$ и внешней нагрузки;

$\overline{N}_i$, N_p – то же, ординаты эпюр продольных сил;

$\overline{Q}_i$, Q_p – то же, ординаты эпюр поперечных сил.

Построение окончательной эпюры моментов. В первую очередь строят окончательную эпюру изгибающих моментов *M*, используя первое уравнение формулы (3.18).

Практически построение окончательной эпюры M производится следующим образом:

- ординаты единичных эпюр $\overline{M}_i$ увеличиваются в X_i раз;
- полученные ординаты $\overline{M}_i X_i$ алгебраически суммируются с ординатами грузовой эпюры M_p для узловых и характерных точек рамы.

П р и м е ч а н и е – При построении эпюр рекомендуются нумеровать узлы и характерные точки рамы.

Результирующая эпюра изгибающих моментов M является основной для проверки прочности рам. Она может использоваться также для построения эпюр поперечных и продольных сил. Поэтому обычно производится контроль правильности построения окончательной эпюры изгибающих моментов *M* – статическая и кинематическая.

С т а т и ч е с к а я   п р о в е р к а является вспомогательной и заключается в проверке равновесия узлов рамы. Алгебраическая сумма ординат эпюры моментов в любом узле рамы должна быть равна нулю, т. е. должно соблюдаться условие $\Sigma M = 0$.

К и н е м а т и ч е с к а я (д е ф о р м а ц и о н н а я) п р о в е р к а заключается в перемножения окончательной *M* и суммарной единичной $\overline{M}_s$ эпюр. Результат перемножения должен быть равен нулю. Это условие в общем виде

$$\Delta = \sum \int \frac{M \cdot \overline{M}_s}{EJ} ds = 0. \qquad (3.19)$$

Допускается невязка не более 5 %.

Так же, как и при проверке коэффициентов канонических уравнений, вместо универсальной проверки по формуле (3.19) можно выполнять построчную проверку:

$$\sum \int \frac{M \cdot \overline{M}_i}{EJ} ds = 0. \quad i = 1, 2, ..., n . \tag{3.20}$$

Отметим, что *кинематическая проверка достаточна, если все эпюры изгибающих моментов в основной системе построены правильно*.

Совокупность статической и кинематической проверок является достаточной во всех случаях.

Построение окончательных эпюр поперечных и продольных сил. *Для построения эпюры поперечных сил* Q можно воспользоваться третьим уравнением формулы (3.18). Однако в практических расчетах эпюру поперечных сил Q более удобно строить непосредственно по окончательной эпюре моментов M. Эпюры поперечных сил в этом случае строят для каждого элемента рамы в отдельности.

Для определения поперечной силы на тех участках рамы, где эпюра моментов имеет прямолинейное очертание, используется дифференциальная зависимость между нею и изгибающим моментом

$$Q = \frac{dM}{dx} = \mathrm{tg}\alpha , \tag{3.21}$$

где α – угол наклона линии, ограничивающей эпюру моментов, к оси элемента (рисунок 3.17).

Для эпюр моментов, приведенных на рисунке 3.17, значения поперечной силы в соответствии с формулой (3.21)

$$Q = \mathrm{tg}\alpha = \frac{M_B}{l} \text{ (см. рисунок 3.17, } a\text{);}$$

$$Q = \mathrm{tg}\alpha = \frac{M_A + M_B}{l} \text{ (см. рисунок 3.17, } б\text{);}$$

$$Q = \mathrm{tg}\alpha = \frac{M_B - M_A}{l} \text{ (см. рисунок 3.17, } в\text{).}$$

Эпюра поперечных сил в этом случае будет постоянной на всей длине элемента рамы.

Если эпюра имеет ломаное очертание, ее разбивают на участки с прямолинейным очертанием (см. рисунок 3.17, *г*). Тогда

$$Q_{AB} = \mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{M_A + M_B}{l_1}, \quad Q_{BC} = \mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{M_B + M_C}{l_2}.$$

Введем *правило знаков для поперечной силы*. Поперечную силу считают положительной, если для совмещения оси элемента с линией, ограничивающей эпюру изгибающих моментов, или с касательной к эпюре M приходится эту ось поворачивать по часовой стрелке (в сторону меньшего угла).

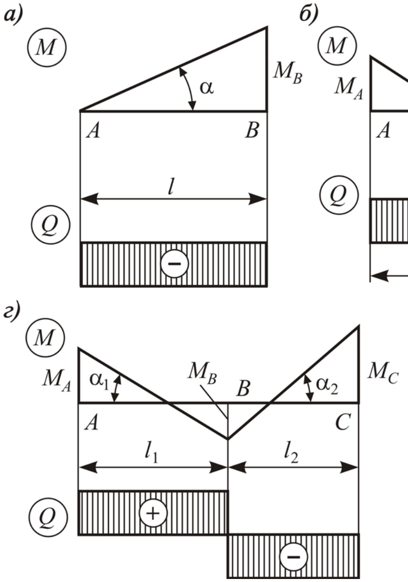


Рисунок 3.17 – К построению эпюры поперечных сил по эпюре изгибающих моментов:
а–в – для линейных эпюр моментов; *г* – для эпюры моментов с ломаным очертанием

Поперечную силу можно также определять, рассматривая каждый из элементов рамы как шарнирно опертую по концам статически определимую балку, нагруженную соответствующей внешней нагрузкой P или q и узловыми моментами $M_{\text{н}}$ и $M_{\text{к}}$ (рисунок 3.18). Узловые моменты возмещают жесткость прикрепления концов балки к узлам.

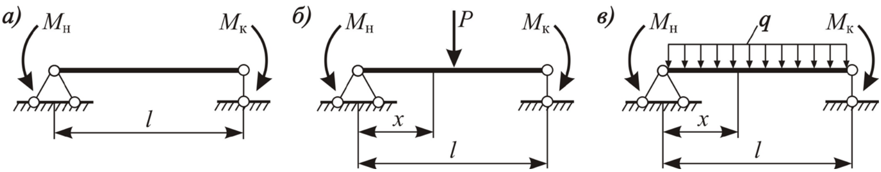


Рисунок 3.18 – К определению поперечной силы для балок:
а – ненагруженной; *б, в* – нагруженной

Тогда поперечная сила в сечении с абсциссой x

$$Q_x = Q_x^{\text{o}} + \frac{M_{\text{к}} - M_{\text{н}}}{l}, \tag{3.22}$$

где Q_x^{o} – поперечная сила в сечении x однопролетной балки, вызываемая только внешней нагрузкой;

$M_н$, $M_к$ – изгибающие моменты в начале балки (при $x = 0$) и в конце (при $x = l$), взятые со своими знаками;

l – длина балки.

Примечания

1 Второе слагаемое в формуле (3.22) – $(M_к - M_н)/l$ – представляет собой поперечную силу в сечениях балки от узловых моментов.

2 Как известно, момент считается положительным, если вызывает растяжение нижних волокон.

Формулу (3.22) обычно используют в тех случаях, когда на стержне или участке стержня эпюра моментов имеет криволинейное очертание, т. е. для элементов рамы, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой. Так, для балки с равномерно распределенной нагрузкой (см. рисунок 3.18, *в*) возможные эпюры моментов и соответствующие им эпюры поперечных сил показаны на рисунке 3.19. Узловые моменты на эпюрах имеют отрицательное значение.

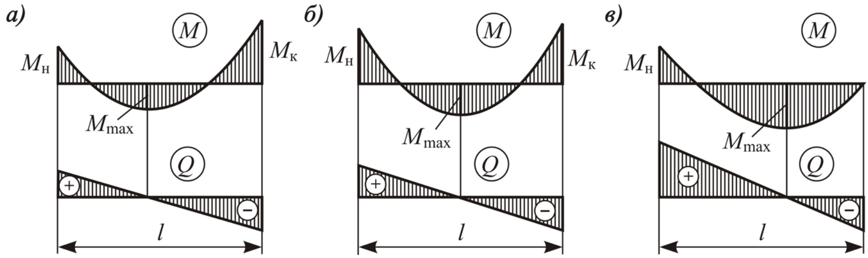


Рисунок 3.19 – К построению эпюры поперечных сил по эпюре моментов с криволинейным очертанием:
а – для $M_н \neq M_к$; *б* – для $M_н = M_к$; *в* – для $M_к = 0$

Поперечная сила в этом случае изменяется по линейному закону и будет иметь следующие значения :

- в сечении с абсциссой $x = 0$ –

$$Q_{x=0} = Q^{о}_{x=0} + \frac{-M_к - (-M_н)}{l} = \frac{ql}{2} + \frac{M_н - M_к}{l};$$

- в сечении с абсциссой $x = l$ –

$$Q_{x=l} = Q^{о}_{x=l} + \frac{-M_к - (-M_н)}{l} = -\frac{ql}{2} + \frac{M_н - M_к}{l},$$

где $Q^{о}_{x} = R_н - qx = \dfrac{ql}{2} - qx$; $Q^{о}_{x=0} = \dfrac{ql}{2} - 0 = \dfrac{ql}{2}$, $Q^{о}_{x=l} = \dfrac{ql}{2} - ql = -\dfrac{ql}{2}$.

Для построения эпюры продольных сил N можно воспользоваться вторым уравнением формулы (3.18) или построенной окончательной эпюрой поперечных сил *Q*. При этом в последнем случае применяют способ вырезания узлов рамы, который заключается в следующем. К каждому вырезанному узлу прикладывают действующую на него нагрузку, включая продольные и ранее найденные поперечные силы, и затем составляют для рассматриваемого узла уравнения равновесия, используемые для определения искомых продольных сил.

Примечание – Построение эпюры *N* следует начинать с определения продольных сил в одном из узлов, где сходятся не более двух элементов.

Проверка эпюр Q и *N* состоит в том, что для любой отсеченной части рамы сумма проекций на две оси всех действующих сил – внешних и внутренних – должна быть равна нулю.

3.7 Выбор рациональной основной системы

При решении статически неопределимых систем с большим числом лишних неизвестных по возможности необходимо использовать те или иные методы, упрощающие расчет. Все существующие методы сводятся главным образом к упрощению составления и решения системы канонических уравнений. Основной метод упрощения расчета заключается в выборе рациональной основной системы, цель которого – упрощение канонических уравнений и, следовательно, уменьшение трудоемкости расчетов.

Критерием рациональности основной системы является равенство нулю как можно большего числа побочных коэффициентов δ_{ik} , т. е.

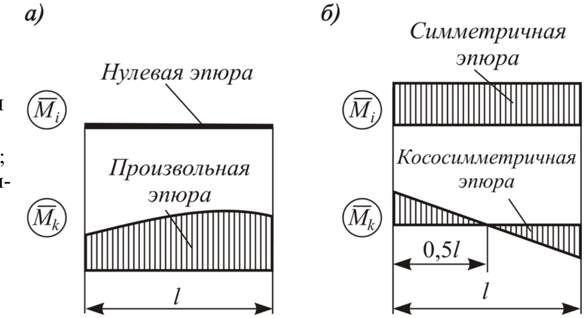
$$\delta_{ik} = \int_{0}^{l} \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k}{EJ} ds = 0 . \qquad (3.23)$$

Эпюры $\overline{M}_i$ и $\overline{M}_k$, удовлетворяющие условию (3.23), называются взаимно нулевыми, или ортогональными (при перемножении дают нуль). Примеры ортогональных эпюр: одна из эпюр нулевая, а другая – прозвольной формы, отличная от нуля (рисунок 3.20, *а*); симметричная и кососимметричная эпюры (рисунок 3.20, *б*).

Симметричные и кососимметричные эпюры при перемножении всегда дают нуль.

Примечание – Это правило вытекает из того, что результат перемножения эпюр по левой половине рамы будет равен результату перемножения по правой половине с обратным знаком.

Рисунок 3.20 – Примеры ортогональных эпюр:
а – нулевая и произвольная;
б – симметричная и кососимметричная



Если интеграл нельзя превратить в нуль, то желательно, чтобы эпюры занимали как можно меньший участок рамы и содержали как можно больше нулевых участков.

Упрощение расчета рассмотрим на примере стержневой системы, приведенной на рисунке 3.21, *а*. Возможные варианты основных систем для нее показаны на рисунке 3.21, *б*, *в*.

Рассматриваемая система имеет четыре замкнутых контура и поэтому 12 раз статически неопределима. Для раскрытия статической неопределимости произведем рассечение контуров.

В первом варианте основной системы рассечены вертикальные стержни, во втором – горизонтальные. В местах разреза каждого контура необходимо ввести три внутренних силовых фактора. Для наглядности ограничимся рассмотрением только перерезывающих сил X_1, X_2, X_3 и X_4.

На рисунках 3.21, *г*, *д* показаны эпюры моментов от единичных силовых факторов $X_1 = 1$ и $X_4 = 1$ для обоих вариантов основной системы. Первый вариант характеризуется тем, что эпюры моментов от усилия $X_1 = 1$ занимают всю длину рамы, от единичных усилий X_2, X_3 и X_4 – часть рамы. В результате все побочные коэффициенты системы $\delta_{ik} \neq 0$. Во втором варианте построение эпюр от каждого единичного силового фактора замыкается на одном контуре, которому принадлежит данное неизвестное. На остальных контурах имеют место нулевые участки эпюр. При использовании данного варианта $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$ и $\delta_{14} = \delta_{41} = 0$. Следовательно, второй вариант основной системы является более рациональным.

Классические способы получения ортогогальных эпюр, основанные на использовании симметрии системы, подробно рассмотрены в подразд. 3.8.

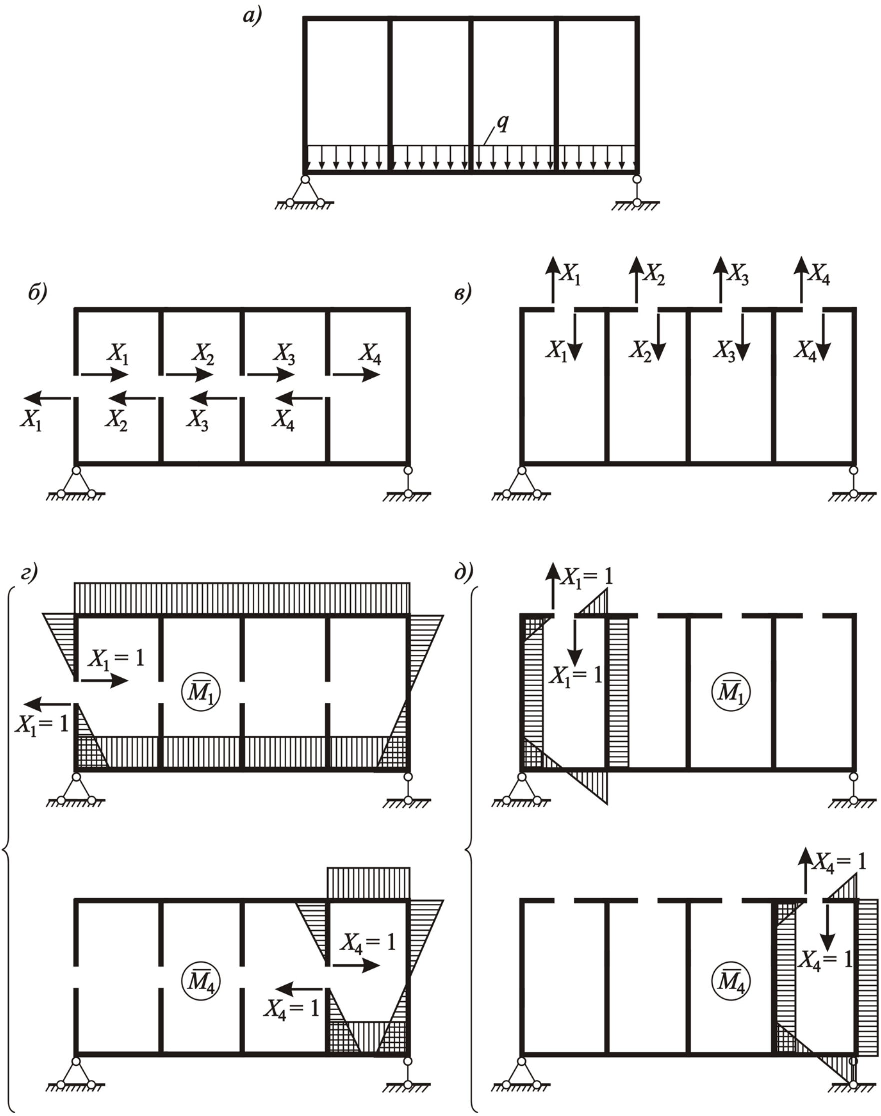


Рисунок 3.21 – К выбору рациональной основной системы:
а – исходная система; *б*, *в* – варианты основных систем; *г*, *д* – эпюры $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_4$ соответственно для первого и второго вариантов основных систем

3.8 Способы упрощения расчета симметричных статически неопределимых стержневых систем

Под *симметричной системой* понимают систему, обладающую геометрической и жесткостной симметрией.

Если система обладает геометрической и жесткостной симметрией относительно оси, то возможно упрощение расчетов. При этом нагрузка может быть и несимметричной.

Для симметричных систем разработаны *специальные способы получения взаимно нулевых* (ортогональных) *эпюр*:

1) выбор симметричной основной системы;
2) преобразование нагрузки;
3) группировка неизвестных;
4) введение жестких консолей.

Методика применения этих способов приведена ниже.

3.8.1 Выбор симметричной основной системы

Симметричная основная система – основная система, в которой неизвестные силовые факторы размещаются по оси симметрии. Основные неизвестные в этой системе получаем в виде симметричных и кососимметричных силовых факторов.

Рассмотрим некоторое произвольное сечение, в котором под воздействием внешней нагрузки возникают шесть силовых факторов (рисунок 3.22).

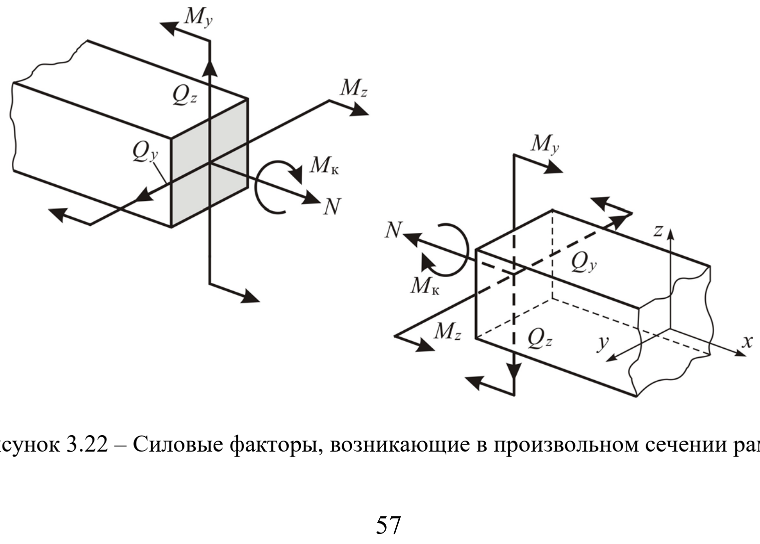


Рисунок 3.22 – Силовые факторы, возникающие в произвольном сечении рамы

В правой и левой плоскостях произведенного сечения силы и моменты равны, но направлены в разные стороны.

Под *симметричными силовыми факторами* понимают такие, которые образуют зеркальное отображение относительно плоскости сечения. Силовые факторы, каждый из которых противоположен по знаку зеркальному отображению взаимного фактора, являются *кососимметричными*. На рисунке 3.22 M_y, M_z, N – симметричные силовые факторы, Q_y, Q_z, $M_к$ – кососимметричные.

Симметричные силовые факторы дают симметричные эпюры, а кососимметричные – кососимметричные эпюры, т. е. получаем взаимно нулевые эпюры. В этом случае система канонических уравнений упрощается, так как некоторые из коэффициентов этих уравнений обращаются в ноль в соответствии со следующим правилом.

Правило 1. *Коэффициенты канонических уравнений δ_{ik}, у которых один индекс принадлежит симметричному фактору, а другой – кососимметричному, обращаются в ноль*. И их сразу можно вычеркнуть из системы канонических уравнений.

Рассмотрим симметричную раму (рисунок 3.23, *а*).

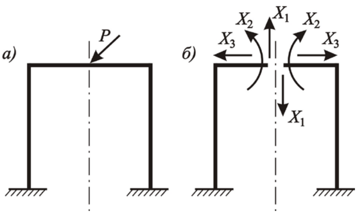


Рисунок 3.23 – Упрощение расчета рамы с помощью выбора симметричной основной системы:
а – исходная система; *б* – симметричная основная система

Система канонических уравнений для этой рамы в общем случае нагружения будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.24)$$

Симметричная основная система для рассматриваемой рамы показана на рисунке 3.23, *б*.

В приведенной основной системе: X_1 – кососимметричный силовой фактор; X_2, X_3 – симметричные силовые факторы.

В соответствии с правилом 1 $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ и $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$. Тогда система канонических уравнений (3.24) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{11}X_1+\Delta_{1p}=0;\\ &\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\Delta_{2p}=0;\\ &\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\Delta_{3p}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.25)$$

В результате система из трех уравнений распадается на две независимые системы, одна из которых относится к симметричным силовым факторам, другая – к кососимметричным. Решение двух систем проще, чем решение полной системы.

Таким образом, выбор симметричной основной системы позволяет решение системы из n уравнений с n неизвестными заменить решением двух независимых систем. Это сокращает объем вычислений.

Примечания

1 Если заданная система является симметричной, то и основную систему надо всегда выбирать симметричной.

2 Выбор симметричной основной системы позволяет получить основные неизвестные в виде симметричных и кососимметричных силовых факторов, которые дают соответственно симметричные и кососимметричные эпюры.

3 В результате обращения в нуль коэффициентов канонических уравнений с индексами, принадлежащими симметричным и кососимметричным силовым факторам, происходит распад полной системы уравнений на две независимые системы.

3.8.2 Преобразование нагрузки

При использовании способа преобразования нагрузки лишние неизвестные целесообразно располагать на оси симметрии системы.

Правило 2. *Любую несимметричную нагрузку, действующую на симметричную раму, можно разложить на симметричную и кососимметричную составляющие* (рисунок 3.24).

Расчет выполняется отдельно на действие каждой из них. Результирующая эпюра, например, моментов получается путем алгебраического суммирования ординат двух эпюр:

$$M = M' + M'',$$

где M', M'' – окончательные эпюры изгибающих моментов от действия симметричной и кососимметричной нагрузок соответственно.

Для несимметричной нагрузки при симметричной основной системе будут верны уравнения (3.25).

Правило 3. *При симметричной внешней нагрузке, действующей на симметричную раму, кососимметричные силовые факторы, (Q_y, Q_z, $M_к$) в плоскости симметрии обращаются в ноль.*

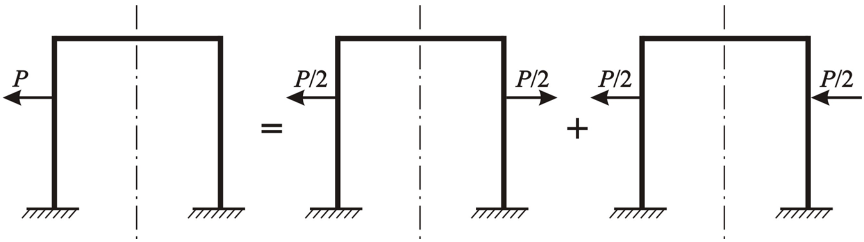


Рисунок 3.24 – Представление несимметричной нагрузки в виде суммы симметричной и кососимметричной составляющих

В соответствии с правилом 3 $X_1 = 0$. Тогда уравнения (3.25) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} &= 0; \\ \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Правило 4. *При кососимметричной внешней нагрузке, действующей на симметричную раму, симметричные силовые факторы (M_y, M_z, N) в плоскости симметрии обращаются в ноль.*

В соответствии с правилом 4 $X_2 = X_3 = 0$. Следовательно, уравнения (3.25) можно будет записать в виде

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

Примечание – Сущность рассмотренного способа упрощения расчета симметричной статически неопределимой системы состоит в разложении несимметричной нагрузки на симметричную и кососимметричную составляющие. Поскольку расчет на каждую составляющую нагрузки производится раздельно, то вместо одной системы уравнений с полным числом неизвестных получаем две независимые системы, одна из которых содержит только симметричные силовые факторы, другая – кососимметричные.

Правило 5. *Расчет симметричной многопролетной рамы, на которую действует симметричная или кососимметричная внешняя нагрузка, можно упростить, рассматривая половину рамы при одной оси симметрии и* $1/4$ *часть рамы – при двух осях симметрии.*

В местах разреза вводятся связи, соответствующие тем силовым факторам, которые возникают в сечении.

Рассмотрим трехпролетную симметричную раму, загруженную симметричной (рисунок 3.25, *а*) и кососимметричной (рисунок 3.26, *а*) нагрузками. Рама девять раз статически неопределима.

На рисунках 3.25, *б* и 3.26, *б* приведены упрощенные расчетные схемы 1/2 части рамы для рассматриваемых вариантов нагружения. Действие отброшенной части на оставшуюся учитывается введением соответствующих опорных закреплений (связей).

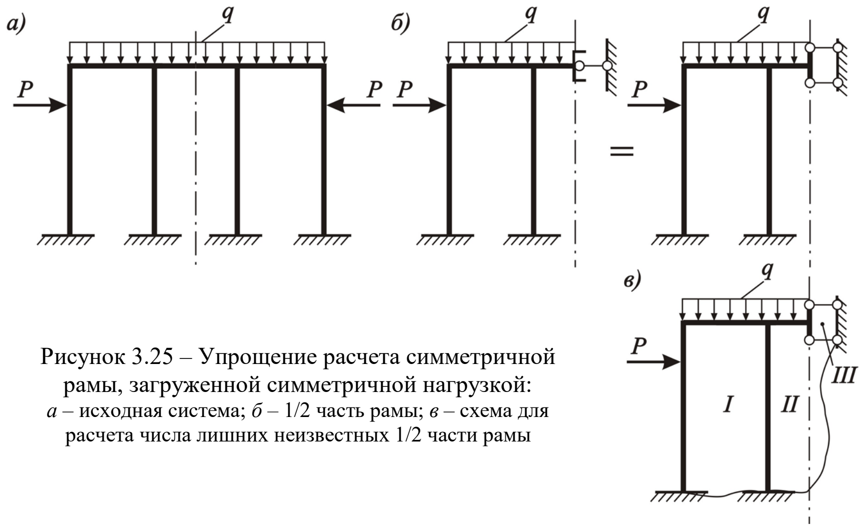


Рисунок 3.25 – Упрощение расчета симметричной рамы, загруженной симметричной нагрузкой:
а – исходная система; *б* – 1/2 часть рамы; *в* – схема для расчета числа лишних неизвестных 1/2 части рамы

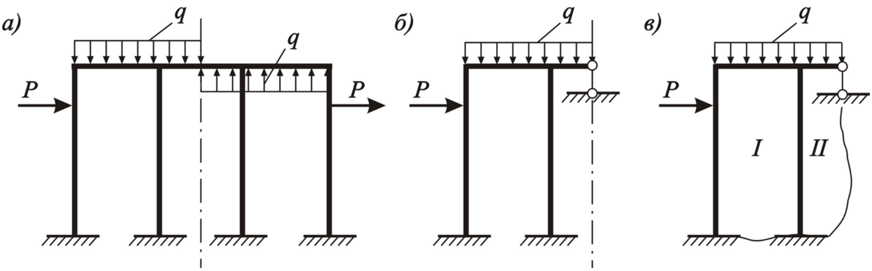


Рисунок 3.26 – Упрощение расчета симметричной рамы, загруженной кососимметричной нагрузкой:
а – исходная система; *б* – 1/2 часть рамы; *в* – схема для расчета числа лишних неизвестных 1/2 части рамы

На расчетной схеме 1/2 части рамы, загруженной симметричной нагрузкой (см. рисунок 3.25, *б*), квадратной скобкой и горизонтальным стержнем с шарнирами по концам обозначены связи, закрепляющие сечение соответственно от поворотов в вертикальной плоскости и горизонтальных перемещений, т. е. от перемещений по направлению ненулевых внутренних усилий, которые возникают в сечении по оси симметрии. Связи, закрепляющие сечения от вертикальных перемещений, не показаны, так как поперечные силы в плоскости симметрии равны нулю (правило 3).

При действии на раму кососимметричной нагрузки в месте разреза рамы введена связь в виде вертикального стержня с шарнирами по концам, закрепляющего сечение от вертикальных смещений (см. рисунок 3.26, *б*). Связи, соответствующие изгибающему моменту и нормальной силе, в плоскости симметрии равны нулю (правило 4).

Степень статической неопределимости 1/2 части рамы для рассматриваемых вариантов загружения снижается соответственно до пяти и четырех.

На рисунках 3.25, *в* и 3.26, *в* приведены схемы, поясняющие расчет степени статической неопределимости 1/2 части рам, с использованием формулы (3.3). Римскими цифрами на схемах обозначены номера контуров.

Рассматриваемый способ уменьшения степени статической неопределимости системы широко используется при расчете стержневых вагонных конструкций.

Примечания

1 Симметричность конструкции в сочетании с симметричностью или кососимметричностью внешней нагрузки позволяют уменьшить степень статической неопределимости системы за счет рассмотрения 1/2 или 1/4 части конструкции.

2 При выделении 1/2 или 1/4 части конструкции действие отброшенной части на оставшуюся компенсируется введением в местах разреза связей от ненулевых силовых факторов. При действии симметричной нагрузки на оси симметрии вводятся связи от симметричных силовых факторов, при действии кососимметричной нагрузки – от кососимметричных силовых факторов.

3 Выделенная 1/2 или 1/4 части конструкции с приложенной к ней внешней нагрузкой и введенными связями рассматривается как самостоятельная расчетная схема.

3.8.3 Группировка неизвестных

При расчете многопролетных симметричных рам не всегда удается разместить все неизвестные в сечениях по оси симметрии. В этом случае для получения симметричных и кососимметричных эпюр целесообразно принимать групповые неизвестные, разместив их в различных симметрично расположенных точках.

Проиллюстрируем данный способ для двухпролетной рамы, приведенной на рисунке 3.27, *а*.

При традиционном способе решения основная система и единичные эпюры показаны на рисунке 3.27, *б–г*. При использовании традиционного способа все побочные коэффициенты $\delta_{ik} \neq 0$.

При использовании способа группировки неизвестных упрощение расчета обеспечивается тем, что в качестве лишних неизвестных принимают не отдельные силы, а группы сил.

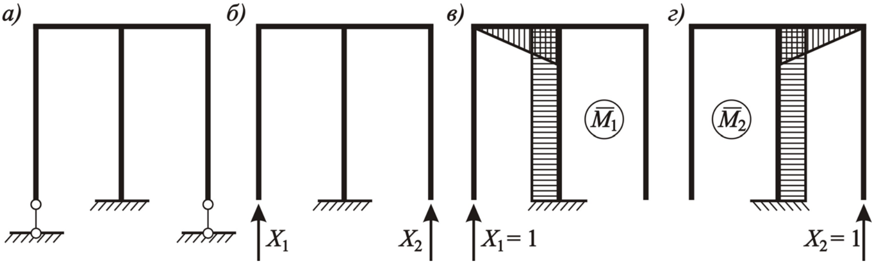


Рисунок 3.27 – Традиционный способ решения системы:
а – исходная система; *б* – основная система; *в, г* – единичные эпюры моментов

П р и м е ч а н и е – Групповые неизвестные подбирают так, чтобы получающиеся от их действия эпюры были ортогональными (симметричными и кососимметричными).

Для рамы, изображенной на рисунке 3.27, *а*, реакции удаленных связей, которые обозначим как Y_1 и Y_2, заменим эквивалентными им новыми неизвестными – парами симметричных X_1 и кососимметричных X_2 сил. Реакцию левой опоры Y_1 представим суммой сил X_1 и X_2, а реакцию правой опоры Y_2 – разностью этих сил (рисунок 3.28, *а*), т. е.

$$Y_1 = X_1 + X_2; \quad Y_2 = X_1 - X_2.$$

П р и м е ч а н и е – Неизвестное X_1 представляет собой две симметрично расположенные силы, а X_2 – две кососимметричные силы.

Эпюры моментов от единичных групповых силовых факторов показаны на рисунке 3.28, *б*, *в*.

Перемножением эпюр $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$ получаем $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$. Это следует также из правила 1.

В результате имеем канонические уравнения с полностью разделенными неизвестными, каждое из которых содержит только по одному лишнему неизвестному:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Использование групповых неизвестных значительно упрощает расчет симметричных рам с большим числом лишних неизвестных.

П р и м е ч а н и е – Сущность способа группировки неизвестных состоит в том, что в качестве неизвестных принимают не отдельные силы, а группы сил, составленные так, чтобы получающиеся от их действия эпюры были ортогональными.

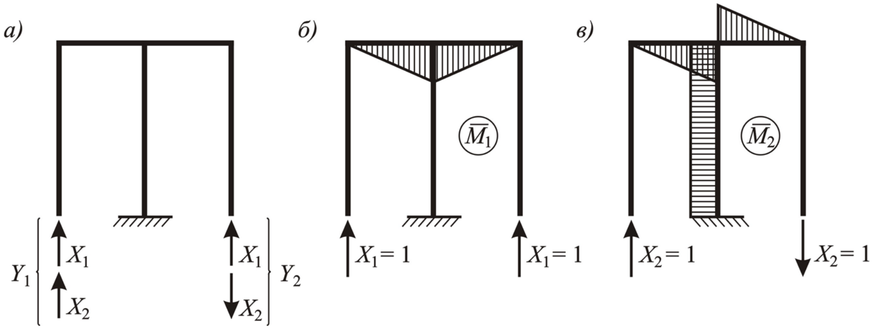


Рисунок 3.28 – Упрощение расчета рамы с помощью способа группировки неизвестных:
а – основная система; *б, в* – единичные эпюры моментов

3.8.4 Введение жестких консолей

Этот способ применяется для рам, имеющих замкнутый контур (см. рисунки 3.1, *в* и 3.2, *в*), и позволяет получать системы канонических уравнений с полностью разделенными неизвестными.

Рассмотрим систему, показанную на рисунке 3.1, *в*.

В случае выбора традиционной симметричной основной системы (рисунок 3.29, *а*) для нее будет справедлива система уравнений (3.25), в которой X_1 – кососимметричный силовой фактор, X_2, X_3 – симметричные силовые факторы. Тогда коэффициенты $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ и $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$. В полученных уравнениях все побочные коэффициенты, кроме коэффициентов δ_{23} и δ_{32}, равны нулю, т. е. $\delta_{23} = \delta_{32} \neq 0$.

Для получения системы уравнений с полностью разделенными неизвестными необходимо также обратить в нуль и коэффициенты $\delta_{23} = \delta_{32}$ с индексами, принадлежащими симметричным факторам. Коэффициенты δ_{23} и δ_{32} являются результатом перемножения единичных эпюр $\overline{M}_2$ и $\overline{M}_3$.

Для ортогонализации (обращения в нуль) этих эпюр необходимо перенести неизвестные в точку *С*, называемую *упругим центром,* с помощью жестких консолей.

П р и м е ч а н и е – При наличии у рамы одной оси симметрии упругий центр будет лежать на этой оси и надо будет определить только одну его координату z_0.

Для рамы, имеющей две оси симметрии, упругий центр будет находиться на пересечении этих осей.

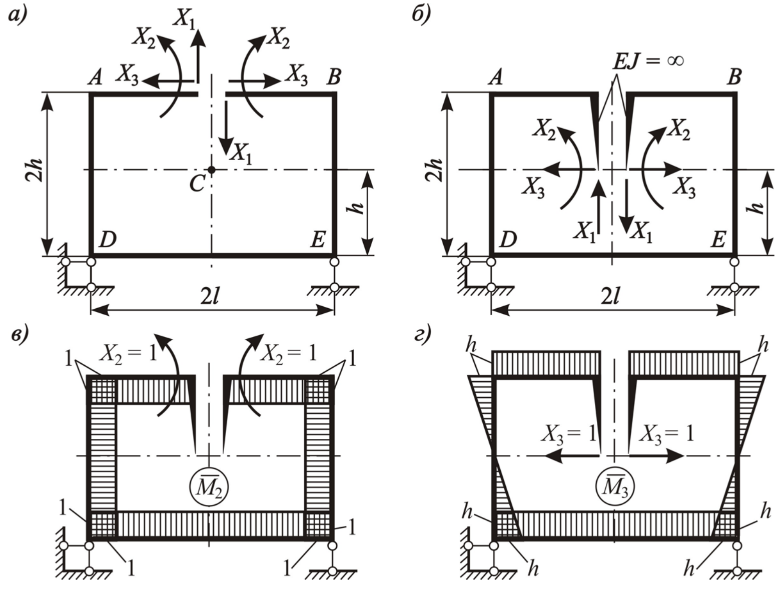


Рисунок 3.29 – Упрощение расчета рамы введением жестких консолей:
а – симметричная основная система; *б* – основная система с введенными жесткими консолями;
в, г – единичные эпюры моментов

На рисунке 3.29, *б–г* приведены основная система, полученная с помощью введения абсолютно жестких консолей и перемещения неизвестных силовых факторов в упругий центр, а также единичные эпюры моментов $\overline{M}_2$ и $\overline{M}_3$.

Коэффициент δ_{23}, определяемый как результат перемножения этих эпюр,

$$\delta_{23} = \delta_{23}^{AD} + \delta_{23}^{BE} - \delta_{23}^{AB} + \delta_{23}^{DE} = 0,$$

где δ_{23}^{AD}, δ_{23}^{BE} – результат перемножения эпюр $\overline{M}_2$ и $\overline{M}_3$ соответственно на участках *AD* и *BE*;

δ_{23}^{AB}, δ_{23}^{DE} – то же на участках *AB* и *DE*.

Проанализируем результат перемножения эпюр по всем участкам рамы.

На участках AD и BE коэффициент δ_{23} будет равен нулю ($\delta_{23}^{AD} = 0$ и $\delta_{23}^{BE} = 0$), поскольку здесь перемножаются симметричные $\overline{M}_2$ и кососимметричные $\overline{M}_3$ эпюры.

На участках AB и DE эпюры $\overline{M}_2$ и $\overline{M}_3$ одинаковы по величине, но обратны по знаку. Соответственно в результате перемножения получаем δ_{23}^{AB} и δ_{23}^{DE} одинаковыми по величине, но с разными знаками. При суммировании они дают нуль.

Таким образом, в рассматриваемом случае эпюры $\overline{M}_2$ и $\overline{M}_3$ являются ортогональными. Тогда канонические уравнения примут вид

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} &= 0; \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Таким образом, при переносе неизвестных в упругий центр обращается в нуль единственное оставшееся побочное перемещение $\delta_{23} = \delta_{32}$, и вместо системы уравнений получается три независимых уравнения.

3.9 Общий алгоритм расчета статически неопределимых систем методом сил

Рассмотрим алгоритм расчета статически неопределимых систем на примере рамы, показанной на рисунке 3.30, *а*. В качестве примера выбрана достаточно простая система, позволяющая не перегружать расчет арифметическими выкладками, но в то же время показать особенности расчета, характерные и для более сложных систем.

Установление степени статической неопределимости. Для рассматриваемой системы степень статической неопределимости $n = 3$.

Выбор основной системы. Для выбора основной системы необходимо в заданной системе удалить три лишние связи. При этом получаемая основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой.

Заданная система является симметричной конструкцией, на которую действует симметричная нагрузка. Поэтому целесообразно выбирать симметричную основную систему.

Рассматриваемая система три раза статически неопределима, но условия симметрии конструкции и загружения позволяют сократить число лишних неизвестных до двух (правило 3).

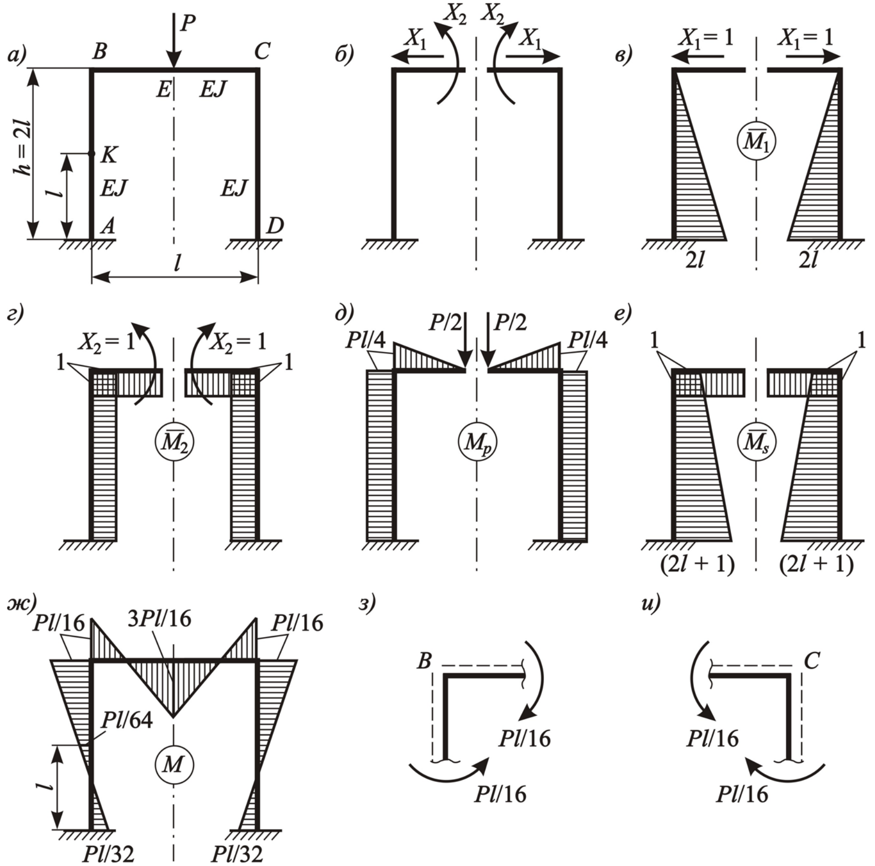


Рисунок 3.30 – К расчету статически неопределимой системы:
а – исходная система; *б* – основная система; *в, г* – единичные эпюры моментов;
д – грузовая эпюра моментов; *е* – суммарная единичная эпюра моментов;
ж – окончательная эпюра моментов; *з, и* – вырезанные узлы

Основную систему получаем рассечением стержня по оси симметрии и введением в местах разреза реакций удаленных связей – симметричных силовых факторов X_1 и X_2 (рисунок 3.30, *б*). Кососимметричный силовой фактор X_3 (поперечная сила) в плоскости симметрии будет равен нулю.

П р и м е ч а н и е – Направление действия реакций отброшенных связей принимают произвольно.

Составление канонических уравнений. Для двух неизвестных система канонических уравнений будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} &= 0;\\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Для вычисления коэффициента δ_{22} и свободного члена Δ_{2p}:

1) строим эпюры изгибающих моментов : *единичные* $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ (от неизвестных единичных силовых факторов X_1 и X_2) и *грузовую* M_p (от внешней нагрузки P);

2) перемножаем эпюры по формулам, приведенным в подразд. 3.5.

Примечание – Для упрощения расчета ограничимся рассмотрением только эпюр изгибающих моментов.

При построении эпюр основную систему поочередно нагружаем усилиями $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ и внешней нагрузкой P. Построенные эпюры моментов $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ и M_p приведены на рисунке 3.30, *в–д*.

Тогда результаты перемножения эпюр:

$\overline{M}_1$ саму на себя –

$$\delta_{11} = \frac{2l}{6EJ} \cdot 2 \cdot 2l \cdot 2l + \frac{2l}{6EJ} \cdot 2 \cdot 2l \cdot 2l = \frac{16l^3}{3EJ};$$

$\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$ –

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2l}{6EJ} \cdot 3 \cdot 2l \cdot 1 + \frac{2l}{6EJ} \cdot 3 \cdot 2l \cdot 1 = \frac{4l^2}{EJ};$$

$\overline{M}_2$ саму на себя –

$$\delta_{22} = \frac{2l}{6EJ} \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2l}{6EJ} \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{l}{6EJ} \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5l}{EJ};$$

$\overline{M}_1$ и M_p –

$$\Delta_{1p} = -\frac{2l}{6EJ}\left(3 \cdot 2l \frac{Pl}{4}\right) - \frac{2l}{6EJ}\left(3 \cdot 2l \frac{Pl}{4}\right) = -\frac{Pl^3}{EJ};$$

$\overline{M}_2$ и M_p –

$$\Delta_{2p} = -\frac{2l}{6EJ}\left(6 \cdot 1 \frac{Pl}{4}\right) - \frac{2l}{6EJ}\left(6 \cdot 1 \frac{Pl}{4}\right) - \frac{0{,}5l}{6EJ}\left(3 \cdot 1 \frac{Pl}{4}\right) - \frac{0{,}5l}{6EJ}\left(3 \cdot 1 \frac{Pl}{4}\right) =$$

$$= -2\frac{2l}{6EJ}\cdot\frac{6Pl}{4} - 2\frac{0,5l}{6EJ}\cdot\frac{3Pl}{4} = -\frac{Pl^2}{EJ} - \frac{Pl^2}{8EJ} = -\frac{9Pl^2}{8EJ}\,.$$

Для контроля правильности определения коэффициентов и свободных членов строим суммарную единичную эпюру $\overline{M}_s$ (рисунок 3.30, *е*). Она представляет собой сумму эпюр от всех единичных неизвестных [см. формулу (3.15)].

Перемножаем суммарную эпюру саму на себя (δ_{ss}) и на грузовую (Δ_{sp}):

$$\delta_{ss} = 2\frac{2l}{6EJ}\left[2(2l+1)(2l+1) + 2\cdot 1\cdot 1 + (2l+1)\cdot 1 + 1(2l+1)\right] + 2\frac{0,5l}{6EJ}\cdot 6\cdot 1\cdot 1 =$$

$$= \frac{2l}{3EJ}\left[2(2l+1)^2 + 2 + 2(2l+1)\right] + \frac{l}{EJ} = \frac{l}{EJ}\left\{\frac{2}{3}\left[2(2l+1)^2 + 2 + 2(2l+1)\right] + 1\right\};$$

$$\Delta_{sp} = 2\frac{2l}{6EJ}\left[-2(2l+1)\frac{Pl}{4} - 2\cdot 1\frac{Pl}{4} - (2l+1)\frac{Pl}{4} - 1\frac{Pl}{4}\right] - 2\frac{0,5l}{6EJ}\left(3\cdot 1\frac{Pl}{4}\right) =$$

$$= -\frac{Pl^2}{6EJ}\left[3(2l+1) + 3\right] - \frac{Pl^2}{8EJ} = -\frac{Pl^2}{2EJ}\left[(2l+1) + 1\right] - \frac{Pl^2}{8EJ} =$$

$$= -\frac{Pl^2}{EJ}\left\{\left[0,5(2l+1) + 0,5\right] + 0,125\right\}.$$

Проверку коэффициентов и свободных членов выполним для $l = 1$ м. Тогда

$$\delta_{ss} = \frac{1}{EJ}\left\{\frac{2}{3}\left[2(2\cdot 1+1)^2 + 2 + 2(2\cdot 1+1)\right] + 1\right\} = \frac{1}{EJ}\cdot 18,333\,;$$

$$\Delta_{sp} = -\frac{P\cdot 1^2}{EJ}\left\{\left[0,5(2\cdot 1+1) + 0,5\right] + 0,125\right\} = -\frac{P}{EJ}\cdot 2,125\,.$$

Определяем

$$\Sigma\delta = \delta_{11} + \delta_{22} + 2\delta_{12} = \frac{16\cdot 1^3}{3EJ} + \frac{5\cdot 1}{EJ} + 2\frac{4\cdot 1^2}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{16}{3} + 5 + 8\right) = \frac{1}{EJ}\cdot 18,333\,;$$

$$\Sigma\Delta = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} = -\frac{P\cdot 1^3}{EJ} - \frac{9P\cdot 1^2}{8EJ} = -\frac{P}{EJ}\left(1 + \frac{9}{8}\right) = -\frac{P}{EJ}\cdot 2,125\,.$$

Поскольку $\Sigma\delta = \delta_{ss}$ и $\Sigma\Delta = \Delta_{sp}$, коэффициенты и свободные члены определены правильно.

Решение канонических уравнений. Подставляя, полученные значения перемещений в канонические уравнения и умножая на EJ, получим

$$\frac{16l^3}{3}X_1 + 4l^2 X_2 - Pl^3 = 0;$$

$$4l^2 X_1 + 5lX_2 - \frac{9Pl^2}{8} = 0.$$

В случае дважды статически неопределимой системы для определения неизвестных канонических уравнений удобно воспользоваться следующими выражениями:

$$X_1 = -\frac{D_1}{D}; \; X_2 = -\frac{D_2}{D},$$

где D_1, D_2, D – определители системы,

$$D_1 = \Delta_{1p}\delta_{22} - \Delta_{2p}\delta_{12}, \quad D_2 = \Delta_{2p}\delta_{11} - \Delta_{1p}\delta_{12}, \quad D = \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2.$$

Подставляя значения перемещений в формулы для D_1, D_2 и D, получим

$$D_1 = -0{,}5Pl^4; \;\; D_2 = -2Pl^5; \;\; D = \frac{32}{3}l^4.$$

Тогда

$$X_1 = \frac{3}{64}P, \quad X_2 = \frac{3}{16}Pl.$$

Для проверки правильности вычисления неизвестных подставляем найденные значения X_1 и X_2 в канонические уравнения:

$$\frac{16l^3}{3}\cdot\frac{3P}{64} + 4l^2\frac{3Pl}{16} - Pl^3 = 0;$$

$$4l^2\cdot\frac{3P}{64} + 5l\frac{3Pl}{16} - \frac{9Pl^2}{8} = 0.$$

Построение окончательной эпюры моментов для заданной системы. Ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов определяем по формуле (3.18).

Для построения окончательной эпюры изгибающих моментов ординаты единичных эпюр $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$ умножаем на соответствующие значения лишних неизвестных X_1 и X_2 и складываем с ординатами грузовой эпюры M_p. Суммирование ординат производим по характерным точкам (A, B, C, D, E) рамы:

- стержень (стойка) AB –

$$M_A = 2l\frac{3}{64}P + 1\frac{3}{16}Pl - \frac{Pl}{4} = \frac{Pl}{32};$$

$$M_B = 0 + 1\frac{3}{16}Pl - \frac{Pl}{4} = -\frac{Pl}{16};$$

- стержень (ригель) BC –

$$M_B = M_C = 0 + 1\frac{3}{16}Pl - \frac{Pl}{4} = -\frac{Pl}{16};$$

$$M_E = 0 + 1\frac{3}{16}Pl + 0 = \frac{3Pl}{16};$$

- стержень (стойка) CD –

$$M_C = 0 + 1\frac{3}{16}Pl - \frac{Pl}{4} = -\frac{Pl}{16};$$

$$M_D = 2l\frac{3}{64}P + 1\frac{3}{16}Pl - \frac{Pl}{4} = \frac{Pl}{32}.$$

П р и м е ч а н и е – При вычислении ординат окончательной эпюры *M* необходимо учитывать знаки силовых факторов X_1 и X_2 и моментов $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ и M_p. Для этого задаемся правилом знаков изгибающих моментов: положительными считаем ординаты, расположенные с внутренней стороны рамы.

Окончательная эпюра изгибающих моментов показана на рисунке 3.30, *ж*.

Производим проверку правильности построения окончательной эпюры *M* – статическую и кинематическую. Для выполнения статической проверки вырезаем жесткие узлы рамы (кроме опорных), прикладываем все действующиеие в них моменты и проверяем условие равновесия узла $\Sigma M = 0$. В рассматриваем случае вырезаем узлы *B* и *C* (см. рисунок 3.30, *з*, *и*):

узел *B*: $\Sigma M_B = \frac{Pl}{16} - \frac{Pl}{16} = 0$; узел *C*: $\Sigma M_C = \frac{Pl}{16} - \frac{Pl}{16} = 0.$

П р и м е ч а н и е – Знак ординаты эпюры *M* определяется стрелкой дуги окружности около узла, направленной так, чтобы вызвать растяжение в элементе со стороны ординат эпюры моментов.

Выполнение условия равновесия узлов является необходимым, но недостаточным. Достаточным условием правильности построения окончательной эпюры *M* является кинематическая проверка по условию (3.19). Для этого перемножим окончательную *M* и суммарную единичную $\overline{M}_s$ эпюры:

$$\Delta = 2\frac{2l}{6EJ}\left[2\frac{Pl}{32}(2l+1) - 2\frac{Pl}{16}\cdot 1 + \frac{Pl}{32}\cdot 1 - \frac{Pl}{16}(2l+1)\right] +$$

$$+2\frac{0{,}5l}{6EJ}\left(-2\frac{Pl}{16}\cdot 1 + 2\frac{3Pl}{16}\cdot 1 - \frac{Pl}{16}\cdot 1 + \frac{3Pl}{16}\cdot 1\right) = \frac{Pl^2}{16EJ} - \frac{Pl^2}{16EJ} = 0.$$

Поскольку $\Delta = 0$, условие (3.19) выполняется. Это свидетельствует о правильности построения окончательной эпюры моментов *M*.

3.10 Определение перемещений от внешней нагрузки в статически неопределимых стержневых системах

При расчете вагонных конструкций приходится определять перемещения отдельных точек системы. Как правило, эти перемещения малы по сравнению с размерами системы или ее элементов. По найденным перемещениям оценивают жесткость системы.

Таким образом, умение определять перемещения точек стержневой системы необходимо не только при ее расчете методом сил, но и при расчете на жесткость.

При определении перемещений, вызываемых внешней нагрузкой, используется формула (3.11), которая применима как для статически определимых, так и для статически неопределимых систем.

С целью упрощения рассмотрим определение перемещений с учетом только деформации изгиба, т. е. с учетом первого слагаемого формулы.

В статически определимой стержневой системе перемещение какой-либо ее точки (точки *K*) определяется как результат перемножения эпюры моментов от внешней нагрузки M_p на эпюру моментов $\overline{M}$ от единичной силы, приложенной в точке, перемещение которой надо найти:

$$\Delta_k = \sum \int \frac{M_p \overline{M}}{EJ} ds. \qquad (3.26)$$

Например, найдем перемещение точки *K* в горизонтальном направлении для рамы, приведенной на рисунке 3.31, *а*.

Эпюры моментов от заданной внешней нагрузки и от единичной силы показаны на рисунке 3.31, *б*, *в*.

Тогда, перемещение точки *K* рамы

$$\Delta_k = \frac{l}{6EJ} \cdot 3Pll = \frac{Pl^3}{2EJ}.$$

В статически неопределимых системах для построения эпюры моментов от внешней нагрузки требуется раскрыть статическую неопределимость и построить окончательную суммарную эпюру от заданной нагрузки, как это делается при расчете систем методом сил. В случае приложения к статически неопределимой системе единичной силы требуется повторно произвести расчет, т. е. снова раскрыть статическую неопределимость и построить окончательную эпюру моментов от воздействия единичной силы.

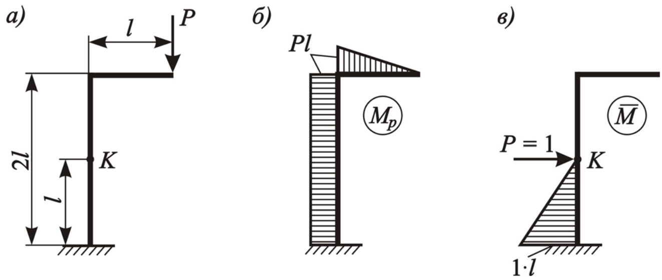


Рисунок 3.31 – К определению горизонтального перемещения точки *K* статически определимой системы:
а – исходная система; *б*, *в* – эпюры моментов от внешней нагрузки и единичной силы

Следовательно, для определения перемещения в статически неопределимой системе необходимо дважды раскрывать статическую неопределимость, что увеличивает трудоемкость расчета. Однако при выполнении практических расчетов этого не требуется.

Рассмотрим простейшую статически неопределимую систему в виде однопролетной балки (рисунок 3.32, *а*). На рисунке 3.32, *б*, *в* показаны эпюры моментов – окончательная M от заданной нагрузки и окончательная единичная $\overline{M}$ от единичной силы $P = 1$, полученные в результате расчета статически неопределимой балки. Тогда перемещение точки *K* балки

$$\Delta_k = \sum \int \frac{M \cdot \overline{M}}{EJ} ds. \tag{3.27}$$

Перемножение эпюр дает следующий результат:

$$\Delta_k = \frac{l}{6EJ}\left(2\frac{5Pl}{32}\frac{5l}{32}\right) + \frac{l}{6EJ}\left(2\frac{5Pl}{32}\frac{5l}{32} + 2\frac{3Pl}{16}\frac{3l}{16} - \frac{5Pl}{32}\frac{3l}{16} - \frac{3Pl}{16}\frac{5l}{32}\right) =$$

$$= \frac{25Pl^3}{3072EJ} + \frac{31Pl^3}{3072EJ} = \frac{7Pl^3}{384EJ}.$$

Рассмотрим, как можно упростить расчет.

Если отбросить в заданной системе лишние связи, превратив ее в статически определимую, и приложить к полученной основной системе заданную нагрузку и реакции отброшенных связей, то окончательная эпюра M не изменится. Причем независимо от выбранного варианта основной системы.

На рисунке 3.32, *г*, *е* показаны эпюры окончательных изгибающих моментов для двух вариантов основных систем, загруженных внешней нагрузкой и реакциями связей. В обоих случаях эпюры изгибающих моментов M одинаковы и не отличаются от эпюры, приведенной на рисунке 3.32, *б*. Отличает их от заданной системы то, что для построения эпюр использовались статически определимые системы.

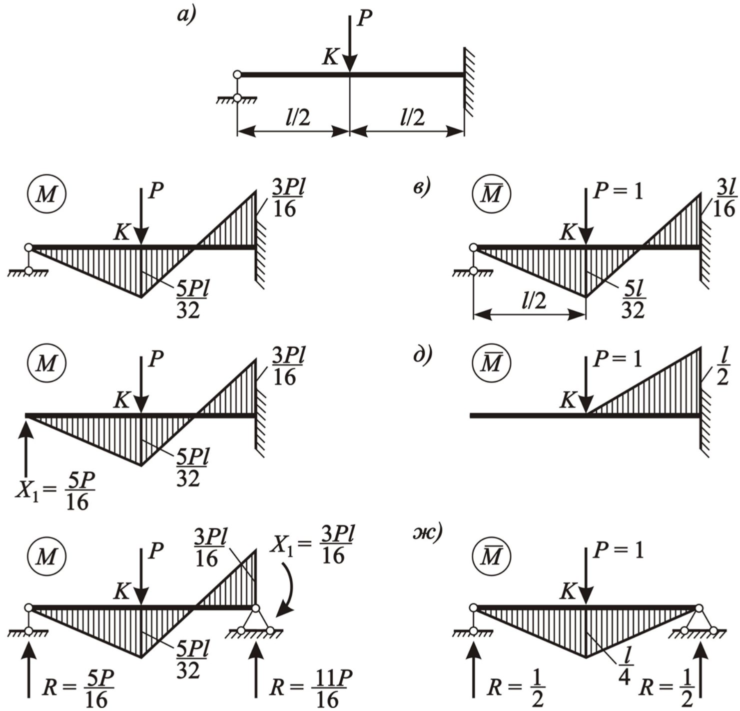


Рисунок 3.32 – К определению вертикального перемещения точки K статически неопределимой системы:

а – исходная система; *б, в* – эпюры M и $\overline{M}$ для заданной статически неопределимой системы; *г–ж* – эпюры M и $\overline{M}$ для первого и второго вариантов основной системы

Поскольку деформации заданной и полученных из нее статически определимых систем одинаковы, то перемещения точки K можно вычислить в статически определимой системе. Для таких систем эпюру моментов $\overline{M}$ от единичной силы построить достаточно просто (рисунок 3.32, *д, ж*). Тогда перемещение точки K:

• для первого варианта основной системы (рисунок 3.32, *г*, *д*) –

$$\Delta_k = \frac{l}{6EJ}\left(0 + 2\frac{3Pl}{16}\frac{l}{2} - \frac{5Pl}{32}\frac{l}{2} + 0\right) = \frac{7Pl^3}{384EJ};$$

• для второго варианта основной системы (рисунок 3.32, *е*, *ж*) –

$$\Delta_k = \frac{l}{6EJ}\left(2\frac{5Pl}{32}\frac{l}{4}\right) + \frac{l}{6EJ}\left(2\frac{5Pl}{32}\frac{l}{4} + 0 + 0 - \frac{3Pl}{16}\frac{l}{4}\right) = \frac{7Pl^3}{384EJ}.$$

Как следует из выполненных расчетов, искомое перемещение точки K для всех трех рассмотренных случаев одинаково. Однако использование при определении перемещения Δ_k эпюры $\overline{M}$, построенной в статически определимой системе, существенно упрощает расчет.

Таким образом, *при определении перемещения точки K эпюра M должна быть построена для заданной статически неопределимой системы, а эпюра* $\overline{M}$ *– для статически определимой системы*, полученной из заданной удалением лишних связей.

Примечание – При построении эпюры $\overline{M}$ может быть использована любая основная система.

В качестве статически определимой системы выбирается система, в которой проще строить эпюру $\overline{M}$ от единичной силы и выполнять перемножение эпюр. В приведенных вариантах основных систем более простым для построения эпюры $\overline{M}$ является вариант на рисунке 3.32, *д*, поскольку в рассматриваемом случае эпюра $\overline{M}$ располагается не по всей длине балки и имеет нулевой участок.

Примечание – Результат определения перемещения точки K не изменится, если эпюра $\overline{M}$ будет построена для статически неопределимой системы, а эпюра M – для статически определимой.

Рассмотрим *расчет горизонтального перемещения точки K* для рамы, изображенной на рисунке 3.30, *а*. Расчет рамы приведен в подразд. 3.9. Окончательная эпюра моментов M, полученная по результатам расчета, показана на рисунке 3.30, *ж*.

Для построения эпюры $\overline{M}$ используем основную систему, приведенную на рисунке 3.33, *а*, хотя можно использовать и прежнюю основную систему (см. рисунок 3.30, *б*). Эпюра $\overline{M}$ показана на рисунке 3.33, *б*.

Перемножая эпюры M и $\overline{M}$, получим

$$\Delta_k = \frac{l}{6EJ}\left(-2\frac{Pl}{32}l + 0 + 0 + \frac{Pl}{64}l\right) = -\frac{3Pl^3}{128EJ}.$$

П р и м е ч а н и е – Знак «минус» означает, что точка *K* перемещается в направлении, обратном направлению единичной силы *P*, т. е. влево.

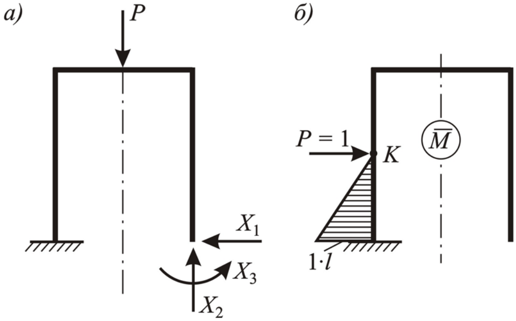


Рисунок 3.33 – К определению горизонтального перемещения точки *K* статически неопределимой системы:
а – исходная система; *б* – эпюра моментов от единичной силы

3.11 Расчет плоских статически неопределимых стержневых вагонных конструкций

Особенность расчета: в сечениях плоской стержневой системы возникают три внутренних силовых фактора, действующих в ее плоскости (M, Q, N).

В качестве примера рассмотрим расчеты боковой рамы тележки грузового вагона на вертикальные силы и рамы платформы на продольные силы.

3.11.1 Расчет боковой рамы тележки грузового вагона на вертикальные силы

Исходная расчетная схема. Конструктивная схема боковой рамы показана на рисунке 3.34. Рассмотрим ее расчет на вертикальные силы, симметрично расположенные относительно ее продольной и поперечной вертикальных плоскостей симметрии. К ним относятся следующие вертикальные силы: статическая $P_{\text{ст}}$, динамическая $P_{\text{д}}$ и вертикальная составляющая от центробежной силы $P_{\text{ц}}$.

Суммарная вертикальная расчетная сила на боковую раму

$$P = P_{\text{ст}} + P_{\text{д}} + P_{\text{ц}}.$$

Указанная расчетная сила передается на нижний горизонтальный пояс рамы рессорным комплектом. В типовой тележке рессорный комплект состоит из семи двухрядных пружин, поэтому загружение боковой рамы можно представить в виде семи сосредоточенных сил, каждая из которых равна $P/7$.

Расчетная схема боковой рамы принимается плоской стержневой. Она образуется линиями, проходящими через центры тяжести поперечных сечений ее стержней (см. рисунок 3.34).

В плоской расчетной схеме силы должны располагаться в плоскости рамы, поэтому на нижний горизонтальный пояс рамы будут действовать пять (а не семь, как в реальной конструкции) сосредоточенных сил: две крайние P_1, две промежуточные P_2 и средняя P_1, причем $P_1 = P/7$, $P_2 = 2P/7$, т. е.

$$P = 2P_1 + 2P_2 + P_1 .$$

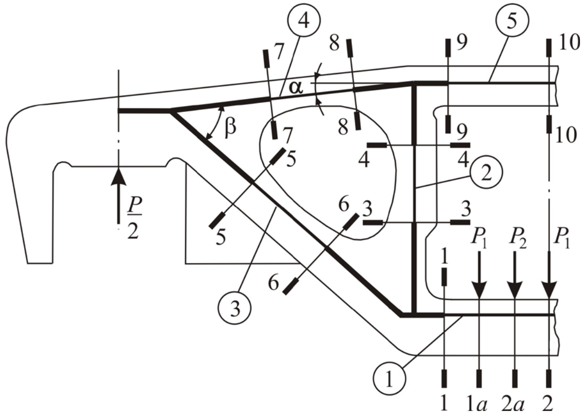


Рисунок 3.34 – Боковая рама тележки и ее расчетная схема

Опорные реакции прикладываются к серединам буксовых проемов рамы. Каждая из них принимается равной $0{,}5P$.

Исходная информация для расчета. Выполним расчет боковой рамы двухосной тележки грузового вагона с осевой нагрузкой 240 кН. Расчетные силы в этом случае будут иметь следующие значения: $P_{ст}$ = 226,92 кН, $P_{д}$ = = 118,67 кН, $P_{ц}$ = 40,66 кН, P = 386,25 кН, P_1 = 55,18 кН, P_2 = 110,36 кН, опорные реакции $P/2$ = 193,125 кН.

Геометрические параметры расчетной схемы боковой рамы даны в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – **Геометрические параметры расчетной схемы рамы тележки грузового вагона***

Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение
l_1	0,305	l_5	0,297	c_1	0,150
l_2	0,275	l_6	0,095	c_2	0,209
l_3	0,310	l_7	0,105	d_1	0,167
l_4	0,228	l_8	0,105	d_2	0,075
k_1	0,055	a_4	0,017	s	0,187
k_2	0,330	t_1	0,123	r	0,383
k_3	0,204	t_2	0,377	m	0,620
k_0	0,534	t_3	0,329	n_1	0,562
e_1	0,058	t_4	0,055	n_2	0,363
e_2	0,048	h_1	0,120	$l_т$	0,925

Окончание таблицы 3.1

Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение
e_3	0,066	h_2	0,090	z_1	0,715
a_1	0,195	h_3	0,110	z_2	0,820
a_2	0,185	h_4	0,080	α	4°
a_3	0,166	h_5	0,080	β	55°
* Линейные размеры приведены в метрах, углы – в градусах.					

В таблице 3.2 приведены геометрические характеристики сечений стержней (площади поперечных сечений F_i и моменты инерции сечений J_i, где i – номер стержня), которые приняты в качестве характерных для стержней рамы.

Таблица 3.2 – **Геометрические характеристики сечений стержней рамы**

Номер стержня	$F_i \cdot 10^{-4}$, м^2	$J_i \cdot 10^{-8}$, м^4
1	143,6	3049
2	45,4	351
3	56,8	768
4	41,4	276
5	48,1	400

Упрощение расчетной схемы. Симметричность конструкции и загружения боковой рамы относительно вертикальной поперечной плоскости, проходящей через середину рамы, позволяет рассматривать 1/2 часть боковой рамы. Действие отброшенной части на оставшуюся учитывается введением соответствующих связей.

На расчётной схеме 1/2 части рамы (рисунок 3.35) квадратными скобками и стерженьками с шарнирами по концам обозначены связи, закрепляющие сечения соответственно от поворотов в вертикальной плоскости и горизонтальных перемещений. Связи, закрепляющие сечения от вертикальных перемещений, не показаны, так как поперечные силы в плоскости симметрии равны нулю. Расчетная схема 1/2 части рамы загружена вертикальными силами P_1, P_2, $0{,}5P_1$ и уравновешивающей их реакцией $0{,}5P$.

Особенностью конструкции боковой рамы, отличающей ее от обычных стержневых рам, *является соизмеримость длин стержней с размерами их поперечных сечений.* Эта особенность конструкции учитывается при построении расчетной схемы выделением в ней узлов (утолщенные линии на рисунках 3.34 и 3.35), которые принимают абсолютно жесткими на сдвиг.

Установление степени статической неопределимости заданной системы. Расчетная схема всей боковой рамы состоит из трех замкнутых контуров и в общем случае загружения силами, действующими в плоскости рамы, девять раз статически неопределима. В стержнях боковой рамы возникают при этом деформации изгиба в вертикальной плоскости, растяжения-сжатия и сдвига.

Степень статической неопределимости 1/2 части рамы снижается до пяти, учитывая симметричность конструкции и загружения относительно вертикальной поперечной плоскости.

Рассмотрим расчет рамы методом сил строительной механики.

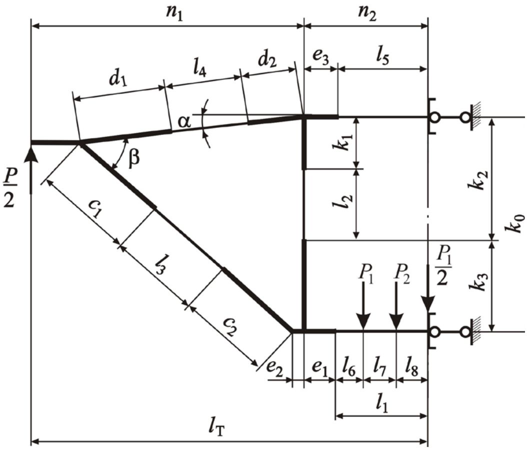


Рисунок 3.35 – Расчетная схема 1/2 части боковой рамы

Выбор основной системы. Основную систему получают из расчетной схемы, устраняя лишние связи в средних сечениях верхнего горизонтального и наклонного поясов и вводя взамен удаленных связей их реакции X_1, X_2, ..., X_5 (рисунок 3.36).

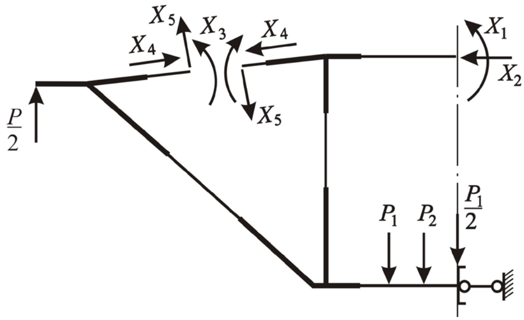


Рисунок 3.36 – Основная система

Составление канонических уравнений. Система канонических уравнений для определения неизвестных X_1, X_2, ..., X_5 будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\delta_{14}X_4+\delta_{15}X_5+\Delta_{1p}=0;\\
&\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\delta_{24}X_4+\delta_{25}X_5+\Delta_{2p}=0;\\
&\delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\delta_{34}X_4+\delta_{35}X_5+\Delta_{3p}=0;\\
&\delta_{41}X_1+\delta_{42}X_2+\delta_{43}X_3+\delta_{44}X_4+\delta_{45}X_5+\Delta_{4p}=0;\\
&\delta_{51}X_1+\delta_{52}X_2+\delta_{53}X_3+\delta_{54}X_4+\delta_{55}X_5+\Delta_{5p}=0.
\end{aligned}\right\}$$

Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Для вычисления коэффициентов δ_{ik} и свободных членов Δ_{ip} построим эпюры изгибающих моментов и продольных сил от неизвестных единичных силовых факторов X_1, X_2, …, X_5 и внешней нагрузки (рисунки 3.37 и 3.38) и затем перемножим их по правилам перемножения эпюр. Для удобства будем вычислять коэффициенты и свободные члены, увеличенные в E раз.

Примечание – Коэффициенты δ_{ik} и свободные члены Δ_{ip} будем определять как перемещения, обусловленные деформацией изгиба и растяжения-сжатия. Деформации сдвига с целью упрощения расчета не учитываем. Это несущественно сказывается на результатах расчета.

При построении эпюр учитывается некоторая податливость узлов рамы. Эпюры моментов и продольных сил в теле узла считаются затухающими по линейному закону на длине, равной высоте поперечного сечения стержня. На участках стержней, расположенных между узлами, эти эпюры строят обычными методами.

Рассмотрим определение коэффициентов δ_{11}, δ_{45} и свободного члена Δ_{1p}.

Коэффициент δ_{11} определяем умножением эпюры $\overline{M}_1$ на $\overline{M}_1$:

$$E\delta_{11}=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{J_1}(2h_1+6l_1)+\frac{1}{J_2}(4h_2+6l_2)+\frac{1}{J_5}(2h_5+6l_5\right];$$

$$E\delta_{11}=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{3049\cdot10^{-8}}(2\cdot0{,}12+6\cdot0{,}305+\frac{1}{351\cdot10^{-8}}(4\cdot0{,}09+6\cdot0{,}275)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{400\cdot10^{-8}}(2\cdot0{,}08+6\cdot0{,}297\right]=187673{,}5.$$

Коэффициент δ_{45} находим, перемножив единичные эпюры M и N от X_4 = = 1 на эпюры от X_5 = 1:

$$E\delta_{45}=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{J_2}\left[2h_2t_3a_3+l_2(2t_3a_3+2t_4a_2+t_4a_3+t_3a_2)+2h_2t_4a_2\right]-\right.$$

$$-\frac{1}{J_3}\left[2h_3t_2a_4+l_3(2t_2a_4+2t_1a_1+t_1a_4+t_2a_1)+2h_3t_1a_1\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{F_2}\sin\alpha\cos\alpha(4h_2+6l_2)-\frac{1}{F_3}\cos\beta\sin\beta(4h_3+6l_3)\right\};$$

$$E\delta_{45}=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{351\cdot10^{-8}}\left[2\cdot0{,}09\cdot0{,}329\cdot0{,}166+0{,}275(2\cdot0{,}329\cdot0{,}166+\right.\right.$$

$$+2\cdot 0{,}055\cdot 0{,}185+0{,}055\cdot 0{,}160+0{,}329\cdot 0{,}185)+2\cdot 0{,}09\cdot 0{,}055\cdot 0{,}185\big]-$$

$$-\frac{1}{768\cdot 10^{-8}}\big[2\cdot 0{,}11\cdot 0{,}377\cdot 0{,}017+0{,}310(2\cdot 0{,}377\cdot 0{,}017+$$

$$+2\cdot 0{,}123\cdot 0{,}195+0{,}123\cdot 0{,}017+0{,}377\cdot 0{,}195)+2\cdot 0{,}11\cdot 0{,}123\cdot 0{,}195\big]+$$

$$+\frac{1}{45{,}4\cdot 10^{-4}}\cdot 0{,}0698\cdot 0{,}9976(4\cdot 0{,}09+6\cdot 0{,}275)-\frac{1}{56{,}8\cdot 10^{-4}}\cdot 0{,}5736\cdot 0{,}8192\times$$

$$\left.\times(4\cdot 0{,}11+6\cdot 0{,}310)\right\}=2070{,}482.$$

Свободный член Δ_{1p} определяем умножением эпюры $\overline{M}_1$ на эпюру M_p:

$$E\Delta_{1p}=-\frac{1}{6}\frac{1}{J_1}\big[2h_1M_1+3l_6(M_1+M_2)+3l_7(M_2+M_3)+3l_3(M_3+M_4)\big],$$

где $M_1=0{,}5Pm=0.5\cdot 386{,}25\cdot 0{,}620=119{,}738$ кН · м;

$M_2=0{,}5Pz_1=0{,}5\cdot 386{,}25\cdot 0{,}715=138{,}085$ кН · м;

$M_3=0{,}5Pz_2-P_1l_7=0{,}5\cdot 386{,}25\cdot 0{,}820-55{,}18\cdot 0{,}105=152{,}570$ кН · м;

$M_4=0{,}5Pl_{\text{т}}-P_1(l_7+l_8)-P_2l_8=0{,}5\cdot 386{,}25\cdot 0{,}925-55{,}18(0{,}105+0{,}105)-$
$-110{,}36\cdot 0{,}105=155{,}467$ кН · м.

$$E\Delta_{1p}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3049\cdot 10^{-8}}\big[2\cdot 0{,}12\cdot 119{,}738+3\cdot 0{,}095(119{,}738+138{,}085)+$$

$$+3\cdot 0{,}105(138{,}085+152{,}570)+3\cdot 0{,}105(152{,}570+155{,}467)\big]=-1589619.$$

Значения остальных коэффициентов и свободных членов приведем без расчета:

$E\delta_{22}=7671{,}553$; $E\delta_{23}=E\delta_{32}=-18372{,}51$;

$E\delta_{24}=E\delta_{42}=4341{,}488$, $E\delta_{25}=E\delta_{52}=3167{,}932$;

$E\Delta_{2p}=-848856{,}7$;

$E\delta_{33}=247287{,}2$; $E\delta_{34}=E\delta_{43}=-30803{,}09$; $E\delta_{35}=E\delta_{53}=-11459{,}2$;

$E\Delta_{3p}=-2747274$;

$E\delta_{44}=7910{,}511$; $E\delta_{45}=E\delta_{54}=2070{,}482$; $E\Delta_{4p}=736299$;

$E\delta_{55}=4414{,}236$; $E\Delta_{5p}=-244117{,}4$.

Для проверки полученных коэффициентов и свободных членов строим суммарные единичные эпюры $\overline{M}_s$ и $\overline{N}_s$ от совместного действия сил $X_1=1$, $X_2=1$, …, $X_5=1$ (рисунок 3.39).

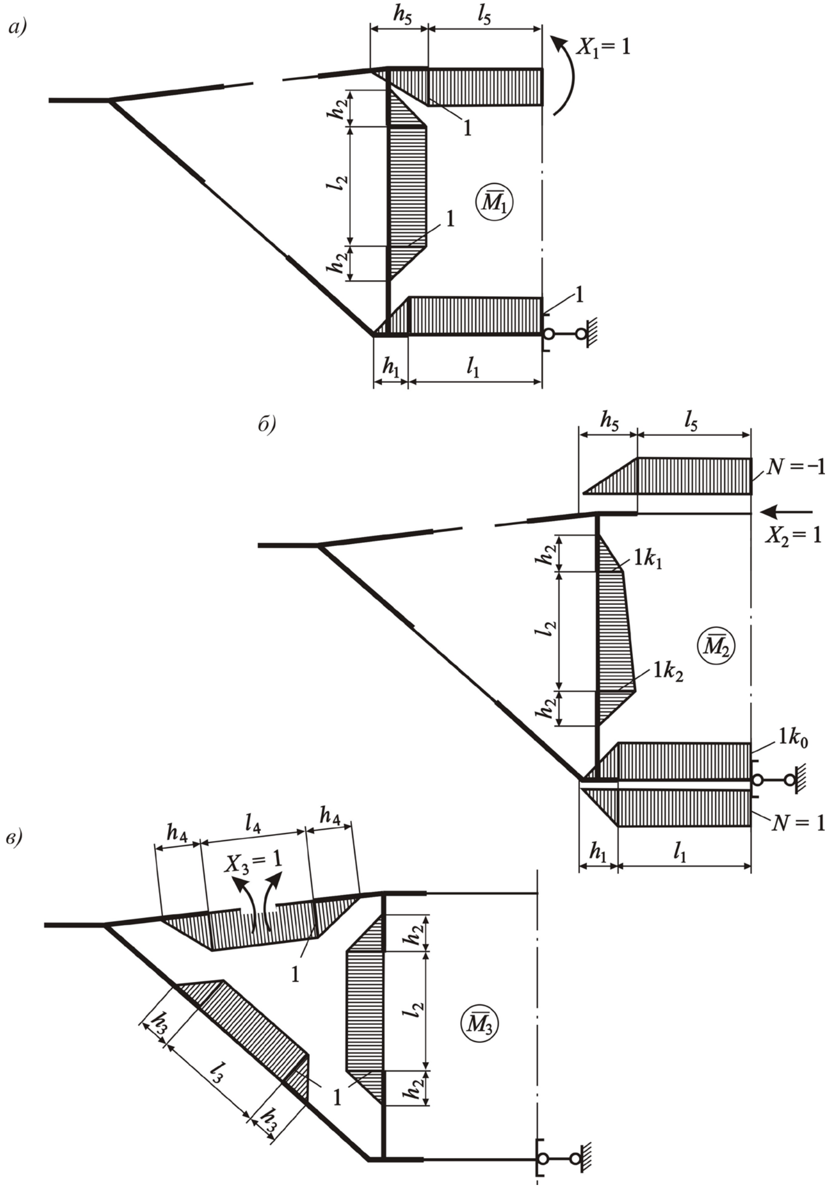


Рисунок 3.37 – Эпюры изгибающих моментов и нормальных сил:
а – от $X_1 = 1$; *б* – от $X_2 = 1$; *в* – от $X_3 = 1$

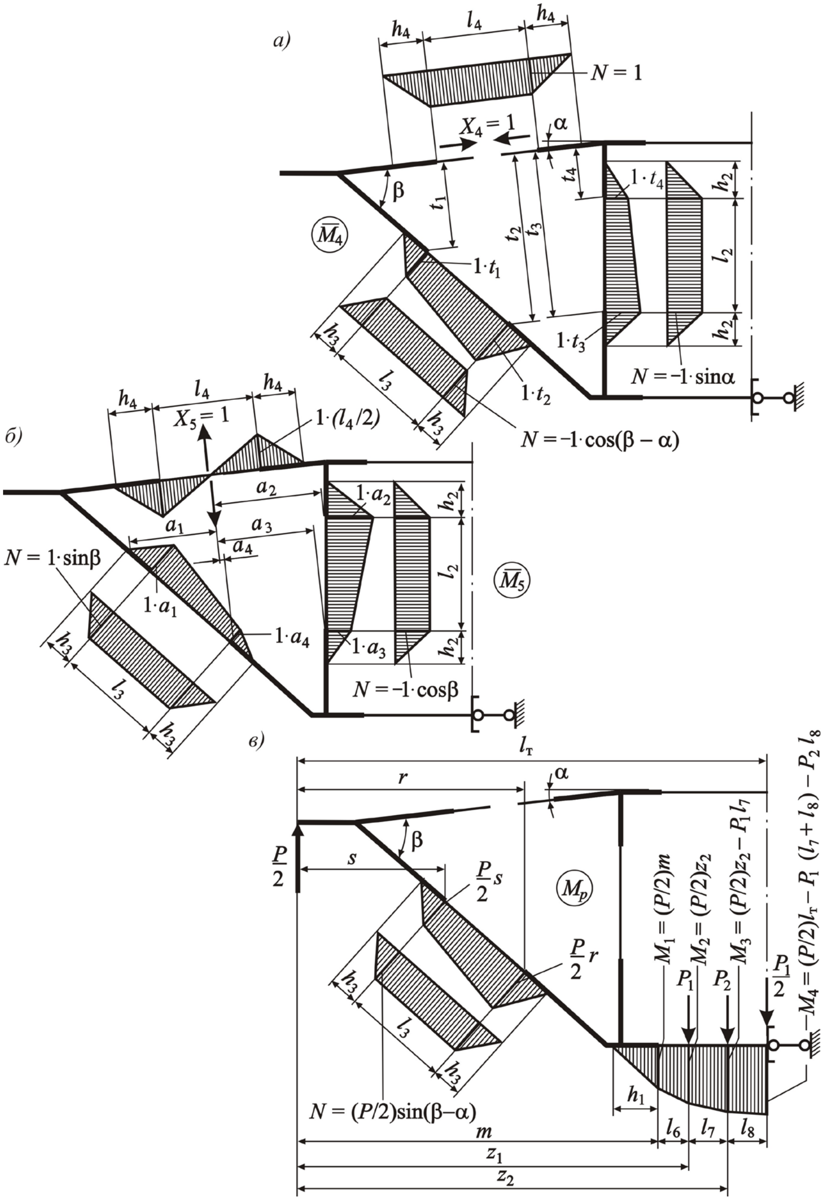


Рисунок 3.38 – Эпюры изгибающих моментов и нормальных сил:
а – от $X_4 = 1$; *б* – от $X_5 = 1$; *в* – от внешней нагрузки

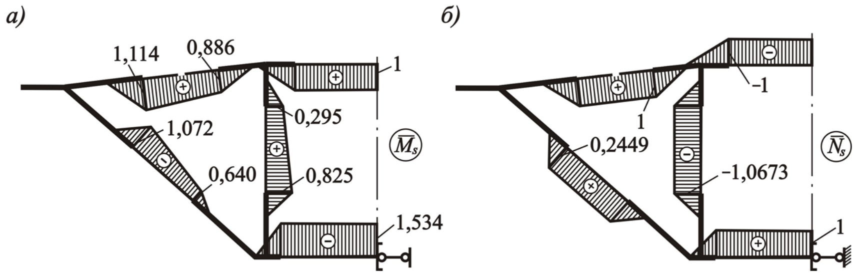


Рисунок 3.39 – Суммарные единичные эпюры:
а – изгибающих моментов; *б* – продольных сил

Умножая эпюры $\overline{M}_s$ и $\overline{N}_s$ сами на себя, а также на эпюру M_p, получим:

$$E\delta_{ss} = \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{3049\cdot 10^{-8}}\left[0{,}12\cdot 2\cdot(-1{,}534)^2 + 0{,}305\cdot 6\cdot(-1{,}534)^2\right] + \frac{1}{143{,}6\cdot 10^{-4}}\times\right.$$

$$\times\left[0{,}12\cdot 2\cdot 1\cdot 1 + 0{,}306\cdot 6\cdot 1\cdot 1\right] + \frac{1}{351\cdot 10^{-8}}\left[0{,}09\cdot 2\cdot 0{,}825^2 + 0{,}275\times\right.$$

$$\left.\times(2\cdot 0{,}825^2 + 2\cdot 0{,}295^2 + 2\cdot 0{,}825\cdot 0{,}295) + 0{,}09\cdot 2\cdot 295^2\right] + \frac{1}{45{,}4\cdot 10^{-4}}\times$$

$$\times\left[2\cdot 0{,}09\cdot 2\cdot(-1{,}0673)^2 + 0{,}275\cdot 6\cdot(-1{,}0673)^2\right] + \frac{1}{768\cdot 10^{-8}}\times$$

$$\times\left[0{,}11\cdot 2\cdot(-0{,}64)^2 + 0{,}11\cdot 2\cdot(-1{,}072)^2 + 0{,}31\cdot(2\cdot(-1{,}072)^2 + 2\cdot(-0{,}64)^2 +\right.$$

$$\left.+ 2\cdot(-1{,}072)(-0{,}64))\right] + \frac{1}{56{,}8\cdot 10^{-4}}\left[2\cdot 0{,}11\cdot 2\cdot 0{,}2449^2 + 0{,}31\cdot 6\cdot 0{,}2449^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{276\cdot 10^{-8}}\left[0{,}08\cdot 2\cdot 1{,}114^2 + 0{,}08\cdot 2\cdot 0{,}886^2 + 0{,}228\cdot(2\cdot 1{,}114^2 + 2\cdot 0{,}886^2 +\right.$$

$$\left.+ 2\cdot 1{,}114\cdot 0{,}886)\right] + \frac{1}{41{,}4\cdot 10^{-4}}\left[2\cdot 0{,}08\cdot 2\cdot 1\cdot 1 + 0{,}228\cdot 6\cdot 1\cdot 1\right] +$$

$$+ \frac{1}{400\cdot 10^{-8}}\left[0{,}08\cdot 2\cdot 1\cdot 1 + 0{,}297\cdot 6\cdot 1\cdot 1\right] + \frac{1}{48{,}1\cdot 10^{-4}}\times$$

$$\left.\times\left[2\cdot 0{,}08\cdot 2\cdot(-1)^2 + 0{,}228\cdot 6\cdot(-1)^2\right]\right\} = 280943{,}1\,.$$

$$E\Delta_{sp} = \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{3049\cdot 10^{-8}}\left[0{,}12\cdot 2\cdot 119{,}738\cdot(-1{,}534)+0{,}095\cdot(2\cdot 119{,}738\cdot(-1{,}534)+\right.\right.$$

$$+\,2\cdot 138{,}085\cdot(-1{,}534)+119{,}738\cdot(-1{,}534)+138{,}085\cdot(-1{,}534))+$$

$$+\,0{,}105\cdot(2\cdot 138{,}05\cdot(-1{,}534)+2\cdot 152{,}57\cdot(-1{,}534)+138{,}085\cdot(-1{,}534)+$$

$$+\,152{,}57\cdot(-1{,}534))+0{,}105\cdot(2\cdot 152{,}57\cdot(-1{,}534)+2\cdot 155{,}467\cdot(-1{,}534)+$$

$$\left.+\,152{,}57\cdot(-1{,}534)+155{,}467\cdot(-1{,}534))\right]+$$

$$+\frac{1}{768\cdot 10^{-8}}\left[0{,}11\cdot 2\cdot 36{,}114\cdot(-1{,}072)+0{,}11\cdot 2\cdot 73{,}967\cdot(-0{,}64)+\right.$$

$$\left.+\,0{,}31\cdot(2\cdot 36{,}114\cdot(-1{,}072)+2\cdot 73{,}967\cdot(-0{,}64)+2\cdot(-1{,}072)(-0{,}64)\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{56{,}8\cdot 10^{-4}}\left[2\cdot 0{,}11\cdot 2\cdot 150{,}058\cdot 0{,}2449+0{,}31\cdot 6\cdot 150{,}058\cdot 0{,}2449\right]\right\}=$$

$$=-4693622\,.$$

Определяем сумму коэффициентов $\Sigma\delta$ и свободных членов $\Sigma\Delta$ канонических уравнений:

$$E\cdot\Sigma\delta = E\delta_{11}+E\delta_{12}+...+E\delta_{55} =$$
$$=187673{,}5+24414{,}82+...+4414{,}236=280943{,}1\,;$$

$$E\cdot\Sigma\Delta = E\Delta_1+E\Delta_2+E\Delta_3+E\Delta_4+E\Delta_5 =$$

$$=-1589619+-848856{,}7+-2747274+736299-244171{,}4=-4693623\,.$$

Поскольку $E\cdot\Sigma\delta = E\delta_{ss}$, а расхождение между $E\cdot\Sigma\Delta$ и $E\Delta_{sp}$ практически близко к нулю, коэффициенты и свободные члены определены правильно.

Решение системы канонических уравнений. Подставляем полученные значения коэффициентов $E\delta_{ik}$ и свободных членов $E\Delta_{ip}$ в систему канонических уравнений. Сокращаем на E и решаем уравнения относительно неизвестных X_1, X_2, …, X_5. Для вычисления используем стандартную программу для решения линейных алгебраических уравнений.

Результаты расчета:

$$X_1 = 0{,}084 \text{ кН}\cdot\text{м};\quad X_2 = 242{,}149 \text{ кН};\quad X_3 = 1{,}514 \text{ кН}\cdot\text{м};$$
$$X_4 = -216{,}835 \text{ кН};\quad X_5 = -13{,}151 \text{ кН}.$$

Построение окончательных эпюр моментов и продольных сил. Ординаты окончательных эпюр изгибающих моментов и продольных сил для рассматриваемого случая

$$M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \overline{M}_3 X_3 + \overline{M}_4 X_4 + \overline{M}_5 X_5 + M_p;$$

$$N = \overline{N}_1 X_1 + \overline{N}_2 X_2 + \overline{N}_3 X_3 + \overline{N}_4 X_4 + \overline{N}_5 X_5 + N_p.$$

Вычисление ординат окончательных эпюр M и N выполняем в табличной форме (таблицы 3.3 и 3.4). При этом учитываем знаки силовых факторов X_i, а также моментов и продольных сил.

Таблица 3.3 – **Вычисление ординат окончательной эпюры *M***

Номер стержня	Номер сечения	X_1 = 0,084 кН·м		X_2 = 242,149 кН		X_3 = 1,514 кН·м	
		$\overline{M}_1$	$\overline{M}_1 X_1$	$\overline{M}_2$	$\overline{M}_2 X_2$	$\overline{M}_3$	$\overline{M}_3 X_3$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	–1	–0,084	–0,534	–129,308	–	–
	1а	–1	–0,084	–0,534	–129,308	–	–
	2а	–1	–0,084	–0,534	–129,308	–	–
	2	–1	–0,084	–0,534	–129,308	–	–
2	3	1	0,084	0,330	79,909	–1	–1,514
	4	1	0,084	0,055	13,318	–1	–1,514
3	5	–	–	–	–	–1	–1,514
	6	–	–	–	–	–1	–1,514
4	7	–	–	–	–	1	1,514
	8	–	–	–	–	1	1,514
5	9	1	0,084	–	–	–	–
	10	1	0,084	–	–	–	–

Окончание таблицы 3.3

Номер стержня	Номер сечения	X_4 = –216,835 кН		X_5 = –13,151 кН		M_p, кН·м	M, кН·м
		$\overline{M}_4$	$\overline{M}_4 X_4$	$\overline{M}_5$	$\overline{M}_5 X_5$		
1	2	9	10	11	12	13	14
1	1	–	–	–	–	119,738	–9,654
	1а	–	–	–	–	138,085	8,693
	2а	–	–	–	–	152,570	23,178
	2	–	–	–	–	155,467	26,075
2	3	0,329	–71,339	0,166	–2,183	–	4,957
	4	0,055	–11,926	0,185	–2,433	–	–2,471
3	5	0,123	–26,671	–0,195	2,564	36,114	10,493
	6	0,377	–81,747	–0,017	0,234	73,967	–9,060
4	7	–	–	0,114	–1,499	–	0,015
	8	–	–	–0,114	1,499	–	3,013
5	9	–	–	–	–	–	0,084
	10	–	–	–	–	–	0,084

Таблица 3.4 – **Вычисление ординат окончательной эпюры *N***

Номер стержня	$X_1 = 0{,}084$ кН·м		$X_2 = 242{,}149$ кН		$X_3 = 1{,}514$ кН·м	
	$\overline{N}_1$	$\overline{N}_1 X_1$	$\overline{N}_2$	$\overline{N}_2 X_2$	$\overline{N}_3$	$\overline{N}_3 X_3$
1	2	3	4	5	6	7
1	–	–	1	242,149	–	–
2	–	–	–	–	–	–
3	–	–	–	–	–	–
4	–	–	–	–	–	–
5	–	–	–1	–242,149	–	–

Окончание таблицы 3.4

Номер стержня	$X_4 = -216{,}835$ кН		$X_5 = -13{,}151$ кН		N_p, кН	N, кН
	$\overline{N}_4$	$\overline{N}_4 X_4$	$\overline{N}_5$	$\overline{N}_5 X_5$		
1	8	9	10	11	12	13
1	–	–	–	–	–	242,149
2	–0,0697	15,113	–0,9976	13,119	–	28,232
3	–0,5740	124,463	0,8189	–10,769	150,058	263,722
4	1	–216,835	–	–	–	–216,835
5	–	–	–	–	–	–242,149

Окончательные эпюры *M* и *N* показаны на рисунке 3.40.

Значения ординат этих эпюр используются для оценки прочности боковой рамы.

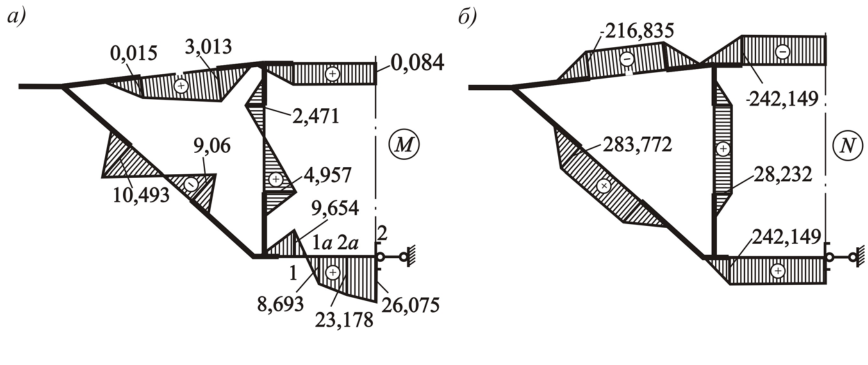


Рисунок 3.40 – Окончательные эпюры:
а – изгибающих моментов; *б* – продольных сил

3.11.2 Расчет рамы платформы на продольные силы

Рассмотрим особенности расчета рамы вагона-платформы.

Расчетная схема. Для расчета используем расчетную схему, которая показана на рисунке 3.41, *а*. Ее обоснование приведено в подразд. 1.2. Рама загружена внешней продольной сжимающей силой $T_с$, которая передается на хребтовую балку рамы через задние упоры автосцепного устройства. Рассматриваемая расчетная схема является плоской стержневой.

Степень статической неопределимости системы. Степень статической неопределимости расчетной схемы рамы платформы равна десяти.

Симметричность конструкции и загружения рамы относительно двух осей позволяет упростить расчет, рассматривая $1/4$ часть рамы (рисунок 3.41, *б*). Действие отброшенной части заменяем введением связей от ненулевых силовых факторов: от продольной силы N – при разрезе продольных балок, от изгибающего момента M – при разрезе поперечных балок.

Поскольку хребтовая балка рассекается вдоль продольной оси пополам, в расчетной схеме $1/4$ части рамы она загружается продольной силой $0{,}5T_с$.

Степень статической неопределимости $1/4$ части рамы снижается до двух, что значительно упрощает расчет.

Выбор основной системы. Основную систему получаем из заданной путем отбрасывания лишних связей – рассекая шарниры в местах соединения поперечных балок с продольной – и введения в местах разреза лишних неизвестных.

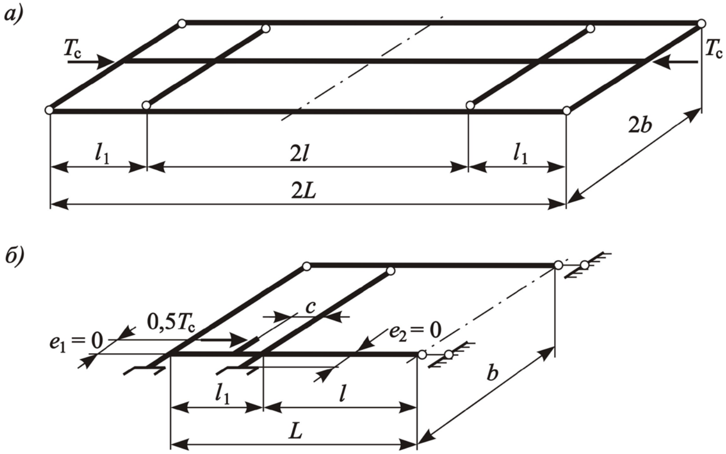


Рисунок 3.41 – Расчетная схема рамы платформы:
а – всей конструкции; *б* – 1/4 части рамы

Основная система при традиционном способе решения имеет вид, показанный на рисунке 3.42, *а*. Здесь неизвестные усилия обозначены как Y_1 и Y_2. Однако более удобным будет вариант основной системы при использовании способа группировки неизвестных. Групповые незвестные X_1 и X_2 показаны на рисунке 3.42, *б*, *в*. Суммируя групповые неизвестные X_1 и X_2 путем наложения схем, приведенных на рисунке 3.43, *б*, *в*, мы должны получить исходные неизвестные Y_1 и Y_2. Групповые неизвестные X_1 и X_2 связаны с исходнымии неизвестными зависимостями: $X_1 = Y_1$ и $X_2 - X_1 = Y_2$.

Полученный рациональныий вариант основной системы показан на рисунке 3.42, *г*.

Составление канонических уравнений. Канонические уравнения для двух лишних неизвестных имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{aligned}\right\}$$

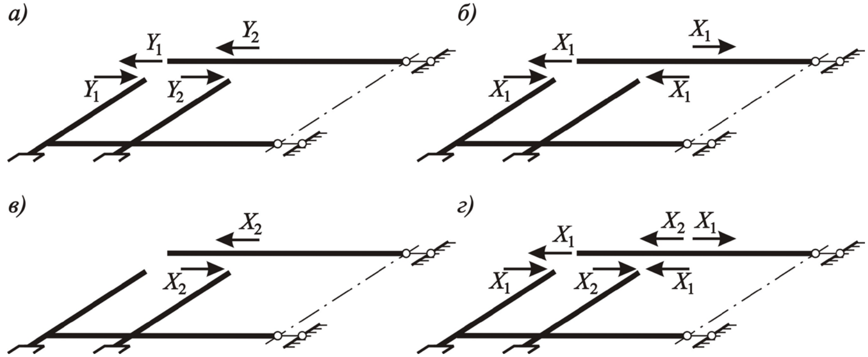


Рисунок 3.42 – К выбору основной системы:
а – традиционная; *б, в* – основная система, загруженная групповыми неизвестными X_1 и X_2;
г – рациональная основная система

Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Коэффициенты δ_{ik} и свободные члены Δ_{ip} вычисляем по формулам перемножения эпюр *с учетом деформаций изгиба и растяжения-сжатия*:

$$\delta_{ik} = \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k}{EJ} ds + \sum \int_0^l \frac{\overline{N}_i \overline{N}_k}{EF} ds; \quad \Delta_{ip} = \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_i M_p}{EJ} ds + \sum \int_0^l \frac{\overline{N}_i N_p}{EF} ds.$$

Единичные и грузовые эпюры изгибающих моментов ($\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, M_p) и продольных сил ($\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, N_p) показаны на рисунке 3.43.

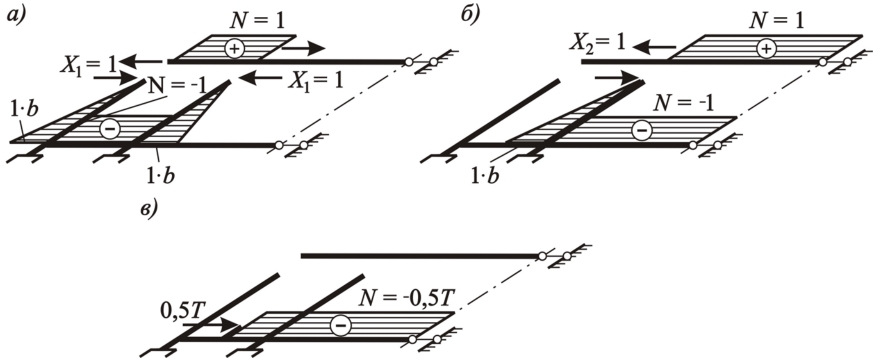


Рисунок 3.43 – Эпюры изгибающих моментов и продольных сил:
а – от $X_1 = 1$; *б* – от $X_2 = 1$; *в* – от внешней нагрузки

Решение канонических уравнений. Решая канонические уравнения, находим значения неизвестных X_1 и X_2.

Построение окончательной эпюры моментов и продольных сил для заданной системы. Ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов и продольных сил определяем по формулам

$$M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + M_p; \quad N = \overline{N}_1 X_1 + \overline{N}_2 X_2 + N_p.$$

Значения ординат этих эпюр используются для оценки прочности рамы платформы.

3.12 Расчет пространственных и плоскопространственных статически неопределимых стержневых вагонных конструкций

Особенности расчета:

• *в сечениях пространственной стержневой системы* (см. рисунок 3.22) действуют в общем случае загружения шесть внутренних силовых факторов (изгибающие моменты M_y и M_z, крутящий момент $M_к$, поперечные силы Q_y и Q_z, нормальная сила N);

• *в сечениях плоскопространственной стержневой системы*, которая является частным случаем пространственной системы, сохраняются только силовые факторы, плоскость действия которых перпендикулярна плоскости рамы (M_y, Q_z, $M_к$). Силовые факторы, лежащие в плоскости рамы, равны нулю.

В качестве примера рассмотрим расчет рамы тележки пассажирского вагона модели 68-875 (рисунок 3.44). Рама образована совокупностью балок: двух продольных боковых *1* со шпинтонами *5*, четырех вспомогательных продольных *2*, двух средних поперечных *3* и четырех укороченных концевых *4*.

Исходная расчетная схема. Конструктивная схема рамы показана на рисунке 3.45, *а*. Расчетная схема рамы создается линиями, проходящими через центры тяжести поперечных сечений ее балок. Поскольку балки рамы расположены не в одной плоскости, то расчетная схема будет пространственной. В то же время, если оси балок рамы будут смещены одна относительно другой на сравнительно небольшую величину, то расчетную схему можно принять плоской, располагая осевые линии балок в плоскости боковых.

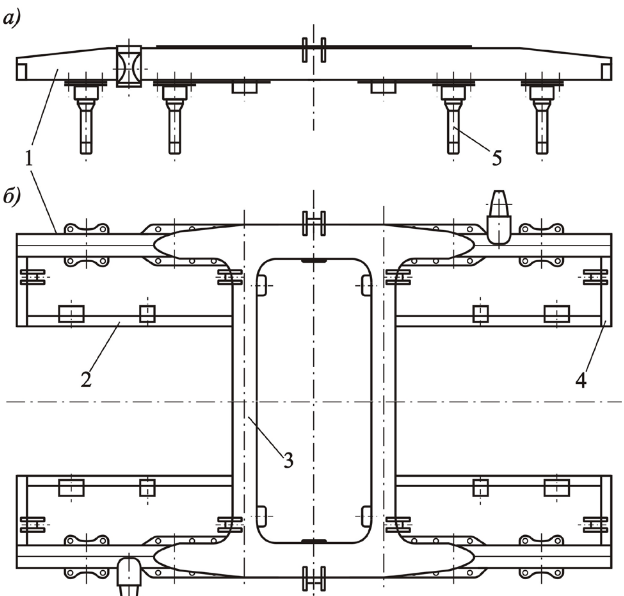


Рисунок 3.44 – Рама тележки пассажирского вагона:
а – вид сбоку; *б* – вид сверху

В расчетную схему можно не включать вспомогательные продольные балки *2*, к которым крепятся детали тормозной рычажной передачи, ввиду их малой жесткости по сравнению с жесткостью боковых балок.

Таким образом, при построении расчетной схемы вводятся следующие допущения: расчетная схема принимается плоской; вспомогательные продольные балки в расчетную схему не вводятся ввиду их малой жесткости.

Расчетная схема рамы, учитывающая введенные допущения, приведена на рисунке 3.45, *б*. Данная расчетная схема пригодна для расчета на все нагрузки (вертикальные и горизонтальные), кроме тормозных.

Степень статической неопределимости заданной системы. Расчетная схема такой рамы в общем случае загружения внешними силами шесть раз статически неопределима, так как она имеет один замкнутый контур и пространственное загружение.

Рассмотрим расчет рамы методом сил строительной механики.

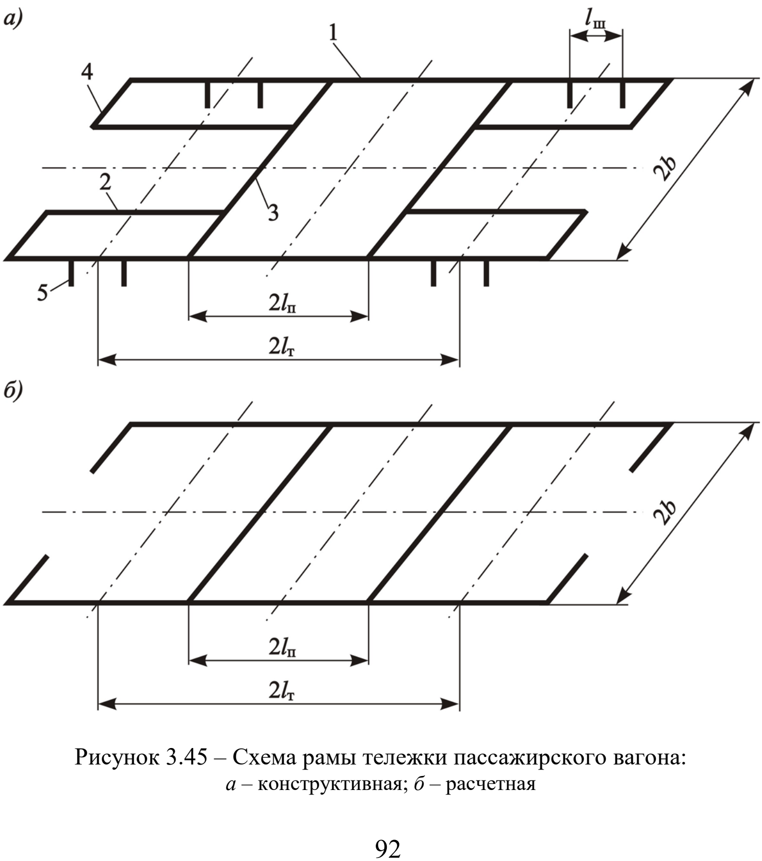


Рисунок 3.45 – Схема рамы тележки пассажирского вагона:
а – конструктивная; *б* – расчетная

Выбор основной системы. Основную систему в данном случае создаем с использованием жестких консолей и упругого центра путем:

- рассечения правой поперечной балки по продольной оси симметрии;
- присоединения в местах разреза абсолютно жестких консолей, оканчивающихся в упругом центре;
- переноса лишних неизвестных X_1, X_2, ..., X_6 в упругий центр.

Полученная рациональная основная система приведена на рисунке 3.46. Для большей наглядности показано раздельное загружение ее внутренними силовыми факторами X_1,–X_6, действующими соответственно в плоскости рамы (см. рисунок 3.46, *а*) и перпендикулярно плоскости рамы (см. рисунок 3.46, *б*).

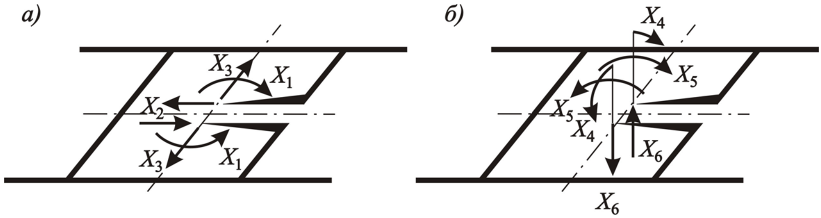


Рисунок 3.46 – Основная система с внутренними силовыми факторами, действующими:
а – в плоскости рамы; *б* – перпендикулярно плоскости рамы

Составление канонических уравнений. В результате введения жестких консолей получаем систему канонических уравнений с полностью разделенными неизвестными:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0\ ; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta_{ii}X_i + \Delta_{ip} = 0\ ; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta_{66}X_6 + \Delta_{6p} = 0\ . \end{array}\right\}$$

Тогда

$$X_i = -\frac{\Delta_{ip}}{\delta_{ii}}\,.$$

Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Для определения δ_{ii} и Δ_{ip} следует построить эпюры моментов от неизвестных силовых факторов $X_1 = 1$, …, $X_6 = 1$ и внешней нагрузки и перемножить их по правилам перемножения эпюр.

Единичные эпюры моментов от $X_1 = 1, \ldots, X_6 = 1$ показаны на рисунке 3.47.

П р и м е ч а н и е – При построении эпюры *M* каждый элемент рамы нужно рассматривать как отдельный стержень, защемленный одним концом.

Напомним также, что при переносе силы *F* параллельно самой себе из одной точки в другую нужно уравновесить перенесенную силу такой же силой, но направленной в другую сторону. Тогда в точке переноса будут действовать перенесенная сила и момент (от пары сил *F*).

При построении грузовой эпюры необходимо учитывать, что на раму действуют различные внешние силы в двух плоскостях: в плоскости рамы и перпендикулярно плоскости рамы. Поэтому нужно определиться с внешней силой, от воздействия которой будет рассчитываться рама.

Грузовые эпюры для различных внешних расчетных сил будут приведены ниже в этом подразделе.

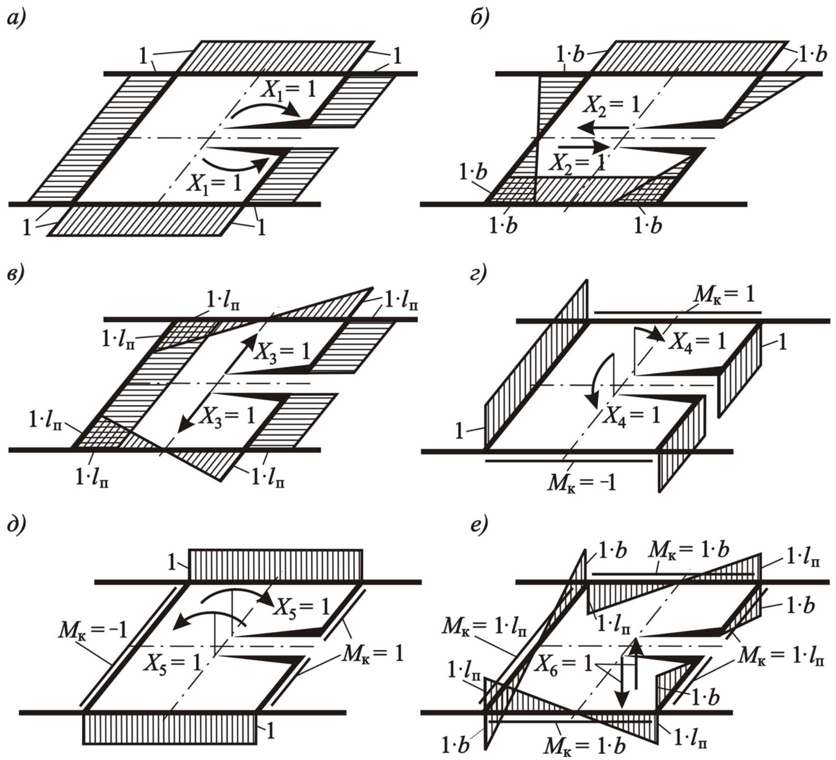


Рисунок 3.47 – Единичные эпюры изгибающих и крутящих моментов:
а – от $X_1 = 1$; *б* – от $X_2 = 1$; *в* – от $X_3 = 1$; *г* – от $X_4 = 1$; *д* – от $X_5 = 1$; *е* – от $X_6 = 1$

Коэффициенты δ_{ii} и свободные члены Δ_{ip} вычисляем по формулам перемножения эпюр с учетом деформаций:

• *изгиба в горизонтальной плоскости* – от неизвестных X_1, X_2, X_3, действующих в плоскости рамы, –

$$\delta_{ii} = \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_i^2}{EJ_z} ds; \quad \Delta_{ip} = \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_i M_p}{EJ_z} ds;$$

• *изгиба в вертикальной плоскости и кручения* – от неизвестных X_4, X_5, X_6, действующих перпендикулярно плоскости рамы, –

$$\delta_{ii} = \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_i^2}{EJ_y} ds + \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_{\text{к}i}^2}{GJ_\text{к}} ds; \quad \Delta_{ip} = \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_i M_p}{EJ_y} ds + \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_{\text{к}i} M_{\text{к}p}}{GJ_\text{к}},$$

где $\overline{M}_i$, M_p, $\overline{M}_{\text{к}i}$, $M_{\text{к}p}$ – изгибающие и крутящие моменты в основной системе соответственно от действия силового фактора $X_i = 1$ и от внешней нагрузки;

EJ_z, EJ_y, $GJ_\text{к}$ – жесткость стержней соответственно на изгиб относительно нейтральных осей z и y и на кручение;

Расчетные нагрузки. Внешние силы, учитываемые при расчете рамы, действуют в двух плоскостях: в плоскости рамы и перпендикулярно плоскости рамы (рисунок 3.48).

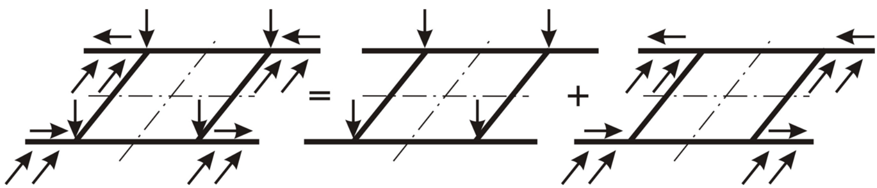


Рисунок 3.48 – Разложение внешней нагрузки по плоскостям

Как известно, при смешанной нагрузке, действующей на плоскую раму, всегда имеется возможность разложить силы по плоскостям и рассмотреть отдельно плоскую и плоскопространственную системы. Внутренние силовые факторы определяются как результат наложения полученных решений.

Напомним, что несимметричную нагрузку, действующую в каждой плоскости, можно разложить на симметричные и кососимметричные составляющие.

Рассмотрим расчет рамы тележки на действие вертикальных нагрузок – кососимметричной $P_\text{б}$ и симметричной $P_\text{ст}$. В этом случае получаем плоскопространственную систему, в которой будут возникать силовые факторы X_4–X_6.

Расчет рамы на вертикальную составляющую от боковых сил. Данная нагрузка – вертикальная составляющая от боковых сил $P_б$ – будет прикладываться к раме в четырех точках (в точках крепления подвесок люльки) перпендикулярно плоскости рамы. Причем дальняя боковая балка будет загружаться двумя сосредоточенными силами $P_б/2$, а передняя – разгружаться такими же двумя силами.

Рассматриваемая нагрузка является кососимметричной (антисимметричной) по отношению к продольной оси симметрии.

Опорами рамы являются пружины буксовых рессорных комплектов, т. е. имеем восемь опорных реакций.

Грузовая эпюра M_p от воздействия внешних сил $P_б$ показана на рисунке 3.49.

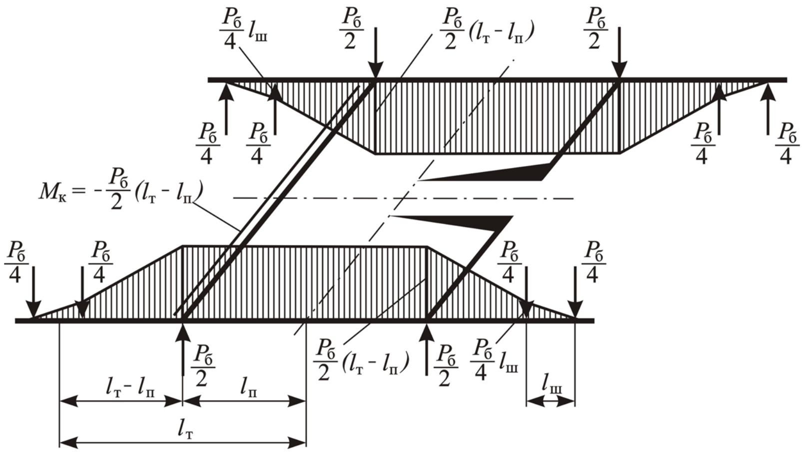


Рисунок 3.49 – Эпюры изгибающих и крутящих моментов от вертикальных нагрузок, обусловленных действием боковых сил

Таким образом, мы имеем симметричную раму, на которую действует внешняя нагрузка, кососимметричная относительной продольной оси. Тогда в сечениях рамы, расположенных на продольной оси симметрии, симметричный силовой фактор X_4 равен нулю, т. е. в сечении будут действовать два силовых фактора: X_5 и X_6.

Следовательно, рассматриваемая система два раза статически неопределима и канонические уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\delta_{55}X_5+\Delta_{5p}=0;\\ \delta_{66}X_6+\Delta_{6p}=0.\end{aligned}\right\}$$

Коэффициенты δ_{ii} и свободные члены Δ_{ip} вычисляем по формулам, учитывающим деформации изгиба в вертикальной плоскости и кручения.

Неизвестные силовые факторы

$$X_5=-\frac{\Delta_{5p}}{\delta_{55}};\quad X_6=-\frac{\Delta_{6p}}{\delta_{66}}.$$

Ординаты окончательной эпюры изгибающих и крутящих моментов

$$M=\overline{M}_5X_5+\overline{M}_6X_6+M_p;\quad M_{\text{к}}=\overline{M}_{\text{к}5}X_5+\overline{M}_{\text{к}6}X_6+M_{\text{к}p},$$

где $\overline{M}_5$, $\overline{M}_6$, M_p, $\overline{M}_{\text{к}5}$, $\overline{M}_{\text{к}6}$, $M_{\text{к}p}$ – эпюры изгибающих и крутящих моментов соответственно от силовых факторов $X_5 = 1$, $X_6 = 1$ и внешней нагрузки.

Значения ординат этих эпюр используются для расчета нормальных, касательных и эквивалентных напряжений в сечениях рамы, т. е. для оценки прочности рамы.

Расчет рамы на вертикальную статическую нагрузку. Вертикальная статическая нагрузка $P_{\text{ст}}$ будет прикладываться к раме в точках крепления подвесок люльки в виде четырех сосредоточенных сил $P_{\text{ст}}/4$. Опорами рамы являются пружины буксовых рессорных комплектов.

Рассматриваемая нагрузка является симметричной относительной продольной и поперечной осей симметрии.

Грузовая эпюра M_p от воздействия внешней нагрузки $P_{\text{ст}}$ приведена на рисунке 3.50.

Учет симметричности конструкции и загружения рамы позволяют упростить расчет. Как известно, в сечениях рамы, расположенных на продольной оси симметрии, кососимметричные силовые факторы X_5 и X_6 равны нулю. Это означает, что рассматриваемая система один раз статически неопределима и каноническое уравнение имеет вид

$$\delta_{44}X_4+\Delta_{4p}=0.$$

Учитываем также, что свободный член Δ_{4p} (результат перемножения эпюр $\overline{M}_4$ и M_p с нулевыми участками по всем стержням) равен нулю. Следовательно, $X_4=0$.

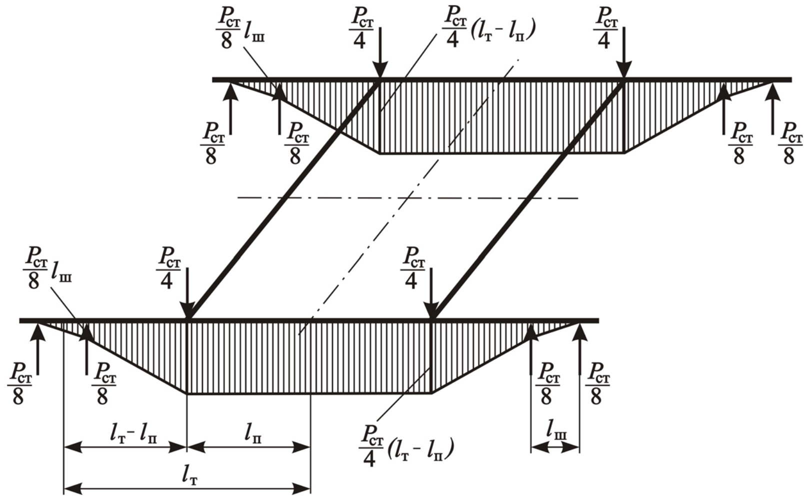


Рисунок 3.50 – Эпюры изгибающих моментов от вертикальной статической нагрузки, окончательной в заданной системе

Отсутствие лишнего неизвестного при загружении рамы нагрузкой $P_{ст}$ указывает на то, что заданная система является статически определимой (внутренние усилия от рассматриваемой нагрузки статически определимы) и ординаты эпюры изгибающих моментов M_p от рассматриваемой нагрузки являются окончательными.

4 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

В методе перемещений за неизвестные принимаются не усилия в лишних связях, как в методе сил, а перемещения Z_i (линейные и угловые) узлов системы, по которым затем определяются внутренние усилия M, N и Q и напряжения σ в произвольном сечении.

Последовательность расчета конструкций методом перемещений приведена в подразд. 3.1.

4.1 Установление степени кинематической неопределимости

Приступая к расчету, прежде всего, необходимо определить число неизвестных – независимых угловых и линейных перемещений узлов рамы. Каждый узел рамы от нагрузки (либо других воздействий) может получить угловое и линейное перемещения.

Общее число неизвестных перемещений (степень кинематической неопределимости)

$$n = n_у + n_л, \tag{4.1}$$

где $n_у$ – число угловых перемещений узлов (степень угловой подвижности узлов);

$n_л$ – число линейных перемещений узлов (степень линейной подвижности узлов).

Рассмотрим определение перемещений $n_у$ и $n_л$ для заданной системы (рисунок 4.1).

Число угловых перемещений узлов $n_у$ равно числу жестких узлов рамы. Опорные узлы при этом не учитываются.

Примеры жестких (комбинированных) узлов показаны на рисунке 4.2.

Заданная система имеет четыре узла: *A*, *D* – опорные; *B*, *C* – жесткие. Тогда

$$n_у = 2.$$

П р и м е ч а н и е – Таким образом, определение $n_{\text{у}}$ сводится к простому подсчету числа жестких и комбинированных (жесткошарнирных) узлов системы.

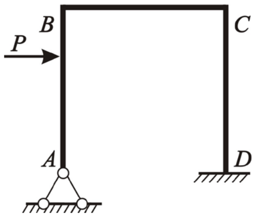


Рисунок 4.1 – Расчетная схема рамы

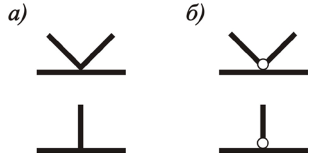


Рисунок 4.2 – Примеры узлов рамы:
а – жестких; *б* – комбинированных

Число линейных перемещений узлов $n_{\text{л}}$ равно числу стержней, которые необходимо ввести в шарнирную схему конструкции для превращения ее в геометрически неизменяемую систему.

П р и м е ч а н и е – Определение $n_{\text{л}}$ для рам базируется на следующих допущениях, принятых в методе перемещений:

- учитываются лишь деформации изгиба (влиянием продольных и поперечных сил на перемещение узлов пренебрегают);
- расстояние между узлами при изгибе прямых стержней не меняются;
- угол между стержнями при деформации не меняется (концы стержней, соединенных жестко в узле, поворачиваются на один и тот же угол);
- углы поворота вследствие малых значений принимаются равными их тангенсам.

Последовательность определения $n_{\text{л}}$:

1) заданную систему заменяют ее шарнирной схемой, поставив шарниры во все узлы, включая опорные (рисунок 4.3, *а*);

2) полученную шарнирную схему превращают в геометрически неизменяемую систему путем постановки дополнительных стержней (рисунок 4.3, *б*).

Поясним, как установить количество вводимых стержней.

Число степеней свободы полученной шарнирной схемы, определяемое по формуле (2.2), равно числу линейных перемещений узлов рамы $n_{\text{л}}$. Для рассматриваемого случая $n_{\text{л}} = 3\text{Д} - 2\text{Ш} - \text{С}_{\text{оп}} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 1$. Для устранения этого перемещения достаточно поставить дополнительный опорный стержень (см. рисунок 4.3, *б*).

Можно также определять $n_{\text{л}}$ по смыслу, не используя формулу (2.2), последовательно закрепляя узлы шарнирной схемы от линейных смещений.

На рисунке 4.3, *а* введены следующие обозначения: штриховая линия – возможные перемещения сторон полученной шарнирной схемы; Z_B, Z_C – линейные перемещения узлов *B* и *C*, причем $Z_B = Z_C = \Delta$.

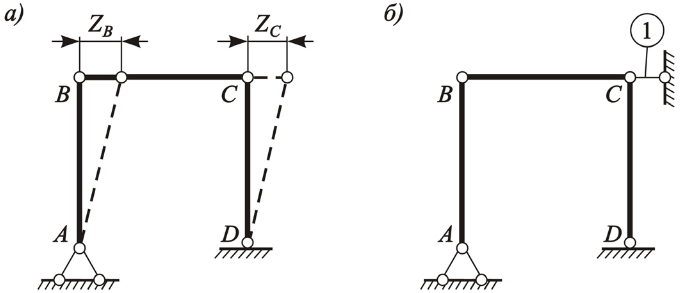


Рисунок 4.3 – К последовательности определения числа линейных перемещений узлов рамы:
а – шарнирная схема; *б* – геометрически неизменяемая система

На рисунке 4.3, *б* цифрой *1* обозначена введенная линейная связь в виде стержня продольного направления.

П р и м е ч а н и е – Шарнирная схема рассматриваемой рамы один раз геометрически изменяема, так как для превращения ее в геометрически неизменяемую систему необходимо ввести один стержень. После включения этого стержня узел *С* будет прикреплен к земле с помощью двух стержней, оси которых не лежат на одной прямой. Следовательно, узел *С* будет геометрически неизменяемо связан с землей.

Поскольку мы ввели одну линейную связь, то $n_л = 1$. Тогда общее число неизвестных перемещений $n = 2 + 1 = 3$. Отсюда следует, что деформированное состояние рамы будет определено тремя перемещения узлов: Z_1, Z_2 и Z_3. Причем Z_1, Z_2 – угловые перемещения узлов *B* и *C*; Z_3 – линейное перемещение стержня *BC* (узлов *B* и *C*).

Деформированное состояние рамы показано на рисунке 4.4. Оно характеризуется тем, что упругие линии деформированных стержней рамы будут изгибаться под действием внешней нагрузки. В узлах *B* и *C* касательные к упругой линии стержня *BC* повернутся соответственно на углы Z_1 и Z_2, которые называются углами поворота узла. Узлы *B* и *C* получат также смещение по горизонтали на Z_3.

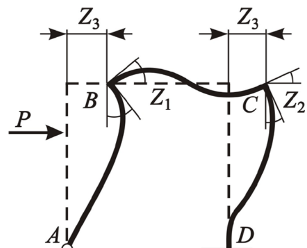


Рисунок 4.4 – Деформированное состояние рамы

Рассмотрим теперь раму, изображенную на рисунке 4.5, *а*. Число ее жестких узлов равно двум, следовательно, $n_у = 2$. Шарнирная схема рамы дважды геометрически изменяема $(n_л = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 4 = 2)$. Поэтому для превращения ее в геометрически неизменяемую необходимо ввести два стержня *1* и *2* (рисунок 4.5, *б*). Общее число неизвестных в рассматриваемой системе $n = 2 + 2 = 4$.

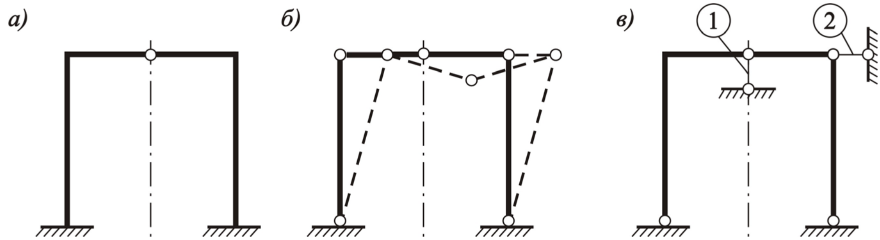


Рисунок 4.5 – К определению числа неизвестных перемещений рамы

4.2 Выбор основной системы

Основная система метода перемещений должна быть кинематически определимой. Чтобы выполнить это требование, узлы рамы закрепляют от поворотов и линейных смещений введением дополнительных связей. Основную систему получают из заданной (см. рисунок 4.1):

1) введением дополнительных (фиктивных) связей, устраняющих угловые и линейные перемещения узлов (рисунок 4.6, *а*);

2) заданием введенным связям соответствующих угловых и линейных перемещений Z_i (рисунок 4.6, *б*).

П р и м е ч а н и е – Общее число введенных в основную систему связей равно числу неизвестных метода перемещений.

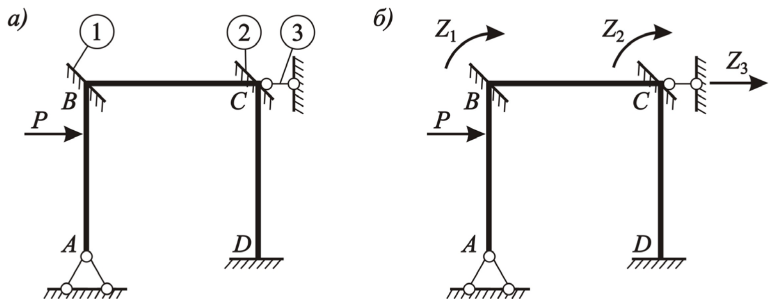


Рисунок 4.6 – К выбору основной системы метода перемещений:
а – рама с введенными дополнительными связями; *б* – основная система

В качестве дополнительных вводятся следующие связи:

• угловая («плавающая заделка») – вводится во все жесткие узлы для устранения их поворотов (угловых перемещений);

• линейная – вводится в необходимые места заданной системы для устранения линейных перемещений узлов (об этом информирует шарнирная система).

В рассматриваемом случае две угловые связи («плавающие заделки») с номерами *1* и *2* вводятся для устранения поворота жестких узлов *B* и *C*, линейная связь (номер *3*) – для устранения линейных перемещений этих же узлов.

П р и м е ч а н и е – Заделка называется «плавающей», поскольку такая связь оказывает препятствие лишь повороту узла, но не лишает его линейной подвижности.

Кинематическая эквивалентность основной и заданной систем достигается тем, что связям одновременно с их введением задают соответствующие угловые и линейные перемещения Z_i.

На рисунке 4.6 через Z_1, Z_2 и Z_3 обозначены заданные перемещения введенных связей (показаны стрелками на основной системе).

П р и м е ч а н и я

1 Заданные перемещения Z_i введенных связей имеют такой же индекс, как и номер фиктивной связи. В рассматриваемом случае Z_1, Z_2 – угловые перемещения узлов *B* и *C,* устраняемые заделками *1* и *2*; Z_3 – линейное перемещение узлов *B* и *C,* устраняемое стержнем *3*.

2 Углы поворота введенных связей (в нашем случае Z_1 и Z_2) условно задаются по часовой стрелке, линейные перемещения (в нашем случае Z_3) – слева направо.

Таким образом, расчету подлежит не заданная система, а преобразованная (основная), которая должна быть эквивалентна ей в статическом и кинематическом отношениях.

Введенные связи расчленяют получаемую основную систему на отдельные простейшие статически неопределимые балки – конечные элементы (рисунок 4.7). Каждая из этих балок хорошо изучена, и результаты их расчета на стандартные воздействия приводятся в справочных данных (таблица 4.1).

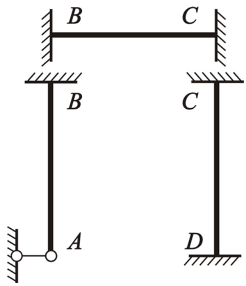


Рисунок 4.7 – Представление основной системы совокупностью статически неопределимых балок

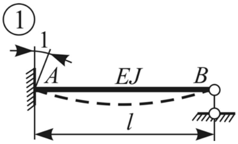
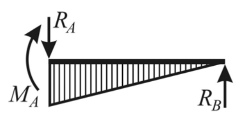
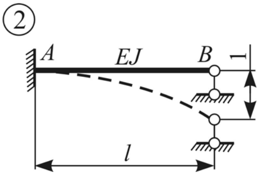
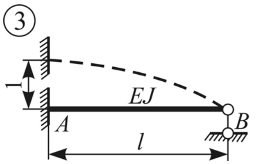
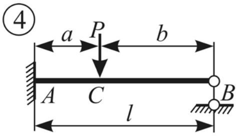
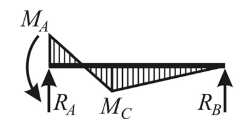
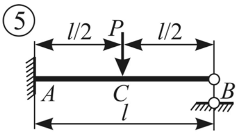
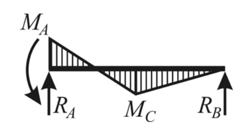
П р и м е ч а н и я

1 Таким образом, основная система метода перемещений представляет собой совокупность не-

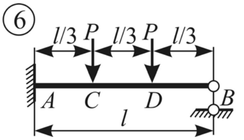
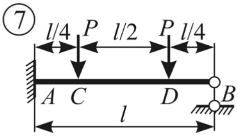
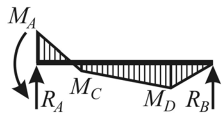
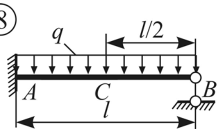
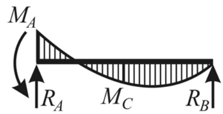
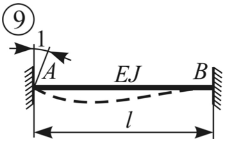
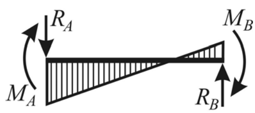
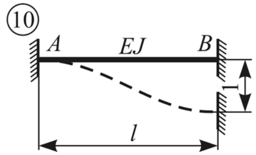
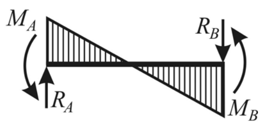
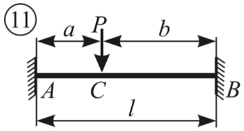
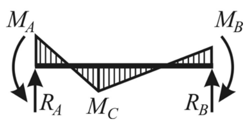
зависимых элементов – однопролетных статически неопределимых балок, изображенных на рисунке 4.7. В рассматриваемом случае балки *BC* и *CD* – балки с защемлениями по концам, *AB* – балка с защемлением и шаровой опорой.

2 В отличие от метода сил основная система метода перемещений является единственной.

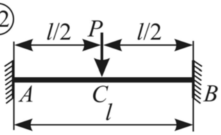
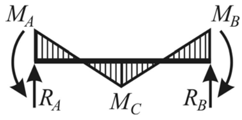
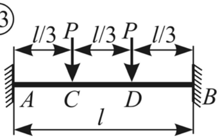
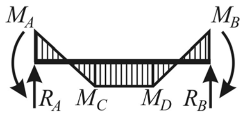
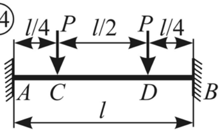
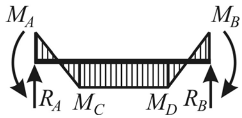
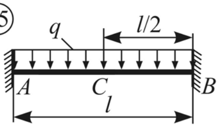
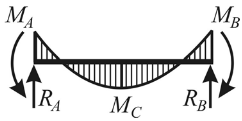
Таблица 4.1 – **Результаты расчета эпюр изгибающих моментов однопролетных статически неопределимых балок**

Схема балки и воздействия на нее	Эпюры изгибающих моментов и реакции	Формулы
		$R_A = R_B = \frac{3EJ}{l^2}$; $M_A = \frac{3EJ}{l}$
		$R_A = R_{\text{B}} = \frac{3EJ}{l^3}$; $M_A = \frac{3EJ}{l^2}$
		
		$R_A = \frac{Pb}{2l^3}\left(3l^2 - b^2\right)$; $R_B = \frac{Pa^2}{2l^3}\left(3l - a\right)$; $M_A = \frac{Pb}{2l^2}\left(l^2 - b^2\right)$; $M_{\text{C}} = \frac{Pa^2 b}{2l^3}\left(3l - a\right)$
		$R_A = \frac{11}{16}P$; $R_B = \frac{5}{16}P$; $M_A = \frac{3}{16}Pl$; $M_C = \frac{5}{32}Pl$

Продолжение таблицы 4.1

Схема балки и воздействия на нее	Эпюры изгибающих моментов и реакции	Формулы
		$R_A=\frac{4}{3}P$; $R_B=\frac{2}{3}P$; $M_A=\frac{1}{3}Pl$; $M_C=\frac{1}{9}Pl$; $M_D=\frac{2}{9}Pl$
		$R_A=\frac{41}{32}P$; $R_B=\frac{23}{32}P$; $M_A=\frac{9}{32}Pl$; $M_C=\frac{5}{128}Pl$; $M_D=\frac{23}{128}Pl$
		$R_A=\frac{5}{8}ql$; $R_B=\frac{3}{8}ql$; $M_A=\frac{1}{8}ql^2$; $M_C=\frac{1}{16}ql^2$
		$R_A=R_B=\frac{6EJ}{l^2}$; $M_A=\frac{4EJ}{l}$; $M_B=\frac{2EJ}{l}$
		$R_A=R_B=\frac{12EJ}{l^3}$; $M_A=M_B=\frac{6EJ}{l^2}$
		$R_A=\frac{Pb^2}{l^3}(l+2a)$; $R_B=\frac{Pa^2}{l^3}(l+2b)$; $M_A=\frac{Pab^2}{l^2}$; $M_B=\frac{Pa^2b}{l^2}$; $M_C=\frac{2Pa^2b^2}{l^3}$

Окончание таблицы 4.1

Схема балки и воздействия на нее	Эпюры изгибающих моментов и реакции	Формулы
12 		$R_A = R_B = \frac{P}{2}$; $M_A = M_B = M_C = \frac{Pl}{8}$
13 		$R_A = R_B = P$; $M_A = M_B = \frac{2}{9}Pl$; $M_C = M_D = \frac{1}{9}Pl$
14 		$R_A = R_B = P$; $M_A = M_B = \frac{3}{16}Pl$; $M_C = M_D = \frac{1}{16}Pl$
15 		$R_A = R_B = \frac{1}{2}ql$; $M_A = M_B = \frac{1}{12}ql^2$; $M_C = \frac{1}{24}ql^2$

4.3 Составление канонических уравнений

Канонические уравнения метода перемещений (уравнения равновесия) характеризуют статическую эквивалентность основной и заданной систем:

$$\left.\begin{aligned} &r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \ldots + r_{1n}Z_n + R_{1p} = 0; \\ &r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \ldots + r_{2n}Z_n + R_{2p} = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \ldots + r_{nn}Z_n + R_{np} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

где r_{ik} – коэффициент канонического уравнения метода перемещений (реакция в i-й связи от смещения k-й связи на величину $Z_k = 1$);

R_{ip} – свободный член канонического уравнения метода перемещений (реакция в i-й связи от действия внешней нагрузки);

Z_i – неизвестное перемещение i-й связи.

П р и м е ч а н и е – Число уравнений равно числу введенных связей, т. е. степени кинематической неопределимости системы.

Каждое из уравнений выражает собой равенство нулю реакции во введенной связи от действия нагрузки и основных неизвестных. В частности, смысл первого уравнения – это отрицание реакции во введенной первой связи, второго уравнения – во второй связи и т. д.

Таким образом, в основе уравнений метода перемещений лежит отрицание реакций (реактивных усилий) по направлениям неизвестных перемещений.

В матричной форме система канонических уравнений имеет вид

$$[R]\{Z\}+\{R_p\}=0,$$

где $[R]$ – матрица реакций (коэффициентов канонических уравнений);

$\{Z\}$ – матрица-столбец неизвестных перемещений узлов;

$\{R_p\}$ – матрица-столбец грузовых реакций (свободных членов канонических уравнений).

4.4 Определение коэффициентов и свободных членов. Решение системы канонических уравнений

Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Для определения реакций r_{ik} и R_{ip} необходимо предварительно построить эпюры моментов в основной системе: единичные $\overline{M}_i$ – от неизвестных единичных перемещений Z_i и грузовую M_p – от внешней нагрузки.

П р и м е ч а н и е – Строятся только эпюры изгибающих моментов, поскольку при расчете рам методом перемещений пренебрегают влиянием продольных и поперечных сил на деформации стержней.

Как уже отмечалось, введенные связи превращают основную систему в совокупность простых статически неопределимых стержней (балок). В нашем случае – стержней *AB*, *BC* и *CD* (см. рисунок 4.7). Причем каждый из них работает самостоятельно.

П р и м е ч а н и е – Самостоятельная работа стержня означает, что если, например, на стержень *AB* действует внешняя нагрузка *P*, то от этой нагрузки будет деформироваться только этот стержень. Другие стержни в этом случае не изгибаются.

Эпюры моментов строятся индивидуально для каждого стержня основной системы по справочным данным, приведенным в таблице 4.1, в зависимости от схемы его закрепления и воздействия на него (действие нагрузки или кинематическое воздействие – поворот или смещение узлов). Тогда эпюры моментов в основной системе для рамы в целом (как от внешней нагрузки, так и от единичных смещений) представляют собой совокупность эпюр, построенных для отдельных стержней.

П р и м е ч а н и е – Единичные эпюры в методе перемещений строятся от кинематического воздействия.

В рассматриваемом случае необходимо построить единичные эпюры $\overline{M}_1$ [от поворота угловой связи (заделки) *1* на угол $Z_1 = 1$], $\overline{M}_2$ [от поворота угловой связи (заделки) *2* на угол $Z_2 = 1$], $\overline{M}_3$ [от линейного смещения связи (стержня) *3* на $Z_3 = 1$] и грузовую эпюру M_p (от внешней нагрузки *P*).

Для определения реакций r_{ik} и R_{ip} можно использовать два способа: статический и перемножения эпюр. В методе перемещений основным является статический способ, что объясняется его простотой. Он основан на использовании уравнений равновесия для определения реакций введенных связей. Как известно, реакции (реактивные усилия) r_{ik} и R_{ip} могут быть двух типов: реактивные моменты (в угловых связях) и реактивные силы (в линейных связях).

Реактивные моменты во введенных заделках определяются путем вырезания узлов из соответствующих эпюр ($\overline{M}_i$ или M_p) и составления уравнения равновесия вида $\Sigma M = 0$.

П р и м е ч а н и е – Вырезаются только узлы, содержащие «плавающие» заделки.

Реактивные усилия во введенных стержнях определяются путем вырезания отдельных частей рамы и составления уравнения равновесия вида $\Sigma X = 0$.

Особенности построения эпюр и определения реакций r_{ik} и R_{ip} рассмотрены в подразд. 4.6.

Проверка правильности вычисления коэффициентов канонических уравнений метода перемещений производится аналогично проверке, выполняемой при расчете методом сил (см. подразд. 3.5), т. е. проверяется выполнение условия

$$\Sigma r = r_{ss}\,, \tag{4.3}$$

где Σr – сумма всех найденных коэффициентов при неизвестных,

$$\Sigma r = r_{11} + r_{12} + ... + r_{nn}\,;$$

r_{ss} – перемещение, получаемое умножением эпюры $\overline{M}_s$ на саму себя.

Проверка правильности вычисления свободных членов канонических уравнений заключается в проверке выполнимости условия

$$\Sigma R = R_{sp}\,, \tag{4.4}$$

где ΣR – сумма всех свободных членов,

$$\Sigma R = R_{1p} + R_{2p} + ... + R_{np};$$

R_{sp} – перемещение, получаемое перемножением эпюр $\overline{M}_s$ и M'_p,

$$R_{sp} = -\sum\int\frac{\overline{M}_s M'_p}{EJ}ds, \tag{4.5}$$

M'_p – эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки в любой основной статически определимой системе метода сил, полученной из заданной системы.

П р и м е ч а н и е – Как следует из формулы (4.5), для определения R_{sp} необходимо перемножить эпюры $\overline{M}_s$ и M'_p и знак результата изменить на обратный.

Решение системы канонических уравнений. Найденные значения коэффициентов и свободных членов (реакций r_{ik} и R_{ip}) подставляют в канонические уравнения. Решают полученную систему уравнений относительно неизвестных Z_i с помощью компьютера, используя стандартную программу решения линейных алгебраических уравнений.

4.5 Построение окончательных эпюр внутренних сил для заданной системы

Ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов M получают по формуле

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + ... + \overline{M}_n Z_n + M_p, \tag{4.6}$$

где $\overline{M}_i$, M_P – соответственно ординаты эпюр изгибающих моментов в рассматриваемом сечении основной системы от $Z_i = 1$ и внешней нагрузки.

Эпюры поперечных и продольных сил строят с помощью приемов, используемых в методе сил (см. подразд. 3.6).

Для контроля правильности построенных эпюр выполняют статическую проверку условий равновесия вырезанных узлов и отдельных частей рамы. Эта проверка является необходимой и достаточной при условии правильности исходных единичных и грузовых эпюр. Кроме того, могут быть использованы и кинематические проверки (универсальная и построчные), применяемые в методе сил. В этом случае необходимо окончательную эпюру моментов умножить на единичные эпюры (или их сумму).

4.6 Пример расчета статически неопределимой системы методом перемещений

Заданная система показана на рисунке 4.8, *а*. Это рама, загруженная сосредоточенной силой P = 10 кН и равномерно распределенной нагрузкой q = 20 кН/м. Длина ригеля l = 1 м, высота стойки h = 2 м.

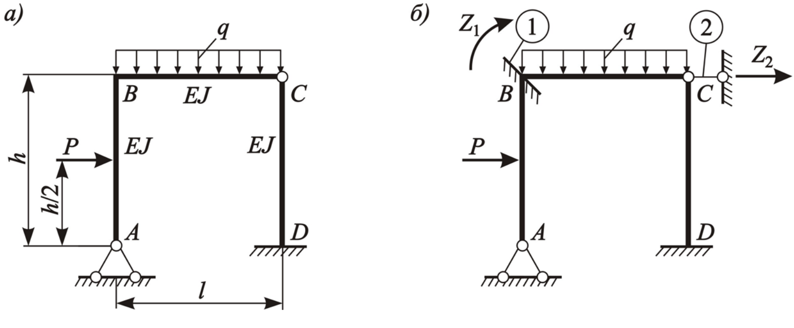


Рисунок 4.8 – Расчетная схема и основная система рамы:
а – расчетная схема; *б* – основная система

Р е ш е н и е. **Установление степени кинематической неопределимости.** Для рассматриваемой рамы, имеющей один жесткий узел (узел B), число угловых перемещений узлов $n_у = 1$.

Шарнирная схема рамы соответствует схеме, изображенной на рисунке 4.3, *а*. Степень ее геометрической изменяемости равна единице и для превращения ее в геометрически неизменяемую систему необходимо ввести один стержень (см. рисунок 4.3, *б*). Тогда число линейных перемещений узлов $n_{\text{л}} = 1$, а общее число неизвестных перемещений узлов $n = 1 + 1 = 2$.

Следовательно, деформированное состояние рамы будет определено двумя перемещения узлов: Z_1 – угловое перемещение узла *B*; Z_2 – линейное перемещение стержня *BC* (узлов *B* и *C*).

Выбор основной системы. Основную систему (рисунок 4.8, *б*) получаем из заданной в результате введения заделки *1* в жесткий узел *B* и стержня *2*, препятствующего линейному смещению шарнирной схемы. Одновременно связям задаем перемещения Z_1 и Z_2.

Составление канонических уравнений. Для двух неизвестных система канонических уравнений будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Для вычисления коэффициентов r_{ik} и свободных членов R_{ip} необходимо построить единичные эпюры $\overline{M}_1$ (от поворота заделки *1* на угол $Z_1 = 1$ по часовой стрелке), $\overline{M}_2$ (от смещения стержня *2* на $Z_2 = 1$ вправо) и грузовую эпюру M_p (от внешней нагрузки *P* и q).

Введенные связи расчленяют основную систему на три отдельные статически неопределимые балки *AB*, *BC* и *CD*, защемленные на одном конце и шарнирно опертые на другом (рисунок 4.9).

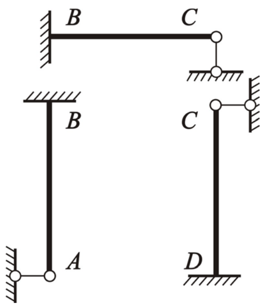


Рисунок 4.9 – Основная система как совокупность статически неопределимых балок

В таблице 4.1 для каждой из этих балок приведены эпюры моментов от единичных перемещений опор и от действующей нагрузки. Используя эти справочные данные, строим эпюры моментов для всей рамы, как совокупность эпюр, построенных для отдельных стержней. Эпюры моментов $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ и M_p показаны на рисунке 4.10, *а–в*.

Построив эпюры, приступаем к определению реакций r_{ik} и R_{ip}.

Вначале *вычисляем реактивные моменты во введенной заделке* путем вырезания узла *B*. В вырезанном узле показываем реакцию в заделке; моменты, в сечениях стержней, примыкающих к узлу; внешний сосредоточенный момент (если он есть).

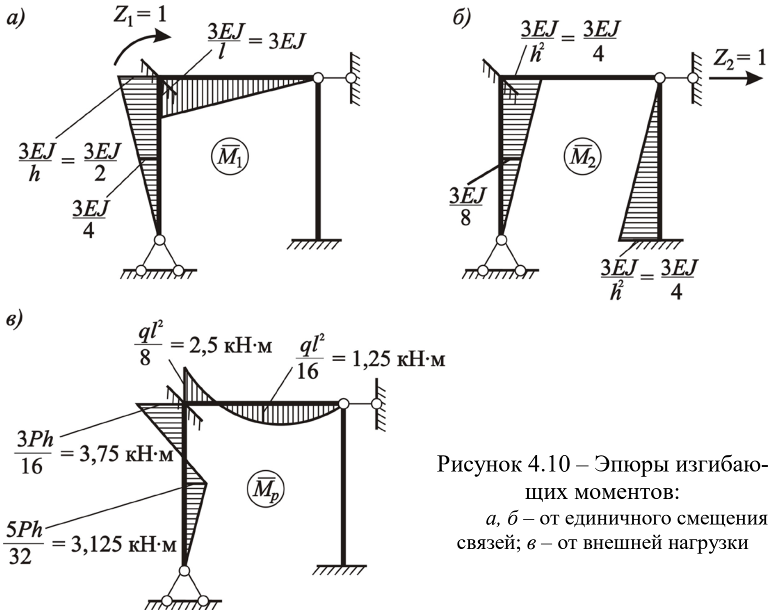


Рисунок 4.10 – Эпюры изгибающих моментов:
а, б – от единичного смещения связей; *в* – от внешней нагрузки

П р и м е ч а н и я

1 Направление определяемой реакции (r_{ik} или R_{ip}) в *i*-й связи показываем по направлению смещения Z_i этой связи.

2 Реакциям в вырезанных узлах присваиваем следующие индексы: первый – номер связи, в которой определяется реакция, второй – индекс эпюры $\overline{M}_i$ или M_p.

3 Моменты в сечениях стержней, примыкающих к узлу (показаны стрелками на схеме), направляем в соответствии с расположением растянутых волокон.

Узел В единичной эпюры $\overline{M}_1$ показан на рисунке 4.11, *а*. В заделке узла показываем реакцию r_{11} – реакцию связи номер *1* (заделки) от единичного смещения (поворота) этой же связи. Направление реакции совпадает с принятым направлением Z_1, т. е. по часовой стрелке.

Растянутые волокна стержней обозначаем пунктирными линиями. Стрелками показываем направления моментов, примыкающих узлу. Значения моментов: по стержню AB – $3EJ/2$, по стержню BC – $3EJ$.

Составляем уравнение равновесия узла:

$$\Sigma M_B = r_{11} - 3EJ - \frac{3EJ}{2} = 0 .$$

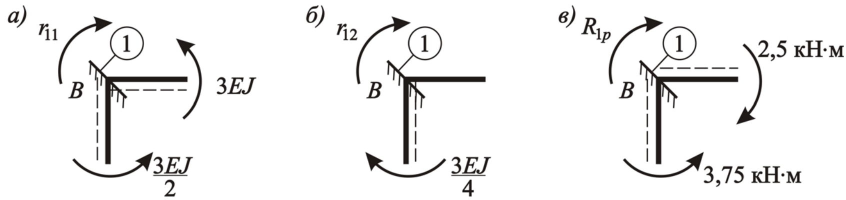


Рисунок 4.11 – К определению реактивных моментов во введенной заделке. Узел *B* эпюр: *а* – $\overline{M}_1$; *б* – $\overline{M}_2$; *в* – M_p

П р и м е ч а н и е – Реактивное усилие будем считать положительным, если направление его действия совпадает с принятым направлением поворота или линейного смещения узла.

Отсюда

$$r_{11} = 3EJ + \frac{3EJ}{2} = 4{,}5EJ.$$

Узел B единичной эпюры $\overline{M}_2$ показан на рисунке 4.11, *б*. В заделке узла возникает реакция r_{12} – реакция связи номер *1* (заделки) от единичного линейного смещения связи номер *2* (стержня). Имеет место также момент по стержню *AB*, значение которого $3EJ/4$.

Уравнение равновесия узла

$$\Sigma M_B = r_{12} + \frac{3EJ}{4} = 0.$$

Отсюда

$$r_{12} = -\frac{3EJ}{4} = -0{,}75EJ.$$

П р и м е ч а н и е – Полученный для реакции r_{12} знак «минус» показывает, что реакция имеет направление, противоположное Z_1.

Узел B грузовой эпюры M_p приведен на рисунке 4.11, *в*. В заделке узла возникает реакция R_{1p} – реакция связи номер *1* (заделки) от внешней нагрузки. Показываем также моменты по стержням *AB* и *BC*, значение которых $3{,}75\ \text{кН} \cdot \text{м}$ и $2{,}5\ \text{кН} \cdot \text{м}$ соответственно.

Уравнение равновесия узла

$$\Sigma M_B = R_{1p} + 2{,}5 - 3{,}75 = 0.$$

Отсюда

$$R_{1p} = 3{,}75 - 2{,}5 = 1{,}25 \text{ кН}.$$

Теперь рассмотрим определение реактивных сил.

Реактивные силы во введенном стержне определяем путем вырезания части рамы и составления уравнений равновесия. Вырезаем часть рамы с помощью сечения *I–I*, проходящего по стойкам у опорных узлов *A* и *B* и введенной стержневой связи.

Отсеченная часть рамы эпюры $\overline{M}_1$ показана на рисунке 4.12, *а*. Во введенной стержневой связи показываем реакцию r_{21} – реакцию связи номер *2* от единичного смещения связи номер *1*. Направление реакции совпадает с принятым направлением Z_2.

В местах разрезов прикладываем поперечные силы, определяемые из справочных данных через значения реакций в узлах *A* и *D* стержней *AB* и *CD* соответственно. Значение этой силы для узла *A* – $Q_A = 3EJ/h^2 = 3EJ/4$. В узле *D* поперечная сила отсутствует.

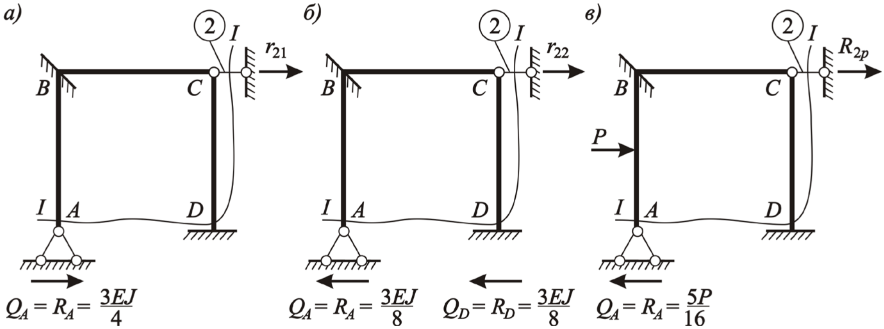


Рисунок 4.12 – К определению реактивных сил во введенном стержне:
а – отсеченная часть рамы эпюры $\overline{M}_1$; *б* – отсеченная часть рамы эпюры $\overline{M}_2$; *в* – отсеченная часть рамы эпюры M_p

Составляем уравнение равновесия, проектируя все силы, приложенные к отсеченной части, на горизонтальную ось *X*:

$$\Sigma X = r_{21} + \frac{3EJ}{4} = 0.$$

Отсюда

$$r_{21} = -\frac{3EJ}{4} = -0{,}75EJ.$$

Заметим, что $r_{21} = r_{12}$. Это условие свидетельствует о правильности вычисления реакций.

Отсеченная часть рамы эпюры $\overline{M}_2$ показана на рисунке 4.12, *б*. В стержневой связи показываем реакцию r_{22} – реакцию связи номер *2* от единичного смещения этой же связи. В местах разрезов около узлов *A* и *D* прикладываем поперечные силы, значения которых $Q_A = Q_D = 3EJ/h^3 = 3EJ/8$.

Составляем уравнение равновесия:

$$\Sigma X = -\frac{3EJ}{8} - \frac{3EJ}{8} + r_{22} = 0.$$

Отсюда

$$r_{22} = \frac{3EJ}{8} + \frac{3EJ}{8} = \frac{6EJ}{8} = 0{,}75EJ..$$

Отсеченная часть рамы эпюры M_p приведена на рисунке 4.12, *в*. Показываем реакцию R_{2p} – реакцию связи номер *2* от внешней нагрузки – и в месте разреза около узла *A* поперечную силу $Q_A = 5P/16 = 5 \cdot 10/16 = 3{,}125$ кН.

Составляем уравнение равновесия:

$$\Sigma X = 10 - 3{,}125 + R_{2p} = 0\,.$$

Отсюда $R_{2p} = -6{,}875$ кН.

Для контроля правильности определения коэффициентов и свободных членов строим суммарную единичную эпюру $\overline{M}_s$ (рисунок 4.13, *а*) и эпюру изгибающих моментов от внешней нагрузки M'_p в статически определимой системе метода сил, полученной из заданной системы (рисунок 4.13, *б*).

Перемножаем суммарную единичную эпюру $\overline{M}_s$ саму на себя (r_{ss}) и на грузовую M'_p (R_{sp}):

$$r_{ss} = \frac{2}{6EJ} \cdot 2\frac{3EJ}{4} \cdot \frac{3EJ}{4} + \frac{1}{6EJ} \cdot 2 \cdot 3EJ \cdot 3EJ + \frac{2}{6EJ} \cdot 2\frac{3EJ}{4} \cdot \frac{3EJ}{4} =$$

$$= 2\frac{9EJ}{24} + 3EJ = \frac{9EJ}{12} + 3EJ = \frac{45EJ}{12} = 3{,}75EJ;$$

$$R_{sp} = -\left[\frac{0{,}5 \cdot 2}{6EJ}\left(-2 \cdot 5\frac{3EJ}{8}\right) + \frac{0{,}5 \cdot 2}{6EJ}\left(-2\frac{3EJ}{8} \cdot 5 + 0 + 0 - \frac{3EJ}{4} \cdot 5\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6EJ}\left(0 + 4 \cdot 2{,}5\frac{3EJ}{2} + 0\right) + \frac{2}{6EJ} \cdot 2\frac{3EJ}{4} \cdot 10\right] =$$

$$= -\left(-\frac{5}{8} - \frac{10}{8} + \frac{5}{2} + 5\right) = -(-1{,}875 + 7{,}5) = -5{,}625.$$

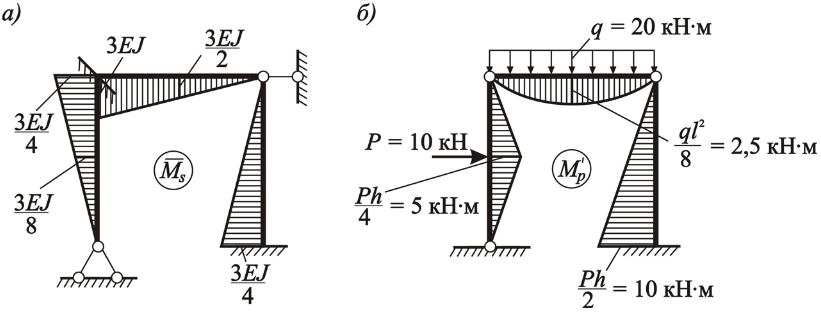


Рисунок 4.13 – К контролю правильности определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода перемещений:
а – суммарная единичная эпюра; *б* – эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки метода сил

Определяем

$$\Sigma r = r_{11} + r_{22} + 2r_{12} = 4{,}5EJ + 0{,}75EJ - 2\cdot 0{,}75EJ = 3{,}75EJ;$$

$$\Sigma R = R_{1p} + R_{2p} = 1{,}25 - 6{,}875 = -5{,}625.$$

Поскольку $\Sigma r = r_{ss}$ и $\Sigma R = R_{sp}$, коэффициенты и свободные члены определены правильно.

Решение канонических уравнений. Система канонических уравнений после подстановки найденных значений коэффициентов и свободных членов имеет вид

$$4{,}5EJ\cdot Z_1 - 0{,}75EJ\cdot Z_2 + 1{,}25 = 0;$$
$$-0{,}75EJ\cdot Z_1 + 0{,}75EJ\cdot Z_2 - 6{,}875 = 0.$$

Решая канонические уравнения, находим значения неизвестных:

$$Z_1 = 1{,}5\frac{1}{EJ};\quad Z_2 = 10{,}6667\frac{1}{EJ}.$$

Для проверки правильности вычисления неизвестных подставляем найденные значения Z_1 и Z_2 в канонические уравнения:

$$4{,}5EJ\frac{1{,}5}{EJ} - 0{,}75EJ\frac{10{,}6667}{EJ} + 1{,}25 = 0;$$

$$-0,75EJ\frac{1,5}{EJ}+0,75EJ\frac{10,6667}{EJ}-6,875=0.$$

Поскольку оба уравнения обратились в тождества, значения неизвестных определены верно.

Построение окончательной эпюры изгибающих моментов для заданной системы. Ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов M вычисляем по формуле (4.6). Для рассматриваемого случая

$$M=\overline{M}_1 Z_1+\overline{M}_2 Z_2+M_p.$$

Вычисление ординат окончательной эпюры M удобно выполнять в табличной форме (таблица 4.2). При этом необходимо учитывать знаки перемещений Z_1, Z_2 и моментов $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, M_p.

Таблица 4.2 – **Вычисление ординат окончательной эпюры *M***

В килоньютонах на метр

Стер-жень	Сечение	$\overline{M}_1 Z_1$	$\overline{M}_2 Z_2$	M_p	M
AB	Возле узла *A*	0	0	0	0
	Посередине	–1,125	4	3,125	6
	Возле узла *B*	–2,25	8	–3,75	2
BC	Возле узла *B*	4,5	0	–2,5	2
	Посередине	2,25	0	1,25	3,5
	Возле узла *C*	0	0	0	0
CD	Возле узла *C*	0	0	0	0
	Возле узла *D*	0	8	0	8

Отметим, что поскольку на ригель *BC* действует равномерно распределенная нагрузка, эпюра *M* будет изменяться на нем по закону квадратной параболы. В этом случае может иметь место экстремальное значение изгибающего момента $M_{\max}$. Для выяснения этого рассмотрим ригель *BC*, вырезанный из статически неопределимой рамы, на который действует равномерно распределенная нагрузка q = 20 кН/м и опорные моменты $M_B=2$ $\text{кН}\cdot\text{м}$ и $M_C=0$ (см. таблицу 4.2). Расчетная схема этого элемента показана на рисунке 4.14, *а*.

Запишем аналитическое выражение изменения изгибающего момента в зависимости от текущей абсциссы *x*:

$$M(x)=R_B x+M_B-\frac{qx^2}{2}, \tag{4.7}$$

где R_B – опорная реакция в узле B.

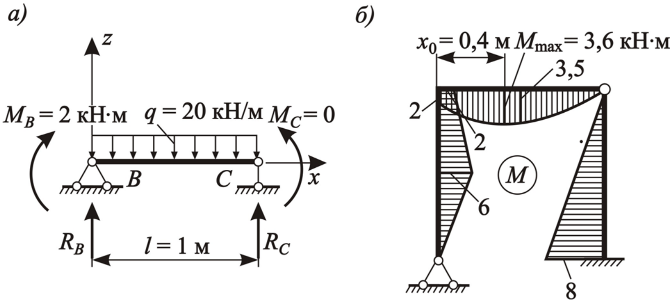


Рисунок 4.14 – К построению окончательной эпюры M для заданной системы:
а – расчетная схема ригеля; *б* – окончательная эпюра изгибающих моментов

Для нахождения положения сечения, в котором может возникнуть экстремальное значение M, приравняем нулю первую производную изгибающего момента:

$$\frac{dM(x)}{dx} = R_B - qx_0 = 0,$$

где x_0 – абсцисса сечения, в котором возникает экстремальное значение момента.

Отсюда

$$x_0 = R_B / q.$$

Определим величину опорной реакции R_B из уравнения равновесия $\Sigma M_C = 0$:

$$R_B l + M_B - \frac{ql^2}{2} + M_C = 0; \quad R_B = \frac{ql^2}{2} + \frac{M_C - M_B}{l} = \frac{20 \cdot 1^2}{2} + \frac{0-2}{1} = 8 \text{ кН}.$$

Тогда $x_0 = 8/20 = 0,4$ м.

Подставив найденное значение $x_0 = 0,4$ м в выражение (4.7), получим величину экстремального значения момента:

$$M_{\max} = 8 \cdot 0,4 + 2 - \frac{20 \cdot 0,4^2}{2} = 3,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По вычисленным значениям ординат строим окончательную эпюру M для заданной системы (рисунок 4.14, *б*). На эпюре положительные значения ординат отложены внутрь контура рамы.

Для контроля правильности построения окончательной эпюры M выполняем статическую и деформационную проверки. Для статической проверки вырезаем незакрепленный жесткий узел B из эпюры M, прикладываем действующие в нем моменты (рисунок 4.15, *а*) и составляем уравнение равновесия

$$\Sigma M_B = 2{,}5 - 2{,}5 = 0.$$

Условие равновесия выполняется, что свидетельствует о правильности построения эпюры M.

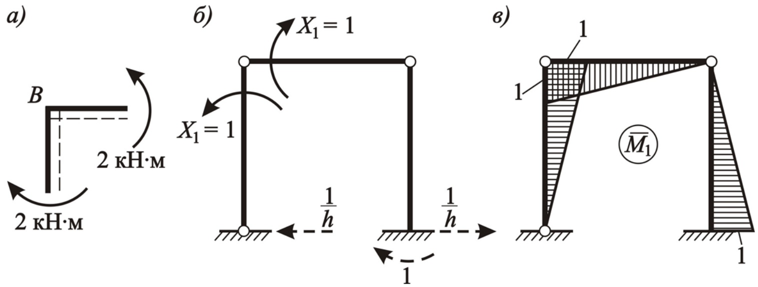


Рисунок 4.15 – Проверка правильности построения окончательной эпюры M:
а – статическая; *б, в* – деформационная

Однако условия равновесия жестких незакрепленных узлов системы иногда удовлетворяются и при неправильно построенных в основной системе единичных и грузовых эпюрах, а также неправильном определении неизвестных перемещений. Для полной уверенности правильности построения эпюры M выполним деформационную проверку, сущность которой – проверка отсутствия перемещений в сечениях заданной системы, в которых они заведомо отсутствуют (по направлениям отброшенных связей).

Проверим отсутствие свободного поворота смежных сечений стержней, примыкающих к узлу B, относительно друг друга. Для выполнения проверки выбираем основную систему метода сил, загружаем ее единичными моментами $X_1 = 1$ (рисунок 4.15, *б*) и строим единичную эпюру $\overline{M}_1$ (рисунок 4.15, *в*). Перемножив эпюры $\overline{M}_1$ и M, получим

$$\Delta_B = \frac{1}{6EJ} \cdot 2 \cdot 0{,}5 \cdot 6 + \frac{1}{6EJ}(2 \cdot 0{,}5 \cdot 6 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 0{,}5 \cdot 2 + 1 \cdot 6) +$$

$$+ \frac{1}{6EJ}(1 \cdot 2 + 4 \cdot 0{,}5 \cdot 3{,}5 + 0) - \frac{2}{6EJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8 = \frac{32}{6EJ} - \frac{32}{6EJ} = 0.$$

Поворот смежных сечений отсутствует (перемещение по направлению отброшенной связи отсутствует), следовательно, эпюра M построена верно.

Построение эпюры поперечных сил для заданной системы. Эпюру Q для заданной системы строим по окончательной эпюре изгибающих моментов M (см. рисунок 4.14, *б*), используя для определения ее ординат формулы (3.21), (3.22) и учитывая знаки моментов (см. таблицу 4.2).

Рассматриваем каждый элемент рамы в отдельности, представляя его в виде статически определимой однопролетной балки (см. рисунок 3.18).

Стойка AB. К стойке приложены сосредоточенная сила $P = 10$ кН и узловые моменты $M_к = M_B = 2$ кН·м и $M_н = M_A = 0$.

Поперечная сила, вызванная действием только внешней нагрузки, в сечениях:

- возле узла A: $Q^o_{AB} = P/2 = 10/2 = 5$ кН;
- возле узла B: $Q^o_{BA} = P/2 - P = -P/2 = -10/2 = -5$ кН.

Примечание – Первый нижний индекс у Q обозначает узел, у которого определяется значение поперечной силы, а оба индекса обозначают узлы рассматриваемого элемента.

Эпюра M для стойки ограничена двумя линиями. В сечении, где приложена сосредоточенная сила, она имеет перелом, а на эпюре Q будет скачок на величину и в направлении приложенной силы.

Определимся со знаками эпюры Q. В нижней части стойки эпюра Q будет положительной, поскольку совмещение оси стойки с линией, ограничивающей эпюру M, происходит по часовой стрелке. В верхней части такое совмещение выполняется против часовой стрелки. Следовательно, в верхней части эпюра Q будет отрицательной. Тогда поперечная сила в сечениях:

- возле узла A стойки AB – $Q_{AB} = 5 + (2 - 0)/2 = 6$ кН;
- возле узла B стойки AB – $Q_{BA} = -5 + (2 - 0)/2 = -4$ кН.

Ригель BC. К ригелю приложены равномерно распределенная нагрузка $q = 20$ кН/м и узловые моменты $M_к = M_C = 0$ кН·м и $M_н = M_B = 2$ кН·м.

Поперечная сила, вызванная действием приложенной нагрузки, в сечениях:

- возле узла B – $Q^o_{BC} = ql/2 = (20 \cdot 1)/2 = 10$ кН;
- возле узла C – $Q^o_{CB} = ql/2 - ql = -ql/2 = -(20 \cdot 1)/2 = -10$ кН.

Эпюра M для ригеля ограничена квадратичной параболой, соответственно эпюра Q должна быть ограниченная наклонной линией. В левой части ригеля эпюра Q будет положительной (совмещение оси ригеля с касательной к эпюре M происходит по часовой стрелке). Соответственно в правой части эпюра Q будет отрицательной. Тогда поперечная сила в сечениях:

- возле узла B ригеля BC – $Q_{BC} = 10 + (0 - 2)/1 = 10 - 2 = 8$ кН;
- возле узла C ригеля BC – $Q_{CB} = -10 + (0 - 2)/1 = -10 - 2 = -12$ кН.

Стойка CD. К стойке приложены узловые моменты $M_к = M_D = 8$ кН·м и $M_н = M_C = 0$.

Эпюра *M* для стойки ограничена прямой линией, так как нагрузка к стойке не приложена. Следовательно, поперечная сила по всей длине стойки постоянная. Она будет положительной, поскольку совмещение оси стойки с линией, ограничивающей эпюру *M*, происходит по часовой стрелке. Поперечная сила в сечениях стойки *CD* – $Q_{CD} = Q_{DC} = (8 - 0)/2 = 4$ кН.

Окончательная эпюра поперечных сил *Q* для заданной системы приведена на рисунке 4.16, *а*. На эпюре положительные значения ординат отложены наружу контура, отрицательные – внутрь.

Проверка эпюры Q. Проведем разрез по нижней части стоек и составим уравнение проекций всех сил, действующих на верхнюю отсеченную часть, на горизонтальную ось (рисунок 4.16, *б*):

$$\Sigma X = 10 - 6 - 4 = 0.$$

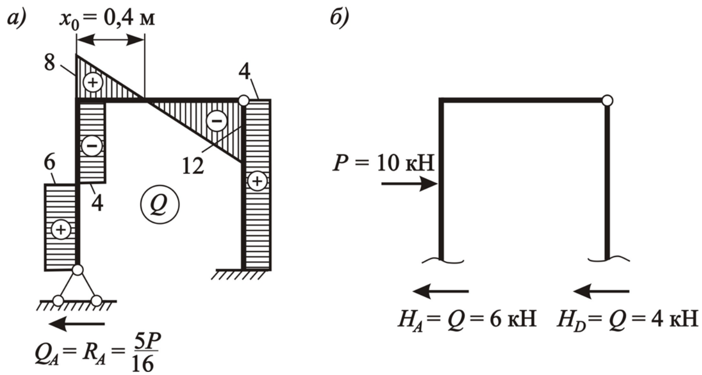


Рисунок 4.16 – К построению эпюры *Q* для заданной системы:
а – окончательная эпюра *Q*; *б* – к проверке правильности построения эпюры *Q*

В качестве дополнительной проверки можно использовать следующее правило: если поперечная сила, изменяясь по линейному закону, проходит через нулевое значение (ригель *BC*), то в соответствующем сечении момент имеет экстремальное значение. Абсцисса такого сечения найдена при построении окончательной эпюры *M* и составляет $x_0 = 0,4$ м.

Определим положения сечения с нулевым значением *Q* из подобия треугольников:

$$\frac{8}{x_0} = \frac{12}{l - x_0}; \quad 8(l - x_0) = 12x_0; \quad x_0 = \frac{8l}{20} = \frac{8 \cdot 1}{20} = 0,4 \text{ м.}$$

Рассчитанное значение абсциссы сечения с нулевым значением Q совпадает со значением, полученным для сечения, в котором возникает экстремальное значение момента $M_{\max}$.

Построение эпюры продольных сил для заданной системы. Построение эпюры продольных сил N производим по эпюре поперечных сил Q путем последовательного вырезания отдельных узлов рамы и рассмотрения их равновесия.

Узел B. К узлу B, вырезанному из эпюры Q, прикладываем действующие в нем поперечные силы Q_{BA} и Q_{BC} с учетом их знака и искомые продольные силы N_{BA} и N_{BC} (рисунок 4.17, *а*).

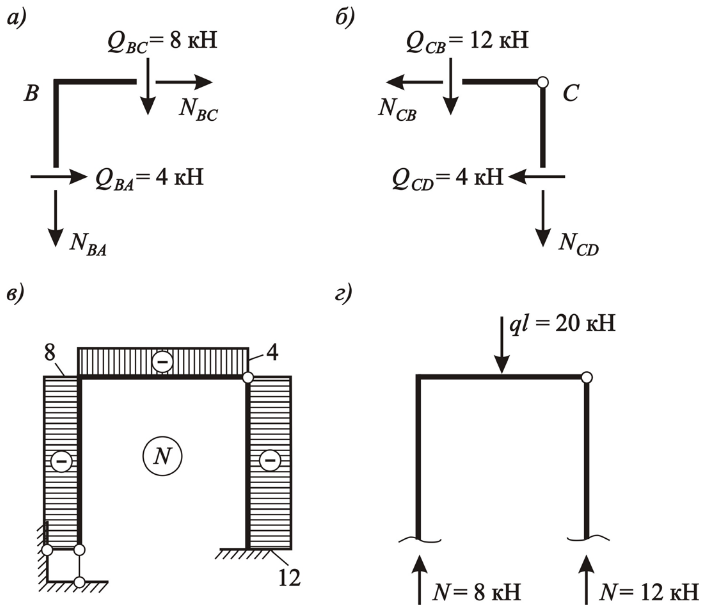


Рисунок 4.17 – К построению эпюры N по эпюре Q:
а – узел B эпюры Q; *б* – узел C эпюры Q; *в* – эпюра продольных сил N; *г* – к проверке правильности построения эпюры эпюра N

Направление поперечных сил принимаем согласно правилу: положительная поперечная сила должна вращать узел по ходу часовой стрелки, отрицательная – против хода часовой стрелки.

Продольные силы на схеме показываем растягивающими, так как их знак получится автоматически из уравнения равновесия:

$$\Sigma X = Q_{BA} + N_{BC} = 0;\quad N_{BC} = -Q_{BA} = -4\ \text{кН (сжатие)};$$

$\Sigma Y = -N_{BA} - Q_{BC} = 0;\ \ N_{BA} = -Q_{BC} = -8$ кН (сжатие).

Узел C (рисунок 4.17, *б*):

$\Sigma X = -Q_{CD} - N_{CB} = 0;\ \ N_{CB} = -Q_{CD} = -4$ кН (сжатие);

$\Sigma Y = -N_{CD} - Q_{CB} = 0;\ \ N_{CD} = -Q_{CB} = -12$ кН (сжатие).

По вычисленным значениям ординат строим эпюру N (рисунок 4.17, *в*).

Проверка эпюры N. Проведем разрез по нижней части стоек и составим уравнение проекций всех сил, действующих на отсеченную часть, на вертикальную ось (рисунок 4.17, *г*):

$$\Sigma Y = 8 - 20 \cdot 1 + 12 = 0.$$

Построенные эпюры M, Q и N используются затем для определения расчетных напряжений и оценки прочности конструкции.

4.7 Сравнительный анализ методов сил и перемещений

В подразделе 4.6 приведен расчет несимметричной рамы методом перемещений. Для проведения сравнительного анализа методов перемещений и сил выполним расчет этой же рамы методом сил.

Заданная система приведена на рисунке 4.8, *а*. Это простая несимметричная статически неопределимая рама.

Р е ш е н и е. **Установление степени статической неопределимости.** Для определения степени статической неопределимости n воспользуемся формулой (3.3). Для рассматриваемой рамы К = 1, Ш = 2 и $n = 3 \cdot 1 - 2 = 1$. Следовательно, заданная рама один раз статически неопределима, т. е. имеет одну лишнюю связь.

Выбор основной системы. Для получения основной системы необходимо в заданной системе удалить одну лишнюю связь. Наиболее просто это реализовать введением шарнира в узел B. Введенный шарнир, как известно, устраняет одну связь (угловую). Получаем основную систему в виде рамы с двумя шарнирами. Взамен удаленной связи вводим ее реакцию – групповой силовой фактор X_1 (рисунок 4.18, *а*).

Возможны и другие варианты основной системы для рассматриваемой рамы (рисунки 4.18, *б, в*). При этом получаемые основные системы должны быть статически определимыми и геометрически неизменяемыми. Наиболее простым и удобным для расчета является первый вариант основной системы.

Составление канонического уравнения. Для одного неизвестного каноническое уравнение будет иметь вид

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

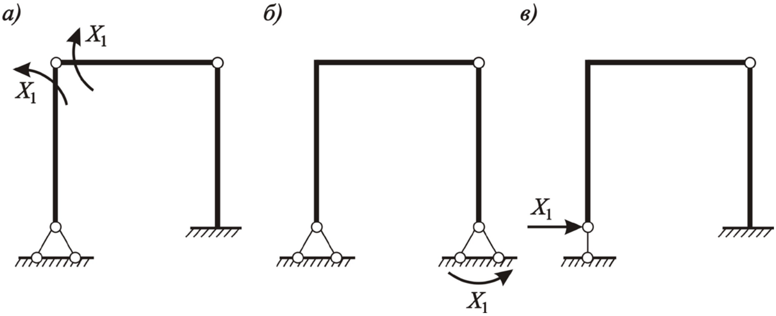


Рисунок 4.18 – Варианты основной системы

Определение коэффициента и свободного члена канонического уравнения. Для вычисления коэффициента δ_{11} и свободного члена Δ_{1p} строим эпюры изгибающих моментов: единичную $\overline{M}_1$ (рисунок 4.19, *а*) – от $X_1 = 1$ и грузовую M_p (рисунок 4.19, *б*) – от внешней нагрузки P и q.

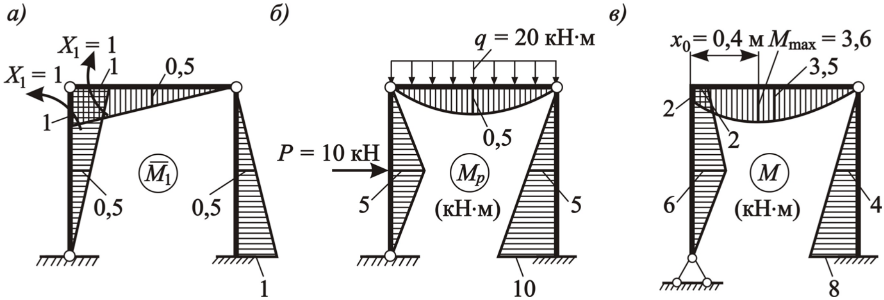


Рисунок 4.19 – Эпюры моментов:
а – единичная от $X_1 = 1$; *б* – грузовая; *в* – окончательная для заданной системы

Полученные эпюры перемножаем по формулам, приведенным в подразд. 3.5. Для удобства вычисляем перемещения, увеличенные в EJ раз:

$$EJ\delta_{11} = \frac{2}{6}\cdot 2\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 1\cdot 1 + \frac{2}{6}\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = \frac{10}{6};$$

$$EJ\Delta_{1p} = \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 0{,}5\cdot 5 + \frac{1}{6}\left(2\cdot 0{,}5\cdot 5 + 0 + 0 + 1\cdot 5\right) + \frac{1}{6}\left(0 + 4\cdot 0{,}5\cdot 2{,}5 + 0\right) -$$

$$-\frac{2}{6}\cdot 2\cdot 1\cdot 10 = -\frac{20}{6}.$$

Для контроля правильности определения коэффициентов и свободных членов необходимо иметь суммарную единичную эпюру $\overline{M}_s$. В нашем случае $\overline{M}_s = \overline{M}_1$. Тогда, результаты перемножения суммарной эпюры саму на себя (δ_{ss}) и на грузовую (Δ_{sp})

$$EJ\delta_{ss} = EJ\delta_{11} = \frac{10}{6};\; EJ\Delta_{sp} = EJ\Delta_{1p} = -\frac{20}{6}.$$

Определяем

$$EJ\Sigma\delta = EJ\delta_{11} = \frac{10}{6};\; EJ\Sigma\Delta = EJ\Delta_{1p} = -\frac{20}{6}.$$

Поскольку $EJ\Sigma\delta = EJ\delta_{ss}$ и $EJ\Sigma\Delta = EJ\Delta_{sp}$, коэффициент и свободный член определены правильно.

Решение канонического уравнения. Подставляя полученные значения перемещений в каноническое уравнение и сокращая на $EJ/6$, получим

$$10X_1 - 20 = 0.$$

Тогда

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} - \frac{(-20)}{10} = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Построение окончательных эпюр моментов, поперечных и продольных сил для заданной системы. Ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов M вычисляем по формуле (3.18). Для рассматриваемого случая

$$M = \overline{M}_1 X_1 + M_p.$$

Вычисление ординат окончательной эпюры M выполним в табличной форме (таблица 4.3). При этом необходимо учитывать знаки силового фактора X_1 и моментов $\overline{M}_1$, M_p.

Таблица 4.3 – **Вычисление ординат окончательной эпюры *M***

В килоньютонах на метр

Стер-жень	Сечение	$\overline{M}_1 X_1$	M_p	M
AB	Возле узла *A*	0	0	0
	Посередине	1	5	6
	Возле узла *B*	2	0	2
BC	Возле узла *B*	2	0	2
	Посередине	1	2,5	3,5
	Возле узла *C*	0	0	0

Окончание таблицы 4.3

В килоньютонах на метр

Стер-жень	Сечение	$\overline{M}_1 X_1$	M_p	M
CD	Возле узла *C*	0	0	0
	Посередине	–1	5	4
	Возле узла *D*	–2	10	8

Окончательная эпюра изгибающих моментов показана на рисунке 4.19, *в*. Обращаем внимание на то, что она соответствует окончательной эпюре изгибающих моментов, полученной при расчете заданной системы методом перемещений (см. рисунок 4.14, *б*).

Далее расчет продолжаем аналогично расчету рассматриваемой системы методом перемещений в подразд. 4.6:

- находим экстремальное значение момента от равномерно распределенной нагрузки, действующей на ригель: $M_{\max} = 3{,}6$ кН · м и находится на расстоянии $x_0 = 0{,}4$ м от узла *B*;
- производим статическую и кинематическую проверки правильности построения окончательной эпюры *M*, проверяя условия равновесия жесткого узла *B* (см. рисунок 4.15, *а*) и перемножая окончательную *M* и суммарную единичную $\overline{M}_s$ эпюры;
- по окончательной эпюре моментов строим эпюру поперечных сил для заданной системы (см. рисунок 4.16, *а*);
- по эпюре поперечных сил строим эпюру продольных сил для заданной системы (см. рисунок 4.17, *в*).

В ы в о д. Расчеты рамы, приведенной на рисунке 4.8, *а*, методами перемещений и сил показали, что для нее более эффективно применение метода сил. В этом случае мы имеем систему с одним лишним неизвестным, что значительно упрощает расчет.

Анализ методов сил и перемещений. Методы сил и перемещений имеют свои области применения и свои особенности. Во многом они противоположны друг другу.

В качестве *лишних неизвестных* в методе сил принимаются усилия в лишних связях, в методе перемещений – перемещения.

В методе сил *основная система* выбирается устранением лишних связей, в методе перемещений – введением лишних связей. В первом случае переход от заданной системы к основной системе связан со снижением ее статической неопределимости, во втором – с повышением ее. В методе сил основная система является статически определимой, в методе перемещений –

статически неопределимой. В отличие от метода сил основная система метода перемещений является единственной.

Для *определения неизвестных* в методе сил составляются уравнения перемещений, в методе перемещений – уравнения равновесия.

Эквивалентность заданной и основной систем обеспечивается тем, что в основе уравнений метода сил лежит отрицание перемещений в основной системе по направлениям неизвестных, в основе уравнений метода перемещений – отрицание реакций во введенных связях.

5 ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

5.1 Некоторые начальные понятия и определения

Теория упругости – раздел строительной механики, изучающей напряженно-деформированное состояние (НДС) тел произвольной формы от произвольных внешних воздействий. Основные положения и уравнения теории упругости используются при расчете вагонных конструкций, выполненных из пластин и оболочек.

В теории упругости для исследования НДС в точке тела применяется дифференциальный метод.

Примечание – Как известно, в сопромате в качестве метода исследования используется интегральный метод – метод сечений.

Сущность дифференциального метода. Тело, находящееся в равновесии под действием приложенных сил, мысленно рассекается множеством координатных плоскостей на большое число бесконечно малых элементарных объемов (рисунок 5.1). Затем рассматривается НДС каждого элементарного объема с размерами dx, dy и dz (*модель напряженной точки*).

При этом, как следует из рисунка 5.1, будут получены элементарные объемы двух типов: прямоугольные параллелепипеды, составляющие основной объем тела, и тетраэдры, наклонные грани которых являются площадками внешней поверхности тела.

Таким образом, для исследования НДС в рассматриваемой точке тела необходимо в ее окрестности выделить элементарный объем в виде бесконечно малого параллелепипеда или тетраэдра.

5.1.1 Напряжения в точке тела. Тензор напряжений

Рассмотрим произвольное тело, нагруженное системой сил.

Под действием приложенных сил в теле появляются напряжения. Пусть нас интересуют напряжения в окрестности точки A внутри тела (см. рисунок 5.1).

В окрестности рассматриваемой точки шестью сечениями выделим элементарный объем – прямоугольный параллелепипед – с точкой A, расположенной внутри.

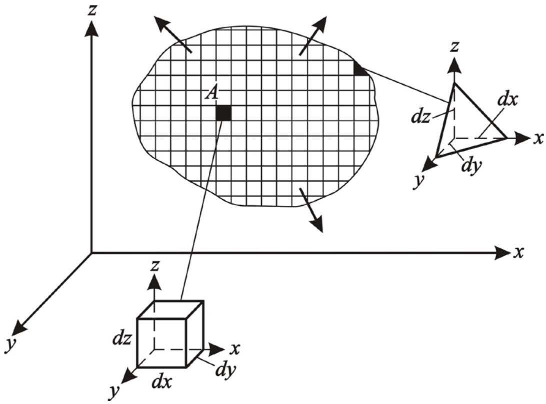


Рисунок 5.1 – Представление тела в виде совокупности элементарных объемов

При уменьшении размеров параллелепипеда, он будет стягиваться в эту точку. В пределе все грани параллелепипеда будут проходить через точку *A* и напряжения в соответствующих секущих плоскостях могут рассматриваться как напряжения в исследуемой точке.

На гранях выделенного параллелепипеда (рисунок 5.2) действуют *полные напряжения* – интенсивности внутренних сил, которые обычно раскладывают по направлению координатных осей на *нормальную и касательные составляющие (нормальное* σ *и касательные* τ *напряжения)*.

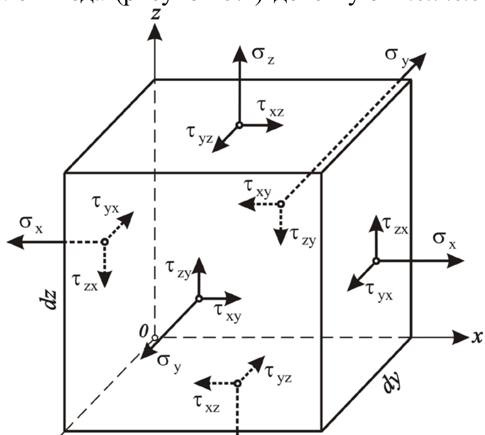


Рисунок 5.2 – Обозначение компонентов напряжений по граням бесконечно малого параллелепипеда, вырезанного возле заданной точки

Нормальное напряжение перпендикулярно грани и име-ет только один индекс, указывающий направление напряжения. Например, σ_x – нормальное напряжение, направленное параллельно оси *x*.

Касательные напряжения лежат в плоскости грани и имеют два индекса: первый указывает направление напряжения, а второй – нормаль к площадке, на которой действует напряжение. Например, τ_{xy} – касательное напряжение, направленное параллельно оси x, на площадке с нормалью y.

Таким образом, на каждой грани имеем три составляющие полного напряжения, параллельные координатным осям. Например, σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} – составляющие полного напряжения, действующие на площадке (грани), перпендикулярной оси z.

Нормальное напряжение положительное, если оно растягивающее.

Касательное напряжение положительное, если направление τ (первый индекс) и направление внешней нормали к этой площадке (направление σ) либо оба совпадают с положительным направлением параллельных им осей, либо не совпадают.

Учитывая изложенное, нормальные и касательные напряжения, показанные на рисунке 5.2, имеют положительное значение.

П р и м е ч а н и е – Вследствие закона парности касательных напряжений, на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к общему ребру, равны и направлены обе либо к ребру, либо от ребра, то есть $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$.

Правило 1. Напряженное состояние в точке считается известным, если заданы напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через эту точку. Эти площадки, параллельные координатным плоскостям, называют *исходными (основными)*.

Это означает, что, зная напряжения по трем взаимно перпендикулярным площадкам, проведенным возле рассматриваемой точки, без затруднений можно вычислить напряжения по любой площадке, произвольно наклоненной к основным взаимно перпендикулярным площадкам.

Совокупность напряжений в точке удобно записывать в виде симметричной квадратной матрицы – *тензора напряжений*

$$T_{\text{н}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix},$$

где σ_x, σ_y, …, τ_{xz} – составляющие полных напряжений в трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через данную точку.

Примечание – В первой строке расположены составляющий напряжений, имеющие направление, параллельное оси x, во второй – параллельное оси y, в третьей – параллельное оси z. Кроме того, в первом столбце сгруппированы напряжения, действующие на площадке, нормаль к которой параллельна оси x, во втором – оси y, в третьем – оси z.

Правило 2. Напряженное состояние в точке полностью определено, если задан тензор напряжений для этой точки.

5.1.2 Перемещения и деформации точки тела. Тензор деформаций

Под действием внешних сил тело деформируется. Для определения деформации необходимо сравнить положение точек тела до и после приложения нагрузки.

При действии нагрузки точка A, координаты которой до деформации x, y, z, переместится в новое положение – в точку A' с координатами x', y', z' (рисунок 5.3). Отрезок AA' представляет собой перемещение точки A.

Проекции перемещения точки A на координатные оси x, y, z обозначают соответственно через u, v, w. Они равны разности соответствующих координат точек A и A': $u = x' - x$, $v = y' - y$, $w = z' - z$.

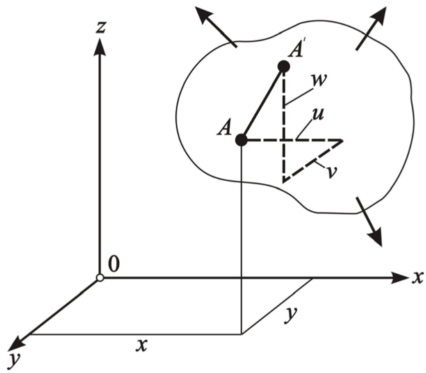


Рисунок 5.3 – Обозначение компонентов перемещения точки A при деформации

Разница в величинах перемещений в различных точках тела вызывает его деформацию. В результате деформации происходит *изменение формы и размеров тела*, а следовательно, и элементарных объемов, составляющих тело.

Деформацию любого элементарного объема, выделенного в окрестности рассматриваемой точки, *можно представить в виде шести отдельных простейших деформаций*:

- трех линейных относительных деформаций ребер – ε_x, ε_y, ε_z;
- трех угловых относительных деформаций – γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}.

Первые три показывают изменение объема, последние три – изменение формы (рисунок 5.4).

Мерой линейной деформации служит удлинение или укорочение ребер параллелепипеда. Например, абсолютное удлинение ребра относительно оси x будет $\Delta_x = \varepsilon_x dx$ (см. рисунок 5.4, *а*). Отсюда $\varepsilon_x = \Delta_x / dx$.

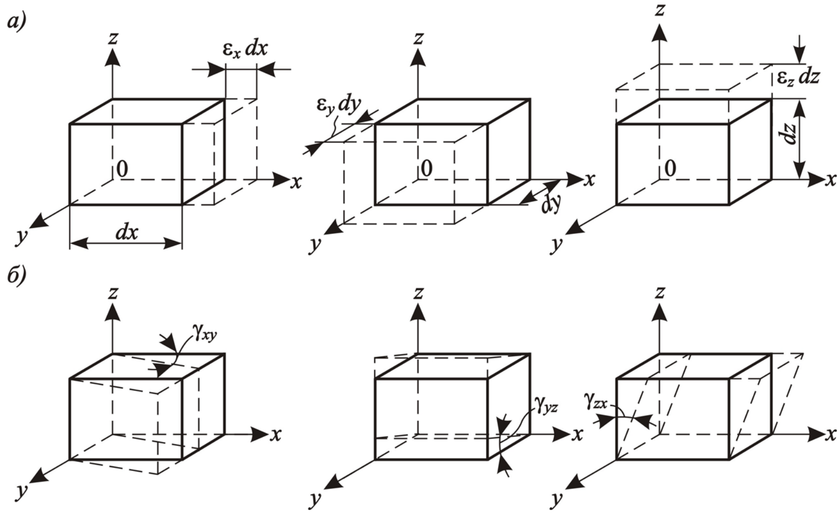


Рисунок 5.4 – Обозначение компонентов деформаций:
а – линейных; *б* – угловых

Индекс у ε обозначает ось, в направлении которой происходит удлинение или укорочение ребра.

Линейная относительная деформация считается положительной при удлинении ребра.

Мерой деформации сдвига служит угол сдвига, характеризующий изменение первоначально прямого угла между гранями параллелепипеда. Индексы у угла сдвига γ обозначают плоскость, на которую он проектируется. Например, γ_{xz} – это угол сдвига в плоскости $x0z$ (см. рисунок 5.4, *б*).

Угол сдвига считается положительным при уменьшении угла между положительными направлениями осей.

Совокупность деформаций в точке удобно записывать в виде *тензора деформаций*

$$T_{\text{н}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0{,}5\gamma_{xy} & 0{,}5\gamma_{xz} \\ 0{,}5\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0{,}5\gamma_{yz} \\ 0{,}5\gamma_{zx} & 0{,}5\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix},$$

где ε_x, ε_y, …, γ_{xz} – составляющие (компоненты) полной деформации в точке тела.

Правило 3. Деформированное состояние в точке вполне определено, если задан тензор деформаций для этой точки.

5.1.3 Основные уравнения теории упругости

Нагрузки, действующие на тело, могут задаваться как внешними поверхностными, так и внутренними объемными силами. Под воздействием нагрузок каждый элементарный объем, выделенный в окрестности рассматриваемой точки, переместится, в нем возникнут деформации и напряжения. Поэтому для оценки НДС в точке тела нас будут интересовать 15 составляющих:

- три компоненты смещения – u, v, w;
- шесть компонентов деформации – ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx};
- шесть компонентов напряжения – σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}.

Для решения такой общей задачи мы должны располагать 15 уравнениями теории упругости, которые подразделяют на *три группы уравнений*: *статические, геометрические, физические.* Первая группа выражает условия равновесия выделенного объема и устанавливают связь между объемными силами и напряжениями в произвольной точке, вторая связывает деформации элемента тела с перемещениями его точек, третья выражает зависимость между напряжениями и деформациями элемента.

5.2 Статические уравнения теории упругости

Статические уравнения теории упругости – это дифференциальные уравнения равновесия элемента, выделенного внутри тела.

Рассмотрим элементарный параллелепипед, выделенный внутри тела у точки *A* с координатами x, y, z. Грани параллелепипеда параллельны координатным плоскостям и имеют размеры dx, dy, dz (рисунок 5.5). На гранях будут действовать напряжения, которые раскладываются по направлению координатных осей.

Установим зависимость между составляющими напряжений, действующих на гранях параллелепипеда. На каждой грани параллелепипеда будем иметь три составляющие полного напряжения, параллельные координатным осям. А всего на шести гранях – восемнадцать.

Отметим, что составляющие напряжений на параллельных гранях параллелепипеда, которые отстоят друг от друга на бесконечно малом расстоянии, будут отличаться на бесконечно малую величину. В частности, если на грани $dydz$ параллелепипеда, совпадающей с координатной плоскостью $y0z$, действует нормальное напряжение σ_x, то на грани, находящейся на расстоянии dx от исходной, действует нормальное напряжение $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$. Оно отличается от начального σ_x на бесконечно малую величину $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ за счет изменения координаты *x*. Величина $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ представляет собой дифференциальное приращение σ_x – прирост функции σ_x на длине dx.

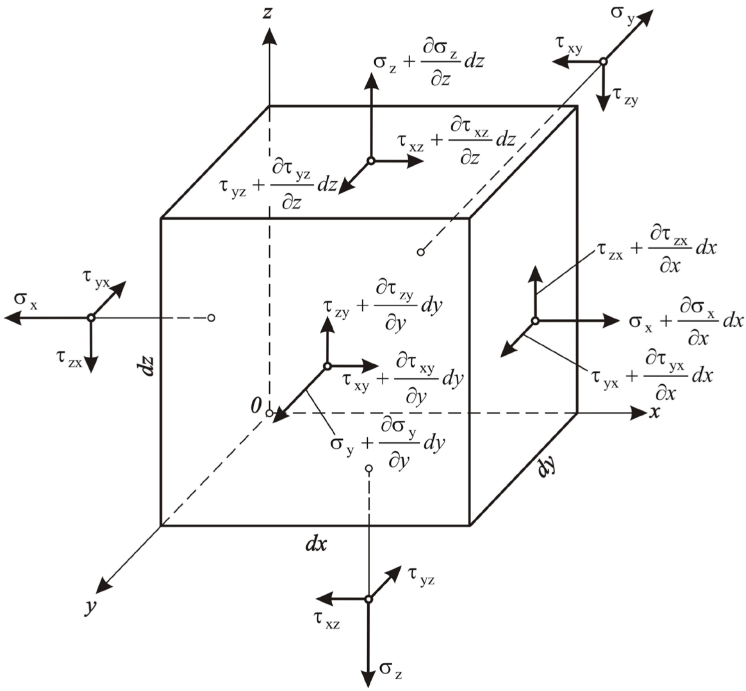


Рисунок 5.5 – Обозначение компонентов напряжений по всем граням элементарного параллелепипеда

Аналогично связаны напряжения и на остальных парах параллельных граней параллелепипеда.

Таким образом, из восемнадцати составляющих напряжения неизвестными являются только девять: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{yx}, τ_{zy}, τ_{xz}.

Это напряжения на *исходных гранях* – трех взаимно перпендикулярных гранях (невидимых наблюдателю), совпадающих с координатными плоскостями.

Кроме напряжений на параллелепипед будут действовать *объемные силы*. *Составляющие объемных сил*, действующие в объеме рассматриваемого параллелепипеда, будут

$$Xdxdydz,\ Ydxdydz,\ Zdxdydz,$$

где X, Y, Z – проекции на координатные оси объемных сил, отнесенных к единице объема тела;

$dxdydz$ – объем параллелепипеда.

Для рассматриваемого параллелепипеда должно удовлетворяться шесть условий равновесия: три уравнения проекций сил на координатные оси и три уравнения моментов относительно осей:

$$\left.\begin{aligned} \sum X = 0,\ \sum M_x = 0, \\ \sum Y = 0,\ \sum M_y = 0, \\ \sum Z = 0,\ \sum M_z = 0. \end{aligned}\right\}$$

Рассмотрим уравнение проекций сил на ось x ($\sum X = 0$).

Примечание – Уравнения равновесия составляются для сил, а не для напряжений. Поэтому каждое из напряжений, параллельных оси x, следует умножить на площадь грани, на которой оно действует.

Проектируя силы на ось x, получим

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dxdz - \tau_{xy} dxdz +$$

$$+\left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz\right) dxdy - \tau_{xz} dxdy + Xdxdydz = 0\,.$$

Аналогично составляются уравнения равновесия $\sum Y = 0$ и $\sum Z = 0$.

После приведения подобных членов и деления на элементарный объем $dV = dxdydz$ получим три дифференциальных уравнения равновесия, которые называются *уравнениями Навье*:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$

Уравнения равновесия элементарного параллелепипеда являются основными уравнениями теории упругости и характеризуют связь между объемными силами и внутренними силами (напряжениями).

Уравнения (5.1) в матричной форме будут иметь вид

$$[A]\cdot\{\sigma\}+\{G\}=0\,,$$

где $[A]$ – матрица операторов дифференцирования, $(\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z)$;

$\{\sigma\}$ – матрица-столбец составляющих напряжений,

$$\{\sigma\}^{\mathrm{T}}=[\sigma_x,\sigma_y,\ldots,\tau_{zx}];$$

$\{G\}$ – матрица-столбец составляющих интенсивности объемной нагрузки,

$$\{G\}^{\mathrm{T}}=[X,Y,Z].$$

Перейдем к составлению уравнений моментов относительно координатных осей.

Уравнение моментов $\sum M_x=0$ позволяет получить соотношение $\tau_{zx}=\tau_{xz}$. Составляя уравнения $\sum M_y=0$ и $\sum M_z=0$, получим еще два аналогичных соотношения.

Таким образом, из уравнений моментов вытекают три равенства, характеризующие *закон парности касательных напряжений*:

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy}&=\tau_{yx};\\ \tau_{yz}&=\tau_{zy};\\ \tau_{zx}&=\tau_{xz}.\end{aligned}\right\}\qquad(5.2)$$

Вследствие закона парности касательных напряжений вместо девяти неизвестных составляющих напряжений, характеризующих напряженное состояние в точке тела, остается только шесть: σ_x, σ_y, σ_z, $\tau_{xy}=\tau_{yx}$, $\tau_{yz}=\tau_{zy}$, $\tau_{zx}=\tau_{xz}$.

Три дифференциальных уравнения (5.1) содержат шесть неизвестных функций напряжений, которые не могут быть определены путем решения лишь уравнений равновесия. Поэтому требуется дополнить эти уравнения другими (уравнениями деформации и физическими уравнениями). В этом смысле можно говорить, что задача определения напряжений в деформируемом теле является статически неопределимой.

Дифференциальные уравнения (5.1) справедливы для любой точки внутри тела, но не для точек на внешней границе тела.

5.3 Геометрические уравнения теории упругости

Рассмотрим упругое тело, находящееся в равновесии и закрепленное так, что перемещение всего тела как жесткого целого невозможно. Следовательно, будем изучать только те перемещения, которые возникают за счет деформаций самого тела.

От внешних воздействий точки тела *переместятся* (займут новое положение в объеме тела), а параллелепипеды, выделенные в окрестности этих точек, *продеформируются*, т. е. изменится длина их ребер и изменятся прямые углы между гранями. Поэтому функции перемещений и деформаций описывают единую картину деформированного состояния тела, а значит, между ними должны существовать вполне определенные зависимости. Такие зависимости называют геометрическими уравнениями.

Итак, *геометрические уравнения устанавливают связь между перемещениями произвольной точки тела и деформациями параллелепипеда, выделенного в окрестности этой точки*.

Деформацию параллелепипеда значительно проще изучать по деформациям его проекций на координатные плоскости (рисунок 5.6, *а*).

Рассмотрим проекцию параллелепипеда на плоскость $x0y$ (рисунок 5.6, *б*).

В процессе деформации проекция ($abkc$) переместилась ($a_1b_1k_1c_1$) и после удлинения ребер на величину (b_1b_2) и (c_1c_2) и изменения углов между гранями приняла окончательное положение ($a_1b_3k_3c_3$).

Полное удлинение (c_1c_2) отрезка dx оси x равно

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}dx\,, \tag{5.3}$$

где $\partial u(x,y,z)/\partial x$ – приращение функции перемещений $u(x,y,z)$ на «единицу» длины, а произведение (5.3) – приращение функции $u(x,y,z)$ на длине dx .

Относительное удлинение вдоль оси x определяется как отношение полного удлинения (c_1c_2) к начальной длине dx :

$$\varepsilon_x = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}\,. \tag{5.4}$$

Относительное удлинение вдоль оси y (по аналогии)

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,. \tag{5.5}$$

Относительный сдвиг в плоскости $x0y$ (изменение угла между ребрами) равен сумме углов α и β , т. е.

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta\,. \tag{5.6}$$

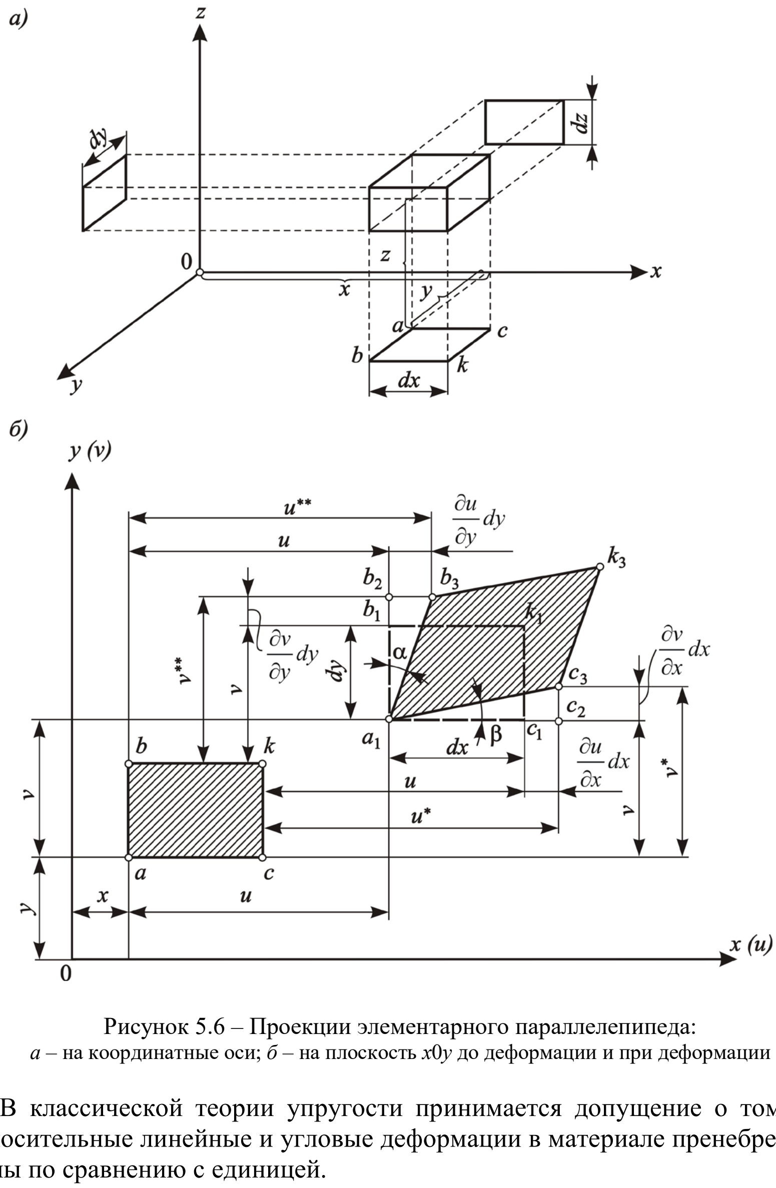


Рисунок 5.6 – Проекции элементарного параллелепипеда:
а – на координатные оси; *б* – на плоскость *x*0*y* до деформации и при деформации

В классической теории упругости принимается допущение о том, что относительные линейные и угловые деформации в материале пренебрежимо малы по сравнению с единицей.

Принятое допущение о малых деформациях дает возможность заменить значения углов α и β значениями их тангенсов:

$$\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha, \quad \beta \approx \mathrm{tg}\beta. \qquad (5.7)$$

Тогда выражение (5.6) с учетом принятых допущений (5.7) примет вид

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}dy}{\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}dy + dy\right)} + \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}dx}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}dx + dx\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}dy}{dy\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} + 1\right)} + \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}dx}{dx\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + 1\right)}.$$

С учетом выражений (5.4) и (5.5) запишем

$$\gamma_{xy} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{(\varepsilon_y + 1)} + \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}}{(\varepsilon_x + 1)}. \tag{5.8}$$

В соответствии с принятым ранее допущением пренебрегаем величинами ε_x и ε_y по сравнению с единицей. Тогда

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5.9}$$

Рассматривая аналогично деформацию проекций в плоскостях $x0z$ и $y0z$, будем иметь окончательно *геометрические уравнения (уравнения Коши)*

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};\\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y};\\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

П р и м е ч а н и е – Обратим внимание на то, что если мы знаем первые уравнения для ε и γ (в нашем случае ε_x и γ_{xy}), то остальные уравнения могут быть получены из первых по **правилу круговой подстановки обозначений (индексов и компонентов перемещений)**, в соответствии с которым производится замена букв в последовательности, приведенной на рисунке 5.7. При круговой подстановке (перестановки) индекс *x* замещается индексом *y*, индекс *y* – индексом *z,* а последний – индексом *x* (рисунок 5.7, *а*). Соответственно, компонента *u* заменяется на *v*, *v* – на *w*, *w* – на *u* (рисунок 5.7, *б*).

Итак, *линейная деформация* ε *по любому направлению равна частной производной от функции перемещения в этом направлении по переменной в том же направлении.*

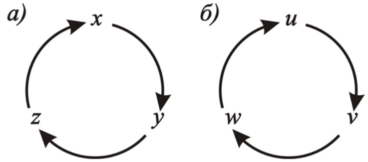


Рисунок 5.7 – К правилу круговой подстановки:
а – индексов; *б* – компонентов перемещений

Угловая деформация γ (относительный сдвиг) *в любой плоскости равна сумме частных производных от перемещений в этой плоскости по переменным в перпендикулярных направлениях.*

В матричной форме уравнения (5.10) будут иметь вид

$$[\varepsilon]=[A]^{\mathrm{T}}\{u\},$$

где $[A]^{\mathrm{T}}$ – транспонированная матрица $[A]$;

$\{u\}$ – матрица-столбец составляющих перемещений,

$$\{u\}^{\mathrm{T}}=[u,v,w].$$

5.4 Физические уравнения теории упругости

Статические (5.1) и геометрические (5.10) уравнения (составляя в совокупности девять уравнений) содержат в общей сложности 15 неизвестных функций: σ_x, σ_y, σ_z, $\tau_{xy}=\tau_{yx}$, $\tau_{yz}=\tau_{zy}$, $\tau_{zx}=\tau_{xz}$, ε_x, ε_y, ε_z, $\gamma_{xy}=\gamma_{yx}$, $\gamma_{yz}=\gamma_{zy}$, $\gamma_{zx}=\gamma_{xz}$, u, v, w. Для их определения необходимо добавить еще шесть уравнений, но при условии, что эти новые уравнения не будут содержать новых неизвестных. Для выполнения этого условия единственный путь – установить соотношения между искомыми функциями статических уравнений (напряжений) и искомыми функциями геометрических уравнений (относительные деформации). В соответствии с принятой в теории упругости моделью материала и записываются эти соотношения (*физические уравнения*).

П р и м е ч а н и е – В теории упругости материал считается идеально упругим, линейно деформируемым и изотропным.

Предварительно заметим, что в изотропном теле влияние касательных (сдвиговых) напряжений τ на линейные деформации ε мало́, и этим влиянием можно пренебречь. Поэтому физические уравнения разделяются на две простейшие системы, известные под названием обобщенного закона Гука.

Физические уравнения:

- в прямой форме –

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right];\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right];\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right];\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G};
\end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

- в обратной форме –

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\Theta;\ \tau_{xy} = G\tau_{xy};\\
\sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\Theta;\ \tau_{yz} = G\tau_{yz};\\
\sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\Theta;\ \tau_{zx} = G\tau_{zx},
\end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

где $\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$;

λ – константа материала, называемая параметром Ляме,

$$\lambda = \frac{2\mu G}{1 - 2\mu} = \frac{\mu E}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)};$$

E – модуль упругости при растяжении (модуль Юнга);

μ – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона);

G – модуль упругости при сдвиге,

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

В матричной форме физические уравнения будут иметь вид:

- в прямой форме –

$$\{\varepsilon\} = [E] \cdot \{\sigma\};$$

- в обратной форме –

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\}$$

где $[E]$ – матрица упругой податливости материала;

$[D]$ – матрица жесткости материала.

5.5 Дополнительные уравнения теории упругости

К дополнитеьным уравнениям теории упругости относятся уравнения, выражающие граничные условия на поверхности тела, условия совместности деформаций.

5.5.1 Дополнительные статические уравнения

Дополнительные статические уравнения описывают условия на поверхности тела.

Напряжения по объему тела меняются и при достижении поверхности должны находиться в равновесии с внешними силами.

Установим связь между внутренними и внешними силами на поверхности тела. Для этого выделим в окрестности произвольной точки, лежащей на поверхности тела, бесконечно малый элемент – т е т р а э д р (см. рисунок 5.1) и рассмотрим его равновесие.

Три грани тетраэдра совпадают с координатными плоскостями, а наклонная грань совпадает с касательной плоскостью к поверхности тела в рассматриваемой точке (рисунок 5.8, *а*). Ориентацию наклонной грани определяет внешняя нормаль ν (рисунок 5.8, *б*). Направляющие косинусы (косинусы углов), образованные этой нормалью с осями x, y, z,

$$\cos(x,\nu) = \frac{F_x}{F_\nu} = l\ ;\ \cos(y,\nu) = \frac{F_y}{F_\nu} = m\ ;\ \cos(z,\nu) = \frac{F_z}{F_\nu} = n\,,$$

где F_x, F_y, F_z – площади граней тетраэдра, нормальных к осям x, y, z (рисунок 5.8, *в*);

F_ν – площадь наклонной грани тетраэдра.

Тогда

$$F_x = F_\nu l;\ \ F_y = F_\nu m;\ \ F_z = F_\nu n.$$

На рассматриваемый тетраэдр действуют следующие *нагрузки*:

- на гранях, совпадающих с координатными плоскостями, – составляющие напряжений σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx};
- на наклонной грани – внешняя поверхностная сила P_ν, проекции которой на координатные оси P_x, P_y, P_z.

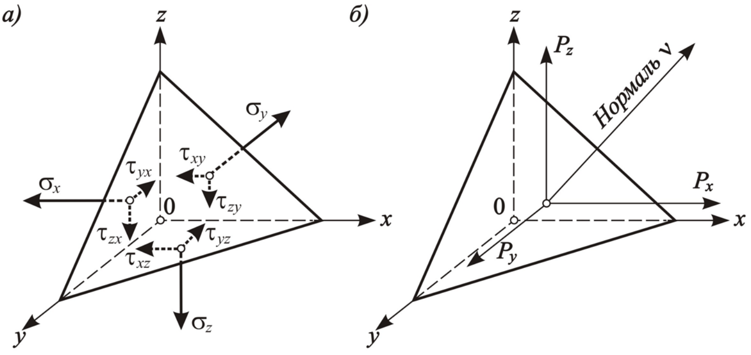
Рассматривая условия равновесия тетраэдра ($\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum Z = 0$), получим три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = P_x; \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = P_y; \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n = P_z. \end{aligned}\right\} \qquad (5.13)$$

Полученные соотношения называются условиями на поверхности и являются статическими граничными условиями.

Уравнения равновесия элементарного тетраэдра являются дополнительными к основным статическим уравнениям теории упругости и *характери-*

зуют связь между поверхностной нагрузкой и напряжениями в произвольной точке поверхности тела.



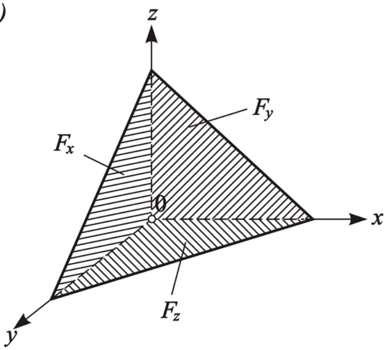


Рисунок 5.8 – Равновесие элементарного тетраэдра:
а – компоненты напряжений на перпендикулярных гранях; *б* – компоненты усилий на наружной грани; *в* – обозначение площадей граней

В матричной форме уравнения (5.13) будут иметь вид

$$[L]\cdot\{\sigma\}=\{P\},$$

где $[L]$ – матрица направляющих косинусов;

$\{\sigma\}$ – матрица-столбец составляющих напряжений;

$\{P\}$ – матрица-столбец составляющих поверхностной нагрузки,

$$\{P\}^{\mathrm{т}}=\left[P_x, P_y, P_z\right].$$

5.5.2 Дополнительные геометрические уравнения

Дополнительные геометрические уравнения выражают условия совместности деформаций.

Геометрические уравнения (5.10) позволяют по трем известным компонентам перемещений определять однозначно шесть компонент деформаций.

Сложнее дело обстоит с обратной постановкой задачи – по известным компонентам деформаций определять компоненты перемещений. Если заданы шесть компонент деформаций, то заранее нельзя утверждать, что им соответствует какое-либо непрерывное поле перемещений. Шесть компонент деформаций нельзя задать произвольно, между ними должны существовать внутренние зависимости, которые и были получены Сен-Венаном. Геометрически эти зависимости представляют собой условия совместности деформаций. Число таких зависимостей равно шести, и они делятся на две группы. Приведем без вывода эти зависимости.

I группа уравнений совместности деформаций:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y};\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z};\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x};
\end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

II группа уравнений совместности деформаций:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z};\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z};\\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

Уравнения I группы устанавливают связь между линейными и угловыми деформациями в каждой плоскости: первое уравнение – в плоскости $x0y$, второе – в плоскости $y0z$, третье – в плоскости $z0x$.

Каждое из этих уравнений показывает, что если заданы две линейные деформации, то этим однозначно предопределяется и соответствующий им угол сдвига.

Уравнения II группы устанавливают связь между составляющими деформации в разных плоскостях. Каждое из них показывает, что если заданы три деформации сдвига, то этим однозначно определяется соответствующее им удлинение ребра.

Уравнения I и II групп в матричной форме представим в виде

$$[B]\cdot\{\varepsilon\}=0,$$

где $[B]$ – матрица операций дифференцирования $\left(\partial^2/\partial x^2, \partial^2/\partial y^2, \partial^2/\partial z^2\right)$.

Уравнения I и II групп совместности деформаций являются дополнительными к геометрическим уравнениям (5.10) теории упругости и позволяют решить обратную задачу – по заданным компонентам деформаций определить соответствующие им компоненты перемещений.

5.6 Решение задачи теории упругости

В подразделах 5.2–5.4 были получены **три группы основных уравнений теории упругости** (запишем их в матричной форме):

- статические –

$$[A]\cdot\{\sigma\}+\{G\}=0; \tag{5.16}$$

- геометрические –

$$\{\varepsilon\}=[A]^{\mathrm{T}}\cdot\{u\}; \tag{5.17}$$

- физические:

– в прямой форме –

$$\{\varepsilon\}=[E]\cdot\{\sigma\}; \tag{5.18}$$

– в обратной форме –

$$\{\sigma\}=[D]\cdot\{\varepsilon\}. \tag{5.19}$$

Всего получено 15 уравнений, в которые входят 15 неизвестных. Задача может быть решена при наличии **дополнительных уравнений**, выражающих:

- условия на поверхности –

$$[L]\cdot\{\sigma\}=\{P\}; \tag{5.20}$$

- условия совместности деформаций –

$$[B]\cdot\{\varepsilon\}=0. \tag{5.21}$$

Основные уравнения позволяют решить обратную задачу теории упругости – по заданным перемещениям $\{u\}$ найти соответствующие им деформации $\{\varepsilon\}$, напряжения $\{\sigma\}$ и нагрузки $\{P\}$.

Однако большее практическое применение имеет прямая задача теории упругости – по заданным объемным и поверхностным нагрузкам определить перемещения, деформации и напряжения тела. В общем случае решение этой задачи сводится к интегрированию дифференциальных уравнений (5.16) и (5.17). В то же время существуют два основных способа, позволяющих упростить решение прямой задачи: решения в перемещениях и в напряжениях.

5.6.1 Решение задачи в перемещениях

В качестве основных неизвестных принимаются компоненты перемещений точек тела $\{u\}$.

Основными разрешающими уравнениями являются основные (5.16) и дополнительные (5.20) статические уравнения, выраженные через перемещения.

Выразим $\{\sigma\}$ через перемещения $\{u\}$. По закону Гука в обратной форме (5.19) с учетом (5.17) имеем

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} = [D] \cdot [A]^{\mathrm{T}} \cdot \{\varepsilon\}.$$

Подставив это выражение в уравнения (5.16) и (5.20), получим разрешающие уравнения

$$\left.\begin{array}{l} [A] \cdot [D] \cdot [A]^{\mathrm{T}} \cdot \{u\} + \{G\} = 0; \\ [L] \cdot [D] \cdot [A]^{\mathrm{T}} \cdot \{u\} = \{P\}. \end{array}\right\} \tag{5.22}$$

При решении задачи теории упругости в перемещениях приходится интегрировать шесть разрешающих уравнений (5.22).

5.6.2 Решение задачи в напряжениях

В качестве основных неизвестных принимаются компоненты напряжений точек тела $\{\sigma\}$.

Основными разрешающими уравнениями являются основные статические уравнения (5.16) и дополнительные геометрические уравнения (5.21), выраженные через напряжения.

Выразим $\{\varepsilon\}$ в уравнении (5.21) через напряжения [см. формулу (5.18)].

Подставив выражение (5.18) в уравнение (5.21), получим разрешающие уравнения

$$\left.\begin{array}{l} [A] \cdot \{\sigma\} + \{G\} = 0; \\ [B] \cdot [E] \cdot \{\sigma\} = 0. \end{array}\right\} \tag{5.23}$$

При решении задачи теории упругости в напряжениях приходится интегрировать девять разрешающих уравнений (5.23).

6 ОСНОВЫ РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ ЛИСТОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВАГОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Листовые элементы в виде пластин и оболочек разнообразных очертаний и форм являются широко распространенными элементами кузовов вагонов. Это объясняется тем, что у тонкостенных конструкций легкость и рациональность форм сочетаются с их высокой несущей способностью, экономичностью и технологичностью.

В конструкциях вагонов несущая обшивка кузовов вместе с подкрепляющими элементами (стержнями) рассматривается как подкрепленная пластина (для рамы и стен) или как подкрепленная оболочка (для крыши и кузова в целом).

Каждый прямолинейный или криволинейный участок обшивки, заключенный между соседними поперечными и продольными подкрепляющими элементами (стержнями) рассматривается как отдельная пластина или оболочка.

Поверхность, разделяющая толщину листового элемента пополам, называется **срединной поверхностью**. Если срединная поверхность элемента плоская, то элемент листовой обшивки вагона относят к *пластинам*, если неплоская – то к *оболочкам*. Будем рассматривать оболочки постоянной толщины, геометрия таких оболочек определяется срединной поверхностью.

6.1 Основы теории изгиба тонких пластин

6.1.1 Основные понятия и гипотезы

Срединная поверхность пластины до деформации представляет собой плоскость и ее называют срединной плоскостью (рисунок 6.1). Линию, ограничивающую срединную плоскость пластины, называют *контуром пластины*.

В зависимости от формы контура пластины могут быть круглыми, прямоугольными, эллиптическими и др.

Пластина может быть закреплена по контуру, а также может иметь промежуточные опоры. Часть контура пластины может быть свободна от закреплений.

П р и м е ч а н и е – Положение точек на плоской срединной поверхности пластин определяется в декартовой системе координат. Для исследования пластин принято оси x и y располагать в срединной поверхности, ось z – направлять вниз. При этом составляющая перемещений точек срединной поверхности по оси y будет являться вертикальным прогибом пластины.

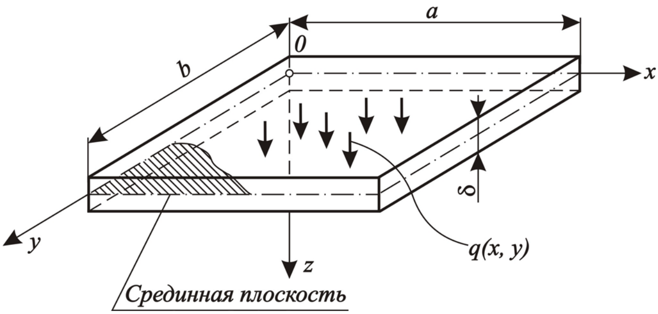


Рисунок 6.1 – Положение плоской срединной поверхности пластины

Толщина δ пластин оказывает существенное влияние на ее свойства при изгибе. Поэтому в зависимости от отношения δ/b различают *три вида пластин*:

- толстые (плиты) – $\delta/b > 0{,}2$;
- тонкие – $0{,}2 \geq \delta/b \geq 0{,}0125$;
- совсем тонкие (мембраны) – $\delta/b < 0{,}125$,

где b – наименьший размер пластины в плане.

П р и м е ч а н и е – Тонкие пластины работают на изгиб и растяжение, мембраны – на растяжение.

Пластины, являющиеся элементами кузовов, относятся к категории тонких пластин. Для расчета тонких пластин на действие поперечной нагрузки применяют **техническую теорию изгиба пластин**. В частности, панели несущего настила пола и обшивки стен кузова при действии усилий от сыпучего груза (усилий, нормальных к их поверхности) можно рассматривать как тонкие пластины, работающие на изгиб.

П р и м е ч а н и е – Классическую теорию пластин называют технической, чтобы отличить ее от более сложных теорий, непосредственно следующих из теории упругости.

Теория тонких пластин (техническая теория изгиба пластин) основывается на следующих г и п о т е з а х.

1 Гипотеза прямых нормалей. Любой линейный элемент *mn*, нормальный к срединной плоскости пластины, остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности и после деформации (рисунок 6.2).

При изгибе пластины нормаль повернется в пространстве на угол Θ, оставаясь прямой и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности пластины. Поскольку нормаль к срединной плоскости направлена вдоль оси z, то данная гипотеза предполагает, что прямые углы между ней и осями x и y остаются прямыми и после деформации, т. е. сдвиги в указанных плоскостях отсутствуют: $\gamma_{xz} = 0$ и $\gamma_{yz} = 0$.

Примечание – Эта гипотеза аналогична гипотезе плоских сечений в технической теории изгиба балок.

2 Гипотеза о неизменности длины нормали до деформации и после. Эта гипотеза вытекает из того, что $\delta = \text{const}$ и тем самым предполагает, что линейная деформация в направлении оси z отсутствует: $\varepsilon_z = 0$.

В соответствии с принятой гипотезой, если точка 0 срединной поверхности имеет прогиб w, то такое же перемещение w (с точностью до малых высших порядков) является общим для всех точек нормали (см. рисунок 6.2).

Как следствие, прогиб пластины w не зависит от координаты z, а зависит от координат x и y, т. е. $w = w(x, y)$.

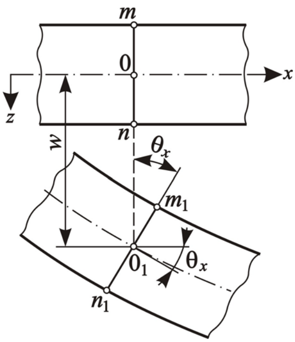


Рисунок 6.2 – К гипотезе прямых нормалей

Примечание – В связи с этим допущением можно утверждать, что вертикальные перемещения всех слоев пластины равны между собой, т. е. равны прогибу срединной поверхности w.

Эта гипотеза дает возможность выразить перемещения в любой точке пластины через прогибы ее срединной поверхности, которые зависят от двух координат (x, y), и, следовательно, свести решение трехмерной задачи теории упругости к двумерной.

3 Гипотеза об отсутствии давления между горизонтальными слоями пластин (гипотеза плоского напряженного состояния). Из этой гипотезы следует, что $\sigma_z = 0$ (рисунок 6.3).

Примечание – Как и в элементарной теории изгиба балок, пренебрегаем нормальными напряжениями на площадках, перпендикулярных оси z (параллельных срединной поверхности), возникающих вследствие взаимного нажатия горизонтальных слоев пластины друг на друга.

Из этой гипотезы следует, что каждый бесконечно тонкий слой пластины, взятый параллельно срединной поверхности, можно рассматривать в условиях плоского напряженного состояния.

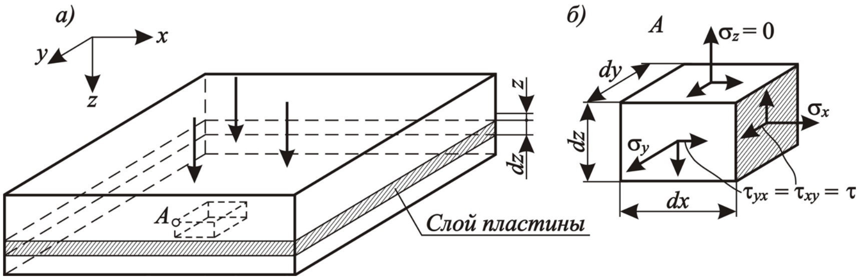


Рисунок 6.3 – К гипотезе плоского напряженного состояния:
а – пластина; *б* – элемент *A* пластины

4 Гипотеза о нерастяжимости срединной поверхности. Из данной гипотезы следует, что линейные ε_x, ε_y и угловая γ_{xy} деформации в срединном слое равны нулю, т. е. срединная поверхность является нейтральной. В соответствии с этой гипотезой точка 0 срединного слоя переместится при изгибе пластины только по вертикали на величину прогиба w (см. рисунок 6.2).

Приведенные гипотезы позволяют построить достаточно точную и простую техническую теорию изгиба пластин и прийти к следующим допущениям:

- все точки срединной поверхности получают только вертикальные перемещения;
- прогиб w срединной поверхности является функцией двух переменных, т. е. $w = w(x, y)$;
- вертикальные перемещения в любой точке пластины можно выразить через прогиб w срединной поверхности.

6.1.2 Общая схема решения задачи изгиба тонких пластин

Задача определения напряжений и усилий в сечениях пластины является статически неопределимой. Решать ее удобно в перемещениях.

За основную неизвестную функцию принимают функцию прогибов $w = w(x, y)$.

Выразив через w все остальные неизвестные величины (перемещения, деформации, напряжения и внутренние усилия), составляют разрешающее уравнение относительно w.

После его решения относительно w все остальные величины определяются по соответствующим выражениям через прогибы w.

6.1.3 Перемещения и деформации в пластине при изгибе

Пластины обычно работают на изгиб в двух направлениях. Под действием поперечной нагрузки $q = q(x, y)$ пластина прогибается, и ее срединный слой, искривляясь, образует поверхность прогибов $w = w(x, y)$.

Введенные гипотезы позволяют выразить перемещения u и v точки K произвольного слоя пластины (рисунок 6.4, *а*) через прогиб пластины.

Рассмотрим грань пластины, параллельной оси x, до деформации и при изгибе (рисунок 6.4, *б*). Обозначения на рисунке 6.4, *б*: mn – нормаль к срединной поверхности; O – точка срединного слоя, лежащая на нормали mn; K – произвольная точка нормали mn, находящаяся на расстоянии z от срединного слоя.

При изгибе пластины нормаль mn и точки, лежащие на ней, получают **перемещения**:

- нормаль mn повернется на угол Θ_x, $\Theta_x = \partial w / \partial x$;
- все точки нормали mn (включая точки «0» и «K») переместятся по вертикали на величину прогиба w, $w = w(x, y)$;
- точка K в результате поворота нормали переместится, кроме того, вдоль оси x на величину u.

В результате поворота нормали на угол Θ_x $\sin\Theta_x = u/z$. Ввиду малости Θ_x можно записать: $\Theta_x = u/z$. Тогда

$$u = -z\Theta_x = -z\frac{\partial w}{\partial x}. \qquad (6.1)$$

Аналогичная картина будет наблюдаться для грани пластины, параллельной оси y, где Θ_y – угол поворота нормали, а v – перемещение точки «K» вдоль оси y.

Примечание – Таким образом, произвольная точка K нормали на уровне z получает следующие характерные перемещения: прогиб w, углы поворота Θ_x, Θ_y и смещения u и v.

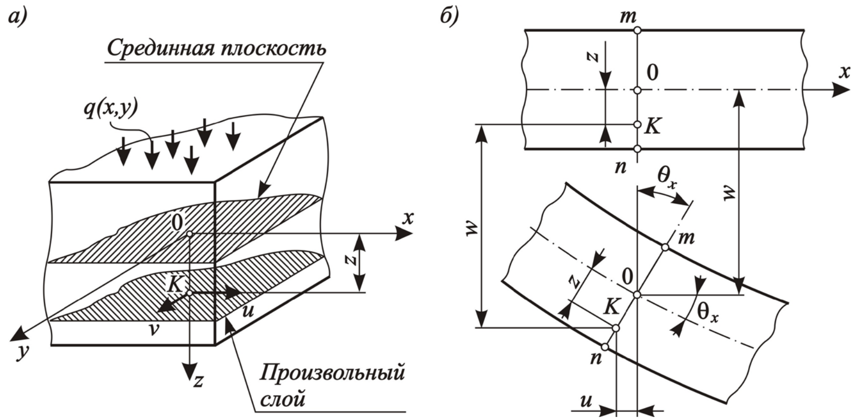


Рисунок 6.4 – К выражению горизонтальных перемещений точки произвольного слоя пластины через прогиб пластины:
а – положение точки *K* произвольного слоя пластины; *б* – грань пластины до деформации и при изгибе

Тогда *перемещения точек произвольного слоя пластины*, расположенного на расстоянии z от срединной поверхности, параллельно осям x и y

$$\left.\begin{aligned} u &= -z\frac{\partial w}{\partial x}; \\ v &= -z\frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.2)$$

П р и м е ч а н и е – Знак «минус» поставлен потому, что при положительных значениях Θ_x и Θ_y ($\Theta_x > 0$ и $\Theta_y > 0$) перемещение точки *K*, у которой $z > 0$, происходит в сторону, противоположную осям x и y.

Деформации в произвольном горизонтальном слое пластины находим из геометрических уравнений теории упругости

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.3)$$

6.1.4 Напряжения и внутренние усилия в пластине

Напряжения в произвольном горизонтальном слое пластины находим из физических уравнений теории упругости (в обратной форме для плоской задачи), подставляя в них значения ε_x, ε_y и γ_{xy} из уравнений (6.3):

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);\\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);\\
\tau_{xy} &= \frac{E}{z(1+\mu)}\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}\right\} \quad (6.4)$$

Законы изменения σ_x, σ_y и τ_{xy} по толщине пластины согласно (6.4) оказываются линейными. Покажем распределение этих напряжений для элемента пластины размером $\Delta x = 1$, $\Delta y = 1$ и δ (рисунок 6.5).

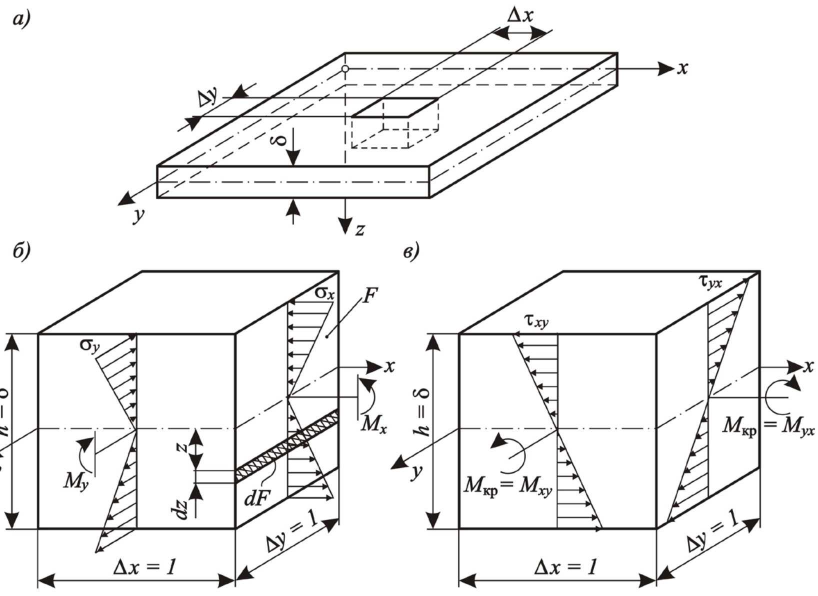


Рисунок 6.5 – Распределение напряжений по высоте элемента пластины:
а – пластина с выделенным элементом; *б* – нормальные напряжения;
в – касательные напряжения

П р и м е ч а н и е – Обратим внимание на индексы при усилиях. Например, в обозначении момента M_x индекс x показывает, что данное усилие действует в сечении, нормаль к которому параллельна оси x.

Обозначения усилий на рисунке 6.5: M_x, M_y – погонные изгибающие моменты в сечениях, перпендикулярных осям x и y соответственно; $H = M_{xy}$ – погонный крутящий момент в сечении, параллельном оси x и перпендикулярном оси y.

П р и м е ч а н и е – Погонные усилия – это усилия, приходящиеся на единицу длины сечения, т. е. это интенсивность соответствующего внутреннего усилия. В дальнейшем слово «погонный» будем опускать.

Выразим погонные моменты M_x, M_y и M_{xy} через w.

Как известно, σ_x в каждом сечении пластины связано с моментом M_x, действующим в этом сечении, зависимостью

$$M_x = \int_F \sigma_x dFz = \sigma_x \int_{-\delta/2}^{\delta/2} z dz = -\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{-\delta/2}^{\delta/2} z^2 dz . \qquad (6.5)$$

П р и м е ч а н и е – Напомним формулы для вычисления интегралов:

- определенного –

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) ;$$

- неопределенного –

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c .$$

Тогда

$$\int_{-\delta/2}^{\delta/2} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Bigg|_{-\delta/2}^{\delta/2} = \frac{(\delta/2)^3}{3} - \frac{(-\delta/2)^3}{3} = \frac{\delta^3}{12} .$$

С учетом примечания выражение (6.5) можно записать так:

$$M_x = -\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad (6.6)$$

где D – цилиндрическая жесткость пластины при изгибе,

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{EJ}{1-\mu^2} ; \qquad (6.7)$$

J – момент инерции сечения пластины единичной ширины, выделенной из пластины, $J = (1 \cdot \delta^3)/12$;

μ – коэффициент Пуассона.

Поступая аналогично, получим моменты M_y и M_{xy}.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \\ M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \\ H = M_{xy} &= -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

Напряжения через моменты выражаются по обычным формулам сопромата как для балки прямоугольного сечения высотой δ и шириной $\Delta x = \Delta y = 1$:

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{\delta^3}z; \quad \sigma_y = \frac{12M_y}{\delta^3}z; \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy}}{\delta^3}z.$$

Таким образом, полученные формулы (6.4) и (6.8) для напряжений и внутренних усилий выражены через прогиб w срединной поверхности.

Уравнение этой упругой поверхности в данном случае является «разрешающей» функцией. Осталось найти это уравнение.

6.1.5 Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины

Рассмотрим пластину произвольной формы, нагруженную перпендикулярно ее плоскости.

Для составления дифференциального уравнения, связывающего прогиб $w(x, y)$ с нагрузкой $q(x, y)$, выделим элемент пластины с размерами dx, dy, δ, который обозначен на рисунке 6.6 только срединной поверхностью dx и dy.

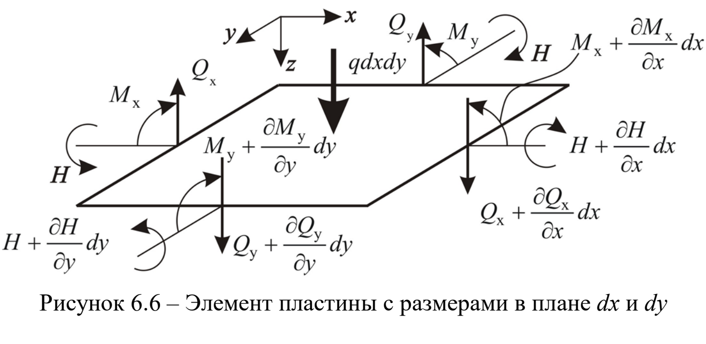


Рисунок 6.6 – Элемент пластины с размерами в плане dx и dy

Из условия равновесия элемента ($\sum z = 0,\ \sum M_x = 0,\ \sum M_y = 0$) получим дифференциальные зависимости между внутренними силами и интенсивностью нагрузки $q(x, y)$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q; \\ &\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x; \\ &\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = Q_y. \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

В три статических уравнения равновесия входят пять неизвестных функций. Поэтому задача определения неизвестных внутренних усилий M_x, M_y, H, Q_x и Q_y в сечениях пластины статически неопределима.

Приведем, опустив вывод, три уравнения равновесия (6.9) к одному уравнению с одним неизвестным. В результате получим **основное дифференциальное уравнение изгиба пластины** (уравнение изогнутой поверхности пластины, или уравнение Софии Жермен)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}\ . \tag{6.10}$$

П р и м е ч а н и е – Уравнение (6.10) можно пояснить следующим образом. Разложим нагрузку q на три части ($q = q_1 + q_2 + q_3$) так, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{q_1}{D}; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_2}{D}; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q_3}{D}.$$

Первое уравнение характеризует изгиб пластины вдоль оси x, в результате которого возникают изгибающий момент M_x и напряжения σ_x; второе – изгиб пластины вдоль оси y; третье – деформацию кручения, в результате которой возникают крутящий момент H и напряжения τ_{xy}.

Решение уравнения (6.10) дает функцию прогибов $w(x, y)$, с помощью которой легко вычислить по полученным ранее формулам усилия и напряжения в пластине.

6.1.6 Формулировка граничных условий

Искомая функция w должна удовлетворять дифференциальному уравнению (6.10) и граничным условиям на краях пластины.

Рассмотрим простейшие **граничные условия** на примере пластины с заделанным, шарнирно опертым и свободным концом (рисунок 6.7):

1 Край пластины (ОА) жестко заделан (при y = 0). Прогибы и углы поворота в заделке должны быть равны нулю, т. е.

$$w = 0\,,\ \Theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0\,.$$

2 Край пластины (ОВ и АС) закреплен шарнирно (при x = 0 и x = a).

Прогибы и изгибающие моменты равны нулю, т. е.

$$w = 0\,,\quad M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0\,.$$

3 Край пластины (ВС) не закреплен (при y = b). На свободном краю равны нулю все усилия, способные возникать в сечении, т. е. $M_y = 0$, $Q_y = 0$, $H = M_{xy} = 0$.

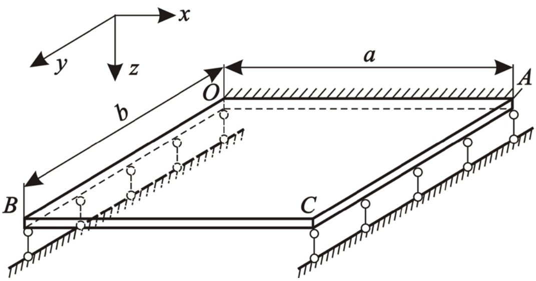


Рисунок 6.7 – Простейшие граничные условия пластины

Здесь вместо необходимых двух условий имеем три. Для устранения избыточного граничного условия вводят понятие приведенной поперечной силы $Q_{\text{пр}}$, которую приравнивают к нулю. Тогда граничные условия окончательно примут вид

$$M_y = 0\,,\ Q_{\text{пр}} = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0\,,\ Q_y = 0,\ H = 0.$$

6.2 Основы теории расчета тонких оболочек

6.2.1 Преимущества оболочек

Оболочки широко используются в различных областях техники. Они, имея завидную легкость, обладают высокой прочностью и жесткостью. Объясняется это тем, что внешняя поперечная нагрузка уравновешивается в оболочках не только за счет изгиба, как в пластине, но и за счет возникающих в срединной поверхности нормальных и сдвигающих усилий. То есть в отличие от плоских пластин при поперечной нагрузке в оболочках возникают не только моменты M_x, M_y, M_{xy} и поперечные силы Q_x, Q_y, но и нормальные (осевые) усилия растяжения-сжатия N_x, N_y и сдвигающие усилия S_{xy}, показанные на рисунке 6.8.

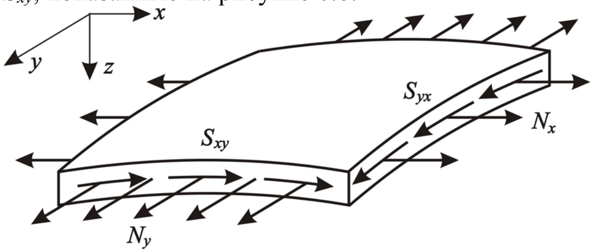


Рисунок 6.8 – Усилия в срединной поверхности, действующие на боковых гранях элемента оболочки

В случае рационального очертания оболочки изгибающий момент оказывается равным нулю во всех сечениях. Тогда внешняя нагрузка уравновешивается только нормальной силой, что дает возможность существенно облегчить конструкцию по сравнению с балкой, где внещняя нагрузка воспринимается только за счет изгиба.

Таким образом, сочетание характера нагружения и кривизны поверхности оболочки создает условия, при которых невозможно возникновение изгиба. Такие оболочки по сравнению с пластинами за счет кривизны своей поверхности становятся жестче и прочнее.

П р и м е ч а н и е – Мы установили, что для безизгибного состояния оболочечной конструкции характер действия нагрузок нужно согласовывать с геометрической формой ее поверхности.

В целом можно сказать, что эффективность оболочек тесно связана с их кривизной и тонкостенностью. Оболочки весьма эффективны в отношении весовой отдачи, поэтому их применение широко распространено в авиации.

6.2.2 Основные определения и гипотезы

Геометрия оболочки постоянной толщины $(\delta = \text{const})$ полностью определяется геометрией ее срединной поверхности. В зависимости от формы срединной поверхности различают оболочки различных видов.

Наибольшее распространение получили **оболочки вращения**: цилиндрические, сферические, конические, торообразные и др. Такие оболочки вследствие ряда неоспоримых преимуществ наиболее часто используются в конструктивных решениях.

П р и м е ч а н и е – Поверхности рассматриваемых оболочек (оболочек вращения) получают путем вращения кривых (такие порождающие кривые называются образующими) вокруг прямолинейной оси. Например, в результате вращения окружности вокруг оси, проходящей через ее центр, получается сфера. Если вращать прямую вокруг оси, то в результате получается цилиндр или конус. Оболочки других видов сложнее, в настоящем курсе они не рассматриваются.

Оболочки бывают з а м к н у т ы м и (котел цистерны, кузов цельнометаллического вагона) и н е з а м к н у т ы м и (обшивка крыши, криволинейные участки наружной обшивки кузова и др.).

Рассмотрим оболочку вращения, представленную на рисунке 6.9 срединной поверхностью.

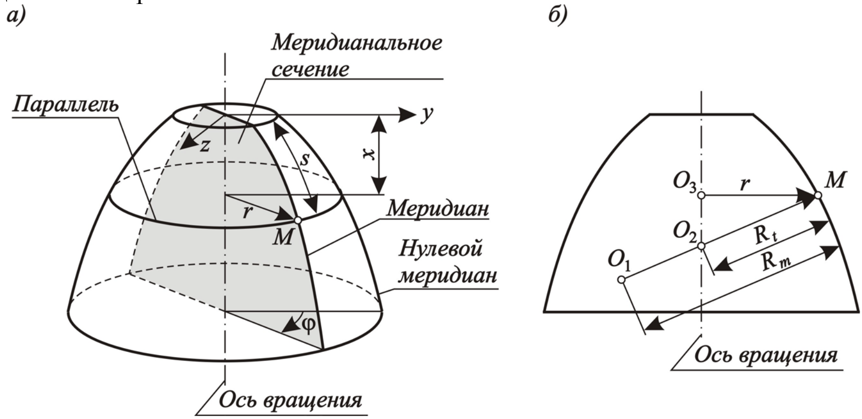


Рисунок 6.9 – Оболочка вращения:
а – общий вид; *б* – меридиональное сечение

Как следует из рисунка 6.9, оболочку вращения можно рассечь п л о с к о с т я м и : *меридиональными* – проходящими через ее ось и *параллельными* – проходящими перпендикулярно к ней. Кривые на поверхности, являющиеся линиями пересечения поверхности оболочки с меридиональными и параллельными плоскостями, называют соответственно *меридианами* и *параллелями*.

Каждая точка поверхности оболочки может быть задана как точка пересечения некоторых меридиана и параллели. Например, чтобы задать положение точки *M*, достаточно задать угол φ, отсчитываемый от некоторого нулевого меридиана, и расстояние *s*, отсчитываемого от края оболочки вдоль меридиана.

Координаты φ, *s*, называемые *гауссовыми координатами*, наиболее удобны при изучении свойств поверхностей вращения. В некоторых случаях применяют *цилиндрические координаты* φ, *x*, *r* (*x* отсчитываются вдоль оси оболочки, *r* – от оси вращения), а также *декартовы координаты* *x*, *y*, *z* ($y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$).

Оболочка как геометрическая поверхность в любой точке характеризуется двумя взаимно перпендикулярными радиусами кривизны, которые называют *главными радиусами кривизны* и обозначают R_m и R_t.

Обозначения на рисунке 6.9 с учетом вышеприведенного: R_m – радиус кривизны меридиана (O_1M); R_t – радиус кривизны в направлении, перпендикулярном меридиану (O_2M); r – радиус параллели (O_3M); точки O_1 и O_2 – центры кривизны срединной поверхности.

При изучении свойств поверхностей оболочек важное значение имеет *гауссова кривизна*

$$K = \frac{1}{R_m R_t}.$$

Если $K > 0$, то поверхность имеет выпуклые меридианы, при $K = 0$ меридианы поверхности представляют собой прямые линии, при $K < 0$ поверхность имеет вогнутые меридианы (рисунок 6.10).

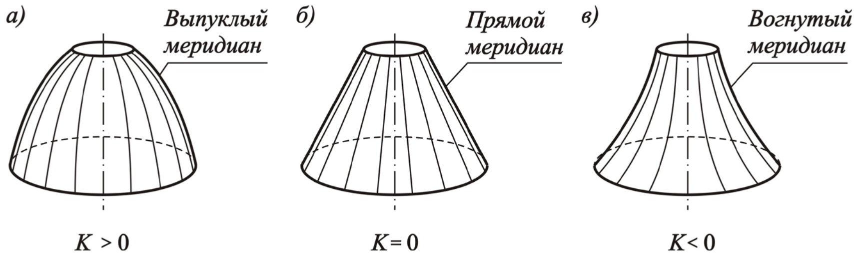


Рисунок 6.10 – Форма оболочек вращения в зависимости от знака гауссовой кривизны: *а* – при $K > 0$; *б* – при $K = 0$; *в* – при $K < 0$

Знак гауссовой кривизны определяет тип дифференциальных уравнений теории оболочек. Наиболее полно разработана теория оболочек положительной и нулевой гауссовой кривизны (для $K \geq 0$).

Различают два вида оболочек в зависимости от соотношения δ/R:

- толстые – $\delta/R > 0{,}05$;
- тонкие – $\delta/R \leq 0{,}05$,

где R – минимальный радиус кривизны срединной поверхности.

Подавляющее большинство оболочечных инженерных конструкций, в том числе и вагонных, тонкостенные.

В основе теории тонких оболочек лежат д в е г и п о т е з ы.

1 Гипотеза прямых нормалей. Прямолинейный элемент, нормальный к срединной поверхности оболочек до деформации, остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности деформированной оболочки и не изменяет своей длины.

Гипотеза прямых нормалей дает возможность выразить деформации в любой точке оболочки через деформации ее срединной поверхности, которые зависят от двух координат (α, β), и, таким образом, свести решение трехмерной задачи теории упругости к двумерной.

2 Гипотеза о ненадавливании слоев оболочки. Нормальные напряжения, действующие на площадках, параллельных срединной поверхности оболочки, принимаются равными нулю.

Примечание – Указанные гипотезы являются обобщением гипотез, уже встречавшихся при расчете пластин.

Выводы.

1 В теоретических исследованиях принято представлять оболочку ее срединной поверхности, которую наделяют всеми геометрическими и физическими свойствами, присущими ее толщине.

2 Основными характеристиками оболочки как геометрической фигуры являются: радиус кривизны ее поверхности, толщина и габариты в плане.

3 Один из важнейших показателей, характеризующих свойства оболочки – отношение ее толщины к радиусу. В соответствии с этим отношением принято различать тонкие и толстые оболочки.

4 Среди многочисленных функций, выполняемых оболочками, в первую очередь следует назвать силовые функции и функции разделения.

5 Оболочки весьма эффективны в смысле весовой отдачи.

6 Знак гауссовой кривизны определяет тип уравнений оболочек.

6.2.3 Напряженное состояние тонкостенных оболочек

Напряженное состояние оболочки в общем случае характеризуется **двумя группами внутренних усилий**:

- действующих в срединной поверхности [нормальные (осевые) N_x, N_y, и сдвигающие S_{xy}, S_{yx} усилия];
- вызывающих ее изгиб (поперечные силы Q_x, Q_y, изгибающие M_x, M_y и крутящие H моменты).

Примечание – Поперечные силы Q_x и Q_y в тонких оболочках обычно малы и в расчетах не учитываются.

Таким образом, в отличие от тонких пластин при поперечной нагрузке в оболочках возникают усилия не только II, но и I группы, связанные с деформацией срединной поверхности.

Рассмотрим элемент оболочки, выделенный четырьмя сечениями. Схемы действия внутренних сил и распределение напряжений, возникающих при деформации срединной поверхности и при изгибе оболочки, показаны на рисунках 6.11 и 6.12 для сечений элемента оболочки.

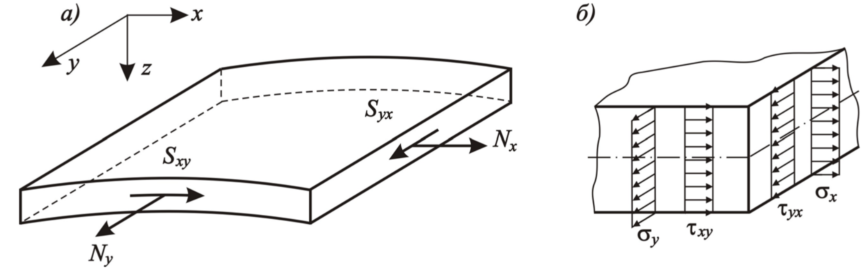


Рисунок 6.11 – Схема действия внутренних сил и распределение напряжений, возникающих при деформации срединной поверхности:
а – внутренние усилия; *б* – срединные напряжения

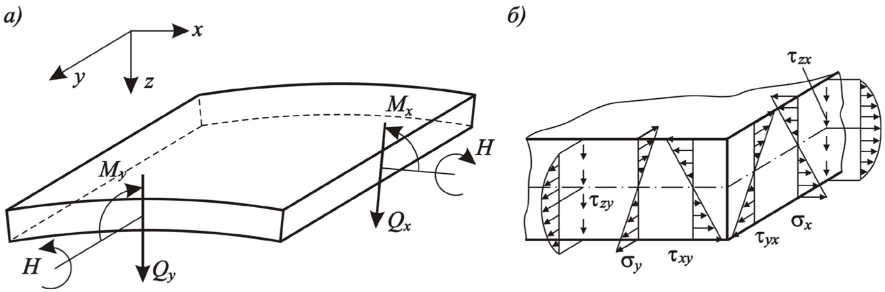


Рисунок 6.12 – Схема действия внутренних сил и распределение напряжений, возникающих при изгибе оболочки:
а – внутренние усилия; *б* – изгибные напряжения

Усилия I группы приводят к появлению *срединных напряжений* σ_x, σ_y и τ. Эти напряжения постоянные по толщине оболочки.

Усилия II группы приводят к появлению *изгибных напряжений* σ_x, σ_y и τ. Эти напряжения изменяются по толщине оболочки по линейному закону.

Благодаря возникновению в оболочках усилий I группы суммарные нормальные и касательные напряжения (от усилий I и II групп) распределяются по толщине оболочки более рациональным образом, чем в пластине (рисунок 6.13).

При нагружении оболочки возможны различные **виды напряженного состояния:**

• б е з м о м е н т н о е – для оболочек, работающих только на растяжение;

• м о м е н т н о е – для оболочек, работающих только на изгиб;

• с м е ш а н н о е – для оболочек, работающих на растяжение совместно с изгибом.

Наиболее простым и благоприятным для конструкции в отношении использования ее материала является безизгибное – безмоментное состояние, когда напряжения постоянны по толщине. Такие оболочки называют *мембранами*, а возникающие напряжения – мембранными.

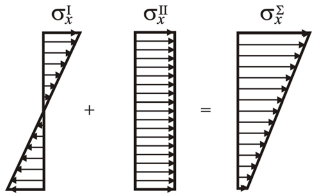


Рисунок 6.13 – К определению суммарных напряжений

При наличии первого вида напряженного состояния для расчета используется безмоментная теория оболочек, во втором – моментная теория, в третьем – полубезмоментная.

Безмоментная теория оболочек предполагает, что оболочка не воспринимает изгибающих и крутящих моментов, а также поперечных сил. Это значит, что в сечении оболочки по ее толщине нормальные и касательные напряжения остаются постоянными. Напряженное состояние весьма выгодно с точки зрения использования материала.

Моментная теория оболочек основывается на том, что оболочка воспринимает изгибающие моменты и поперечные силы.

Полубезмоментная теория оболочек предполагает, что по одному направлению оболочка может воспринимать моменты и поперечные силы, а по другому – только силы, лежащие в срединной поверхности.

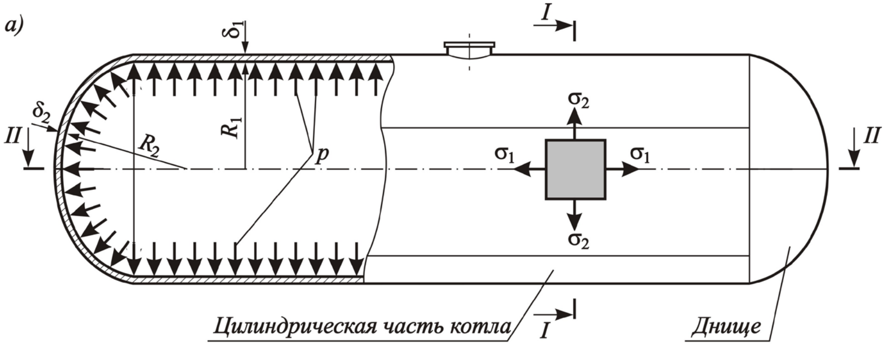
Преимущества оболочки как конструктивного элемента реализуются в том случае, когда она работает на растяжение в условиях безмоментного напряженного состояния.

6.2.4 Безмоментная теория оболочек

В качестве примера рассмотрим расчет котла цистерны на внутреннее давление.

Котел цистерны представляет собой простейший цилиндрический резервуар, закрытый с торцов двумя днищами эллептической формы.

В котле цистерны (рисунок 6.14, *а*), подверженном действию внутреннего давления *p*, возникают напряжения, которые могут быть вычислены по формулам безмоментной теории оболочек. Как уже отмечалось, такие оболочки, не испытывающие изгиба, называют мембранными, а напряжения в них, определяемые без изгиба, – мембранными напряжениями.



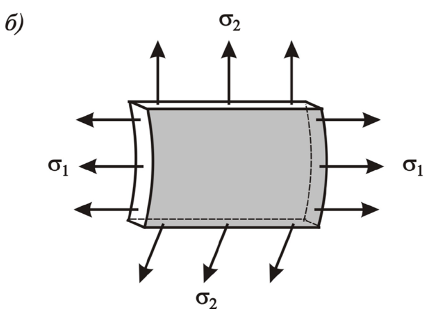


Рисунок 6.14 – К расчету котла цистерны:
а – расчетная схема котла; *б* – выделенный элемент цилиндрической оболочки

Выделим бесконечно малый элемент цилиндрической оболочки двумя меридиональными и двумя параллельными плоскостями (см. рисунок 6.14, *б*). На выделенный элемент действуют напряжения в двух взаимно перпендикулярных направлениях: σ_1 – меридиональные напряжения; σ_2 – окружные или кольцевые напряжения. Такое напряженное состояние принято называть двухосным, или плоским.

П р и м е ч а н и е – *Меридиональные напряжения* – нормальные напряжения, действующие в направлении меридиан по граням элемента, полученным параллельными сечениями. *Окружные напряжения* – нормальные напряжения, действующие в окружном направлении (по касательной к окружности) по граням элемента, полученным меридиональными сечениями.

Рассечем цилиндрический резервуар двумя плоскостями: одна из них (*I–I*) перпендикулярна оси вращения, другая (*II–II*) проходит через ось вращения.

Рассмотрим равновесное состояние части оболочки, отсеченной плоскостью *I–I* (рисунок 6.15, *а*).

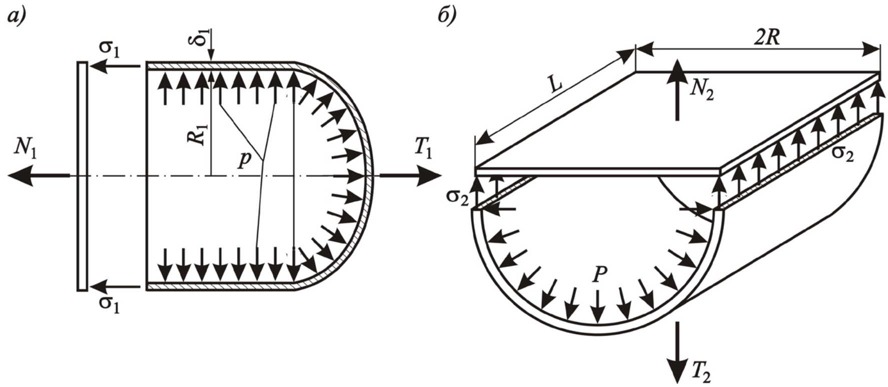


Рисунок 6.15 – Равновесное состояние части оболочки:
а – отсеченной плоскостью *I–I; б* – отсеченной плоскостью *II–II*

Чтобы оставшаяся часть работала как цельная оболочка, необходимо влияние отброшенной части заменить соответствующими усилиями, которые прикладываются по месту воображаемого разреза.

Обозначения, принятые на рисунке 6.15, *а*:

T_1 – равнодействующая внутреннего давления на правое днище котла (усилие, стремящееся оторвать одну часть оболочки от другой),

$$T_1 = p\pi R_1^2,$$

πR_1^2 – площадь проекции днища на поперечную плоскость;

R_1 – радиус цилиндрической части котла;

N_1 – результирующее усилие, заменяющее действие отброшенной части (внутренняя сила возникающая в сечении),

$$N_1 = \sigma_1 F = \sigma_1 \cdot 2\pi R_1 \delta_1;$$

δ_1 – толщина цилиндрической части котла.

Из условия равновесия рассматриваемой части оболочки $T_1 = N_1$ имеем

$$p\pi R_1^2 = \sigma_1 \cdot 2\pi R_1 \delta_1.$$

Тогда величина меридиональных напряжений

$$\sigma_1 = \frac{pR_1}{2\delta_1}. \tag{6.11}$$

Рассмотрим теперь равновесное состояние полуоболочки, отсеченной плоскостью *II–II*, проходящей через ось вращения (см. рисунок 6.15, *б*).

Обозначения, принятые на рисунке 6.15, *б*:

T_2 – равнодействующая внутреннего давления на отсеченную полуоболочку (усилие, стремящееся оторвать одну полуоболочку от другой),

$$T_2 = p \cdot 2R_1L\,;$$

$2R_1L$ – площадь проекции полуоболочки на продольную плоскость;

L – длина цилиндрической части котла;

N_2 – уравновешивающее усилие, заменяющее действие отброшенной части (внутренняя сила, возникающая в сечении),

$$N_2 = \sigma_2 F = \sigma_2 \cdot 2L\delta_1\,.$$

Из условия равновесия рассматриваемой полуоболочки $T_1 = N_1$ имеем

$$p \cdot 2R_1L = \sigma_1 \cdot 2L\delta_1\,.$$

Тогда величина окружных напряжений

$$\sigma_2 = \frac{pR_1}{\delta_1}\,. \tag{6.12}$$

Сравнение выражений (6.11) и (6.12) показывает, что окружные напряжения σ_2 в стенке цилиндрического котла в 2 раза больше меридиональных σ_1.Отсюда следует, что разрушение котла произойдет строго вдоль меридиана, причем равновозможно в любом из них.

6.3 Устойчивость пластин и оболочек, являющихся элементами панелей обшивки кузовов вагонов

Тонкие листы обшивки, подкрепленные продольными и поперечными элементами жесткости, образуют пол и стены кузова или кузов в целом в виде оболочки (замкнутой цилиндрической или открытой П-образного сечения).

При этом участок обшивки кузова, заключенный между соседними подкрепляющими элементами, рассматривают в качестве отдельной прямоугольной пластины или цилиндрической оболочки. В результате обшивку кузова можно представить в виде набора прямоугольных пластин и цилиндрических оболочек (рисунок 6.16).

Примечание – В большинстве случаев мы имеем плоские прямоугольные пластины, а на участке крыши – оболочку (цилиндрическую обшивку).

Тонкая обшивка кузова может выпучиваться (терять устойчивость) при действии сжимающих или касательных напряжений, превышающих критические напряжения $\sigma_{кр}$ или $\tau_{кр}$. Поэтому расчет на устойчивость для таких элементов приобретает особое значение.

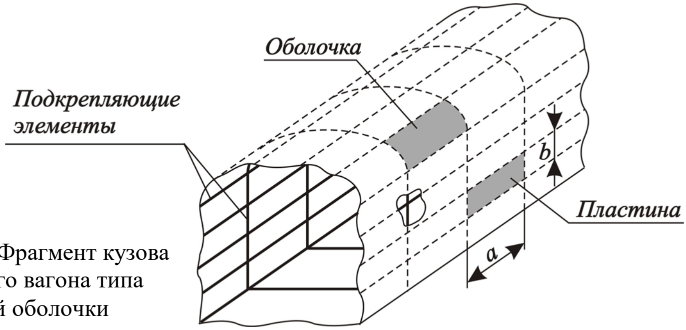


Рисунок 6.16 – Фрагмент кузова пассажирского вагона типа замкнутой оболочки

Оценка устойчивости тонкой обшивки производится по формуле (1.3), в которой критические напряжения сравнивают с напряжения в обшивке от внешней нагрузки, действующей на конструкцию. При этом коэффициент запаса устойчивости n должен быть не менее 1,5.

Примечание – Значения критических напряжений для панели обшивки зависят от вида нагрузки, размеров и формы панели, ее толщины и характера закрепления ее сторон.

Определение критических напряжений для листов обшивки в этом случае производят по формулам, полученным в теории упругости для отдельных плоских прямоугольных пластин для случаев наиболее простых напряженных состояний при схематизированных условиях подкрепления пластин по контуру.

Напомним, что края пластины считают «защемленными» или «жестко заделанными», если опорные связи препятствуют перемещениям краев в направлении, перпендикулярном плоскости пластины, и их повороту. Шарнирное закрепление краев пластины предполагает отсутствие в местах опирания прогиба и изгибающих моментов.

Рассмотрим формулы для определения критических напряжений для прямоугольных пластин и цилиндрических оболочек.

1 Пластина, загруженная сжимающими усилиями σ, *равномерно распределенными по двум противоположным сторонам* (рисунок 6.17, *а*):

$$\sigma_{кр} = k\frac{\pi^2 D}{b\delta^2} = k\frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\delta}{b}\right)^2 . \qquad (6.13)$$

2 Пластина, загруженная касательными усилиями τ (рисунок 6.17, *б*):

$$\tau_{кр} = k\frac{\pi^2 D}{b\delta^2} = k\frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\delta}{b}\right)^2, \qquad (6.14)$$

где k – коэффициент, зависящий от отношения a/b и способа закрепления краев пластины и выбираемый из графиков, изображенных на рисунках 6.18 и 6.19 [11];

D – цилиндрическая жесткость пластины,

$$D = \frac{E\delta^2}{12(1-\mu^2)};$$

E, μ – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона;

a, b – соответственно длина и ширина пластины;

δ – толщина пластины.

Примечание – Из приведенных формул следует, что повысить устойчивость плоской обшивки можно, увеличивая ее толщину или уменьшая ширину *b* путем более частой постановки стрингеров или гофров. Последний способ выгоднее, т. к. позволяет повысить устойчивость при меньшей затрате материала.

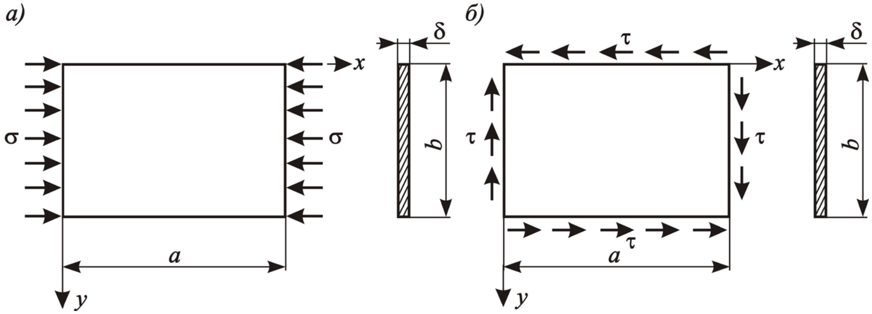


Рисунок 6.17 – Пластина, загруженная усилиями:
а – сжимающими σ; *б* – касательными τ

3 Пластина, подкрепленная продольными ребрами или гофрами и шарнирно опертая по контуру, при одноосном сжатии (рисунок 6.20). В этом случае критические напряжения вычисляют по формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{2}{b\delta^2}\frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)}\sqrt{J_x J_y}, \qquad (6.15)$$

где J_x, J_y – моменты инерции сечений подкрепленной пластины относительно центральных осей, параллельных осям *x* и *y*, приходящихся соответственно на единицу длины *a* и ширины *b* пластины,

$$J_x = \frac{J_{1-1}}{a};\;\; J_y = \frac{J_{2-2}}{b};$$

J_{1-1}, J_{2-2} – моменты инерции сечений 1–1 и 2–2 подкрепленной пластины.

Формула (6.15) справедлива для пластин при условии $a > b\sqrt[4]{J_x / J_y}$.

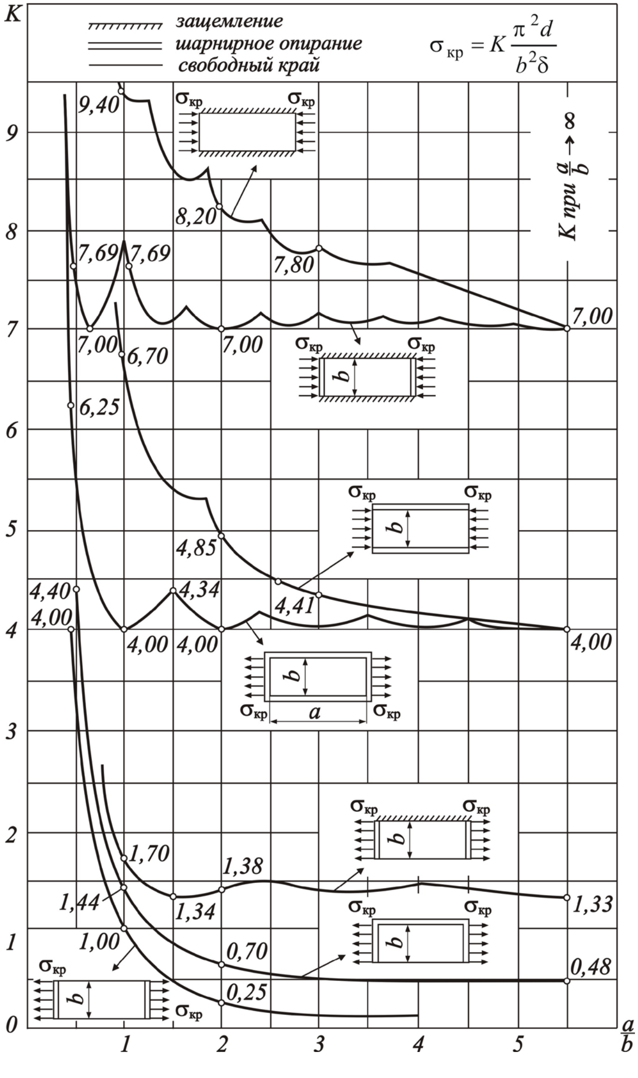


Рисунок 6.18 – Графики для определения коэффициента *k* формулы (6.13)

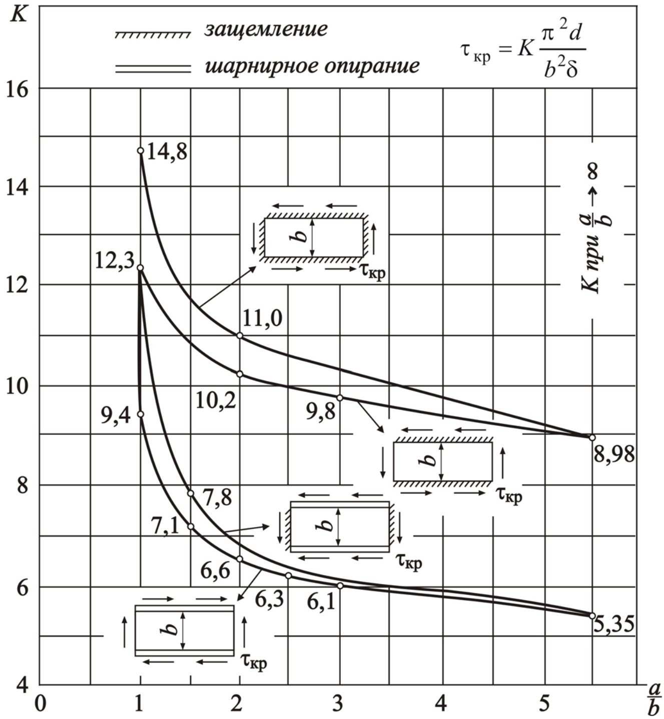


Рисунок 6.19 – Графики для определения коэффициента *k* формулы (6.14)

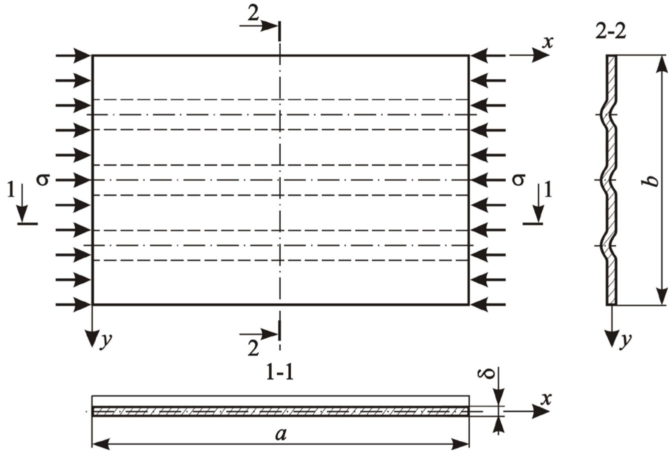


Рисунок 6.20 – Пластина, подкрепленная продольными гофрами

4 Цилиндрическая круговая оболочка (незамкнутая панель обшивки) при шарнирном опирании на жесткий контур всех краев и загружении сжимающими усилиями в направлении образующей (рисунок 6.21). Формула для критических напряжений будет иметь вид

$$\sigma_{\text{кр}} = 0{,}605 k' E \frac{\delta}{R} \leq \sigma_{\text{т}}, \tag{6.16}$$

где k' – коэффициент, $k' \cong 5\sqrt{\delta/R}$;

R – радиус кривизны срединной поверхности панели.

Формула (6.16) справедлива для круговых цилиндрических панелей средней длины $\left[1{,}2\sqrt{\delta/R} < (a/R) < 3\sqrt{R/\delta}\right]$ с показателем кривизны $\alpha > 20$ $[\alpha = b^2/(R\delta)]$ и применяется для проверки устойчивости склонов крыш.

Для панелей обшивки в средней части крыши, имеющей малую кривизну ($\alpha < 20$), формула (6.16) неприменима.

Такие пологие панели, ограниченные двумя стрингерами (гофрами) и двумя дугами крыши, по форме приближаются к плоским пластинам, и их устойчивость может проверяться по формуле (6.13) при шарнирном закреплении сторон.

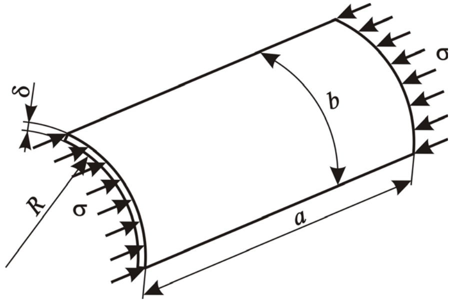


Рисунок 6.21 – Цилиндрическая оболочка, сжатая в направлении образующей

Примечание – Из формулы (6.16) следует, что повысить устойчивость панели можно, увеличивая ее толщину или уменьшая радиус кривизны.

7 ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ ВАГОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

7.1 Вариационная формулировка задач теории упругости

Основные понятия. В разделе, посвященном теории упругости, показано, что для оценки напряженно-деформированного состояния в точке тела, т. е. для определения $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$ и $\{u\}$, необходимо составить три группы дифференциальных уравнений и решить их. Это так называемая *дифференциальная формулировка задач теории упругости.*

Для многих задач получаемые дифференциальные уравнения настолько сложны, что получить общее решение в аналитической форме затруднительно или вообще невозможно.

Однако это не единственно возможная формулировка задачи об отыскании напряженно-деформированного состояния в точке тела. Напряженно-деформированное состояние тела наряду с дифференциальными уравнениями может описываться некоторым энергетическим функционалом, который является функцией от $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$ или $\{u\}$. Искомую функцию $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$ или $\{u\}$ можно найти из условия экстремума этого функционала. Это так называемая *вариационная формулировка задач теории упругости*.

Математический аппарат такого подхода изучается в разделе математики, называемом вариационным исчислением. Поэтому положения, формулирующие свойства таких функционалов в теории упругости, получили название вариационных принципов. Они позволяют сводить задачу к решению системы алгебраических уравнений, минуя составление и решение дифференциальных уравнений.

В данном пособии рассматривается один из вариационных принципов – *принцип минимума полной энергии системы*, являющимся следствием «начала возможных перемещений Лагранжа». Согласно этому принципу утверждается, что если система находится в устойчивом равновесии, то полная энергия ее в этом состоянии принимает минимальное значение (из всех возможных).

П р и м е ч а н и е – Таким образом, полная энергия обладает замечательным свойством: принимает минимальное значение только в состоянии равновесия системы. Используя это свойство, разработали эффективные методы расчета конструкций, в частности, методы, позволяющие избежать составления и решения дифференциальных уравнений и сводить решение задачи к решению системы алгебраических уравнений.

Для нахождения минимального значения полной энергии, т. е. для реализации рассматриваемого вариационного принципа в инженерных расчетах применяется *метод Ритца*. Его можно рассматривать как способ подбора функций, обеспечивающих минимум полной энергии.

Идеи метода Ритца используются в методе конечных элементов (МКЭ) – одном из самых современных универсальных численных методов расчета. Поэтому данный метод может рассматриваться в качестве теоретической базы для МКЭ.

7.2 Полная энергия упругой системы

Рассмотрим упругое тело, например двухопорную балку. До приложения нагрузки балка находится в недеформированном состоянии (рисунок 7.1, *а*). Под действием груза она изгибается (деформируется) и груз перемещается вместе с точками балки (рисунок 7.1, *б*).

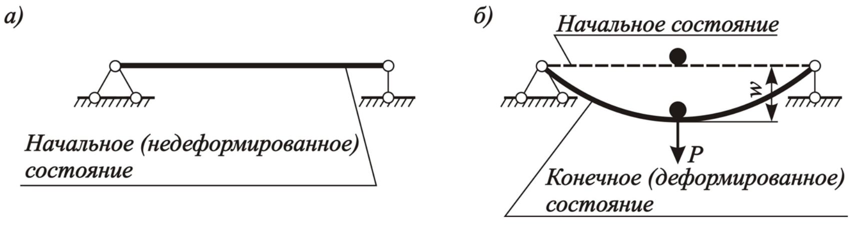


Рисунок 7.1 – К понятию о полной энергии системы:
а – балка в исходном недеформированном состоянии; *б* – балка в деформированном состоянии

В процессе деформации балки – перемещения системы «балка – груз» – потенциальная деформация груза уменьшается с уменьшением высоты груза по отношению к земле. А в самой балке накапливается энергия (потенциальная энергия деформации) аналогично тому, как накапливается энергия в пружине при ее растяжении или сжатии. Происходит перераспределение энергии между взаимодействующими телами «груз – балка». Поэтому для полной энергетической характеристики процесса деформации упругих тел необходимо рассматривать в совокупности энергию внешних сил, действующих на тело, и энергию, накапливаемую в деформируемом теле, как полную энергию системы «нагрузка – упругое тело».

Как известно, процесс обмена энергии между взаимодействующими телами количественно измеряется работой. Тогда *под полной энергией деформированной системы* (деформированного тела и действующей на него нагрузки) *понимается работа, которую совершают внутренние и внешние силы системы при мысленном переводе системы из конечного (деформированного) состояния в начальное (недеформированное).*

Итак, полная энергия системы

$$\Pi = A_{\text{внут}} - A_{\text{внеш}}, \tag{7.1}$$

где $A_{\text{внут}}$, $A_{\text{внеш}}$ – соответственно работа внутренних и внешних сил (энергия внешних сил – потенциал внешних сил) при переводе системы из конечного в начальное положение (потенциальная энергия деформации тела – потенциал внутренних сил).

Примечание – Знак «минус» означает, что направление внешней силы *P* и мысленное перемещение *w* не совпадают при переводе системы в начальное положение.

Для определения **работы внутренних сил** (потенциальной энергии деформации тела) выделим в окрестности произвольной точки тела единичный объем, все грани которого равны единице (рисунок 7.2, *а*).

Вычислим энергию, накопленную в данном единичном объеме в результате деформации. Для простоты рассмотрим случай линейной деформации, когда энергия, накопленная в единичном объеме, выражается площадью диаграммы деформирования материала (рисунок 7.2, *б*), т. е. формулой

$$u_{\text{о}} = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x . \tag{7.2}$$

Обобщая эту формулу на случай объемной деформации, когда учитываются все компоненты напряжений, получим

$$u_{\text{о}} = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}), \tag{7.3}$$

где $u_{\text{о}}$ – удельная потенциальная деформация, т. е. потенциальная энергия упругой деформации, отнесенная к единице объема.

Потенциальная энергия деформации всего тела, т. е. работа внутренних сил, определяется интегралом (суммой) по всему объему тела:

$$A_{\text{внут}} = \iiint\limits_V u_{\text{о}}\, dxdydz = \iiint\limits_V u_{\text{о}}\, dV . \tag{7.4}$$

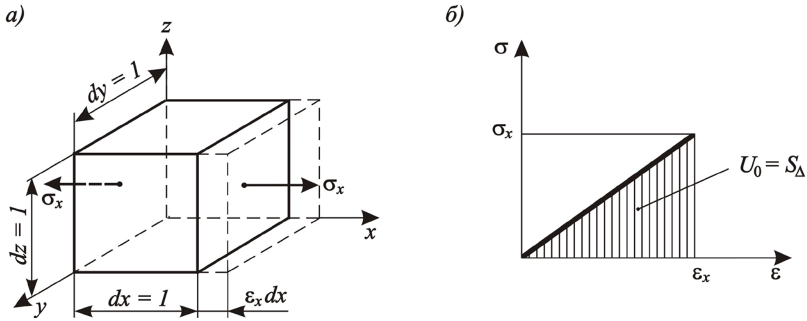


Рисунок 7.2 – К определению работы внутренних сил в выделенном единичном объеме:
а – выделенный единичный объем; *б* – диаграмма деформирования линейно-упругого материала

При выполнении расчетов необходимо иметь для каждого конкретного случая формулы потенциальной энергии, выраженной через перемещения. Например, для балки, работающей на изгиб,

$$A_{\text{внут}} = \frac{EJ}{2}\int_0^l w''(x)^2\,dx\,. \tag{7.5}$$

Работа внешней силы *F* на перемещении Δ по ее направлению

$$A_{\text{внеш}} = F\Delta\,. \tag{7.6}$$

Под силой *F* будем понимать любую нагрузку (P, $q(x)$, m), а под перемещением Δ – тот вид перемещения [w, $\varphi(x)$], на котором эта сила производит работу. Например, для балки, работающей на изгиб, при нагружении:

- вертикальной силой (рисунок 7.3, *а*) –

$$A_{\text{внеш}} = Pw(x)\,;$$

- распределенной нагрузкой (рисунок 7.3, *б*) –

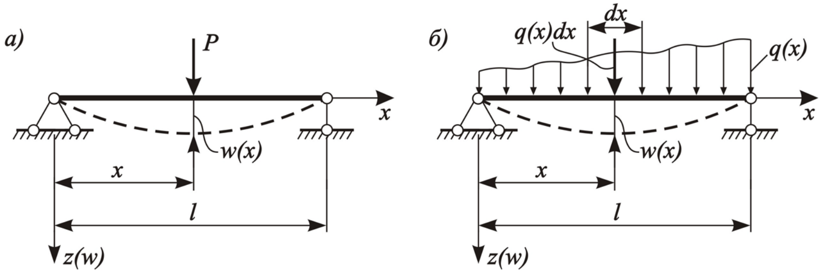
$$A_{\text{внеш}} = \int_0^l q(x)dxw(x)\,;$$

- сосредоточенным моментом (рисунок 7.3, *в*) –

$$A_{\text{внеш}} = m\varphi(x) = mw'(x)\,,$$

где $w(x)$ – прогиб балки в сечении с абсциссой *x* (в сечении, находящемся на расстоянии *x* от начала координат);

$\varphi(x)$ – угол поворота сечения с абсциссой *x*, $\varphi(x) = w'(x)$.



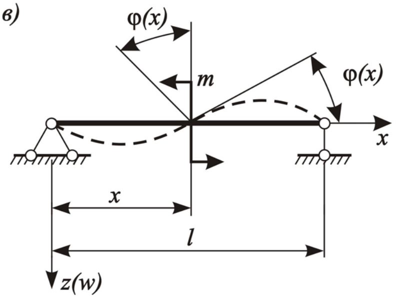


Рисунок 7.3 – К определению работы внешней силы для балки:
а – при нагружении вертикальной силой;
б – при нагружении распределенной нагрузкой; *в* – при нагружении сосредоточенным моментом

П р и м е ч а н и я

1 *Прогиб балки в данном сечении* – это перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к оси балки.

2 *Угол поворота сечения* равен углу касательной к упругой линии в данной точке и осью недеформированной балки. Это угол, на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению.

7.3 Метод Ритца

Для реализации принципа минимума полной энергии упругой системы используется метод Ритца.

Сущность метода заключается в выборе приближенной функции перемещений (прогибов) $\Delta(x, y, z)$, обеспечивающей минимум полной энергии упругой системы

$$\Pi = f\left[\Delta(x, y, z)\right]_{\min}. \tag{7.7}$$

Последовательность расчета по методу Ритца следующая.

1 Записывают аналитическое выражение энергетического функционала (полной энергии, выраженной через перемещения) для рассматриваемой системы (балки, пластины и др.):

$$\Pi = A_{\text{внут}} - A_{\text{внеш}} = f\left[\Delta(x, y, z)\right]. \tag{7.8}$$

2 Указывают кинематические граничные условия – условия, выражающие величину линейных и угловых перемещений в точках на границе (краях) упругой системы.

3 Выбирают искомую функцию перемещений в виде аппроксимирующего ряда (многочлена) с неизвестными параметрами a_i:

$$\Delta(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x, y, z), \tag{7.9}$$

где a_i – постоянные коэффициенты (пока неизвестные), определяемые в процессе решения задачи;

$\varphi_i(x, y, z)$ – базисные функции, выбранные для данной задачи, каждая из которых должна обязательно удовлетворять кинематическим граничным условиям.

Функция $\varphi_i(x, y, z)$ задается разработчиком исходя из физического содержания задачи. Каждая из выбранных базисных функций $\varphi_i(x, y, z)$ должна удовлетворять кинематическим граничным условиям.

Примечание – Базисные функции φ_i должны приближенно отражать (описывать) форму перемещений для данной системы. И чем точнее каждая базисная функция будет представлять форму перемещений, тем быстрее решение будет приближаться к точному.

Поскольку функция φ_i задается разработчиком, то остается только определить численное значение коэффициентов a_i из условия минимума полной энергии системы.

4 Подставляют выбранную функцию перемещений $\Delta(x, y, z)$ в основное уравнение (7.8) и тем самым получают полную энергию системы, выраженную через коэффициенты a_1, a_2, …, a_n.

5 Определяют численные значения коэффициентов a_i из условия минимума полной энергии системы, т. е. в результате решения следующей системы алгебраических уравнений:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0, \; \ldots, \; \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = 0. \tag{7.10}$$

Примечание – Из математики известно, что функция достигает минимума при тех значениях независимых переменных (здесь a_i), которые обращают в нуль ее первые производные.

6 Подставляют полученные значения коэффициентов a_i в аппроксимирующий ряд (7.9) и тем самым получают искомую функцию перемещений $\Delta(x, y, z)$ для рассматриваемой системы.

7 Вычисляют внутренние усилия и напряжения по найденному значению функции перемещений.

Рассмотрим пример расчета конструкции методом Ритца.

Пример расчета. Построить эпюры вертикальных перемещений (прогибов), изгибающих моментов и поперечных сил для консольной балки (рисунок 7.4, *а*) методом Ритца.

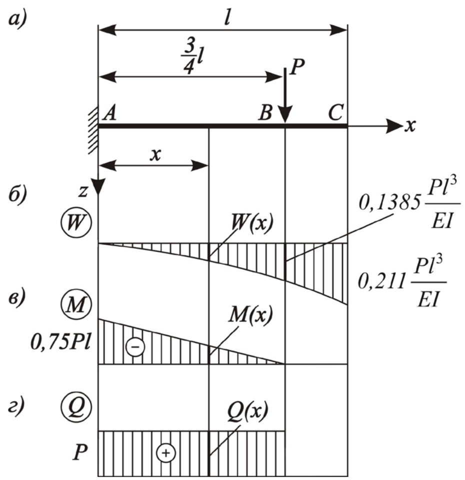


Рисунок 7.4 – К расчету консольной балки методом Ритца:
а – расчетная схема балки; *б* – эпюра вертикальных перемещений; *в* – эпюра изгибающих моментов; *г* – эпюра поперечных сил

Р е ш е н и е.

1 Записываем выражение полной энергии для рассматриваемой консольной балки, используя формулы (7.5) и (7.6):

$$\Pi = A_{\text{внут}} - A_{\text{внеш}} =$$

$$= \frac{EJ}{2}\int_0^l w''(x)^2\,dx - Pw_B. \quad (7.11)$$

Обращаем внимание, что для балки под перемещением $\Delta(x, y, z)$ будем понимать ее прогиб $w(x)$.

2 Указываем кинематические граничные условия:

- при $x = 0$ $w(x) = 0$; $\varphi(x) = w'(x) = 0$;
- при $x = l$ $w(x) \neq 0$; $\varphi(x) = w'(x) \neq 0$;

П р и м е ч а н и е – При определении граничных условий учитываем, что левый конец балки жестко закреплен, т. е. угол его поворота и прогиб равны нулю.

3 Выбираем искомую функцию прогибов (вертикальных перемещений) в виде аппроксимирующего ряда

$$w(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x) = a_1x^2 + a_2x^3 + \ldots + a_nx^{n+1}. \quad (7.12)$$

При расчете ограничимся учетом двух членов ряда функции (7.12):

$$w(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3 . \tag{7.13}$$

Определяем первую и вторую производные от $w(x)$:

$$w'(x) = a_1 \cdot 2x + a_2 \cdot 3x^2 ; \tag{7.14}$$

$$w''(x) = 2a_1 + 3a_2 \cdot 2x = 2a_1 + 6a_2 x . \tag{7.15}$$

Проверяем, удовлетворяет ли выбранная базисная функция кинематическим граничным условиям, приведенным в п. 2:

- при $x = 0 \quad w(x) = 0 ;\ \varphi(x) = w'(x) = 0 ;$
- при $x = l \quad w(x) \neq 0 ;\ \varphi(x) = w'(x) \neq 0 .$

Следовательно, граничные условия соблюдаются.

4 Подставляя $w(x)$ и $w'(x)$ в выражение (7.11), получим полную энергию системы, выраженную через коэффициенты a_1 и a_2:

$$\Pi(a_1, a_2) = \frac{EJ}{2}\int_0^l (2a_1 + 6a_2 x)^2\,dx - P\left[a_1\left(\frac{3}{4}l\right)^2 + a_2\left(\frac{3}{4}l\right)^3\right] =$$

$$= \frac{EJ}{2}\int_0^l (4a_1^2 + 24a_1 a_2 x + 36a_2^2 x^2)dx - P\left(\frac{9}{16}a_1 l^2 + \frac{27}{64}a_2 l^3\right). \tag{7.16}$$

Рассмотрим вычисление определенного интеграла в выражении (7.16), учитывая, что

$$\int dx = x + C ; \quad \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C ; \quad \int_0^l f(x)dx = F(x)\Big|_0^l = F(l) - F(0) .$$

Тогда

$$\int_0^l (4a_1^2 + 24a_1 a_2 x + 36a_2^2 x^2)dx = \int_0^l 4a_1^2 dx + \int_0^l 24a_1 a_2 x dx + \int_0^l 36a_2^2 x^2 dx =$$

$$= 4a_1^2 x\Big|_0^l + 24a_1 a_2 \frac{x^2}{2}\Big|_0^l + 36a_2^2 \frac{x^3}{3}\Big|_0^l =$$

$$= 4a_1^2 (l - 0) + 24a_1 a_2\left(\frac{l^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + 36a_2^2\left(\frac{l^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = 4a_1^2 l + 12a_1 a_2 l^2 + 12a_2^2 l^3 .$$

Подставляя полученное значение определенного интеграла в выражение (7.16), получим

$$\Pi = \frac{EJ}{2}\left(4a_1^2 l + 12a_1 a_2 l^2 + 12a_2^2 l^3\right) - P\left(\frac{9}{16}a_1 l^2 + \frac{27}{64}a_2 l^3\right).$$

5 Коэффициенты a_1 и a_2 находим из условия (7.10), т. е. $\partial\Pi/\partial a_1 = 0$ и $\partial\Pi/\partial a_2 = 0$:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_1} = \frac{EJ}{2}\left(4l \cdot 2a_1 + 12a_2 l^2 + 0\right) - P\left(\frac{9}{16}l^2 + 0\right) = \frac{EJ}{2}\left(8a_1 l + 12a_2 l^2\right) - \frac{9}{16}Pl^2 = 0 \cdot$$

$$\frac{EJ}{2}\left(8a_1 l + 12a_2 l^2\right) = \frac{9}{16}Pl^2 . \qquad (7.17)$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_2} = \frac{EJ}{2}\left(0 + 12a_1 l^2 + 12l^3 \cdot 2a_2\right) - P\left(0 + \frac{27}{64}l^3\right) = \frac{EJ}{2}(12a_1 l^2 + 24a_2 l^3) - \frac{27}{64}Pl^3 = 0 \cdot$$

$$\frac{EJ}{2}\left(12a_1 l^2 + 24a_2 l^3\right) = \frac{27}{64}Pl^3. \qquad (7.18)$$

Решая системы уравнений (7.17) и (7.18), находим

$$a_1 = \frac{45}{128} \cdot \frac{Pl}{EJ}; \quad a_2 = -\frac{9}{64} \cdot \frac{P}{EJ} .$$

6 Подставляя рассчитанные значения коэффициентов a_1 и a_2 в выражение (7.13) для $w(x)$, получим искомую функцию перемещений

$$w(x) = \left(\frac{45}{128} \cdot \frac{Pl}{EJ}\right)x^2 - \left(\frac{9}{64} \cdot \frac{P}{EJ}\right)x^3 = 0{,}352\frac{Pl}{EJ}x^2 - 0{,}141\frac{P}{EJ}x^3 .$$

Тогда значения $w(x)$:

- для $x = (3/4)l$ –

$$w_B = 0{,}352\frac{Pl}{EJ}\left(\frac{3}{4}l\right)^2 - 0{,}141\frac{P}{EJ}\left(\frac{3}{4}l\right)^3 = 0{,}198\frac{Pl^3}{EJ} - 0{,}0595\frac{Pl^3}{EJ} = 0{,}1385\frac{Pl^3}{EJ};$$

- для $x = l$ –

$$w_C = 0{,}352\frac{Pl}{EJ}l^2 - 0{,}141\frac{P}{EJ}l^3 = 0{,}352\frac{Pl^3}{EJ} - 0{,}141\frac{Pl^3}{EJ} = 0{,}211\frac{Pl^3}{EJ} .$$

Для сравнения приведем точное решение данной задачи:

$$w(x) = \frac{3}{8}\frac{Pl}{EJ}x^2 - \frac{1}{6}\frac{P}{EJ}x^3 \qquad \text{для } x \le (3/4)l ;$$

$$w(x) = \frac{9}{32}\frac{Pl^2}{EJ}x^2 - \frac{9}{128}\frac{Pl^3}{EJ} \qquad \text{для } x \ge (3/4)l .$$

Сравнение результатов показывает, что для получения точного решения недостаточно двух членов ряда для $w(x)$.

В общем случае, увеличивая число членов ряда для $w(x)$, можно получить точное решение задачи. Кроме того, желательно иметь различные законы для $w(x)$ на разных участках балки.

Эпюра вертикальных перемещений (прогибов), построенная по результатам расчета, показана на рисунке 7.4, *б*.

7 Определяем ординаты эпюр изгибающих моментов и поперечных сил по формулам

$$M(x) = -EJ \cdot w''(x); \quad Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -EJ \cdot w^3(x).$$

Для получения точного решения задачи используют зависимости

$$M(x) = -\frac{3}{4}Pl + Px; \tag{7.19}$$

$$Q(x) = P = \text{const}. \tag{7.20}$$

По зависимостям (7.19) и (7.20) построены эпюры M и Q (см. рисунок 7.4, *в*, *г*)

- для $x = (3/4)l$ – $M_B = -EJ\left(\frac{3}{4}\frac{Pl}{EJ} - \frac{3}{4}\frac{Pl}{EJ}\right) = 0$;
- для $x = 0$ – $M_A = -EJ\left(\frac{3}{4}\frac{Pl}{EJ}\right) = -0{,}75Pl$.

8 ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

8.1 Сущность метода

Недостатком метода Ритца является применимость его только к объектам простой геометрической формы с простыми граничными условиями, т. е. этот метод эффективен только при поэлементном расчете конструкций. Для объектов, имеющих сложную геометрическую форму, а это большинство конструкций, вариационные методы становятся малопригодными, главным образом, из-за трудности выбора базисных функций $\varphi_i(x, y, z)$, удовлетворяющих всем граничным условиям.

Естественно, возникает вопрос: нельзя ли представить сложную конструкцию как совокупность простых элементов, для которых можно рекомендовать «надежные» функции $\varphi_i(x, y, z)$ с определенным числом членов ряда? Оказывается, можно. Причем для дискретных конструкций, например стержневых, которые физически представляют элементы, связанные в отдельных узлах, такой подход достаточно очевиден и хорошо известен в строительной механике как метод перемещений.

Если известна математическая связь между силами и перемещениями в граничных узловых точках для каждого отдельного элемента, то исследование поведения конструкции в целом не представляет трудностей.

Метод, в основу которого положены изложенные идеи, называется **методом конечных элементов** (МКЭ), а элементы, которыми он апроксимируется, – конечными элементами. Этот метод, в принципе, идентичен описанному выше методу Ритца, однако на практике он имеет ряд существенных преимуществ.

В настоящее время метод конечных элементов получил исключительно широкое применение при расчете на прочность вагонных конструкций благодаря своей универсальности, ясной инженерной интерпретации и удобству реализации на компьютере. Это мощный и универсальный метод расчета на компьютере конструкций любой сложности независимо от геометрии, граничных условий, материала и внешних воздействий. Он базируется на матричном методе перемещений и вариационном методе.

В различных отраслях промышленности и транспорта разработаны универсальные программные комплексы, позволяющие применять МКЭ в инженерной практике.

Построение расчетной модели. В МКЭ реальный объект заменяется расчетной моделью. Для построения модели объект условно расчленяют на элементы конечных размеров (КЭ). Например, реальный объект в виде пластины условно подразделяется на конечные элементы путем нанесения на него сетки; для объекта в виде стержневой системы конечными элементами являются отдельные стержни, ограниченные в узлах (рисунок 8.1).

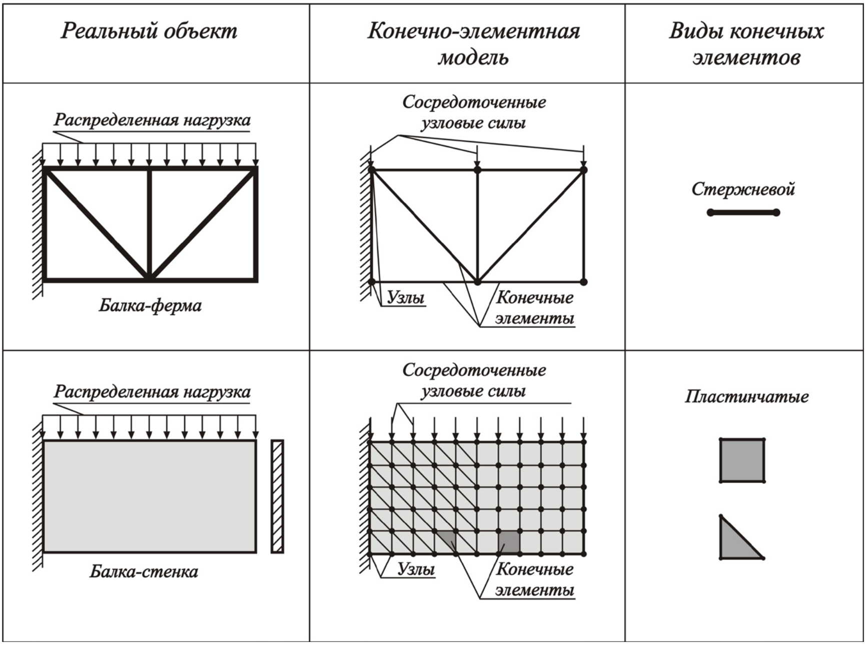


Рисунок 8.1 – Представление реальных объектов конечно-элементными моделями

Считается, что КЭ примыкают вплотную друг к другу и соединены между собой только в отдельных точках (так называемых узлах). Вся заданная внешняя нагрузка приводится к узлам.

В расчетах конкретных инженерных конструкций используется много разновидностей КЭ: стержневые, пластинчатые, оболочечные и трехмерные в виде параллелепипеда или тетраэдра.

Таким образом, расчет конструкции по МКЭ начинается с разбиения ее на отдельные простые конечные элементы, которые связаны между собой в отдельных точках – узлах. Предполагается, что в этих точках происходит взаимодействие между конечными элементами. В результате реальный объект заменяется расчетной моделью. Работа расчетной модели заключается в том, что под действием внешней узловой нагрузки узлы КЭ получат перемещения, а перемещения узлов вызывают перемещения всех точек КЭ между узлами.

Перемещения узлов от узловых сил определяются уже известным нам методом минимума полной энергии. По узловым перемещениям с помощью интерполирования находят перемещения точек внутри конечных элементов. По перемещениям точек внутри КЭ определяют деформации и напряжения в соответствии с основными уравнениями теории упругости.

Следовательно, *основными неизвестными в методе конечных элементов являются перемещения узлов*, так как по ним легко определяются все остальные искомые величины: перемещения, деформации и напряжения для любой точки любого КЭ расчетной модели.

Дальнейшее изложение материала построим по следующей схеме: сначала изучим поведение отдельного конечного элемента, а затем перейдем к изучению конструкции из этих элементов.

8.2 Установление взаимосвязи перемещения узлов с перемещениями, деформациями и напряжениями в произвольной точке отдельного конечного элемента

Установление взаимосвязи перемещения узлов с перемещениями, деформациями и напряжениями в точках внутри отдельного конечного элемента рассмотрим на примере одномерной задачи – осевого растяжения прямого стержня (рисунок 8.2, *а*).

Произведем разбиение реального объекта на узлы и конечные элементы и тем самым получим расчетную конечно-элементную модель (рисунок 8.2, *б*). Как следует из рисунка 8.2, в рассматриваемой консоли выделено четыре узла (с номерами 0, 1, 2, 3), расчленяющих ее на три отдельных стержневых элемента (с номерами 1, 2, 3 в кружках), в пределах которых жесткости сечений постоянны.

От внешней нагрузки P все точки консоли (в том числе и узловые) получают продольные перемещения вдоль оси x. Перемещения узлов обозначим через U_1, U_2, U_3.

Выделим отдельный конечный элемент, например, с номером 2 (рисунок 8.2, *в*). Эпюра продольных перемещений для него показана на рисунке 8.2, *г*.

Удобно для каждого конечного элемента искомую функцию $u(x)$ – функцию продольных перемещений – выбирать по аналогии с методом минимума полной энергии в виде приближенного (аппроксимирующего) ряда, в данном случае – в виде линейного алгебраического полинома

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(x)=a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)=U_1\varphi_1(x)+U_2\varphi_2(x)=$$

$$=U_1\left(1-\frac{x}{l}\right)+U_2\left(\frac{x}{l}\right), \tag{8.1}$$

где a_1, a_2 – числовые коэффициенты функции перемещений, равные соответственно перемещениям U_1 и U_2 узлов рассматриваемого конечного элемента;

$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – базисные функции (функции формы), которые для всех линейных конечных элементов одинаковы и равны,

$$\varphi_1(x)=1-\frac{x}{l} \quad \text{и} \quad \varphi_2(x)=\frac{x}{l}. \tag{8.2}$$

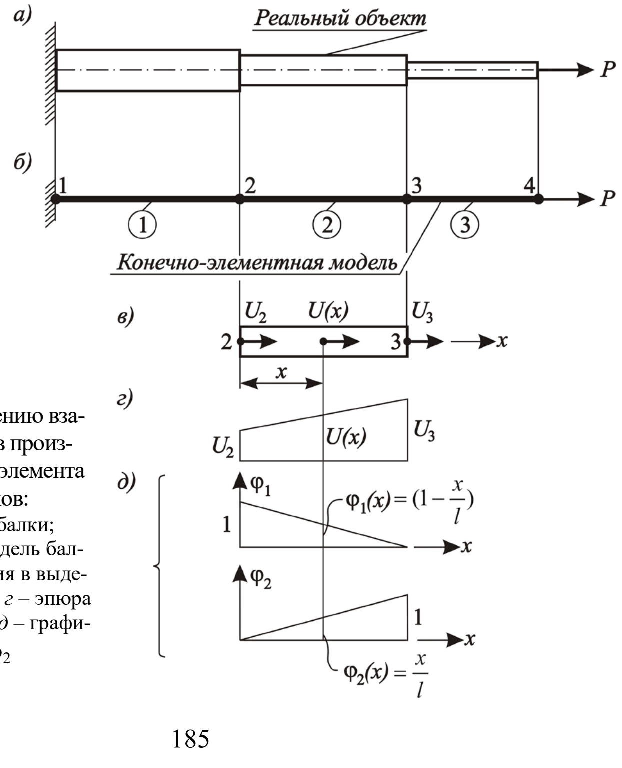


Рисунок 8.2 – К установлению взаимосвязи перемещений в произвольной точке конечного элемента от перемещений узлов:
а – модель консольной балки;
б – конечно-элементная модель балки; *в* – узловые перемещения в выделенном конечном элементе; *г* – эпюра продольных перемещений; *д* – графики функций φ_1 и φ_2

Графики функций φ_1 и φ_2 (см. рисунок 8.2, *д*) иллюстрируют одно из самых замечательных свойств этих специально подобранных функций: каждая из них принимает значение, равное единице, в том узле, номер которого совпадает с номером функции, и нулю – в остальных узлах. Заметим, что этим замечательным свойством будут обладать все базисные функции для всех видов конечных элементов независимо от их мерности.

П р и м е ч а н и е – Расчет конструкций методом конечных элементов выполняется с помощью компьютера. Это чисто машинный метод расчета. Потому все последующие рассуждения целесообразно вести в матричной форме, удобной для компьютера.

В матричной форме *перемещение произвольной точки конечного элемента* (выражение (7.1)) будет иметь вид

$$\{u_x\} = [\varphi_1(x),\ \varphi_1(x)]\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = [\varphi]\{U\}, \tag{8.3}$$

где $[\varphi]$ – матрица базисных функций,

$$[\varphi] = [\varphi_1(x),\ \varphi_1(x)];$$

$\{U\}$ – матрица-столбец узловых перемещений,

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}.$$

Относительная деформация для произвольной точки конечного элемента определяется с использованием геометрических уравнений теории упругости (5.10) и выражения (8.1):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du(x)}{dx} = U_1\frac{d\varphi_1(x)}{dx} + U_2\frac{d\varphi_2(x)}{dx}. \tag{8.4}$$

Запишем выражение (8.4) в матричной форме:

$$\{\varepsilon_x\} = \left[\frac{d\varphi_1(x)}{dx},\ \frac{d\varphi_2(x)}{dx}\right]\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = [B]\{U\}, \tag{8.5}$$

где $[B]$ – матрица производных от базисных функций,

$$[B] = \left[\frac{d\varphi_1(x)}{dx},\ \frac{d\varphi_2(x)}{dx}\right] = \left[-\frac{1}{l},\ \frac{1}{l}\right]. \tag{8.6}$$

Обращаем внимание, что относительные деформации в точках между узлами конечного элемента также выражены через перемещения узлов U.

Нормальные напряжения в произвольной точке внутри конечного элемента определяются с использованием физических уравнений теории упругости (по закону Гука для линейного напряженного состояния) с учетом (8.4):

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\left(U_1 \frac{d\varphi_1(x)}{dx} + U_2 \frac{d\varphi_2(x)}{dx}\right) \qquad (8.7)$$

или в матричной форме:

$$\{\sigma_x\} = [D][B]\{u\}, \qquad (8.8)$$

где $[D]$ – матрица упругих характеристик материала, состоящая в данном случае из одного элемента – модуля упругости материала рассматриваемого конечного элемента при растяжении E,

$$[D] = E. \qquad (8.9)$$

Выражения (8.3), (8.5) и (8.8) показывают, что, зная перемещения узлов какого-либо конечного элемента, можно определить *перемещение, деформацию и напряжение* в любой точке такого конечного элемента, а следовательно, в любой точке изучаемого объекта.

Аналогично можно определить выражения для перемещений, деформаций и напряжений в точках внутри отдельного двумерного (пластина) и трехмерного (параллелепипед или тетраэдр) конечного элемента. Обобщая их, можно записать:

$$\{u\} = [\varphi]\{U\}; \qquad (8.10)$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U\}; \qquad (8.11)$$

$$\{\sigma\} = [D][B]\{U\}. \qquad (8.12)$$

Заметим, что зависимости (8.3) и (8.10), (8.5) и (8.11), (8.8) и (8.12) имеют одинаковую структуру записи и выражены через узловые перемещения $\{U\}$.

Зависимости (8.10)–(8.12) еще раз показывают, что, зная перемещения всех узлов объекта $\{U\}$, можно однозначно определить перемещения $\{u\}$, деформации $\{\varepsilon\}$ и напряжения $\{\sigma\}$ в любой точке между узлами, т. е. во всех точках объекта.

Теперь рассмотрим определение узловых перемещений.

8.3 Определение перемещений узлов методом минимума полной энергии

В соответствии с принципом минимума полной энергии (7.1) имеем

$$\Pi = \left(A_{\text{внут}} - A_{\text{внеш}}\right)_{\min}. \qquad (8.13)$$

Выразим в уравнении (8.13) полную энергию через перемещения узлов и затем, минимизируя полную энергию по узловым перемещениям, придем к системе алгебраических уравнений, решение которой и дает нам искомые перемещения узлов.

Работа внутренних сил (энергия внутренних сил). Работа внутренних сил для i-го конечного элемента объемом V_i для объемного напряженного состояния определяется по выражению (7.4) с учетом (7.3):

$$A^i_{\text{внут}} = \frac{1}{2}\iiint\limits_{V_i}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})\,dV$$

или в матричной форме

$$A^i_{\text{внут}} = \frac{1}{2}\iiint\limits_{V_i}\left[\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z,\ \gamma_{xy},\ \gamma_{yz},\ \gamma_{zx}\right]\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}dV. \qquad (8.14)$$

Транспонируя в выражении (8.10) матрицу-строку (т. е. заменяя строку столбцом), запишем:

$$A^i_{\text{внут}} = \frac{1}{2}\iiint\limits_{V_i}\{\varepsilon_i\}^{\text{т}}\{\sigma_i\}dV. \qquad (8.15)$$

Подставляя (8.11) и (8.12) в формулу (8.15), получим для i-го конечного элемента

$$A^i_{\text{внут}} = \frac{1}{2}\iiint\limits_{V_i}\left([B_i]\{U_i\}\right)^{\text{т}}[D_i][B_i]\{U_i\}dV. \qquad (8.16)$$

Примечание – Учтем, что транспонирование произведения нескольких матриц приводит к произведению транспонированных матриц, но с изменением последовательности перемножения, т.е. для рассматриваемого случая

$$\left([B_i]\{U_i\}\right)^{\text{т}} = \{U_i\}^{\text{т}}[B_i]^{\text{т}}.$$

С учетом примечания *работа внутренних сил для i-го конечного элемента*

$$A^i_{\text{внут}} = \frac{1}{2}\iiint\limits_{V_i}\{U_i\}^{\text{т}}[B_i]^{\text{т}}[D_i][B_i]\{U_i\}dV. \qquad (8.17)$$

Тогда *работа внутренних сил для всей конструкции (энергия внутренних сил)* будет равна сумме работ (энергий) отдельных составляющих ее конечных элементов:

$$A_{\text{внут}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\iiint_{V_i}\{U_i\}^{\text{т}}[B_i]^{\text{т}}[D_i][B_i]\{U_i\}dV, \qquad (8.18)$$

где n – общее число конечных элементов.

Работа внешних сил (энергия внешних сил). Как отмечалось выше, вся внешняя нагрузка приводится к узловым силам, которые затем разлагаются на составляющие по направлению узловых перемещений.

Рассмотрим трехмерный конечный элемент в виде параллелепипеда (рисунок 8.3) с тремя степенями свободы в каждом узле, т. е. с тремя линейными перемещениями узла вдоль осей x, y, z. С целью упрощения перемещения показаны только для 7-го узла: U_7, V_7, W_7.

Тогда работа силы R_7

$$A_{\text{внеш}}^{R7} = U_7 R_{7x} + V_7 R_{7y} + W_7 R_{7z}, \qquad (8.19)$$

где R_{7x}, R_{7y}, R_{7z} – проекции силы R_7 на координатные оси и соответствующие им перемещения узла U_7, V_7, W_7.

Запишем выражение (8.19) в матричной форме:

$$A_{\text{внеш}}^{R7} = [U_7, V_7, W_7]\begin{Bmatrix} R_{7x} \\ R_{7y} \\ R_{7z} \end{Bmatrix}. \qquad (8.20)$$

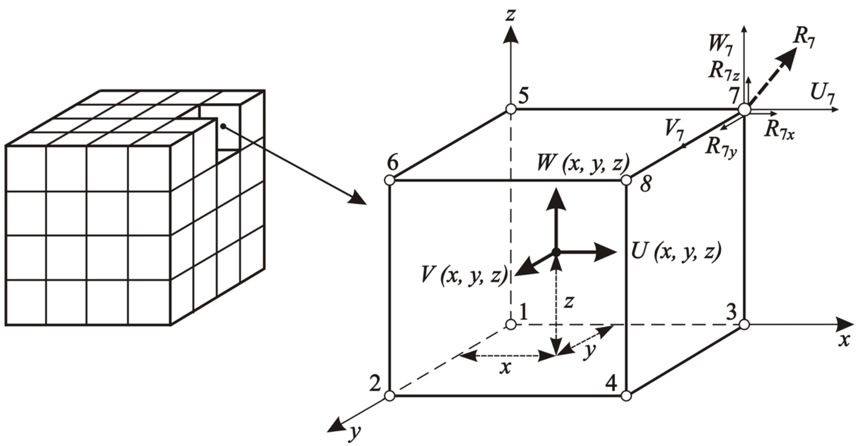


Рисунок 8.3 – Выделенный трехмерный конечный элемент
с линейными перемещениями узла с номером 7

В общем случае, учитывая проекции сил во всех уздах расчетной модели, получим

$$A_{\text{внеш}} = \left[U_1,\, V_1,\, W_1;\, U_2,\, V_2,\, W_2;\, ...\right]\begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{1z} \\ R_{2x} \\ ... \end{Bmatrix} = \left[U\right]\left\{R\right\}. \tag{8.21}$$

Применяя транспонирование (заменяя матрицу-строку $\left[U\right]$ на матрицу-столбец $\left\{U\right\}^{\text{т}}$), получим окончательно выражение *работы внешних сил, действующих на расчетную модель*:

$$A_{\text{внеш}} = \left\{U\right\}^{\text{т}}\left\{R\right\}. \tag{8.22}$$

Полная энергия для всей расчетной модели. Полная энергия для всей расчетной модели объемом V

$$\Pi = A_{\text{внут}} - A_{\text{внеш}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\iiint\limits_{V_i}\left\{U_i\right\}^{\text{т}}\left[B_i\right]^{\text{т}}\left[D_i\right]\left[B_i\right]\left\{U_i\right\}dV - \left\{U\right\}^{\text{т}}\left\{R\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\iiint\limits_{V_i}\left\{U_i\right\}^{\text{т}}\left[A_i\right]\left\{U_i\right\}dV - \left\{U\right\}^{\text{т}}\left\{R\right\}, \tag{8.23}$$

где

$$\left[A_i\right] = \left[B_i\right]^{\text{т}}\left[D_i\right]\left[B_i\right]. \tag{8.24}$$

Выражение (8.23) представляет собой функцию, устанавливающую связь между полной энергией П и узловыми перемещениями $\left\{U\right\}$.

Минимизация полной энергии по узловым перемещениям. *В соответствии с принципом минимума полной энергии (8.13) истинными перемещениями узлов будут те, при которых полная энергия примет минимальное значение.*

П р и м е ч а н и е – Минимум некоторой функции, если он существует, достигается при одновременном равенстве нулю частных производных по всем неизвестным.

Функция полной энергии П [выражение (8.23)] достигает минимума при тех значениях независимых переменных (узловых перемещениях $\left\{U\right\}$), которые обращают в нуль ее первые производные:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial\left\{U\right\}} = 0. \tag{8.25}$$

Подставив (8.23) в (8.25), получим

$$\frac{\partial}{\partial\{U\}}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\iiint_{V_i}\{U_i\}^{\text{т}}[A_i]\{U_i\}dV-\{U\}^{\text{т}}\{R\}\right)=0\,. \qquad (8.26)$$

Примечание – Из матричной алгебры известно, что:

- частная производная от произведения трех матриц

$$\frac{\partial}{\partial\{U\}}\left(\{U\}^{\text{т}}[A]\{U\}\right)=2[A]\{U\};$$

- частная производная от транспонированной матрицы

$$\frac{\partial\{U\}^{\text{т}}}{\partial\{U\}}=1\,.$$

После дифференцирования с учетом примечания получим

$$\sum_{i=1}^{n}\iiint_{V_i}[A_i]\{U_i\}dV-\{R\}=0. \qquad (8.27)$$

Подставим в (8.27) выражение (8.24) для $[A_i]$:

$$\sum_{i=1}^{n}\iiint_{V_i}[B_i]^{\text{т}}[D_i][B_i]dV\,\{U\}-\{R\}=0. \qquad (8.28)$$

Зависимость (8.28) есть основное разрешающее уравнение МКЭ.

Уравнение (8.28) запишем в несколько иной форме. Обозначим

$$[K_i]=\iiint_{V_i}[B_i]^{\text{т}}[D_i][B_i]dV \qquad (8.29)$$

и назовем матрицу $[K_i]$ *матрицей жесткости отдельного конечного элемента*. Тогда зависимость (8.28) с учетом (8.29) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n}[K_i][U]=\{R\}. \qquad (8.30)$$

Основное разрешающее уравнение МКЭ в окончательном виде будет иметь вид

$$[K][U]=\{R\}, \qquad (8.31)$$

где $[K]$ – матрица жесткости всей расчетной модели, состоящей из n конечных элементов,

$$[K]=\sum_{i=1}^{n}[K_i]; \qquad (8.32)$$

$\{U\}$ – матрица-столбец искомых перемещений узлов;

$\{R\}$ – матрица-столбец заданных внешних сил, приложенных в узлах расчетной модели.

В развернутом виде *выражение (8.31) представляет собой систему алгебраических уравнений*, из которой определяются искомые узловые перемещения.

Примечание – При расчетах сложных пространственных конструкций зависимость (8.31) в развернутом виде будет представлять систему из десятков и сотен тысяч алгебраических уравнений с искомыми узловыми перемещениями. Число уравнений будет равно числу степеней свободы всей расчетной модели. Только компьютеру под силу справиться с такими задачами. Поэтому МКЭ и называют компьютерным методом расчета.

Таким образом, как следует из основного разрешающего уравнения МКЭ (8.31), для нахождения искомых узловых перемещений $\{U\}$ необходимо иметь матрицы жесткости $[K]$ и заданных внешних нагрузок $\{R\}$. Поэтому ниже рассмотрено получение матрицы жесткости для простейших конечных элементов.

Примечание – В формуле (8.29) для определения матрицы жесткости отдельного конечного элемента необходимо перемножить три матрицы и проинтегрировать по объему конечного элемента. В результате получают прямоугольную матрицу, каждый элемент которой характеризует жесткость рассматриваемого конечного элемента (например, жесткость стержня *EF* при растяжении). Отсюда и название – *матрица жесткости элемента*.

Матрица жесткости не зависит от внешней нагрузки, потому для каждого вида конечных элементов достаточно вычислить ее один раз в зависимости от матрицы производных базисных функций $[B]$ и матрицы физических характеристик материала $[D]$. Поэтому для наиболее распространенных видов конечных элементов матрицы жесткости уже составлены (вычислены).

8.4 Получение матриц жесткости для простейших конечных элементов

Для формирования матрицы жесткости отдельного конечного элемента используется формула (8.29), которая носит общий характер и позволяет получить (построить) по единой методике элементы матриц жесткости для любого конечного элемента независимо от его вида, материала и базисных функций.

В качестве примера рассмотрим процесс построения матрицы жесткости для одномерного конечного элемента, работающего на растяжение под действием силы *P* (рисунок 8.4, *а*).

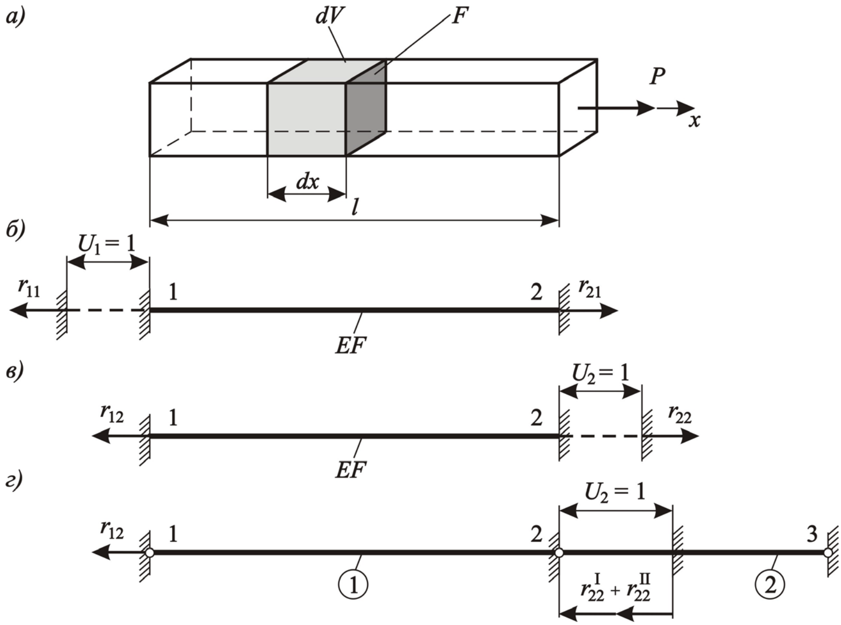


Рисунок 8.4 – К построению матрицы жесткости для конечного элемента:
а – одномерный конечный элемент; *б*, *в* – опорные реакции от единичного смещения узлов *1* и *2* соответственно; *г* – опорные реакции от единичного смещения узла, в котором сходятся элементы *1* и *2*

Напомним, что матрицы производных от базисных функций $[B]$ и упругих характеристик материала $[D]$, полученные для одномерного конечного элемента (см. формулы (8.6) и (8.9)):

$$[B] = \left[-\frac{1}{l},\ \frac{1}{l}\right];\ \ [D] = E.$$

Тогда транспонированная матрица, полученная из матрицы $[B]$, будет иметь вид

$$[B]^{\mathrm{т}} = \begin{bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{bmatrix}.$$

Подставляя матрицы $[B]^{\mathrm{т}}$, $[B]$ и $[D]$ в выражение (8.29), получим матрицу жесткости одномерного конечного элемента

$$[K_i] = \iiint\limits_{V_i} \begin{bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{bmatrix} E\,[-1/l,\ 1/l]\,dV. \qquad (8.33)$$

Заменим элементарный объем dV на произведение $F \cdot dx$ (F – площадь поперечного сечения элемента) и тем самым перейдем от тройного интеграла к одинарному:

$$[K_i] = EF \begin{bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{bmatrix} [-1/l,\ 1/l] \int_0^l dx \ . \qquad (8.34)$$

Примечания

1 Перемножение матриц по правилу «строка на столбец» дает следующий результат:

$$\begin{bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{bmatrix} [-1/l,\ 1/l] = \begin{bmatrix} (-1/l)(-1/l) & (-1/l)(1/l) \\ (1/l)(-1/l) & (1/l)(1/l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/l^2 & -1/l^2 \\ -1/l^2 & 1/l^2 \end{bmatrix}.$$

2 Интегрирование определенного интеграла дает

$$\int_0^l dx = x \Big|_0^l = l - 0 = l.$$

После перемножения матриц («строка на столбец») и интегрирования с учетом примечания получим

$$[K_i] = \begin{bmatrix} \dfrac{EF}{l} & -\dfrac{EF}{l} \\ -\dfrac{EF}{l} & \dfrac{EF}{l} \end{bmatrix}. \qquad (8.35)$$

Компонентам матрицы жесткости можно дать простое физическое толкование. Напомним, что удлинение Δl стержня при осевом растяжении $\Delta l = Nl/(EF)$, откуда

$$N = (\Delta l \cdot EF)/l. \qquad (8.36)$$

Если у стержня, заделанного с двух сторон (см. рисунок 8.4, *б*), одной из заделок (например, 1) дать смещение, равное 1, то согласно (8.36) в стержне возникнет внутренняя продольная сила N, а в заделке – равная ей опорная реакция r_{11}, т. е.

$$N = r_{11} = \frac{1 \cdot EF}{l} = \frac{EF}{l}. \qquad (8.37)$$

Во второй заделке возникнет в противоположном направлении такая же реакция:

$$r_{21} = -\frac{EF}{l}.$$

Таким образом, элементы первого столбца в (8.35) представляют собой реакции в обоих узлах от единичного смещения первого узла, а элементы второго столбца – реакции от единичного смещения второго узла (см. рисунок 8.4, *в*).

В общем случае r_{ik} – реакция в *i*-м узле от единичного смещения узла *k*.

Матрицу жесткости называют в связи с этим также *матрицей реакций*:

$$\left[K_i\right]=\begin{bmatrix} r_{11} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{EF}{l} & -\dfrac{EF}{l} \\ -\dfrac{EF}{l} & \dfrac{EF}{l} \end{bmatrix}=\frac{EF}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (8.38)$$

где $r_{ik}=r_{ki}$.

Такое толкование элементов матрицы жесткости делает расчет более наглядным.

Если единичное смещение получает узел, в котором сходятся два элемента, то реакции от каждого элемента складываются (см. рисунок 8.4, *г*).

Примечания

1 Стержневой конечный элемент, работающий на растяжение, имеет по концам два узла. Каждый узел имеет возможность перемещаться только вдоль оси *x* или, как говорят, каждый узел имеет одну степень свободы. В целом же такой конечный элемент имеет две степени свободы, и матрица жесткости получилась второго порядка [см. формулу (8.38)].

Итак, порядок матрицы жесткости отдельного конечного элемента равен числу степеней свободы этого конечного элемента.

2 С увеличением числа степеней свободы у конечного элемента резко увеличивается объем математических операций. Например, для простейшего двумерного конечного элемента, находящегося в плоском напряженном состоянии, матрица жесткости имеет восьмой порядок.

Для большого набора стандартных конечных элементов (стержневых, пластинчатых, оболочечных и трехмерных) уже получены матрицы жесткости, и они составляют своеобразную библиотеку, используемую в расчетах на компьютере по МКЭ.

3 По совокупности матриц жесткости отдельных конечных элементов формируется суммарная матрица жесткости всего объекта [см. формулу (8.32)].

Процесс этот чрезвычайно громоздкий. Однако при использовании пакетов прикладных программ, реализующих МКЭ, он осуществляется автоматически.

8.5 Расчет боковой рамы тележки грузового вагона методом конечных элементов

8.5.1 Расчетная схема рамы по МКЭ

Исходная расчетная схема. Расчетная схема боковой рамы в зависимости от поставленных целей может моделироваться различными видами конечных элементов: плоскими (рисунок 8.5, *а*), объемными (рисунок 8.5, *б*) и стержневыми. Рассмотрим наиболее простой вариант расчетной схемы боковой рамы, когда она моделируется стержневыми конечными элементами. В качестве исходной в этом случае принимаем расчетную схему 1/2 части рамы (рисунок 8.6). Обоснование выбора этой расчетной схемы дано в п. 3.11.1, а ее геометрические параметры приведены в таблице 3.1. Исходная расчетная схема загружена тремя вертикальными силами: P_1, P_2 и $P_3 = 0{,}5P_1$.

Особенностью расчетной схемы рамы тележки грузового вагона является необходимость учета конечных размеров узлов, а также их некоторой податливости. Методика учета податливости узлов, принятая в п. 3.11.1, предполагает продолжение в тело узла эпюр, затухающих по линейному закону на длине, равной высоте поперечного сечения стержня (рисунок 8.7, *а*). Однако для расчета методом конечных элементов удобнее применять другую методику учета податливости узлов [28]. В соответствии с этой методикой протяженность упругой части стержня считается увеличенной за счет узла на длину, равную 0,3–0,33 высоты поперечного сечения (рисунок 8.7, *б*). Остальная часть узла принимается абсолютно жесткой. Такой прием позволяет строить эпюры только на упругой части стержня.

а)

б)

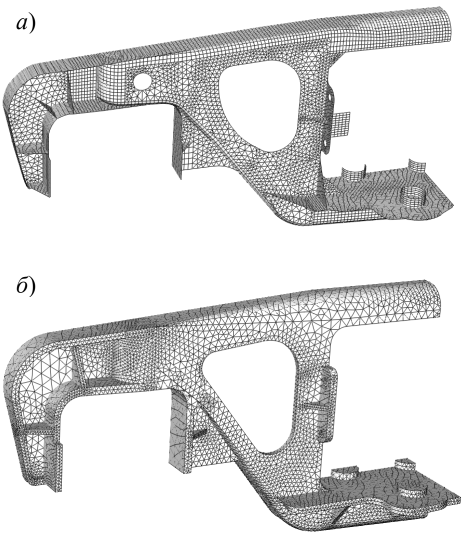


Рисунок 8.5 – Расчетные схемы боковой рамы, образованные плоскими (*а*) и объемными (*б*) конечными элементами

Расчетная модель рамы по МКЭ. Последовательность составления расчётной схемы по МКЭ:

1) выполняется разбивка исходной расчетной схемы на узлы и конечные элементы;

2) производится нумерация узлов и конечных элементов;

3) выбираются глобальные и местные оси координат.

На первом этапе исходная расчетная схема разбивается на конечные элементы, соединенные в узлах. Узловые точки при этом задаются в местах:

- соединения стержней;
- граничных точках стержней, к которым приложены связи;
- изменения жесткости стержней;
- приложения сосредоточенных сил.

Выделяя в исходной расчетной схеме узловые точки, мы расчленяем ее на отдельные стержневые конечные элементы, в пределах которых жесткости сечений, т. е. их геометрия и размеры, условно принимаются постоянными. Следовательно, *отдельный конечный элемент* – это стержень, ограниченный узлами.

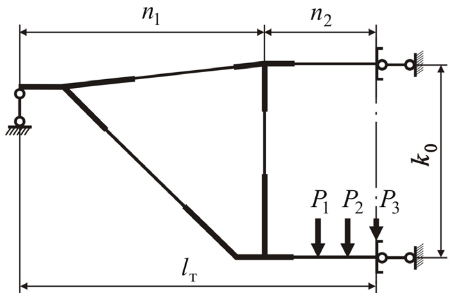


Рисунок 8.6 – Исходная расчетная схема 1/2 части боковой рамы

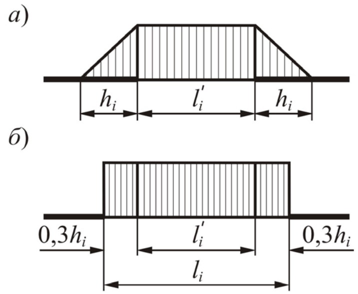


Рисунок 8.7 – Способы учета податливости узлов

В целом разбивка системы на конечные элементы определяется особенностями конструкции и требуемой точностью расчета. С позиций учебного процесса, например, не обязательно всегда вводить узлы в местах изменения жесткости.

Для составления расчетной схемы рамы по МКЭ можно использовать различные стержневые конечные элементы. На рисунке 8.8 показана разбивка исходной расчетной схемы на узлы и конечные элементы при использовании стержневых конечных элементов без жестких вставок и с жесткими вставками по концам. Здесь номера узлов отмечены цифрами, а номера конечных элементов – цифрами в кружках. Как следует из рисунка 8.8, использование в расчетной схеме стержневых конечных элементов с жесткими вставками приводит к меньшему числу узлов и конечных элементов, т. е. упрощает расчет. Однако не все пакеты прикладных программ, реализующие МКЭ, имеют в своем составе стержневые конечные элементы с жесткими вставками. Поэтому в дальнейшем в качестве основного варианта будем рассматривать расчетную схему, приведенную на рисунке 8.8, *а*.

Обратим внимание на то, что расчетные схемы, показанные на рисунке 8.8, можно сделать более точными, расчленив, например, нижний горизонтальный пояс и колонку на большее число конечных элементов.

Нумерацию узлов и конечных элементов удобно выполнять в порядке возрастания номеров, хотя она может быть и произвольной.

В методе конечных элементов различают глобальные и локальные оси координат. *Глобальные оси координат X*, *Y*, *Z* задаются для всей расчетной схемы и должны быть правыми декартовыми. Они необходимы для определения положения узлов системы в пространстве и установления знака узловых сил. *Направления глобальных осей* координат должны быть следующими: ось Y должна быть направлена вверх, а ось X – вдоль рассматриваемой конст рукции. Узлу, расположенному в начале координат, присваивается обычно номер 1.

Локальные оси координат x, y, z задаются для каждого конечного элемента и также должны быть правыми декартовыми. Они используются для задания геометрических характеристик сечений элементов и расчета напряжений, возникающих в конечных элементах. Начало локальной системы координат стержневого элемента совпадает с центром тяжести сечения в начале стержня (сечения с меньшим номером узла).

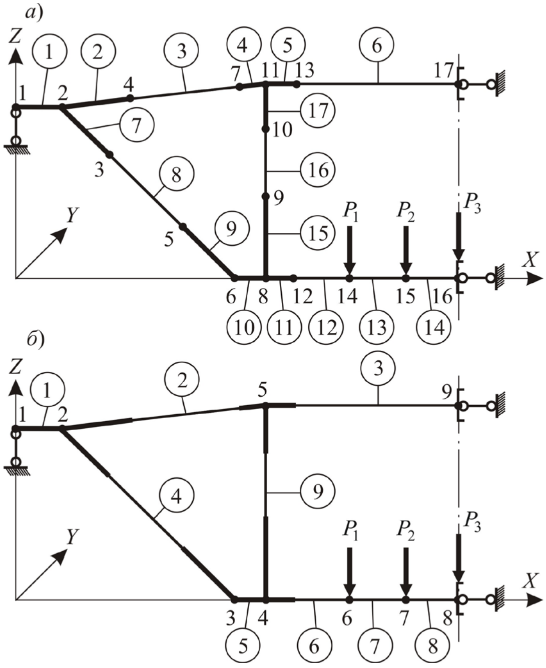


Рисунок 8.8 – Расчетные модели боковой рамы по МКЭ с использованием стержневых конечных элементов:
а – без жестких вставок; *б* – с жесткими вставками по концам

Ориентация локальных осей для стержневых конечных элементов:

- ось z направлена вдоль оси конечного элемента от его начала к концу;
- ось y лежит в плоскости, образованной узлами элемента и узлом ориентации, и направлена перпендикулярно оси стержня в сторону, противоположную положению ориентирующего узла;
- ось x перпендикулярна осям z и y и составляет с ними правую систему осей координат.

П р и м е ч а н и е – Требуемая ориентация поперечного сечения стержня в пространстве задается с помощью некоторой точки *А*, называемой *узлом ориентации*.

При этом ориентирующий узел должен располагаться в плоскости осей *y*, *z* стержня, но не может лежать на его продольной оси *z*.

На рисунке 8.9 показаны направления глобальных и локальных осей координат расчетной модели боковой рамы, а также расположение ориентирующего узла *A*.

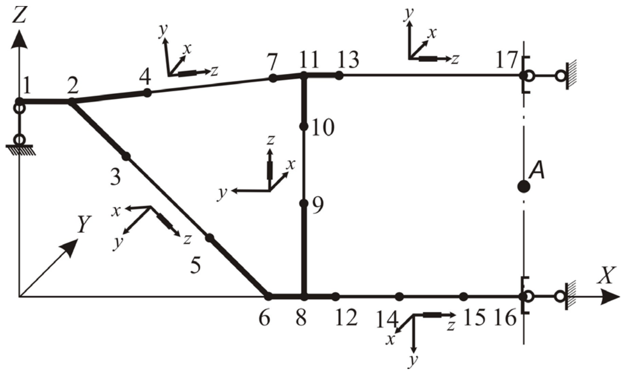


Рисунок 8.9 – Глобальные и местные оси координат

8.5.2 Подготовка исходной информации для создания компьютерной модели

После построения расчетной модели рамы по МКЭ производится подготовка исходной информации для ввода в компьютер:

- определяются расчетные силы P_1, P_2 и P_3;
- устанавливаются линейные размеры расчетной схемы;
- рассчитываются геометрические характеристики конечных элементов;
- заполняются бланки документов.

Определение расчетных сил. Расчетные силы P_1, P_2 и P_3 ($P_3 = 0{,}5P_1$) определяются по формулам, приведенным в п. 3.11.1. При этом нужно помнить, что в программных комплексах размерность сосредоточенных сил – кг или т. Поэтому необходим перевод значений расчетных сил из килоньютонов в килограммы или тонны.

Установление линейных размеров расчетной схемы. Линейные размеры расчетной схемы рамы тележек моделей 18-100 ($p_о$ < 245 кН) и 18-755 ($p_о$ ≥ 245 кН) приведены в таблице 3.1. Согласно принятой методике учета податливости узлов, длины упругих участков стержней в таблице 3.1 должны быть увеличены с каждого конца на 0,3 высоты их сечений. Соответственно должны быть уменьшены длины узлов.

В таблице 8.1 геометрические размеры расчетной схемы рамы, показанной на рисунке 6.3, *а*, заданы координатами узлов относительно глобальных осей *X*, *Y*, *Z*.

При необходимости, если это требуется по условиям проектирования, геометрические размеры расчетной схемы могут быть изменены.

Таблица 8.1 – **Координаты узлов расчетной схемы рамы**

В сантиметрах

Номер узла	Координаты узлов					
	$p_о < 245$ кН			$p_о \geq 245$ кН		
	X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
1	0	0	51,8	0	0	54,8
2	8,8	0	51,8	9,5	0	54,8
3	18,2	0	40,2	16,9	0	44,1
4	25,3	0	52,4	25,4	0	54,8
5	37,7	0	16,2	38,3	0	13,5
6	51,4	0	0	47,6	0	0
7	48,1	0	53,1	52,6	0	54,8
8	56,2	0	0	56,3	0	0
9	56,2	0	20,4	56,3	0	20,6
10	56,2	0	47,9	56,3	0	53,5
11	56,2	0	53,4	56,3	0	54,8
12	62,0	0	0	57,9	0	0
13	62,8	0	53,4	60,4	0	54,8
14	71,5	0	0	71,5	0	0
15	82,0	0	0	82,0	0	0
16	92,5	0	0	92,5	0	0
17	92,5	0	53,4	92,5	0	54,8

Вычисление геометрические характеристики сечений конечных элементов. Для каждого конечного элемента должны быть известны геометрические характеристики сечений стержневых конечных элементов в узлах J_x, J_y, $J_к$, F, а также координаты четырех точек сечения в локальной системе координат, для которых определяются напряжения x_i, y_i.

Здесь J_x, J_y – моменты инерции сечения стержня относительно локальных осей *x* и *y*, см^4; $J_к$ – момент инерции сечения стержня при кручении, см^4; F – площадь сечения стержня, см^2.

Геометрические характеристики сечений конечных элементов боковых рам тележек моделей 18-100 ($p_о < 245$ кН) и 18-755 ($p_о \geq 245$ кН) приведены в таблице 8.2. Для бесконечно жестких конечных элементов 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 15 и 17 принимаем $F = 10^6$ см^2, $J_x = J_y = J_к = 10^6$ см^4.

Примечание – В таблице 8.2 в колонках для геометрических характеристик J_y и $J_к$ стоят прочерки, поскольку в плоской системе деформации изгиба относительно локальной оси *y* и кручения отсутствуют.

Положение расчетных сечений расчетной модели боковой рамы показано на рисунке 8.10, а сами сечения с ориентировкой локальных осей и точками, в которых определяются напряжения, – на рисунке 8.11.

Таблица 8.2 – **Геометрические характеристики сечений конечных элементов расчетной схемы рамы**

Расчетные сечения			Геометрические характеристики сечений конечных элементов							
			$p_о < 245$ кН				$p_о \geq 245$ кН			
Номер КЭ	Номер узла	Номер сечения	F, см^2	J_x, см^4	J_y, см^4	$J_к$, см^4	F, см^2	J_x, см^4	J_y, см^4	$J_к$, см^4
3	4, 7	1	41,4	276	–	–	41,7	304	–	–
6	13	2	47,5	395	–	–	44,6	321	–	–
	17	3	48,1	400	–	–	52,3	389	–	–
8	3	4	56,8	768	–	–	84,2	1376	–	–
	5	5	54,0	736	–	–	63,7	1018	–	–
12	12, 14	6	111,2	2254	–	–	117,8	3003	–	–
13	14	6	111,2	2254	–	–	117,8	3003	–	–
	15	7	143,6	3049	–	–	149,8	3897	–	–
14	15, 16	7	143,6	3049	–	–	149,8	3897	–	–
16	9, 10	8	45,4	351	–	–	63,4	453	–	–

Заполнение бланков документов. Для решения задачи по МКЭ все исходные данные заносятся в специальные бланки документов, количество и форма которых различны в зависимости от применяемого пакета прикладных программ МКЭ. В указанных документах содержится информация о конечно-элементной расчетной схеме рамы, а также о нагрузках, действующих на рассчитываемую конструкцию.

Результаты компьютерного расчета. В результате расчета на печать по каждому узлу конечного элемента выдается информация о расчетных внутренних усилиях (M_x, M_y), перемещениях и напряжениях в четырех точках сечения, а для конечного элемента в целом – внутренние усилия N и $M_к$.

Для каждой конструктивной группы элементов приводятся расчетные и допускаемые напряжения, а также коэффициенты перегрузки.

8.5.3 Пример расчета боковой рамы

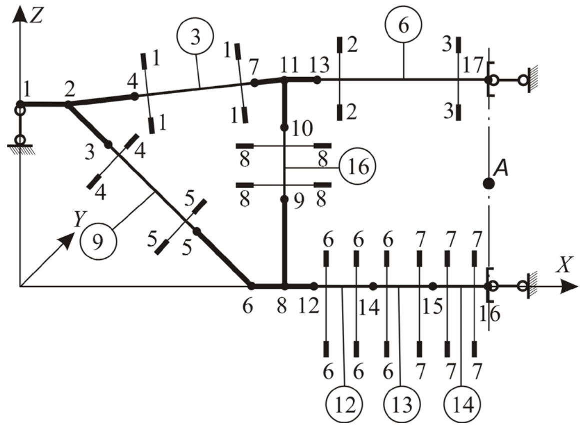


Рисунок 8.10 – Положение расчетных сечений конечных элементов боковой рамы

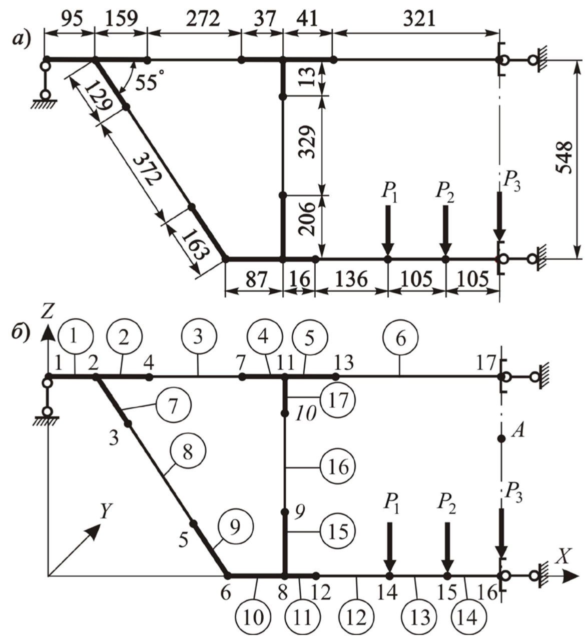


Рисунок 8.11 – Расчетные схемы рамы:
а – исходная; *б* – по МКЭ

Исходные данные. Произведем расчет рамы тележки грузового вагона для следующих исходных данных: $m_о = 4$, $p_о = 250$ кН, $m_{кп} = 1{,}178$ т, $m_б = 0{,}112$ т, $f_{ст} = 0{,}05$ м, $h_ц = 2{,}432$ м. В качестве параметров внешней и внутренней геометрии рамы принимаем соответствующие параметры тележки модели 18-755 (см. таблицы 8.1 и 8.2).

Расчетная схема рамы по МКЭ. Исходная расчетная схема и расчетная схема рамы по МКЭ показаны на рисунке 8.11. Расчетные силы, действующие на нижний горизонтальный пояс рамы, составляют: $P_1 = 59{,}710$ кН, $P_2 = 119{,}419$ кН, $P_3 = 29{,}855$ кН. Переводим их в килограммы: $P_1 = 6066$ кг, $P_2 = 12173$ кг, $P_3 = 3043$ кг.

Расположение расчетных сечений, направление локальных осей и номера точек поперечных сечений конечных элементов, в которых определяются напряжения, принимаем в соответствии с рисунками 8.10 и 8.12. Геометрические характеристики сечений конечных элементов и координаты точек, для которых определяются напряжения, приведены в таблице 8.3.

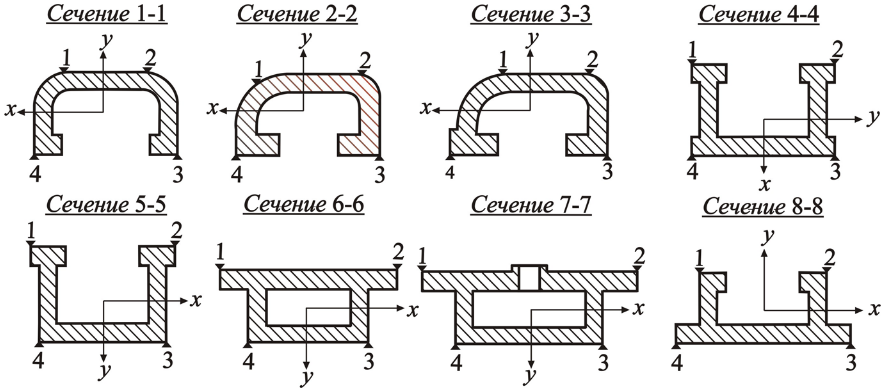


Рисунок 8.12 – Расчетные сечения с ориентировкой локальных осей и точками, в которых определяют напряжения

Таблица 8.3 – **Геометрические характеристики и координаты точек сечений конечных элементов**

Номер сечения	Геометрические характеристики сечения				Координаты четырех точек сечения, см			
	J_x, см^4	J_y, см	F, см^2	$J_к$, см^4	$x1$ / $y1$	$x2$ / $y2$	$x3$ / $y3$	$x4$ / $y4$
1	304	10^{-4}	41,7	10^{-4}	6,85 / 3,13	–6,85 / 3,13	–8,25 / –5,37	8,25 / –5,37
2	321	10^{-4}	44,6	10^{-4}	2,25 / 3,62	–6,85 / 3,62	–8,25 / –4,38	8,25 / –4,38
3	389	10^{-4}	52,3	10^{-4}	2,15 / 3,94	–6,95 / 3,94	–8,34 / –4,06	8,46 / –4,06
4	1376	10^{-4}	84,2	10^{-4}	–9,25 / –7,25	9,25 / –7,25	9,25 / 4,75	–9,25 / 4,75
5	1018	10^{-4}	63,7	10^{-4}	–9,25 / –7,46	9,25 / –7,46	8,25 / 4,54	–8,25 / 4,54
6	3003	10^{-4}	117,8	10^{-4}	–16,25 / –5,75	16,25 / –5,75	9,1 / 7,25	–9,1 / 7,25
7	3897	10^{-4}	149,8	10^{-4}	–26,0 / –5,25	26,0 / –5,25	12,0 / 7,75	–12,0 / 7,75
8	453	10^{-4}	63,4	10^{-4}	–7,2 / 6,34	7,2 / 6,34	13,2 / –2,66	–13,2 / –2,66

П р и м е ч а н и е – В таблице 8.3 вместо геометрических характеристик J_y и J_k условно проставлены числовые значения 10^{-4}, поскольку программный комплекс не воспринимает нулевые значения этих характеристик.

Результаты компьютерного расчета. Расчетные напряжения по всем элементам рамы приведены в таблице 8.4.

Таблица 8.4 – **Расчетные напряжения в конечных элементах**

В мегапаскалях

Номер КЭ	Номер узла	Расчетные напряжения в точках сечения			
		1	2	3	4
3	4	–43,57	–43,57	–71,86	–71,86
	7	–93,85	–93,85	14,4	14,4
6	13	–59,44	–59,44	–55,82	–55,82
	17	–50,76	–50,76	–47,77	–47,77
8	3	–42,22	–42,22	84,42	–15,84
	5	139,87	139,87	102,86	–12,21
12	12	56,5	56,5	–21,76	–21,76
	14	1,03	1,03	48,18	48,18
13	14	1,03	1,03	48,18	48,18
	15	–18,99	–18,99	70,64	70,64
14	15	–18,99	–18,99	70,64	70,64
	16	–23,29	–23,29	76,99	76,99
16	9	–92,13	–92,13	42,67	42,67
	10	58,33	58,33	–20,46	–20,46

Анализ данных таблицы 8.4 показывает, что расчетные напряжения в конечных элементах не превышают допускаемые, равные 150 МПа для стали 20Г1ФЛ.

Таким образом, конструкция рамы удовлетворяет условиям прочности.

8.6 Краткие выводы

Метод конечных элементов – это универсальный метод расчета на компьютере конструкций любой сложности независимо от геометрии, граничных условий, материала и внешних воздействий.

Расчет конструкции по МКЭ начинается с разбиения ее на отдельные простые конечные элементы, которые связаны между собой в отдельных точках – узлах. Для каждого из них в соответствии с возможными перемещениями узлов устанавливается число степеней свободы. При этом каждой степени свободы узла соответствует определенное перемещение.

Предполагается, что взаимодействие между конечными элементами происходит в этих узловых точках. В результате взаимодействия узлы получают перемещения U и в них возникают узловые усилия R. В качестве основных неизвестных МКЭ принимаются указанные перемещения узлов.

Внутри каждого конечного элемента задаются законы распределения напряжений или перемещений, которые выражаются функциями от неизвестных узловых перемещений.

Таким образом, зная перемещения узлов конечного элемента, можно однозначно определить напряжения и перемещения в любой произвольной точке конечного элемента.

Отсюда следует, что расчет любой конструкции по МКЭ сводится к определению перемещений всех узлов расчетной модели.

Для определения узловых перемещений U составляются уравнения равновесия узлов системы. В матричной форме эти уравнения имеют вид

$$[K]\{U\}=\{R\}. \tag{8.39}$$

Матрицы $[K]$ и $\{R\}$ формируются программным путем после ввода в программу информации о геометрии конструкции, свойствах материала, типах и характеристиках конечных элементов, характере и величинах нагрузки.

Вычислив узловые перемещения $\{U\}$, по формуле (8.39) можно оценить напряженно-деформированное состояние каждого конечного элемента. Напряжения в любой произвольной точке конечного элемента определяются по формуле

$$[\sigma_i]=[D_i][B_i]\{U_i\}. \tag{8.40}$$

Общая последовательность расчета конструкции по МКЭ:

1) составление расчетной схемы;

2) подготовка исходной информации ;

3) ввод исходной информации в компьютер;

4) решение задачи на компьютере и выдача результатов.

9 РАСЧЕТ ВАГОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ И ИХ УЗЛОВ НА УСТАЛОСТНУЮ ПРОЧНОСТЬ

Для элементов вагонов, работающих в условиях интенсивного вибрационного нагружения, обязательно производится расчет на усталостную прочность. К таким элементам, испытывающим напряжения, меняющиеся во времени, относятся детали ходовых частей и автосцепного устройства вагонов.

Сопротивление материалов действию нагрузок, меняющихся во времени по величине и знаку, существенно отличается от сопротивления действию статической нагрузки. При этом под действием переменных нагрузок элементы конструкций разрушаются при значительно меньших напряжениях, чем под действием статических нагрузок [23].

9.1 Основные понятия об усталости материалов

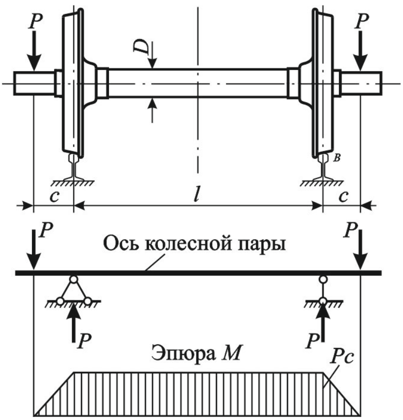


Рисунок 9.1 – Загружение оси колесной пары вагона вертикальными силами P и эпюра изгибающих моментов в оси от их действия

Напряжения, переменные во времени. Напряжения, переменные во времени, возникают в элементах конструкций под действием нагрузок, переменных по величине или направлению, а также нагрузок, перемещающихся относительно рассматриваемого элемента [7].

Примером детали, испытывающей переменные напряжения, является вращающаяся ось колесной пары вагонов, которая нагружена постоянными вертикальными силами P от веса вагона. Загружение оси силами P и эпюра изгибающих моментов в оси от их действия показаны на рисунке 9.1. В верхней части поперечного сечения оси возникают нормальные напряжения растяжения. Ось колесной пары, которая вращается вместе с колесами при движении вагона, испытывает переменные напряжения, несмотря на то, что внешние вертикальные силы *P*, действующие на ось, не меняют своего значения. Объясняется это тем, что каждая точка вращающейся оси оказывается то в растянутой, то в сжатой зонах.

Нормальные напряжения в произвольной точке *A* поперечного сечения оси (рисунок 9.2, *а*)

$$\sigma = \frac{M\,y}{J_x},$$

где y – расстояние от точки *A* до нейтральной оси сечения, изменяющееся во времени,

$$y = \frac{D}{2}\sin\omega t\,;$$

D – диаметр сечения оси;

ω – угловая скорость вращения колеса.

Тогда

$$\sigma(t) = \frac{PcD}{2J_x}\sin\omega t\,.$$

Следовательно, нормальное напряжение в сечениях оси меняется по синусоиде (рисунок 9.2, *б*) с амплитудой

$$\sigma_{\text{а}} = \frac{PcD}{2J_x}\,.$$

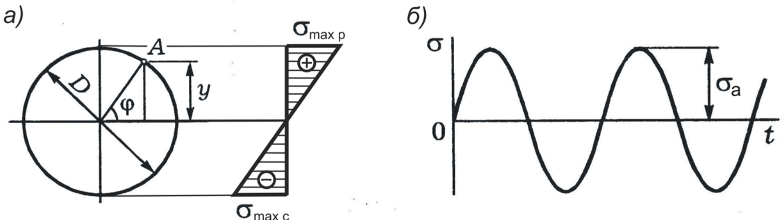


Рисунок 9.2 – Изменение нормальных напряжений в сечениях оси колесной пары

Практически установлено, что если элемент конструкции многократно подвергать переменному нагружению определенного уровня, то после некоторого числа перемен напряжений в нем в зоне повышенных напряжений, вызванных конструктивными, технологическими или структурными факторами, появится микротрещина, которая постепенно будет развиваться, и в конечном итоге деталь разрушится.

При этом у разрушившихся деталей, в том числе и у оси колесной пары, всегда можно увидеть в сечении две ясно выраженные зоны (рисунок 9.3): зону *1* с гладкой отшлифованной поверхностью, которая образовалась в результате развития микротрещины (*зона усталостного разрушения*), и зону *2*, которая имеет крупнозернистый вид, характерный для хрупкого излома (*зона окончательного разрушения*).

Рисунок 9.3 – Характерный внешний вид излома деталей

Число циклов до появления первой микротрещины и до момента разрушения зависит от величины амплитуды напряжений σ_a и меняется в широких пределах.

Разрушение материала под действием повторно-переменных напряжений называется *разрушением от усталости.*

Характерно, что разрушение материала под действием повторно-переменных нагрузок может произойти при напряжениях ниже предела текучести.

Понятие об усталости и выносливости материалов. *Усталостью материалов* (в частности, металлов) называют явление разрушения в результате постепенного накопления в них повреждений, приводящих к возникновению усталостной трещины при многократном повторении нагружений.

Способность металлов сопротивляться разрушению при действии повторно-переменных напряжений называется *выносливостью материала*.

Изучение вопросов усталости имеет чрезвычайно большое значение. Наиболее ответственные элементы ходовых частей и автосцепного устройства вагонов выходят из строя, главным образом, вследствие разрушений усталостного характера.

Отметим, что для разрушения от усталости недостаточно только переменности напряжений. Требуется также, чтобы напряжения имели определенную величину.

Максимальное напряжение, при котором материал способен сопротивляться, не разрушаясь, при любом произвольно большом числе повторений переменных напряжений, называется *пределом выносливости,* или *пределом усталости*. Определяют предел выносливости экспериментально.

Основные характеристики циклов напряжений. Как уже отмечалось выше, переменные напряжения, возникающие в элементах конструкций под действием переменных нагрузок, представляют собой периодические функции времени $\sigma = f(t)$ с периодом *T*. Общий случай периодически меняющегося переменного во времени напряжения σ показан на рисунке 9.4.

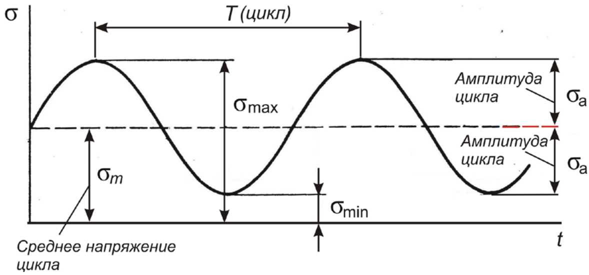


Рисунок 9.4 – График изменения напряжений во времени и характеристики цикла напряжений

Совокупность последовательных значений переменных напряжений за один период процесса их изменения называется *циклом напряжений*.

Основные характеристики циклов напряжений:

– *максимальное* напряжение $\sigma_{\max}$;

– *минимальное* напряжение $\sigma_{\min}$;

– *среднее (постоянное)* напряжение

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \tag{9.1}$$

– *амплитуда напряжений*

$$\sigma_\text{a} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}; \tag{9.2}$$

– *коэффициент асимметрии цикла*

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \tag{9.3}$$

Приведенные формулы, справедливы и для кручения, если в них σ заменить на τ.

Основные виды циклов напряжений. Цикл, в котором максимальное $\sigma_{\max}$ и минимальное $\sigma_{\min}$ напряжения равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, называется *симметричным* (рисунок 9.5), т. е. $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$ и коэффициент асимметрии *r* = –1. Такой цикл характерен, в частности, для вращающейся оси колесной пары.

В остальных случаях циклы являются *асимметричными (несимметричными)*.

Если $\sigma_{max} = 0$ или $\sigma_{min} = 0$, то циклы называются *пульсационными.* Для пульсационных циклов $r = 0$ *(отнулевой цикл)* или $r = \infty$.

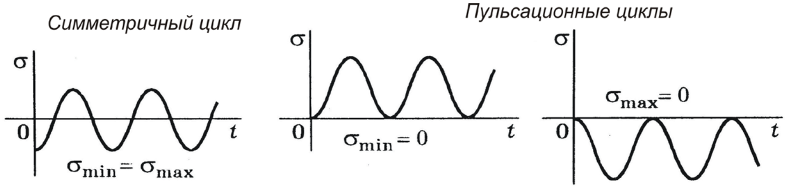


Рисунок 9.5 – Симметричный и пульсационные циклы напряжений

Циклы с одинаковыми коэффициентами асимметрии r называют *подобными*.

Циклы, у которых алгебраические знаки напряжений σ_{max} и σ_{min} одинаковы, называют *знакопостоянными* (*однозначными*), в противном случае – *знакопеременными*.

В общем случае любой цикл может быть представлен как результат наложения на напряжение, меняющегося по синусоиде с амплитудой σ_a (см. рисунок 9.4). Такой цикл характерен для большинства элементов вагонных конструкций.

Симметричный и пульсационный циклы, у которых $\sigma_m = 0$, являются частными случаями цикла, приведенного на рисунке 9.4.

Поскольку процесс образования трещины при переменных напряжениях обусловлен накоплением пластических деформаций, то усталостное разрушение будет зависеть, прежде всего, от максимального σ_{max} и минимального σ_{min} напряжений, а не от вида кривой цикла. Поэтому циклы, приведенные на рисунке 9.6, являются равноценными.

Тогда для оценки усталостного разрушения в условиях заданного цикла достаточно знать только величины σ_{max} и σ_{min} или σ_m и σ_a.

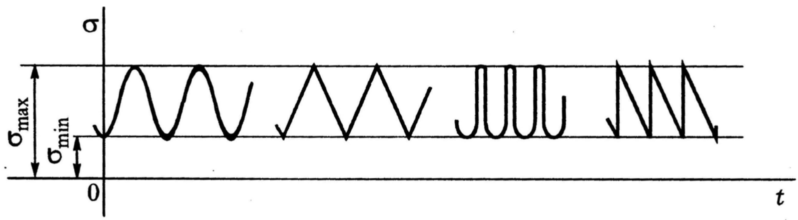


Рисунок 9.6 – Примеры равноценных циклов напряжений

9.2 Кривые усталости. Предел выносливости материалов

Испытания на выносливость. Предел выносливости материала определяют экспериментально путем проведения специальных испытаний. Для этого необходимо на соответствующей испытательной машине испытать партию образцов из данного материала в количестве не менее 6–12 шт. Обычно используют гладкие цилиндрические образцы диаметром 7–10 мм.

Для проведения усталостных испытаний используются специальные усталостные машины. По способу возбуждения нагрузок в испытуемом объекте усталостные машины можно разделить на механические, гидравлические, электромеханические, пневматические, по виду нагружения образца – машины для испытаний при изгибе, кручении, растяжении-сжатии, сложном напряженном состоянии, а также универсальные.

Наиболее распространены испытания в условиях симметричного цикла, являющегося наиболее опасным.

В качестве примера рассмотрим схему одной из наиболее распространенных машин для испытания образца на усталость при изгибе в условиях симметричного цикла (рисунок 9.7) [23].

Испытываемый образец закреплен в цангах, которые во время испытания вращаются. Усилие на образец передается от груза, подвешенного на серьгах. Число оборотов образца фиксируется счетчиком. Когда происходит разрушение образца, электродвигатель автоматически отключается от контакта.

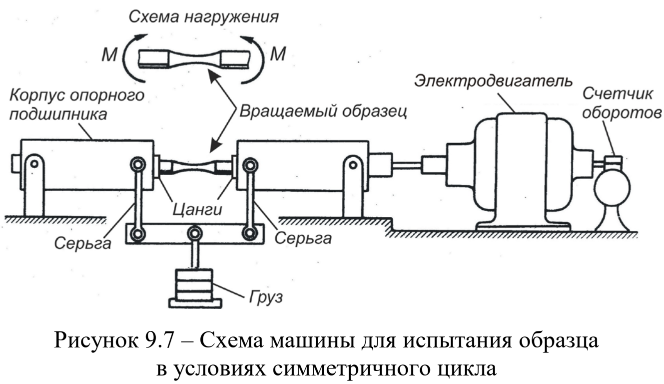


Рисунок 9.7 – Схема машины для испытания образца
в условиях симметричного цикла

Для проведения испытаний берется партия одинаковых образцов диаметром 7–10 мм с полированной поверхностью в количестве 6–12 шт.

Испытания ведут в следующем порядке. Первый образец нагружают так, чтобы возникающие в нем напряжения $\sigma_{max} = \sigma_1$ были достаточно большими, но не превышали предела прочности $\sigma_в$. Обычно $\sigma_1 = (0{,}6 - 0{,}7)\sigma_в$. В результате образец разрушится при сравнительно небольшом числе циклов N_1. В последующих образцах максимальные напряжения уменьшают и фиксируют число циклов нагружений, которое выдержал каждый образец до разрушения.

В результате проведения многократных испытаний можно установить число циклов N, которое выдерживает образец до разрушения, в зависимости от величины σ_{max} цикла.

Кривые усталости. Обработка полученных экспериментально данных завершается построением *кривой усталости* (*кривой Веллера*), которая имеет вид, приведенный на рисунке 9.8. Кривую усталости, представляющую собой зависимость $N = f(\sigma_{max})$, строят по точкам разрушившихся образцов. Каждому разрушившемуся образцу на графике соответствует одна точка с координатами N (число циклов до разрушения) и σ_{max} (заданное напряжение): точка A – первому образцу, точка B – второму и т. д.

Кривая усталости показывает, что с увеличением числа циклов N уменьшается максимальное напряжение σ_{max}, при котором происходит разрушение образца. При этом с уменьшением σ_{max} кривая вначале падает круто, а затем асимптотически приближается к некоторой горизонтальной прямой, ордината которой и определяет предел выносливости σ_{-1}. Это означает, что при напряжении σ_{-1} образец может, не разрушаясь, выдержать бесконечно большое число циклов.

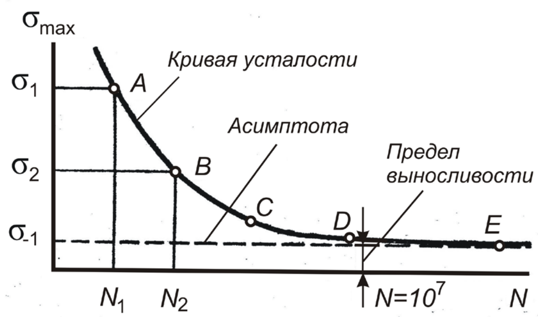


Рисунок 9.8 – График зависимости $\sigma_{max} = f(N)$

Экспериментально установлено, что если стальной образец выдержал 10^7 циклов и не разрушился, то он не разрушится и при любом другом числе циклов. Поэтому число циклов $N = 10^7$ называется *базой испытаний*.

Предел выносливости. Наибольшее значение максимального напряжения цикла, при котором образец не разрушается до базы испытания, называется *пределом выносливости.*

По кривой усталости, построенной в координатах $N\text{–}\sigma_{\max}$, иногда бывает затруднительно определить предел выносливости, поэтому обычно предпочитают по оси абсцисс откладывать не N, а логарифм N. Это позволяет сделать график более компактным и удобным для определения предела выносливости. В этом случае предел выносливости будет определяться переломом кривой.

Предел выносливости обозначается через σ_r, где индекс «r» соответствует коэффициенту асимметрии цикла. Тогда для симметричного цикла предел выносливости будет обозначаться σ_{-1}, для пульсационного – σ_0.

Для цветных металлов и для закаленных до высокой твердости сталей не удается установить число циклов, при достижении которого образец в последующем бы не разрушался. Для подобных случаев вводится понятие условного предела выносливости. За *условный предел выносливости* принимается напряжение, при котором образец способен выдержать 10^8 циклов.

В результате проведения многочисленных испытаний установлено, что передел выносливости зависит от вида деформации образца или детали. Испытания на изгиб проводятся значительно чаще, поскольку они, в отличие от испытаний на растяжение-сжатие и кручение, требуют более простого оборудования.

Поэтому при отсутствии опытных данных о пределах выносливости для деформаций растяжения-сжатия и кручения можно воспользоваться следующими эмпирическими соотношениями, позволяющими определить соответствующие пределы выносливости по известному пределу выносливости при симметричном цикле изгиба [27]:

$$\sigma_{-1\text{р}} \approx 0{,}75\sigma_{-1}\,; \qquad (9.4)$$

$$\tau_{-1} \approx 0{,}6\sigma_{-1}\,. \qquad (9.5)$$

В случаях отсутствия опытных данных о пределе выносливости при симметричном цикле изгиба можно использовать эмпирические формулы, связывающие предел выносливости при изгибе с механическими характеристиками материала [23]:

• для сталей предел выносливости можно принять составляющим половину от предела прочности:

$$\sigma_{-1} \approx (0{,}4 - 0{,}5)\,\sigma_{\text{вр}}, \tag{9.6}$$

причем нижняя граница используется для углеродистых сталей, верхняя – для легированных сталей;

- для высокопрочных сталей, МПа,

$$\sigma_{-1} \approx 400 + \frac{1}{6}\sigma_{\text{вр}}, \tag{9.7}$$

где $\sigma_{\text{вр}}$ – предел прочности при растяжении.

9.3 Диаграмма предельных амплитуд

Испытания при несимметричном цикле. При эксплуатации любых объектов, в том числе и вагонных конструкций, в их элементах возникают переменные напряжения, изменяющиеся во времени по самым разнообразным циклам. Поэтому для расчета элементов на усталостную прочность требуется иметь данные о пределах выносливости при циклах с различными коэффициентами асимметрии. Это предполагает проведение испытаний, не только при симметричных циклах, но и при асимметричных.

В условиях несимметричных циклов образцы испытываются на растяжение-сжатие или на кручение специальными машинами – пульсаторами.

На рисунке 9.9 показано простое приспособление [23] для проведения испытания в условиях несимметричного цикла.

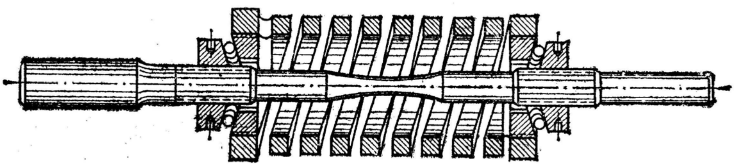


Рисунок 9.9 – Схема приспособления для испытания образца в условиях несимметричного цикла

На испытываемом образце установлена пружина, которая создает постоянное растяжение образца с напряжением σ_m, на которое в процессе испытания накладывается напряжение изгиба, меняющегося по симметричному циклу с амплитудой σ_a.

Диаграммы предельных амплитуд напряжений. Результаты испытаний на выносливость при циклах с различными коэффициентами асимметрии представляют в виде диаграмм (графиков) предельных амплитуд, построенных в координатах σ_m и σ_a (рисунок 9.10).

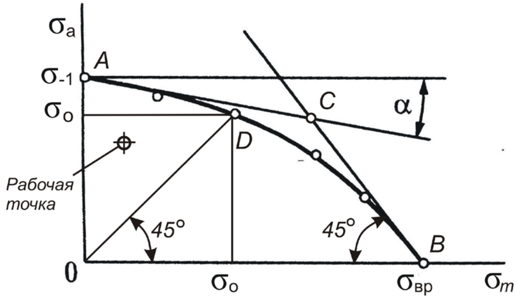


Рисунок 9.10 – Диаграмма предельных амплитуд напряжений для образцов

Для получения одной точки диаграммы проводится испытание группы одинаковых образцов (не менее 10 шт.). При испытании данной группы образцов фиксируется значение среднего напряжения цикла σ_m, а предельная амплитуда σ_a определяется по базовому числу циклов. Обычно начинают с симметричного цикла (r = –1). Этому циклу соответствует точка A диаграммы с координатами $\sigma_a = \sigma_{max} = \sigma_{-1}$ и $\sigma_m = 0$.

Испытание следующих групп образцов проводятся для пяти-шести асимметричных циклов, которые дают нам вторую и последующие точки диаграммы. Например, асимметричному отнулевому циклу (r = 0) соответствует на диаграмме точка D с координатами $\sigma_{max} = \sigma_0$ и $\sigma_m = \sigma_a = \sigma_0/2$.

По итогам испытания группы образцов строится кривая усталости, по которой определится предел выносливости для цикла с данным коэффициентом асимметрии.

В результате испытаний на выносливость при циклах с различными коэффициентами асимметрии получают *кривую предельных амплитуд напряжений* (диаграмму предельных амплитуд) (см. рисунок 9.10). Очевидно, что правая крайняя точка кривой (точка B) соответствует циклу, при котором $\sigma_{max} = \sigma_{min} = \sigma_m$, r = 1, т. е. испытанию при постоянной нагрузке. Следовательно, абсцисса точки B соответствует пределу прочности материала.

Кривая предельных амплитуд используется для определения предела выносливости для цикла с данным коэффициентом асимметрии и оценки усталостной прочности.

Сумма координат $(\sigma_m + \sigma_а)$ любой точки кривой предельных амплитуд дает величину предела выносливости при данном среднем напряжении цикла:

$$\sigma_r = \sigma_{\max}^{пр} = \sigma_m^{пр} + \sigma_а^{пр},$$

т. е. дает условие, по которому максимальное напряжение цикла не может превысить предел выносливости.

Циклы напряжений, представленные точками, лежащими ниже кривой предельных амплитуд, являются безопасными. Если точки расположены выше кривой, то образец разрушится при каком-либо ограниченном числе циклов.

Таким образом, имея диаграмму предельных амплитуд для данного материала, можно оценить, какую амплитуду напряжений может переносить материал, не разрушаясь при данном среднем напряжении.

Анализ кривой предельных амплитуд показывает, что с увеличением среднего напряжения σ_m амплитуда напряжений $\sigma_а$, которую может выдержать материал, не разрушаясь, уменьшается.

Для выполнения практических расчетов диаграмму предельных амплитуд упрощают, заменяя предельную кривую двумя наклонными прямыми: *AC* и *CB*.

Прямая AC, проходящая через точку *A* и имеющая угловой коэффициент $\psi_\sigma = \mathrm{tg}\alpha$, *аппроксимирует левую часть диаграммы*. Для точек этой прямой выполняется условие

$$\sigma_а = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m.$$

Для построения этой прямой необходимо знать предел выносливости σ_{-1} при симметричном цикле и величину углового коэффициента ψ_σ либо располагать второй точкой – пределом выносливости при пульсационном цикле σ_0.

Коэффициент ψ_σ характеризует чувствительность материала к асимметрии цикла. В результате проведения многочисленных испытаний установлено, что значения ψ_σ находятся в пределах 0,1–0,2 для углеродистых сталей и 0,2–0,3 – для легированных. При испытаниях образцов на кручение коэффициент ψ_τ для тех же сталей составляет 0,05–0,1 и 0,1–0,15 соответственно.

Правая часть диаграммы аппроксимируется прямой CB, проходящей через точку *B* и составляющей угол 45° с координатными осями σ_m и $\sigma_а$. Для ее точек выполняется условие

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_а = \sigma_{вр},$$

показывающее, что максимальное напряжение $(\sigma_m + \sigma_а)$ не может превысить предел прочности.

9.4 Влияние конструктивно-технологических факторов на предел выносливости

На величину предела выносливости образцов или деталей, изготавливаемых из того или иного материала, влияют не только характеристики цикла, но целый ряд различных факторов. К ним относятся форма образца, размеры, состояние поверхности, режим циклического силового воздействия и др.

Для оценки влияния того или иного фактора на предел выносливости в качестве эталона принимают предел выносливости σ_{-1}, полученный в результате испытания гладких полированных образцов диаметром 7–10 мм.

Влияние концентрации напряжений на предел выносливости. Одним из основных факторов, снижающих предел выносливости, является *концентрация напряжений* – повышение напряжений, имеющее место в области резких изменений формы упругого тела, а также в зоне контакта деталей.

Концентраторами напряжений являются поперечные отверстия в детали, галтели, выкружки, шпоночные канавки, выточки, нарезки на поверхности и т. д. (рисунок 9.11). Наличие концентраторов напряжений приводит к неравномерному распределению напряжений.

Максимальные значения напряжений имеют место в непосредственной близости от концентратора (например, у края отверстия или выкружки) и ограничиваются небольшой площадью поперечного сечения, т. е имеют местный характер. Поэтому напряжения у мест концентрации называют местными.

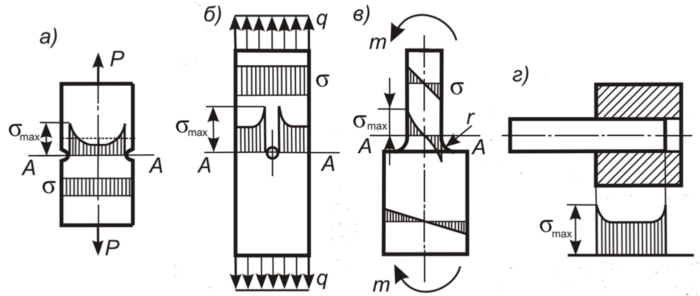


Рисунок 9.11 – Примеры концентраторов напряжений в деталях

Так, в сечении полосы, ослабленном полукруглыми выкружками (см. рисунок 9.11, *а*) или отверстием (см. рисунок 9.11, *б*), пик осевого напряжения имеет место у края соответственно выкружки и отверстия. При изгибе ступенчатого стержня (см. рисунок 9.11, *в*) повышенное напряжение возникает в зоне внутреннего угла и зависит от радиуса закругления *r*. При прессовой посадке втулки на вал повышенные напряжения возникают у их концов (см. рисунок 9.11, *г*). Наиболее ослабленные сечения деталей обозначены на рисунке 9.11 как сечения *А–А*.

Многократное изменение напряжений в зоне очага концентрации приводит к образованию и последующему развитию трещины и усталостному разрушению детали.

Поэтому при проектировании конструкций применяют специальные конструктивные меры для уменьшения концентрации напряжений, которые будут рассмотрены в подразделе 9.6.

Концентрация напряжений, как правило, способствует зарождению усталостной трещины, которая развиваясь, приводит в конечном итоге к разрушению детали.

Количественной характеристикой концентрации напряжений является *теоретический коэффициент концентрации напряжений*

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ном}}, \qquad (9.8)$$

где σ_{max} – наибольшее местное напряжение;

$\sigma_{ном}$ – номинальное напряжение, определяемое по формулам сопротивления материалов на основе предположения об отсутствии концентрации напряжений.

Номинальные напряжения обычно определяют по наиболее ослабленному сечению детали – сечению *А–А* (см. рисунок 9.11).

Теоретические коэффициенты концентрации напряжений зависят от геометрии концентратора и не отражают свойств реальных материалов.

Совместный учет геометрии концентратора и свойств материалов осуществляется с помощью *эффективного (действительного) коэффициента концентрации напряжений* k_{σ},

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1к}}, \qquad (9.9)$$

где σ_{-1}, $\sigma_{-1к}$ – предел выносливости гладкого образца соответственно без концентрации и с концентрацией напряжений;

Тогда *предел выносливости с учетом концентрации напряжений*

$$\sigma_{-1к} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma}}. \qquad (9.10)$$

При несимметричных циклах учет концентрации напряжений осуществляется делением всех ординат диаграммы предельных амплитуд гладких образцов на величину k_{σ}.

В справочной литературе для наиболее характерных видов концентрации напряжений и основных конструкционных материалов приведены таблицы и графики для выбора коэффициентов k_σ. В качестве примера на рисунке 9.12 показан график для определения коэффициента k_σ для стального ступенчатого стержня при растяжении и сжатии.

Кривые *1*, *2* и *3* приведены для сталей с пределами прочности $\sigma_{вр} = 400$, 800 и 120 МПа соответственно. Анализируя график, можно сделать вывод о том, с увеличением предела прочности величина k_σ также возрастает.

В случае отсутствия достаточного количества экспериментальных данных эффективный коэффициент концентрации можно определить, используя значения теоретического коэффициента концентрации напряжений α_σ и *коэффициента чувствительности материала к концентрации напряжений* q_σ:

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma(\alpha_\sigma - 1). \qquad (9.11)$$

Для определения коэффициентов q_σ в справочниках имеются соответствующие графики (рисунок 9.13).

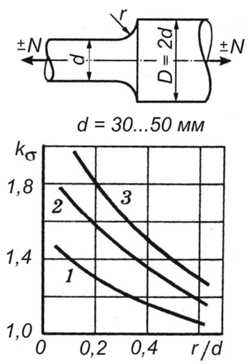


Рисунок 9.12 – График для определения коэффициента концентрации напряжений для ступенчатого стержня при растяжении-сжатии

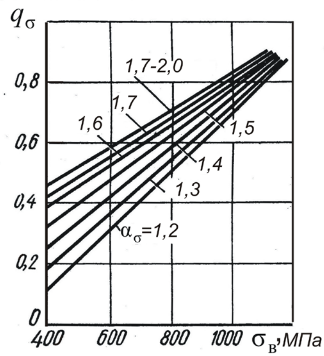


Рисунок 9.13 – График для определения коэффициента чувствительности материала к концентрации напряжений q_σ в зависимости от предела прочности $\sigma_в$

Как показывают опыты, чувствительность металла к концентрации напряжений зависит, прежде всего, от его свойств. Чем выше прочность стали, тем выше ее чувствительность к концентрации напряжений. Поэтому применение высокопрочных сталей в конструкциях, подверженных переменным напряжениям, не всегда целесообразно.

Кроме того, чувствительность металла к концентрации напряжений меньше у крупнозернистых сталей по сравнению с мелкозернистыми.

Влияние размеров (масштабный фактор). В результате испытаний установлено, что предел выносливости снижается при увеличении размеров детали.

Для оценки влияния масштабного фактора на предел выносливости используется *коэффициент влияния абсолютных размеров поперечного сечения* (*коэффициент масштабного фактора)*

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\sigma_{-1м}}{\sigma_{-1}}, \tag{9.12}$$

где $\sigma_{-1м}$ – предел выносливости образцов диаметром $d > d_0$;

σ_{-1} – предел выносливости, полученный при испытаниях стандартных лабораторных образцов диаметром $d_0 = 7…10$ мм.

На рисунке 9.14 [24] показан график зависимости коэффициента ε_σ для стали от диаметра детали: кривая *1* соответствует валам из легированной стали, кривая *2* – валам из углеродистой стали.

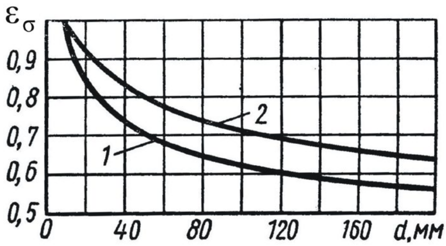


Рисунок 9.14 – График для определения коэффициента влияния абсолютных размеров

Коэффициент ε_σ можно определить и на образцах с концентрацией напряжений.

От абсолютных размеров сечения детали зависят также значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений k_σ. *Чем больше размеры детали* при сохранении ее геометрического подобия, тем выше значения *коэффициента* k_σ, а следовательно, меньше *предел выносливости.*

При несимметричных циклах поправка ε_σ, также как и k_σ, вводится только в амплитудную составляющую цикла. Ординаты диаграммы предельных амплитуд будут принимать значения $\sigma_a \varepsilon_\sigma / k_\sigma$.

Множитель $\varepsilon_\sigma / k_\sigma$ учитывает влияние на предел выносливости масштабного фактора (числитель) и концентрации напряжений (знаменатель).

Влияние состояния поверхности. Как правило, поверхностные слои элемента конструкции под воздействием переменных нагрузок оказываются более напряженными, чем внутренние. Кроме того, поверхность детали почти всегда имеет дефекты, обусловленные качеством механической обработки, коррозией и воздействием окружающей среды. В результате усталостные трещины зарождаются обычно с поверхностного слоя, а плохое качество этого слоя приводит к снижению сопротивления усталости.

Влияние состояния обработанной поверхности на выносливость оценивается *коэффициентом качества поверхности*:

$$\beta_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1\text{п}}}{\sigma_{-1}}, \tag{9.13}$$

где σ_{-1} – предел выносливости, определенный при испытаниях образцов с полированной поверхностью;

$\sigma_{-1\text{п}}$ – предел выносливости, определенный при испытаниях таких же образцов (по форме, размерам и материалу), состояние поверхности которых соответствует состоянию поверхности рассчитываемой детали.

На предел выносливости большое влияние оказывает коррозия. Обычно коррозия вызывает резкое снижение предела выносливости (до 70–80 %) [23]. Причем чем выше предел прочности металла, тем больше он склонен к коррозии.

Влияние коррозии можно учесть коэффициентом $\beta_{\text{кор}}$,

$$\beta_{\text{кор}} = \frac{\sigma_{-1\text{к}}}{\sigma_{-1}}, \tag{9.14}$$

где $\sigma_{-1\text{к}}$ – предел выносливости корродированного образца;

σ_{-1} – предел выносливости полированного образца.

Уменьшить влияние состояния поверхности на предел выносливости можно соответствующими технологическими методами обработки, приводящими к упрочнению поверхностного слоя.

К *методам упрочнения* относятся:

– наклеп поверхностного слоя путем накатки роликом, обдувка дробью и др.;

– химико-термические методы (азотирование, цементация, цианирование);

– термические (поверхностная закалка токами высокой частоты или газовым пламенем).

Использование указанных методов обработки обеспечивает увеличение прочности поверхностного слоя и создание в нем значительных сжимающих остаточных напряжений, препятствующих возникновению усталостной трещины. В конечном итоге это приводит к повышению предела выносливости.

Эффект поверхностного упрочнения оценивается *коэффициентом влияния поверхностного упрочнения*

$$\beta_{упр} = \frac{\sigma_{-1у}}{\sigma_{-1}}, \quad (9.15)$$

где $\sigma_{-1у}$, σ_{-1} – предел выносливости соответственно упрочненных и неупрочненных образцов.

В расчетах значения коэффициентов β_σ, $\beta_{кор}$ и $\beta_{упр}$ берут из таблиц и графиков справочной литературы. На рисунке 9.15 [24] приведен график зависимости β_σ от шероховатости и состояния поверхности детали: *1* – полированная поверхность; *2* – шлифованная; *3* – тонко обточенная; *4* – грубо обточенная; *5* – с наличием окалины.

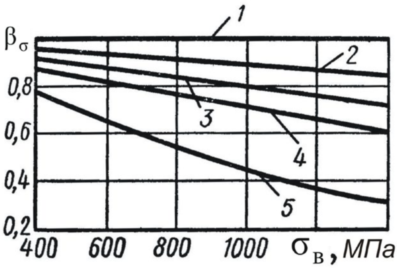


Рисунок 9.15 – График для определения коэффициента качества поверхности

Совместный учет влияния концентрации напряжений, размеров детали и состояния поверхности. Совместное влияние концентрации напряжений, размеров детали и состояния поверхности на предел выносливости оценивают *общим коэффициентом снижения предела выносливости при симметричном цикле*, определяемом по формуле

$$K = k_\sigma / \varepsilon_\sigma \beta_\sigma . \quad (9.16)$$

Тогда *предел выносливости детали при симметричном цикле*

$$\sigma_{-1д} = \frac{\sigma_{-1}}{K}. \quad (9.17)$$

Предел выносливости σ_{-1}, полученный на гладких лабораторных образцах малого диаметра, используется для оценки сопротивления усталости материала, а для оценки усталостной прочности детали при переменных напряжениях нужно знать ее предел выносливости $\sigma_{-1д}$.

9.5 Расчет на усталостную прочность

При расчете детали на усталостную прочность при переменных напряжениях определяют коэффициенты запаса прочности *n* для одного или нескольких предположительно опасных сечений детали. Полученные коэффициенты запаса сопоставляют с теми, которые назначают для деталей, аналогичных проектируемой при заданных условиях ее эксплуатации. Условие усталостной прочности будет имеет вид

$$n \geq [n]. \tag{9.18}$$

Значение коэффициента запаса прочности $[n]$ зависит от целого ряда обстоятельств, основными из которых являются назначение детали (степень ее ответственности), условия работы; точность определения действующих на нее нагрузок и т. п. Обычно $[n] = 1{,}4\ldots3{,}0$.

Коэффициент запаса прочности, как правило, определяют в предположении, что рабочий цикл напряжений, в условиях которого работает рассчитываемая деталь при ее эксплуатации, подобен предельному циклу, т. е. коэффициенты асимметрии r рабочего и предельного циклов одинаковы.

Для перехода от образцов к детали необходимо учесть влияние на предел выносливости трех факторов: концентрации напряжений, масштабного фактора и качества обработки поверхности. Совместное влияние этих факторов учитывают введением в расчет коэффициента снижения предела выносливости K, определяемого выражением (9.16).

Отметим, что по результатам последних экспериментальных работ рекомендуется учитывать совместное влияние всех трех факторов [23]

$$K = \left(\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma} + \frac{1}{\beta_\sigma} - 1\right)\frac{1}{\beta_{\text{у}}}. \tag{9.19}$$

Применительно к касательным напряжениям следует индекс «σ» при коэффициентах заменить на «τ».

Определения коэффициента запаса усталостной прочности при симметричном цикле. Наиболее просто коэффициент запаса прочности определяется в случае симметричного цикла изменения напряжений. Для симметричного цикла $\sigma_m = 0$ и $\sigma_{\text{a}} = \sigma_{\max}$. Пределы выносливости материала σ_{-1} при таких циклах обычно известны, а пределы выносливости рассчитываемых деталей $\sigma_{-1\text{д}}$ можно вычислить по формуле (9.17), используя значения коэффициентов снижения пределов выносливости K, полученные из справочной литературы.

Коэффициент запаса усталостной прочности детали при симметричном цикле определяют с использованием следующих зависимостей:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1\text{д}}}{\sigma_{\text{a}}} = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_{\text{a}}} = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_{\max}}; \tag{9.20}$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1\text{д}}}{\tau_{\text{a}}} = \frac{\tau_{-1}}{K\tau_{\text{a}}} = \frac{\tau_{-1}}{K\tau_{\max}}. \tag{9.21}$$

Таким образом, коэффициент запаса усталостной прочности детали при симметричном цикле представляет собой отношение предела выносливости, определенного для детали, к номинальному значению максимального напряжения, возникающего в опасной точке детали.

Под номинальным напряжением понимают напряжение, определённое по основным формулам сопротивления материалов, т. е. без учета факторов, влияющих на величину предела выносливости.

Определение коэффициента запаса усталостной прочности при несимметричном цикле. Для определения коэффициента запаса прочности детали при несимметричных циклах воспользуемся диаграммой предельных амплитуд (см. рисунок 9.10), полученной для образцов.

Левая часть диаграммы с целью упрощения была представлена наклонной прямой:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m,$$

а правая часть ограничена условием

$$\sigma_m + \sigma_a = \sigma_{вр}.$$

Как уже отмечалось, при переходе от стандартных образцов к конкретной детали необходимо учесть все факторы, снижающие предел выносливости материала. Достигается это введением в расчет коэффициента снижения предел выносливости K. Это означает, что предельные амплитуды циклов σ_a для рассматриваемой детали должны быть уменьшены в K раз.

Тогда уравнение предельной прямой принимает вид

$$\sigma_a = \frac{1}{K}(\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m). \tag{9.22}$$

Ограничения по пределу прочности или по пределу текучести для деталей аналогичны соответствующим ограничениям образца. В итоге получаем диаграмму предельных амплитуд для детали (рисунок 9.16).

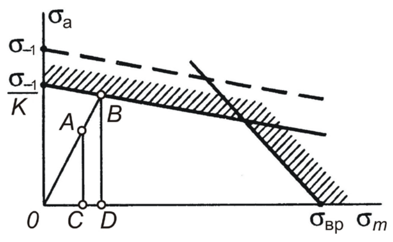


Рисунок 9.16 – Диаграмма предельных амплитуд для детали

Покажем на диаграмме точку A с координатами σ_m и σ_a, соответствующую рабочему циклу напряжений детали. Проведем через нее и начало координат луч до пересечения предельной прямой в точке B. Любая другая точка, находящаяся на этом луче, соответствует циклу, подобному заданному, т. е. циклу, имеющему то же значение коэффициента асимметрии r.

Тогда все циклы, которые соответствуют точкам луча, лежащим ниже кривой предельных амплитуд (точки отрезка OB), безопасны в отношении усталостного разрушения и деталь обладает определенным запасом усталостной прочности. Если рабочему циклу детали будет соответствовать точка *B*, наступит усталостное разрушение.

Коэффициент запаса усталостной прочности для цикла, изображенного точкой A, определяется как отношение

$$n = \frac{OB}{OA}. \tag{9.23}$$

Данное соотношение характеризует степень близости рабочих условий к предельным.

Для точки *B*, лежащей на предельной прямой, амплитуду предельных напряжений получаем из выражения (9.22):

$$\sigma_{\text{а}}^{B} = \frac{1}{K}(\sigma_{-1} - \psi_{\sigma}\sigma_{m}^{B}).$$

С другой стороны, из подобия треугольников

$$\sigma_{\text{а}}^{B} = \sigma_{m}^{B}\frac{\sigma_{\text{а}}}{\sigma_{m}}.$$

Приравнивая эти выражения, находим

$$\sigma_{m}^{B} = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_{\text{а}} + \psi_{\sigma}\sigma_{m}}.$$

Коэффициент запаса усталостной прочности можно выразить через равные соотношения (из подобия треугольников):

$$n = \frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{\sigma_{m}^{B}}{\sigma_{m}}.$$

Тогда коэффициент запаса усталостной прочности детали для произвольного цикла нормальных напряжений с координатами σ_m, $\sigma_{\text{а}}$

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_{\text{а}} + \psi_{\sigma}\sigma_{m}}. \tag{9.24}$$

Для детали, работающей в условиях циклического изменения касательных напряжений, выражение (9.24) будет иметь вид

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K\tau_{\text{а}} + \psi_{\tau}\tau_{m}}. \tag{9.25}$$

В формулах (9.24) и (9.25) ψ_{σ}, ψ_{τ} – *коэффициенты чувствительности материала к асимметрии цикла напряжений*, учитывающие в расчетах влияние асимметрии цикла на предел выносливости. Коэффициенты ψ_{σ} и ψ_{τ} можно определить, используя выражения

$$\psi_{\sigma} = (2\sigma_{-1} - \sigma_{0})/\sigma_{0}; \quad \psi_{\tau} = (2\tau_{-1} - \tau_{0})/\tau_{0}, \tag{9.26}$$

где σ_0, τ_0 – пределы выносливости, полученные по результатам испытаний при отнулевом цикле напряжений.

Если значения σ_0 отсутствуют, их можно вычислить по приближенным формулам:

$$\sigma_0 \approx 1{,}6\sigma_{-1}; \quad \tau_0 \approx 1{,}6\tau_{-1}.$$

Как следует из выражений (9.24) и (9.25), коэффициент снижения предела выносливости *K* оказывает влияние только на величину предельной амплитуды, коэффициент ψ_σ – на среднее напряжение цикла переменных напряжений.

В случае возникновения в опасной точке детали плоского напряженного состояния (например, при совместном действии изгиба и кручения) *общий коэффициент запаса усталостной прочности детали* можно определить, используя эмпирическую формулу Гафа – Полларда

$$\frac{1}{n_r^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2}, \qquad (9.27)$$

где n_r – коэффициент запаса прочности детали при плоском напряженном состоянии;

n_σ, n_τ – коэффициенты запаса прочности детали соответственно при нормальном и касательном напряжении.

9.6 Конструктивно-технологические меры для повышения усталостной прочности

При проектировании деталей, работающих в условиях переменных напряжений, рекомендуется принимать следующие конструктивно-технологические меры для повышения усталостной прочности.

1 Применять как можно более однородные материалы, с мелкозернистой структурой, не имеющих внутренних очагов концентрации (трещин, газовых пузырьков, неметаллических включений).

2 Для уменьшения концентрации напряжений необходимо внешние обводы деталей делать как можно более плавными, увеличивать радиусы галтелей (закруглений во внутренних углах) в местах перехода от одного размера сечения к другому (рисунок 9.17, *а*), размещать отверстия в зоне пониженных напряжений, применять *деконцентраторы напряжений* – специальные разгружающие канавки, выкружки и др.

На рисунке 9.17, *б, в* показано использование разгружающей канавки (выкружки) в месте перехода от одного диаметра к другому, а также галтели с разгружающей канавкой, уменьшающие местные напряжения. Радиус галтели может быть увеличен установкой проставочного кольца (рисунок 9.17, *г*). Снижение местных напряжений обеспечивается также введением разгрузочных канавок на валу (рисунок 9.17, *д*) и в местах посадки (рисунок 9.17, *е*).

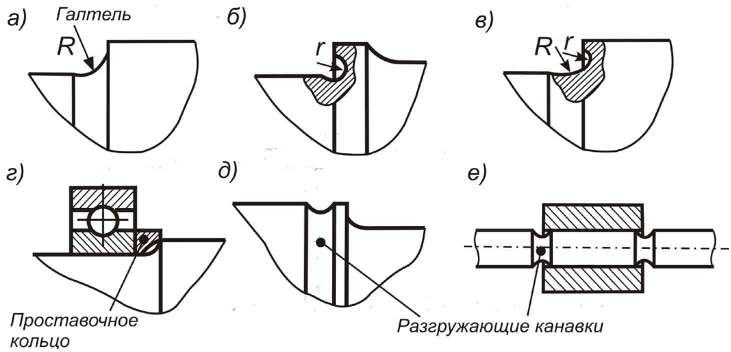


Рисунок 9.17 – Конструктивные меры, снижающие концентрацию напряжений

3 Тщательно обрабатывать поверхность детали, вплоть до полировки, устраняя малейшие царапины, так как они могут быть причиной будущей усталостной трещины.

4 Применять специальные методы повышения выносливости (поверхностное упрочнение, тренировка деталей кратковременными повышенными нагрузками и т. д.). Основные методы упрочнения были приведены выше.

Только за счет поверхностного упрочнения путем наклепа можно повысить срок службы деталей машин в 2–3 раза при незначительных дополнительных расходах. Это равносильно тому, что выпуск машин может быть удвоен и утроен [28].

Таким образом, применение конструктивно-технологических мер для повышения усталостной прочности деталей дает большой экономический эффект.

9.7 Оценка усталостной прочности вагонных конструкций и их узлов

После расчета статической прочности элемента вагона производится дальнейшее уточнение прочности за счет оценки усталостной прочности.

В подразделе 9.6 рассматривалось понятие усталостной прочности элемента при напряжениях, периодически меняющихся во времени. При этом предполагается, что основные характеристики цикла напряжений (среднее напряжение и амплитуда напряжений или максимальные или минимальные напряжения) остаются постоянными во времени.

Режимы нагружения вагонных конструкций, вызывающие в них переменные напряжения. *Режим нагружения* элементов конструкций, вызывающий в них переменные напряжения с постоянными во времени характеристиками цикла, называют *установившимся*. Если же максимальные и минимальные значения переменных напряжений изменяются во времени, то режим нагружения называют *неустановившимся* [5].

Режим нагружения вагонных конструкций определяется множеством причин, оказывающих влияние на силы взаимодействия пути и вагонов и вагонов между собой. Поэтому он носит случайный характер и описывается статистическим законом распределения максимальных напряжений, возникающих в условиях эксплуатации.

Покажем изменение во времени нормальных напряжений в фиксированном волокне шейки оси колесной пары вагона (рисунок 9.18 [5]) при очень медленном движении (кривая *1*) и движении с некоторой скоростью (кривая *2*).

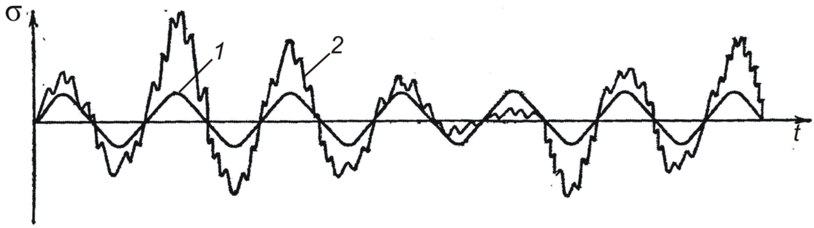


Рисунок 9.18 – Кривые изменения во времени напряжений в фиксированном волокне шейки оси колесной пары

Масштаб времени *t*, откладываемого по оси абсцисс, для кривых *1* и *2* принят разным. Это сделано для удобства сравнения изменения напряжений за один оборот колеса при различных скоростях.

Кривая *1* подчиняется приблизительно синусоидальному закону и соответствует установившемуся режиму с симметричными циклами; кривая *2* характеризуется переменными амплитудами напряжений в шейке и соответствует неустановившемуся режиму.

Поскольку средние напряжения в рассматриваемых двух вариантах нагружения равны нулю, то можно считать неустановившийся режим нагружения аналогичным установившемуся режиму с симметричными циклами.

Отметим, что определение усталостной прочности оси является сложной задачей, не решенной до настоящего времени в полной мере. Наиболее проработанной является задача определения усталостной прочности при постоянном режиме циклических нагружений. Поведение материала при переменном режиме нагружений детали изучено пока еще недостаточно. Особенно это относится к случаям сложного напряженного состояния.

Неустановившийся режим можно представить в табличной форме

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_i,\ \ldots,\ \sigma_k\ ;$$
$$n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_i,\ \ldots,\ n_k$$

или в виде гистограммы.

Здесь n_i – число повторений амплитуды напряжений величины σ_i за срок службы детали. Для удобства дальнейших рассуждений расположим значения амплитуд σ_i в убывающем порядке, т. е. σ_1 – наибольшая, σ_k – наименьшая амплитуды.

Расчеты на усталостную прочность основываются на гипотезе линейного суммирования усталостных повреждений.

Гипотеза линейного суммирования усталостных повреждений. Рассматривают д в е с т а д и и н а к о п л е н и я у с т а л о с т н ы х п о в р е ж д е н и й [15].

На первой стадии имеет место накопление повреждений в отдельных зернах (кристаллитах) за счет дислокационных искажений кристаллической решетки, приводящих к накоплению субмикроскопических трещин, которые объединяются к концу первой стадии в микроскопические. Процессы повреждения в первой стадии ускоряются при наличии неоднородности структуры (поры, неметаллические включения и т. п.).

На второй стадии происходит образование и прогрессирующее развитие макроскопической трещины, полученной в результате увеличения микроскопических трещин.

В условиях эксплуатации наличие прогрессивно развивающейся трещины в детали вагонной конструкции недопустимо. Поэтому в расчетах на усталостную прочность за п о л н о е п о в р е ж д е н и е д е т а л и принимают состояние, при котором лишь начинается развитие макротрещины.

Гипотеза линейного суммирования усталостных повреждений основывается на понятии м е р ы п о в р е ж д е н и я.

Поясним сущность этого понятия, рассматривая сначала установившийся режим нагружения.

В соответствии с гипотезой предполагается, что за один цикл напряжений с амплитудой $\sigma_i \geq \sigma_{-1}$ в материале детали образуется повреждение, составляющее относительную долю $(\Delta D)_j$ полного повреждения, где j – порядковый номер цикла. Тогда относительная доля повреждения за n циклов

$$D_n = \sum_{j=1}^{n} \left(\Delta D\right)_j \ . \qquad (9.28)$$

Если n соответствует числу циклов N_i, при которых происходит полное повреждение при амплитуде напряжения σ_i, т. е. $n = N_i$, то относительное повреждение будет равно единице:

$$D_{N_l} = \sum_{j=1}^{N_i} (\Delta D)_j = 1. \tag{9.29}$$

Приведенная выше *функция D_n* и *представляет собой меру повреждения*. Она является функцией времени, равна нулю для начального состояния материала и равна единице при полном повреждении.

Если повреждения материала, имеющие место к концу каждой стадии, известны, то процесс их развития во времени количественно не изучен.

При выполнении практических расчетов используется *предположение о равномерном приращении повреждения за каждый цикл*.

Это означает, что приращение меры повреждения за один цикл (для любого $j = 1, 2, \ldots, N_i$)

$$(\Delta D)_j = \frac{1}{N_i}, \tag{9.30}$$

где N_i – число циклов, соответствующих амплитуде напряжений $\sigma_i > \sigma_{-1}$ ($\sigma_i =$ $=$const), при которых происходит полное повреждение.

Тогда мера повреждения после нагружения n_i циклами с амплитудой σ_i

$$D = \sum_{j=1}^{n} (\Delta D)_j = \frac{n_i}{N_i}. \tag{9.31}$$

При *неустановившемся режиме нагружения* аналогично установившемуся принимается, что полное повреждение детали наступит в случае равенства единице суммы повреждений:

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \ldots + \frac{n_i}{N_i} + \ldots \frac{n_k}{N_k} = 1 \tag{9.32}$$

или

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N_i} = 1. \tag{9.33}$$

Условие (9.33) характеризует сущность гипотезы линейного суммирования повреждений, выдвинутой Пальмгреном.

Однако в результате выполненных экспериментальных проверок установлено, что сумма относительных повреждений отклоняется от единицы и составляет

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{N_i} = s_\mathrm{p}. \tag{9.34}$$

Величина s_p имеет значения $0,5 < s_p < 2$. При этом s_p уменьшается с увеличением разницы между наибольшими и наименьшими амплитудами напряжений и с уменьшением относительного времени действия амплитуд высокого уровня.

Установлено также, что амплитуды напряжения, меньшие предела выносливости, тоже могут оказывать повреждающее действие. Объясняется это тем, что предел выносливости материала, предварительно подвергавшегося нагружениям при амплитуде $\sigma_i > \sigma_{-1}$ и числе циклов, не меньшем некоторого определяемого из опыта, уменьшается по сравнению с пределом выносливости материала в исходном состоянии.

Таким образом, повреждающими (при соответствующем числе циклов) являются не только амплитуды напряжений, превышающие исходный предел выносливости, но и амплитуды напряжений, меньшие исходного предела выносливости, но большие предела выносливости поврежденного материала.

Расчет усталостной прочности при неустановившемся режиме нагружения, аналогичном установившемуся с симметричными циклами напряжений. Особенностью симметричного цикла является отсутствие постоянной составляющей переменных напряжений, что характерно для оси колесной пары.

Расчеты на прочность при неустановившемся режиме нагружения [15] основываются на гипотезе линейного суммирования повреждений, описанной выражением (9.34), и на *уравнении кривой выносливости* в форме

$$\sigma_i^m N_i = \text{const}\,. \qquad (9.35)$$

Уравнение (9.35) записывают в виде

$$\sigma_i^m N_i = \sigma_{-1}^m N_{-1}\,, \qquad (9.36)$$

где σ_i – амплитуда напряжений i-го уровня;

m – котангенс угла наклона прямой к отрицательному направлению оси абсцисс кривой выносливости в координатах lg$N$, lgσ (рисунок 9.20 [5]);

N_i – число циклов до разрушения при напряжении σ_i;

σ_{-1} – предел выносливости;

N_{-1} – базовое число циклов для определения предела выносливости.

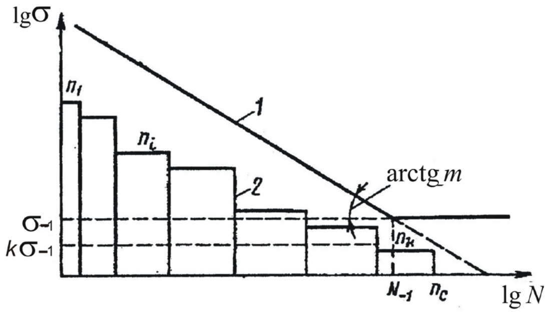


Рисунок 9.19 – Графики к расчету на прочность при неустановившемся режиме: *1* – кривая выносливости; *2* – гистограмма повторений расчетных напряжений

Отметим, что в формуле (9.36) учитывается среднее значение числа циклов до разрушения N_i, соответствующее определенному уровню напряжений σ_i, поскольку в действительности при испытании на выносливость образцов из металла даже одной плавки наблюдается значительное рассеяние чисел N_i при σ_i = const, и тем большее, чем ближе σ_i к пределу выносливости.

Уравнения кривой выносливости (9.35) и (9.36) в координатах lg$N$, lgσ представляют линейную зависимость. Если кривая пересекает ось абсцисс (штриховая часть линии *1* на рисунке 9.20), то это означает отсутствие предела выносливости. В этом случае уравнение (9.35) записывают в виде

$$\sigma_i^m N_i = \sigma_j^m N_j, \tag{9.37}$$

где σ_j, N_j – величина амплитуды напряжений и соответствующее ей число циклов, приводящих к разрушению, которые выбирают по соображениям удобства расчета.

Подставляя N_j, полученное из уравнения (9.36), в выражение (9.34), получим

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\sigma_i^m n_i}{\sigma_{-1}^m N_{-1}} = s_\text{р}. \tag{9.38}$$

Уравнение (9.38) представляет собой *условие полного повреждения при неустановившемся режиме нагружения*.

Из уравнения (9.38) найдем

$$\sigma_{-1} = \frac{1}{\sqrt[m]{s_\text{р}}} \sqrt[m]{\frac{1}{N_{-1}} \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^m n_i}\,. \tag{9.39}$$

Обозначим эквивалентное напряжение с амплитудой

$$\sigma_э = \frac{1}{\sqrt[m]{S_р}} \sqrt[m]{\frac{1}{N_{-1}} \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^m n_i}. \qquad (9.40)$$

Тогда уравнение (9.40) представляет собой согласно выражению (9.39) условие разрушения.

Отметим, что условие (9.39) получено для гладкого лабораторного образца. Поэтому для натурной детали в условии (9.39) и выражении (9.40) σ_i принимают равным номинальным напряжениям в расчетном сечении детали, а вместо σ_{-1} и N_{-1} подставляют предел выносливости $\sigma_{-1д}$ и базовое число циклов $N_{-1д}$ натурной детали.

В случае отсутствия экспериментальных данных, $\sigma_{-1д}$ вычисляют по справочным данным.

Условие полного повреждения детали при неустановившемся режиме нагружения выполняется, если

$$\sigma_э = \sigma_{-1д}. \qquad (9.41)$$

Если же

$$\sigma_э < \sigma_{-1д}, \qquad (9.42)$$

то *запас усталостной прочности детали*

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1д}}{\sigma_э}. \qquad (9.43)$$

где n_σ – запас усталостной прочности;

$\sigma_э$ – амплитуда напряжений установившегося режима нагружения, эквивалентного рассматриваемому неустановившемуся режиму.

Из выражения (9.43) следует, что для достижения условия (9.41) все амплитуды σ_i в формуле (9.40) должны быть увеличены в n_σ раз.

Если

$$\sigma_э > \sigma_{-1д}, \qquad (9.44)$$

то *деталь не обладает необходимым запасом усталостной прочности*.

Для корпусных деталей вагонов при использовании в расчетах надежных данных о пределе выносливости и об эксплуатационной нагруженности детали допускаемый запас усталостной прочности принимают $[n_\sigma]$ = 1,2…1,4; при использовании надежных данных о пределе выносливости, но приближенных о нагруженности или, наоборот, принимают $[n_\sigma]$ = 1,5…1,8; если как первые, так и вторые данные приближенные, то принимают $[n_\sigma]$ = 1,8…2,2; большие значения $[n_\sigma]$ принимают для более ответственных деталей [5].

Примечание – К корпусным относят детали, геометрическую схему которых можно представить в виде системы тонких или толстых оболочек, в частности складчатых или рам. Это корпуса букс, боковые рамы тележек грузовых вагонов и др. Условно к ним можно отнести сложные узлы, например, шкворневые узлы рам вагонов и др. [5].

Для определения $\sigma_э$ по формуле (9.40) требуется иметь значения показателя степени m, постоянной $s_р$ и базового числа циклов N_{-1}.

При отсутствии специальных экспериментальных данных обычно принимают следующие значения m [5]:

- для сварных элементов конструкций с необработанной поверхностью $m = 6…8$;
- для литых элементов конструкций с необработанной поверхностью $m = 8…10$;
- для точеных валов и осей без поверхностного упрочняющего наклепа $m = 8…12$ и с поверхностным наклепом $m = 15…18$;
- для корпусных деталей вагонов по рекомендации ВНИИВ

$$m = \frac{16}{(k_\sigma)_д}, \tag{9.45}$$

где $(k_\sigma)_д$ – эффективный коэффициент концентрации детали.

Как уже отмечалось, постоянная $s_р$ изменяется в пределах $0,5 < s_р < 2$. Тогда $\sqrt[m]{s_р}$ при $m = 6$ находится в пределах 0,89–1,12. Поэтому при отсутствии экспериментальных данных для определения $\sigma_э$ часто принимают $s_р = 1$, т. е. используют условие (9.33).

При отсутствии специальных экспериментальных данных обычно принимают $N_{-1} = 10^7$ циклов, а для осей вагонных колесных пар – $N_{-1} = 10^8$ циклов.

При вычислении $\sum \sigma_i^m n_i$ учитывают амплитуды напряжений от σ_{max} до σ_{min}. Если в спектре имеются амплитуды напряжений $\sigma_i \geq \sigma_{-1д}$, то, учитывая описанный выше эффект снижения предела выносливости при неустановившемся режиме нагружения, принимают $\sigma_{min} = k_п\sigma_{-1д}$, где $k_п$ – число, определяющее нижнюю границу повреждающих напряжений; обычно принимают $0,5 \leq k_п < 1$.

Условие полного повреждения в случае, если амплитуды напряжений изменяются непрерывно, записывают в виде

$$\int_0^{N_с} \frac{dn_i}{N_i} = s_р, \tag{9.46}$$

где $N_с$ – суммарное количество циклов, вызывающих накопление усталостных повреждений.

Пусть изменения амплитуд σ_i имеют случайный характер и $\Phi(\sigma_i)$ – функция распределения величины σ_i. Тогда число циклов величин σ_i

$$n_i = N_с \Phi(\sigma_i), \tag{9.47}$$

откуда

$$dn_i = N_с \frac{d\Phi(\sigma_i)}{\sigma_i}, \tag{9.48}$$

или

$$dn_i = N_с f(\sigma_i) d\sigma_i, \tag{9.49}$$

где $f(\sigma_i) = N_с \dfrac{d\Phi(\sigma_i)}{d\sigma_i}$ – плотность распределения величины σ_i.

Подставляя выражение (9.49) и N_i из уравнения (9.36) в условие (9.46), получим другую форму записи *условия полного повреждения*:

$$\int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} N_с \frac{\sigma_i^m f(\sigma_i) d\sigma_i}{\sigma_{-1}^m N_{-1}} = s_р, \tag{9.50}$$

откуда аналогично формуле (9.40)

$$\sigma_э = \frac{1}{\sqrt[m]{s_р}} \sqrt[m]{\frac{N_с}{N_{-1}} \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \sigma_i^m f(\sigma_i) d\sigma_i}. \tag{9.51}$$

Пояснения к формуле (9.40) относительно $s_р$, m, и N_{-1} сохраняются и применительно к формуле (9.51).

После вычисления $\sigma_э$ по формуле (9.51) запас усталостной прочности определяют также по формуле (9.43).

В случае нагружения, вызывающего касательные напряжения, например при неустановившемся режиме кручения, в формулах (9.40), (9.51) и (9.43) нормальные напряжения заменяются соответствующими касательными напряжениями.

Функция плотности распределения напряжений $f(\sigma_i)$ устанавливается на основании статистического анализа экспериментальных данных о нагруженности рассчитываемой детали. На основании такого анализа для осей колесных пар принимают логарифмически нормальный закон распределения, для других элементов вагона – распределение Рэлея.

Использование установленного закона распределения и учет характерных условий работы детали позволяют упростить формулу (9.51).

Расчет усталостной прочности при неустановившемся режиме нагружения, аналогичном установившемуся с несимметричными циклами напряжений. Несимметричный цикл предполагает наличие постоянной составляющей напряжений.

В элементах конструкции вагона, за исключением оси колесной пары, возникают напряжения как от постоянной нагрузки σ_c, так и от динамической σ_a, характер изменения которых вероятностный. Поэтому режим изменения напряжений во времени в этих элементах аналогичен установившемуся с несимметричными циклами и отличается от последнего переменностью амплитуд напряжений.

Методы расчета на прочность деталей, испытывающих неустановившийся режим нагружения с несимметричными циклами, пока недостаточно проработаны и требуют дальнейшего развития.

Расчеты на прочность в этом режиме нагружения основываются, как правило, на условии приведения напряжений несимметричного цикла к амплитуде эквивалентного симметричного:

$$\sigma_{\text{аэ}} = \sigma_{\text{а}} + \psi_{\text{д}}\sigma_{\text{с}}, \tag{9.52}$$

где $\psi_{\text{д}}$ – коэффициент влияния несимметрии цикла для натурной детали.

В предельном состоянии $\sigma_{\text{аэ}} = \sigma_{-1\text{д}}$.

Отметим, что для деталей из сталей с невысоким пределом прочности, используемых при изготовлении большинства несущих частей вагонов, и при наличии концентрации напряжений коэффициент влияния несимметрии цикла $\psi_{\text{д}}$ мал. Вследствие этого вторым слагаемым в условии (9.52) ввиду малости можно пренебречь. В этом случае эквивалентные амплитуды напряжений будут совпадать с амплитудами переменных динамических напряжений:

$$\sigma_{\text{аэ}} \equiv \sigma_{\text{а}}. \tag{9.53}$$

Таким образом, *методика оценки усталостной прочности вагонных конструкций и их узлов* основывается на выполнении условия $\psi_{\text{д}} \approx 0$ и вытекающего из него приближенного тождества (9.53). Запас усталостной прочности при этом определяют, используя формулу (9.43).

В случае невозможности пренебречь вторым слагаемым в условии (9.52) *приближенную оценку запаса усталостной прочности* получают, подставляя в правую часть выражения (9.52) вместо σ_a значение $\sigma_э$, рассчитанное по амплитудам динамических напряжений по формулам (9.40) или (9.51). Поскольку $\sigma_э$, σ_c и $\psi_д$ постоянны, то и $\sigma_{аэ}$ также постоянно и его можно рассматривать как амплитуду эквивалентного установившегося режима с симметричными циклами напряжений.

Запас усталостной прочности детали определяют по формуле

$$n_\sigma \equiv \frac{\sigma_{-1\text{д}}}{\sigma_{\text{аэ}}}. \tag{9.54}$$

Расчетные амплитуды напряжений установившегося режима нагружения как при детерминированном, так и при вероятностном характере изменения амплитуд переменных напряжений можно получить, используя формулы (9.40) и (9.51).

За последние годы накоплен достаточно большой объем информации о результатах испытаний составных частей вагонов на сопротивление усталости при асимметричной циклически изменяющейся силе нагружения на нескольких уровнях постоянной амплитуды силы до получения трещины или достижения базового числа циклов $N_0 = 10^7$.

Поэтому в настоящее время в результате обобщения экспериментальных работ стандартом (ГОСТ 33211–2014) рекомендуется оценивать сопротивление усталости составной части вагона по *коэффициенту запаса усталостной прочности*, рассчитываемого по формуле

$$n = \frac{\sigma_{\text{а},N}}{\sigma_{\text{аэ}}}, \tag{9.55}$$

где $\sigma_{\text{а},N}$ – предел выносливости по амплитуде составной части при базовом числе циклов $N_0 = 10^7$;

$\sigma_{\text{аэ}}$ – приведенная амплитуда динамического напряжения, эквивалентная по повреждающему действию распределению амплитуд напряжений за расчетный ресурс составной части.

Предел выносливости по амплитуде $\sigma_{\text{а},N}$ для сварных и литых составных частей несущих конструкций определяют:

- методом испытаний – в соответствии со стандартом;
- расчетным способом – по формуле

$$\sigma_{\text{а},N} = \frac{\sigma_{\text{м}}}{k_\sigma}, \tag{9.56}$$

где $\sigma_{\text{м}}$ – значение предела выносливости базового материала (листа, проката) при базовом числе циклов $N_0 = 10^7$ и односторонней доверительной вероятности 95 %, для стали принимают $\sigma_{\text{м}} = 47$ МПа, для алюминиевых сплавов $\sigma_{\text{м}} = 23{,}5$ МПа;

k_σ – коэффициент снижения предела выносливости, определяемый для различных типов сварных конструкций по таблице 10 [29].

Приведенную амплитуду динамического напряжения $\sigma_{\text{аэ}}$, эквивалентную по повреждающему действию распределению амплитуд напряжений за расчетный ресурс составной части, определяют по формуле

$$\sigma_{\text{а},N} = \sqrt[m_1]{\frac{1}{N_{\text{с}}}\left(\sum n_i \sigma_{\text{а},i}^{m_1} + \sigma_{\text{а},N}^{(m_1 - m_2)} \sum n_j \sigma_{\text{а},j}^{m_2}\right)}, \tag{9.57}$$

где $\sigma_{a,N}$ – предел выносливости по амплитуде (точка перелома кривой выносливости для больших и малых амплитуд напряжений) при базовом числе циклов $N_0 = 10^7$;

m_1 – показатель степени первой ветви кривой выносливости, для сварных соединений принимают $m_1 = 3$ или определяют при испытании;

m_2 – показатель степени второй ветви кривой выносливости, для сварных соединений принимают $m_2 = 5$ или определяют при испытании. Допускается в формуле (9.57) принимать $m_1 = m_2$;

$\sigma_{a,i}$ – амплитуда динамического напряжения, $\sigma_{a,i} \geq \sigma_{a,N}$;

n_i – количество циклов амплитуд динамического напряжения, $\sigma_{a,i}$;

$\sigma_{a,j}$ – амплитуда динамического напряжения, $\sigma_{a,j} < \sigma_{a,N}$;

n_j – количество циклов амплитуд динамического напряжения, $\sigma_{a,j}$.

9.8 Расчет оси колесной пары на усталостную прочность

Расчеты вагонных конструкций на усталостную прочность рассмотрим на примере оси колесной пары, которая испытывает в эксплуатации наиболее опасные знакопеременные напряжения.

Знакопеременный характер напряжений в условиях эксплуатации оси колесной пары, как правило, приводит к усталостным разрушениям оси, и, следовательно, за критерий ее прочности необходимо принимать ее усталостную прочность, а не статическую. Поэтому оценка статической прочности оси представляет в большей степени теоретический интерес, чем практический.

9.8.1 Расчет оси колесной пары на усталостную прочность при установившемся режиме нагружения

Условие усталостной прочности оси при постоянном режиме ее циклического нагружения. *Критерием усталостной прочности оси при постоянном режиме ее циклического нагружения* является

$$n = \frac{\sigma_{-1д}}{\sigma_a} \geq [n], \qquad (9.58)$$

где n – расчетное значение коэффициента запаса усталостной прочности оси;

$\sigma_{-1д}$ – расчетно-экспериментальное значение предела выносливости оси с учетом ее геометрических особенностей, технологии изготовления и упрочняющей обработки или полученное при натурных испытаниях оси;

σ_a – амплитуда напряжений в рассматриваемом сечении оси от расчетной нагрузки;

$[n]$ – допускаемый коэффициент запаса усталостной прочности оси.

Конструкция оси колесной пары вагона с пояснением ее составных частей и вариантов конструктивного исполнения перехода от шейки оси к предподступичной части показана на рисунке 9.20.

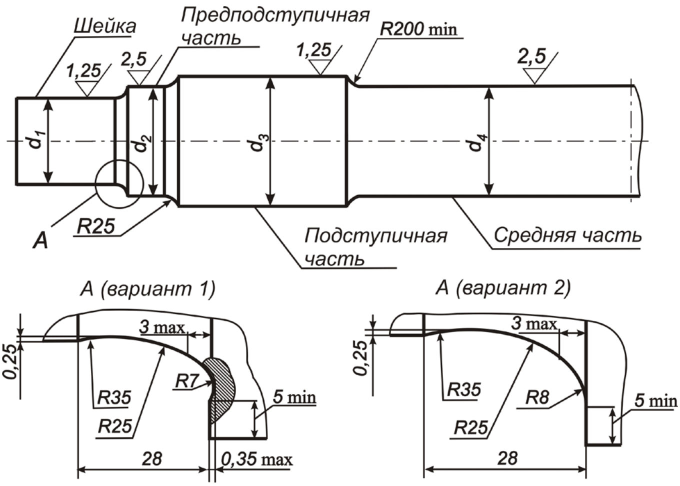


Рисунок 9.20 – Ось колесной пары вагона типа РУ1Ш

Корректировка предела прочности материала шейки оси. Рассмотрим усталостную прочность шейки оси колесной пары при постоянном режиме циклических нагружений.

В результате нагружения шейки оси постоянной вертикальной нагрузкой P (см. рисунок 9.1) нормальные напряжения в ней при вращении оси изменяются по симметричному циклу. При этом предел выносливости материала шейки при изгибе σ_{-1}, который установлен при испытаниях гладких малых образцов без концентраторов напряжений, является завышенным.

Учет абсолютных размеров образца и концентрации напряжений приводит к снижению предела выносливости σ_{-1}.

Предел выносливости материала оси, зависящий от абсолютных размеров образца (с учетом масштабного фактора), определяется из формулы (9.12):

$$\sigma_{-1\text{дм}} = \varepsilon_\sigma \sigma_{-1}, \qquad (9.59)$$

ε_σ – коэффициент влияния абсолютных размеров сечения для гладкого образца.

Для определения коэффициента ε_σ можно использовать кривые, показанные на рисунке 9.21. Кривая *1* относится к мягким сталям с $\sigma_в$ = 400…500 МПа, а кривая *2* – к высокопрочным легированным сталям с $\sigma_в$ = 1200…1400 МПа.

К снижению предела выносливости материала σ_{-1} приводит также концентрация напряжений, которая имеет место в галтели шейки.

Предел выносливости материала оси с учетом концентрации напряжений

$$\sigma_{-1дк} = \frac{\sigma_{-1}}{k_\sigma}, \tag{9.60}$$

где k_σ – эффективный коэффициент концентрации напряжений.

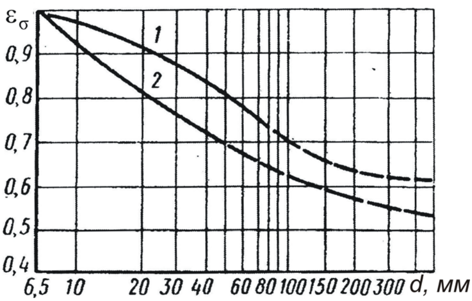


Рисунок 9.21 – Кривые для определения коэффициента влияния абсолютных размеров для гладких образцов

Эффективный коэффициент концентрации напряжений k_σ определяется по формуле (9.1) в зависимости от коэффициента чувствительности материала к концентрации напряжений q_σ и теоретического коэффициента концентрации напряжений α_σ.

Величина коэффициента k_σ для образцов с галтелями зависит от величины отношений r/d и D/d, а также от абсолютных размеров образца и качества материала. Здесь D, d – больший и меньший диаметры ступенчатого образца; r – радиус галтели.

Для оценки эффективного коэффициента концентрации могут быть использованы кривые, характеризующие зависимость k_σ от r/d при постоянном отношении $D/d = 2$, полученные при испытаниях стальных образцов диаметрами 30–50 мм и $\sigma_в$ = 500 и 1200 МПа (рисунок 9.22). Здесь же для сравнения приведен график теоретического коэффициента концентрации α_σ (пунктирная линия). Обозначим эффективный и теоретический коэффициенты концентрации k_σ при отношении $D/d = 2$ как $k_{\sigma 2}$ и $\alpha_{\sigma 2}$.

Как следует из рисунка 9.22, величина k_σ увеличивается с уменьшением отношения r/d. Отсюда следует, что для уменьшения напряжений у основания галтели шейки оси необходимо увеличивать радиус галтели шейки $r_ш$.

В случае если отношение $D/d < 2$, коэффициент k_σ вычисляется по формуле

$$k_\sigma = 1 + \varphi_\sigma (k_{\sigma 2} - 1), \qquad (9.61)$$

где φ_σ – коэффициент, определяемый по кривой, приведенной на рисунке 9.23.

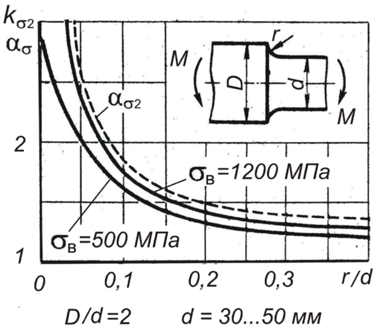


Рисунок 9.22 – Кривые для определения эффективного коэффициента концентрации при изгибе

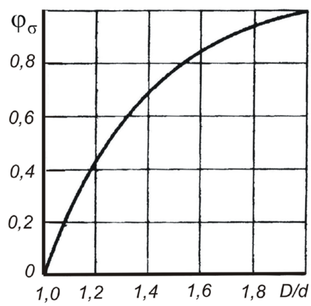


Рисунок 9.23 – Кривая для определения коэффициента φ_σ

Большое влияние на предел выносливости σ_{-1} оказывает состояние поверхности и поверхностного слоя образца. В частности, предел выносливости уменьшается, например, при ухудшении чистоты обработки поверхности и наличии коррозии. Для увеличения предела выносливости используются различные способы упрочнения поверхностного слоя (наклеп, азотирование, цементация, цианирование, закалка, обдувка дробью, накатка роликом и т. д.).

Предел выносливости оси, зависящий от состояния поверхности и поверхностного слоя образца, определяют, используя формулу

$$\sigma_{-1дп} = \beta_\sigma \sigma_{-1}, \qquad (9.62)$$

где β_σ – поправочный коэффициент к пределу выносливости, полученному для тщательно полированного образца. Принимается по таблицам и графикам, имеющимся в литературе.

Предел выносливости, зависящий от перечисленных факторов, при отсутствии соответствующих экспериментальных данных может быть приближенно определен по формуле

$$\sigma_{-1д} = \frac{\varepsilon_\sigma \beta_\sigma}{k_\sigma} \sigma_{-1}, \qquad (9.63)$$

где ε_σ, β_σ, k_σ – коэффициенты, определяемые вышеуказанными способами.

Значительное влияние на усталостную прочность оси оказывают напряжения от насадки ступицы колеса и посадки роликового подшипника на шейку оси. Например, насадка ступицы колеса из углеродистых сталей снижает предел выносливости материала почти в 2 раза. Для легированных сталей предел выносливости уменьшается более чем в 2 раза.

9.8.2 Усталостная прочность оси колесной пары при неустановившемся режиме нагружения

В процессе эксплуатации ось колесной пары подвергается разнообразным воздействиям, при которых материал оси иногда испытывает переменные напряжения, превосходящие по величине предел выносливости.

Как уже отмечалось, если в результате испытаний непрерывно нагружать материал образца по симметричному циклу с постоянной амплитудой напряжений σ_i, то существует определенное число циклов нагружении N_i, вызывающих усталостный излом. Зависимость σ_i от N_i в логарифмических координатах имеет вид кривой, образованной двумя отрезками прямой (см. рисунок 9.19). Точка излома полученной ломаной линии определяет минимальное число циклов N_{-1}, необходимых для нахождения предела выносливости σ_{-1}. Из рассмотрения кривой ясно, что при амплитуде напряжений σ_i, равной пределу выносливости σ_{-1} ($\sigma_i = \sigma_{-1}$) материал способен выдержать бесконечно большое количество циклов нагружения.

Уравнение кривой усталости записывают в виде выражения (9.36).

При действии на образец нагрузки с многоступенчатой амплитудой (рисунок 9.24) степень повреждения выражается суммой относительных повреждений и определяется уравнением (9.34).

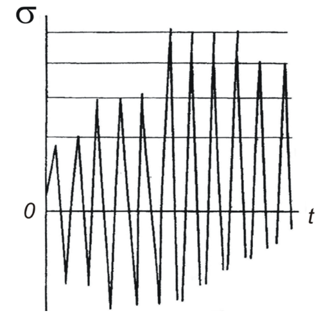


Рисунок 9.24 – Многоступенчатое действие амплитуд напряжений

Величину $s_р$, характеризующую степень повреждения от действия всех переменных напряжений, рассчитывают по формуле (9.38), а предел выносливости σ_{-1} – по формуле (9.39).

Эквивалентное напряжение с амплитудой $\sigma_э$ при задании частоты повторений напряжений в виде гребенки, состоящей из дискретных ординат p_1, p_2, …, определяют, используя выражение (9.40).

Если частота повторений напряжений задана в виде непрерывной кривой функции плотности распределения вероятности амплитуд напряжений $f(\sigma_i)$, то для вычисления эквивалентного напряжения используется формула (9.51).

Уровень напряжений оказывает большое влияние на усталостную прочность материала. Относительно небольшие тренировочные напряжения, по величине, однако превосходящие предел выносливости, могут вызвать упрочнение материала. Перерывы (паузы) в испытаниях действуют благоприятно – повышают выносливость материала. Значительные перегрузки оказывают разупрочняющее действие.

По найденным с помощью приведенных формул значениям эквивалентных напряжений могут быть вычислены величины коэффициентов запасов прочности оси с учетом фактического (эмпирического) распределения эксплуатационных нагрузок

$$n = \frac{\sigma_{-1\text{д}k}}{\sigma_\text{э}} \geq [n], \tag{9.64}$$

где $[n]$ – допускаемое значение коэффициента запаса прочности оси при нестационарном режиме ее нагружения.

Для практических целей иногда бывает целесообразно вычислить значение эквивалентного числа циклов $N_\text{э}$ напряжений эквивалентной величины $\sigma_\text{э}$ по формуле

$$N_\text{э} = \frac{1}{s_\text{р}} \sum \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{-1}} \right)^m n_i \tag{9.65}$$

или

$$N_\text{э} = \frac{n_\text{с}}{s_\text{р} \sigma_{-1}^m} \int_{\sigma_{-1}}^{\sigma_{\max}} \sigma_i^{\,m} f(\sigma_i) d\sigma_i. \tag{9.66}$$

Используя формулы (9.65) и (9.66) по найденному числу эквивалентных циклов изменения напряжения оси, можно установить период ее долговечности в эксплуатации.

9.8.3 Метод расчета осей колесных пар на усталостную прочность при неустановившемся режиме нагружения

Коэффициенты запаса прочности для каждого сечения оси с использованием соотношений (9.27) и (9.48) могут быть определены по формуле

$$n = \frac{\sigma_{-1\text{д}k}}{\sigma_\text{э}} = \frac{\sigma_{-1\text{д}k}}{\sqrt[m]{\dfrac{1}{s_\text{р} N_{-1}} \sum \sigma_i^m n_i}} = \sqrt[m]{\frac{s_\text{р} N_{-1}}{\sum \left(\dfrac{\sigma_i}{\sigma_{-1}} \right)^m n_i}}. \tag{9.67}$$

Для использования указанной формулы должны быть известны силы, действующие на ось, и ее пределы выносливости.

Определенную трудность при оценке усталостной прочности оси по формуле (9.67) вызывали отсутствие достаточно полных данных о величинах и повторяемости действия динамических нагрузок на колесную пару в эксплуатации, недостаток данных по усталостным испытаниям натурных вагонных осей, а также трудоемкость вычислений при определении коэффициента запаса прочности n.

К настоящему времени указанные трудности в основном преодолены благодаря работам, выполненным ЦНИИ МПС (РФ) и другими научными организациями. В результате выполненных испытаний накоплены необходимые данные по усталостной прочности натурных осей подвижного состава, получены статистические закономерности изменения динамических сил, действующих на колесные пары в грузовых и пассажирских вагонах при различных скоростях их движения, а также функции $f(\sigma_i)$ – плотности распределения вероятности p_i напряжений σ_i в оси.

При известных зависимостях $f(\sigma_i)$, $p_i = f(\sigma_i)d\sigma_i$ и значений повторяемости $n_i = p_i N_с$ (где $N_с$ – общее число циклов нагружений оси за расчетный срок службы в эксплуатации) и принятом значении $s_р = 1$ формула (9.67) примет вид

$$n = \sqrt[m]{\frac{\sigma_{-1дk} N_{-1}}{N_с \int\limits_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \sigma_i^m f(\sigma_i) d\sigma_i}}. \qquad (9.68)$$

В формуле (9.68) за пределы интеграла принимают напряжения, которые уже не могут повлиять на общее накопление повреждений в оси: меньшие напряжения (нижний предел) по их малости и большие (верхний предел) – по их малой повторяемости. В качестве таких пределов были приняты $\sigma_{\min} = 0{,}5\sigma_{-1дk}$ и $\sigma_{\max}$ – наибольшие напряжения, количество повторений которых за срок эксплуатации не превосходит 10^3–10^4 раз.

В результате выполненных исследований установлено, что функция плотности распределения вероятности амплитуд напряжений в оси при ее изгибе описывается логарифмически-нормальным законом:

$$f(\sigma_i) = \frac{1}{\sigma s_\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln\sigma - \ln\xi)^2}{2 s_\sigma^2}}, \qquad (9.69)$$

где $\xi = M[\ln \sigma]$ – математическое ожидание $\ln \sigma$;

$s_\sigma^2 = D[\ln \sigma]$ – дисперсия распределения $\ln \sigma$.

Использование установленного закона распределения позволяет упростить формулу (9.68) для оценки коэффициента запаса прочности оси, сделав ее более удобной для практического пользования.

Тогда *расчетный коэффициент запаса усталостной прочности* в i-м расчетном сечении можно записать в виде:

$$n_i = \frac{2\alpha_{\min i}}{e^{0,5s_{\text{н}i}^2(m-1)}} \sqrt[m]{\frac{N_\text{о}}{N_\text{с}\left[\Phi(t_{\max i}) - \Phi(t_{\min i})\right]}}, \tag{9.70}$$

где $\alpha_{\min i}$ – минимальное значение коэффициента перегрузки i-го расчетного сечения,

$$\alpha_{\min i} = \sigma_{-1i}/2\sigma_{\text{ст}i} ;$$

σ_{-1i} – предел усталостной прочности материала оси в i-м расчетном сечении: для сечений *1–1* и *2–2* σ_{-1i} = 150 МПа, сечения *3–3* σ_{-1i} = = 135 МПа, сечений *4–4* и *5–5* σ_{-1i} = 190 МПа [11];

$\sigma_{\text{ст}i}$ – нормальные напряжения в i-м расчетном сечении от вертикальной статической силы $P_\text{ст}$, кН·м;

m – показатель степени в уравнении кривой усталости оси (зависящий от свойств материала и технологии изготовления: для накатанной оси принимается m = 18, для ненакатанной – m = 8 [11];

$N_\text{о}$ – базовое число циклов нагружения оси для определения предела выносливости σ_{-1}, $N_\text{о} = 10^8$ [11];

$N_\text{с}$ – суммарное число циклов нагружения за срок службы оси для среднесетевых условий эксплуатации: для осей грузовых вагонов $N_\text{с}$ = $= 5 \cdot 10^8$, для осей пассажирских вагонов $N_\text{с} = 10 \cdot 10^8$ [11];

$\Phi(t)$ – нормированная интегральная функция нормального распределения,

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-z^2/2} dz ,$$

определяется из таблицы [13] для найденных значений $t = t_{\min i}$ и $t = t_{\max i}$. При этом $\Phi(-t) = \Phi(t)$,

$$t_{\min i} = \frac{\ln \alpha_{\min i} + 0,5s_{\text{н}i}^2}{s_{\text{н}i}} - s_{\text{н}i}m ;$$

$$t_{\max i} = \frac{\ln \alpha_{\max i} + 0,5s_{\text{н}i}^2}{s_{\text{н}i}} - s_{\text{н}i}m ;$$

$\alpha_{\max i}$ – максимальное значение коэффициента перегрузки i-го расчетного сечения,

$$\alpha_{\max i} = \sigma_i/\sigma_{\text{ст}i} ;$$

$s_{\text{н}i}$ – среднее квадратическое отклонение логарифмов амплитуд напряжений,

$$s_{\text{н}i} = t_{\text{о}} - \sqrt{t_{\text{о}}^2 - 2\ln\alpha_{\max i}},$$

$t_{\text{о}}$ – число, определяющее границы доверительного интервала статистического распределения: для осей грузовых и изотермических вагонов $t_{\text{о}} = 4$, пассажирских – $t_{\text{о}} = 4{,}5$ [11].

Нормальные напряжения в расчетных сечениях оси, МПа:

• от вертикальной статической силы –

$$\sigma_{\text{ст}i} = \frac{M_i}{W_i \cdot 10^3};$$

• от расчетных сил –

$$\sigma_{\text{ст}i} = \frac{M_{\text{ст}i}}{W_i \cdot 10^3},$$

где M_i, $M_{\text{ст}i}$ – изгибающие моменты в i-м расчетном сечении соответственно от вертикальной статической силы и от расчетных сил, кН·м;

W_i – момент сопротивления изгибу i-го расчетного сечения, м^3,

$$W_i = \frac{\pi d_i^3}{32},$$

d_i – диаметр оси в i-м расчетном сечении, м^3.

Оценка усталостной прочности производится по условию

$$n_i \geq [n], \qquad (9.71)$$

где n_i – расчетный коэффициент запаса усталостной прочности в i-м расчетном сечении;

$[n]$ – допускаемый коэффициент запаса усталостной прочности. Рекомендуемые значения $[n]$: для оси грузового вагона – 2,0; оси почтово-багажного вагона – 2,1; оси пассажирского вагона – 2,3 [13].

Если условие (9.55) выполняется, то ось имеет необходимый запас усталостной прочности.

Примечание – Оценка усталостной прочности в i-м расчетном сечении производится только в том случае, если выполняется условие $\sigma_i \geq 0{,}5\sigma_{-1i}$. Если же $\sigma_i < 0{,}5\sigma_{-1i}$, то значение n_i не рассчитывается и условно принимается $n_i > 2{,}5$.

9.9 Пример расчета оси колесной пары на усталостную прочность

Расчетная схема и расчетные сечения. В расчетной схеме оси колесной пары (рисунок 9.25) удалены колеса, вместо которых в опорных местах оси прикладываются силы H_1, H_2 и моменты на левой и правой опорах $M_л$ и $M_п$, а также вертикальные реакции R_C *и* R_D.

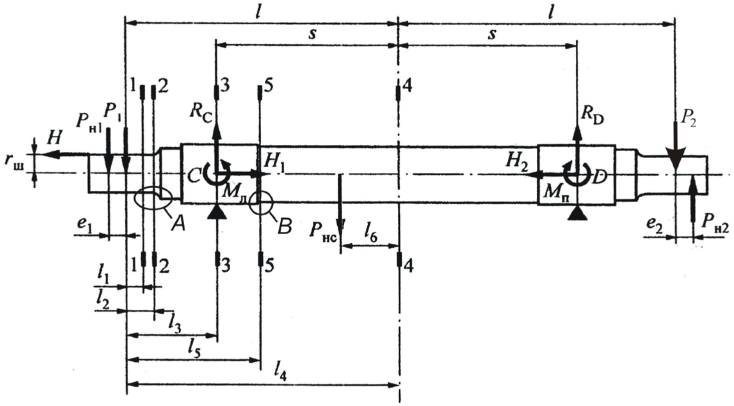


Рисунок 9.25 – Расчетная схема оси и положение расчетных сечений

Оценку усталостной прочности оси производят для следующих р а с ч е т н ы х с е ч е н и й [11]:

1–1 – *по шейке оси* в начале разгружающей канавки;

2–2 – *по шейки оси* на расстоянии *a* от торца предподступичной части, *a* = 10 мм. Значение *a* можно получить и по формуле *a* = (2/3)*t*, где *t* – длина участка от торца предподступичной части до точки сопряжения цилиндрический поверхности разгружающей канавки и поверхности галтели с радиусом 25 мм;

3–3 – *по подступичной части* в плоскости круга катания.

4–4 – *по середине оси.*

5–5 – *по* галтели *средней части оси* на расстоянии *c* = (2/3)*d*, где *d* – длина участка от конца подступичной части до точки сопряжения галтели со средней частью.

Расположение расчетных сечений *1–1, 2–2* и *5–5* пояснено на рисунке 9.26.

Расчетные силы. При расчете оси учитываются три группы сил, действующих на колесную пару (см. рисунок 9.25):

– *вертикальные:* силы P_1 и P_2, приложенные к левой и правой шейкам оси;

– *боковые*: горизонтальная реакция наружного рельса H_1, сила трения, возникающая в месте контакта правого колеса с рельсом H_2 и реакция рамы тележки H;

– *вертикальные инерционные*: на левую и правую шейки $P_{н1}$ и $P_{н2}$, на левое колесо $P_{нк}$ и среднюю часть оси $P_{нс}$.

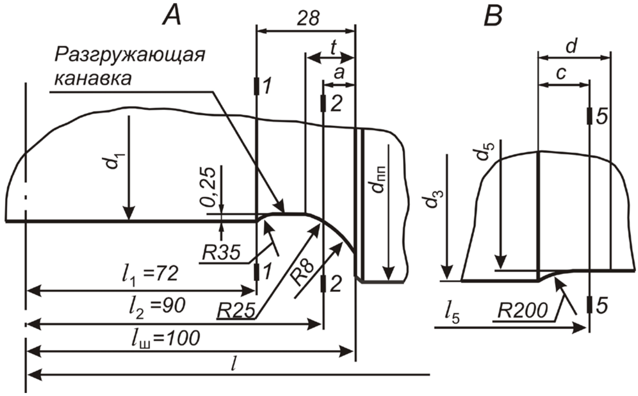


Рисунок 9.26 – Расположение расчетных сечений *1–1, 2–2* и *5–5* (к рисунку 9.25)

В местах насадки колес на ось приложены *вертикальные реакции* R_C *и* R_D.

Формулы для определения указанных расчетных сил и изгибающих моментов в расчетных сечениях оси приведены в таблице 9.1.

Таблица 9.1 – **Формулы для определения расчетных сил и изгибающих моментов в расчетных сечениях оси**

Величина	Расчетная формула
Вертикальная статическая сила на шейку оси с учетом коэффициента использования грузоподъемности вагона, кН	$P_{ст} = \frac{1+\lambda}{2} \cdot \frac{m_{бр} - m_о m_{кп} + 2m_о m_{ш}}{2m_о} g$
Коэффициент вертикальной динамики	$k_д = \lambda_в \left(A + \frac{B\nu}{f_{ст}} \right)$
Вертикальная динамическая сила от колебаний кузова на рессорах, кН	$P_д = k_д P_{ст}$
Вертикальная составляющая, кН: от центробежной силы в кривых	$P_ц = 2P_{ст} \frac{h_ц}{l} \cdot \frac{j_ц}{g}$
от давления ветра	$P_в = \omega F_к \frac{h_в}{2lm_о}$
Расчетная вертикальная нагрузка на шейку оси, кН: левую	$P_1 = P_{ст} + P_д + P_ц + P_в$

Продолжение таблицы 9.1

Величина	Расчетная формула
правую	$P_2 = P_{\text{ст}} - P_{\text{ц}} + P_{\text{в}}$
Ускорение буксового узла, м/с^2: левого	$j_1 = \dfrac{2000 + D\nu}{\sqrt{1000 m_{\text{нк}}}}$
правого	$j_2 = \dfrac{l_2}{l_3 + 2s} j_1$
Вертикальная сила инерции, действующая, кН: на шейку оси левую	$P_{\text{н}1} = m_1 j_1$
на шейку оси правую	$P_{\text{н}2} = m_2 j_2$
от левого колеса на рельс (на правом колесе $P_{\text{нк}} = 0$	$P_{\text{нк}} = m_{\text{к}} j_{\text{к}}$
на среднюю часть оси	$P_{\text{нс}} = m_{\text{с}} j_{\text{с}}$
Коэффициент горизонтальной динамики	$k_{\text{г}} = \lambda_{\text{г}} \delta (40 + F\nu)$
Горизонтальная сила, действующая от колесной пары на раму (рамная сила), кН	$H = \dfrac{m_{\text{бр}}}{m_{\text{о}}} k_{\text{г}} g$
Вертикальная реакция рельса, кН: наружного на левое колесо	$R_{\text{н}} = P_1 \dfrac{l_3 + 2s}{2s} + P_{\text{н}1} \dfrac{e_1 + 2s + l_3}{2s} + H \dfrac{r_{\text{к}} + r_{\text{ш}}}{2s} + P_{\text{нк}} - \dfrac{2}{3} P_{\text{нс}} - P_2 \dfrac{l_3}{2s} + P_{\text{н}2} \dfrac{l_3 + e_2}{2s}$
внутреннего на правое колесо	$R_{\text{в}} = P_2 \dfrac{l_3 + 2s}{2s} - P_{\text{н}2} \dfrac{l_3 + 2s + e_2}{2s} + \dfrac{1}{3} P_{\text{нс}} - H \dfrac{r_{\text{к}} + r_{\text{ш}}}{2s} - P_1 \dfrac{l_3}{2s} - P_{\text{н}1} \dfrac{e_1 + l_3}{2s}$
Вертикальная реакция, действующая на опору оси, кН: левую	$R_C = P_1 \dfrac{l_3 + 2s}{2s} + \beta P_{\text{н}1} \dfrac{e_1 + 2s + l_3}{2s} + H \dfrac{r_{\text{к}} + r_{\text{ш}}}{2s} + P_{\text{нк}} - \dfrac{2}{3} P_{\text{нс}} - P_2 \dfrac{l_3}{2s} + P_{\text{н}2} \dfrac{e_2 + l_3}{2s}$
правую	$R_D = P_2 \dfrac{l_3 + 2s}{2s} - P_{\text{н}2} \dfrac{l_3 + 2s + e_2}{2s} + \dfrac{1}{3} P_{\text{нс}} - H \dfrac{r_{\text{к}} + r_{\text{ш}}}{2s} - P_1 \dfrac{l_3}{2s} - \beta P_{\text{н}1} \dfrac{e_1 + l_3}{2s}$

Окончание таблицы 9.1

Величина	Расчетная формула
Поперечная составляющая силы трения правого колеса о рельс, Н	$H_2 = \mu R_{в}$
Боковая сила, Н	$H = H_1 + H_2$
Изгибающий момент от инерционных сил, действующих в сечении над опорой оси, $кН \cdot м$: левой	$M_{л} = H_1 r_{к} - (1-\beta) P_{н1}(e_1 + l_3)$
правой	$M_{п} = H_2 r_{к}$
Изгибающие моменты в расчетных сечениях от, кН·м: вертикальной статической силы $P_{ст}$,	$M_{ст1} = P_{ст1} l_1$; $M_{ст2} = P_{ст1} l_2$; $M_{ст3} = M_{ст4} = M_{ст5} = P_{ст1} l_3$
расчетных сил	$M_1 = P_1 l_1 + P_{н1}(e_1 + l_1) + H r_{ш}$; $M_2 = P_1 l_2 + P_{н1}(e_1 + l_2) + H r_{ш}$; $M_3 = P_1 l_3 + P_{н1}(e_1 + l_3) + H r_{ш} + M_{л}$; $M_4 = P_1 l + P_{н1}(e_1 + l) + H r_{ш} + M_{л} - R_{с} s + P_{нс} l_6$; $M_5 = P_1 l_5 + P_{н1}(e_1 + l_5) + H r_{ш} + M_{л} - R_{с}(l_5 - l_3)$

Обозначения величин входящих в формулы таблицы 9.1 следующие:

$m_{бр}$ – масса вагона (брутто), т;

$F_{к}$ – площадь проекции боковой поверхности кузова вагона, м^2;

m_0 – число осей в вагоне;

$h_{к}$ – высота центра тяжести вагона над уровнем оси колесной пары, м;

$h_{в}$ – высота равнодействующей ветровой нагрузки над уровнем оси колесной пары, м;

v – расчетная скорость, м/сек;

$m_{р}$ – масса половины боковой рамы тележки (для грузового вагона), или 0,5 массы пружин, опирающихся на буксу (для пассажирского вагона), т;

$m_{кп}$ – масса колесной пары, т;

$m_{б}$ – масса буксы и связанных с ней необрессоренных деталей, т;

$m_{к}$ – масса колеса, т;

$m_{ш}$ – масса консольной части оси (до круга катания), т;

$m_{с}$ – масса средней части оси (между кругами катания), т;

m_1, m_2 – масса необрессоренных частей, опирающихся на левую и правую шейку, включая собственную массу шейки, т;

$m_{нк}$ – масса необрессоренных частей, приходящаяся на колесо, т;

ω – удельное давление ветра на боковую поверхность вагона; $\omega = 0{,}5$ кН/м^2;

μ – коэффициент трения колеса о рельс при скольжении в поперечном направлении, $\mu = 0{,}25$;

$j_ц$ – допустимое непогашенное ускорение вагона в кривой, $j_ц = 0{,}07g$;

β – коэффициент передачи сил инерции на внутренние сечения оси; $\beta = 0{,}7$;

λ – коэффициент использования грузоподъемности вагона: для пассажирских вагонов $\lambda = 1$; для грузовых и изотермических $\lambda = 0{,}9$;

$\lambda_г$ – величина, зависящая от осности вагона, для 4-осных вагонов $\lambda_г = 1{,}0$;

A – величина, зависящая от типа вагона и гибкости рессорного подвешивания: для грузовых вагонов $A = 0{,}03$, изотермических $A = 0{,}05$, пассажирских $A = 0{,}06$;

B – величина, зависящая от типа вагона: для грузовых вагонов $B = 6{,}0 \cdot 10^{-4}$, изотермических $B = 5{,}5 \cdot 10^{-4}$, пассажирских $B = 5{,}0 \cdot 10^{-4}$;

D – коэффициент, зависящий от типа вагона и скорости движения: для грузовых, изотермических и пассажирских вагонов с конструкционной скоростью 33–39 м/с (120–140 км/ч) $D = 130$; для пассажирских вагонов с конструкционной скоростью 39–45 м/с (140–160 км/ч) $D = 115$;

δ, F – величины, зависящие от типа вагона: для грузовых вагонов – $\delta = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ и $F = 3{,}9$; для изотермических – $\delta = 0{,}95 \cdot 10^{-3}$ и $F = 3{,}9$; для пассажирских – $\delta = 0{,}9 \cdot 10^{-3}$ и $F = 3{,}8$;

e_1, e_2 – расстояния от середины шеек оси до точек приложения сил $P_{н1}$ и $P_{н2}$ соответственно, $e_1 = -0{,}01$ м, $e_2 = -0{,}01$ м.

$r_к$, $r_ш$ – радиусы колеса и шейки оси, $r_к = 0{,}4785$ м.

Исходные данные. Расчет на усталостную прочность выполним для оси колесной пары грузового вагона с осевой нагрузкой 230,5 кН, для исходных данных, приведенных в таблице 9.2.

Таблица 9.2 – **Исходные данные для расчета оси**

Показатель	Обозначение	Значение
Массы основных элементов колесной пары и тележки, т		
Колесной пары	$m_{кп}$	1,206
Колеса	$m_к$	0,402
Консольной части оси	$m_ш$	0,045
Средней части оси	$m_с$	0,312
Буксового узла	$m_б$	0,107

Окончание таблицы 9.2

Показатель	Обозначение	Значение
Боковой рамы тележки	$m_р$	0,286
Линейные размеры элементов колесной пары, м		
Длина шейки оси	$l_ш$	0,190
Длина предподступичной части	$l_{пш}$	0,076
Длина подступичной части	$l_п$	0,250
Длина средней части	$l_с$	1,184
Расстояния от точки приложения вертикальной силы P_1 до расчетного сечения:		
– *1–1*	l_1	0,072
– *2–2*	l_2	0,090
– *3–3*	l_3	0,228
– *4–4*	l_4	1,018
– *5–5*	l_5	0,440
Диаметры расчетного сечения:		
– *1–1*	d_1	0,130
– *2–2*	d_2	0,133
– *3–3*	d_3	0,195
– *4–4*	d_4	0,172
– *5–5*	d_5	0,174
– колеса	$d_к$	0,957
Расстояние между кругами катания колес	$2s$	1,580
Расстояние между точками приложения вертикальных сил P_1 и P_2	$2l$	2,036

Результаты расчета. В результате расчета получаем значения расчетных сил (таблица 9.3), учитываемые при оценке усталостной прочности оси, а по каждому расчетному сечению – нормальные напряжения от всех расчетных сил σ_i и от вертикальной статической силы $\sigma_{стi}$, коэффициенты перегрузки $\alpha_{\max i}$, $\alpha_{\min i}$ и расчетные значения коэффициента усталостной прочности n_i (таблица 9.4).

Таблица 9.3 – **Результаты определения сил, действующих на ось**

В килоньютонах

Показатель	Обозначение	Значение
Расчетные силы, кН		
Вертикальная статическая сила	$P_{ст}$	104,29
Вертикальная динамическая сила от колебаний кузова на рессорах	$P_д$	34,41

Окончание таблицы 9.3

Показатель	Обозначение	Значение
Вертикальная составляющая на шейку оси от действия центробежной силы	$P_{тц}$	12,91
Вертикальная расчетная сила на шейку оси: левую	P_1	151,61
правую	P_2	91,38
Поперечная рамная сила (реакция рамы тележки)	H	31,69
Боковая сила, приложенная к левому колесу (горизонтальная реакция наружного рельса)	H_1	46,42
Сила трения в месте контакта правого колеса с рельсом	H_2	14,73
Вертикальная сила инерции, действующая на шейку оси: левую	$P_{н1}$	72,86
правую	$P_{н2}$	9,19
Вертикальная сила инерции от левого колеса на рельс	$P_{нк}$	58,44
Вертикальная сила инерции на среднюю часть оси	$P_{нс}$	22,68
Вертикальная реакция, действующая на опору оси: левую	R_C	304,00
правую	R_D	61,92

Таблица 9.4 – **Результаты расчета оси**

Расчетные сечения	d, м	σ, МПа	$\sigma_{ст}$, МПа	α_{min}	α_{max}	$\sigma_{-1д}$, МПа	n
1–1	0,130	81,15	34,83	2,153	2,329	150	2,93
2–2	0,133	93,28	40,66	1,845	2,294	150	2,42
3–3	0,195	95,93	32,68	2,065	2,935	135	2,17
4–4	0,172	25,90	47,62	1,890	2,143	200	2,87
5–5	0,174	102,40	45,99	1,957	2,226	190	2,70

Сравнение расчетных коэффициентов запаса усталостной прочности по каждому сечению с допускаемым значением, равным $[n] = 2$, свидетельствует о том, что условие (9.55) выполняется. Следовательно, ось удовлетворяет требованиям усталостной прочности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Александров, А. В.** Основы теории упругости и пластичности : учеб. для строит. спец. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высш. шк., 1990. – 400 с.

2 **Андреев, Л. В.** В мире оболочек / Л. В. Андреев. – М. : Знание, 1986. – 176 с.

3 **Безухов, Н. И.** Основы теории упругости, пластичности и ползучести : учеб. для студентов техн. вузов / Н. И. Безухов. – М. : Высш. шк., 1968. – 512 с.

4 **Бояршинов, С. В.** Основы строительной механики машин : учеб. пособие для студентов вузов / С. В. Бояршинов. – М. : Машиностроение, 1973. – 456 с.

5 **Вагоны** : учеб. для студентов вузов / Л. А. Шадур [и др.] ; под ред. Л. А. Шадура. – М. : Транспорт, 1980. – 439 с.

6 **Галлагер, Р.** Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. – М. : Мир, 1984. – 428 с.

7 **Дарков, А. В.** Строительная механика : учеб. для техн. вузов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высш. шк., 1989. – 624 с.

8 **Зенкевич, О.** Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.

9 **Кобищанов, В. В**. Строительная механика вагонов : учеб. пособие / В. В. Кобищанов, В. П. Лозбинев. – Брянск : БГТУ, 2009. – 168 с.

10 **Никольский, Е. Н.** Расчет несущих конструкций вагонов по методу конечных элементов : учеб. пособие / Е. Н. Никольский. – Брянск : БИТМ, 1982. – 99 с.

11 Нормы для расчета и проектирования вагонов железных дорог МПС колеи 1520 мм (несамоходных). – М. : ГосНИИВ–ВНИИЖТ, 1996. – 319 с.

12 **Пастухов, И. Ф.** Расчет вагонных конструкций методом конечных элементов : учеб. пособие / И. Ф. Пастухов, В. В. Пигунов. – Гомель : БелИИЖТ, 1991. – 126 с.

13 **Пигунов, В. В.** Ходовые части вагонов. Расчет деталей : учеб. пособие / В. В. Пигунов. – Гомель : БелГУТ, 2005. – 251 с.

14 **Пигунов, В. В.** Строительная механика и несущая способность вагонов : учеб.-метод. пособие / В. В. Пигунов, А. В. Пигунов. – Гомель : БелГУТ, 2007. – 81 с.

15 Расчет вагонов на прочность : учеб. пособие для вузов ж.-д. трансп. / С. В. Вершинский [и др.] ; под ред. Л. А. Шадура. – М. : Машиностроение, 1971. – 439 с.

16 Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем) : учеб. пособие для студентов вузов / Г. К. Клейн [и др.] ; под ред. Г. К. Клейна. – М. : Высш. шк., 1980. – 384 с.

17 **Самуль, В. И.** Основы теории упругости и пластичности : учеб. пособие для инж.-строит. спец. вузов / В. И. Самуль. – М. : Высш. шк., 1970. – 288 с.

18 Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов : учеб. для студентов вузов / А. Е. Саргсян [и др.] ; под ред. А. Е. Саргсяна. – М. : Высш. шк., 2000. – 416 с.

19 Сопротивление материалов : учеб. для вузов / Г. С. Писаренко [и др.] ; под ред. Г. С. Писаренко. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев : Вища шк., 1986. – 775 с.

20 **Спицына, Д. Н.** Строительная механика стержневых машиностроительных конструкций : учеб. пособие для вузов / Д. Н. Спицына. – М. : Высш. шк., 1977. – 248 с.

21 Строительная механика. Стержневые системы : учеб. для вузов / А. Ф. Смирнов [и др.] ; под ред. А. Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1981. – 512 с.

22 **Яшин, В. Ф.** Основы теории упругости с элементами численных методов расчета упругих систем : учеб. пособие / В. Ф. Яшин, В. В. Пигунов. – Гомель : БелГУТ, 1998. – 113 с.

23 **Феодосьев, В. И.** Сопротивление материалов : учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 512 с.

24 **Ицкович, Г. М.** Сопротивление материалов : учеб. для машиностроит. техникумов / Г. М. Ицкович. – М. : Высш. шк., 1998. – 368 с.

25 **Старовойтов, Э. И.** Механика материалов : учеб. / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2011. – 380 с.

26 **Кинасошвили, Р. С.** Сопротивление материалов : учеб. для вузов / Р. С. Кинасошвили. – М. : Наука, 1975. – 384 с.

27 **Кудрявцев, В. Н.** Детали машин : учеб. для вузов / В. Н. Кудрявцев. – Л. : Машиностроение, 1980. – 464 с.

28 **Степин, П. А.** Сопротивление материалов: учеб. для вузов / П. А. Степин. – М. : Высш. шк., 1979. – 312 с.

29 ГОСТ 33211–2014. Вагоны грузовые. Требования к прочности и динамическим качествам. – Введ. 2015–11–01. – М. : Стандартинформ, 2014. – 87 с.

Учебное издание

ПИГУНОВ Владимир Владимирович
ПИГУНОВ Анатолий Владимирович

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ВАГОНОВ

Учебник

Редактор *А. А. Павлюченкова*
Технический редактор *В. Н. Кучерова*

Подписано в печать 29.09.2022 г. Формат 60x84 1/16
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 15.11. Уч.-изд. л. 15.01. Тираж 100 экз.
Зак. № 1752. Изд. № 55.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
№ 3/1583 от 14.11.2017.

246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34.

ISBN 978-985-554-992-6