МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра высшей математики

Ю. И. КУЛАЖЕНКО, В. Е. ЕВДОКИМОВИЧ

ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методическое пособие

Гомель 2023

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра высшей математики

Ю. И. КУЛАЖЕНКО, В. Е. ЕВДОКИМОВИЧ

ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области транспорта и транспортной деятельности для обучающихся по специальности 1-44 01 03 «Организация перевозок и управление на железнодорожном транспорте» в качестве учебно-методического пособия по учебной дисциплине «Прикладная математика»

Гомель 2023

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171
К90

Р е ц е н з е н т ы : кафедра фундаментальной и прикладной математики (заведующий кафедрой – канд. техн. наук, доцент *Л. Н. Марченко*, профессор кафедры – д-р физ.-мат. наук, профессор *Ю. В. Малинковский*) (ГГУ им. Ф. Скорины);
заместитель директора по науч. работе, канд. физ.-мат. наук, доцент *В. В. Подгорная* (ИММС им. В. А. Белого НАНБ)

Кулаженко, Ю. И.

К90 Основы прикладной математики : учеб.-метод. пособие / Ю. И. Кулаженко, В. Е. Евдокимович ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2023. – 218 с.
ISBN 978-985-891-087-7

Содержит теоретические сведения по основным разделам теории вероятностей и математической статистики. Излагаемый теоретический материал сопровождается большим количеством примеров и задач. Включает в себя задачи для самостоятельного решения, задания и методику выполнения расчетно-графических и лабораторных работ, рабочую программу, необходимые справочные таблицы.

Предназначено для студентов специальности 1-44 01 03 «Организация перевозок и управление на железнодорожном транспорте» при выполнении расчётно-графических и лабораторных работ, а также для курсового и дипломного проектирования. Может быть использовано магистрантами, аспирантами и научными работниками, занимающимися вероятностными методами и статистическим анализом данных на транспорте.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171

ISBN 978-985-891-087-7

ВВЕДЕНИЕ

Мы живем в мире, где происходят случайные события. Чем сложнее система, тем труднее обнаружить закономерности. Именно в этих случаях и используют вероятностные методы. Таким образом, теория вероятностей актуальна в наши дни как в математике и точных науках, так и в повседневной жизни.

Теория вероятностей изучает объективные закономерности массовых случайных событий. Она является теоретической базой для математической статистики, занимающейся разработкой методов сбора, описания и обработки результатов наблюдений. Путем наблюдений (испытаний, экспериментов), т. е. опыта в широком смысле слова, происходит познание явлений действительного мира. Основные объекты теории вероятностей – случайные события, случайные величины, случайные процессы, то есть фактически весь окружающий нас мир.

Теория вероятностей оформилась в самостоятельную науку относительно недавно, хотя история теории вероятностей началась еще в античности. Так, Лукреций, Демокрит, Кар и другие ученые древней Греции в своих рассуждениях говорили о равновероятностных исходах такого события, как возможность того, что вся материя состоит из молекул. Таким образом, понятие вероятности использовалось на интуитивном уровне, но оно не было выделено в новую категорию. Тем не менее античные ученые заложили прочный фундамент для возникновения этого научного понятия. В средние века, можно сказать, и зародилась теория вероятностей, когда были приняты первые попытки математического анализа таких азартных игр, как кости, орлянка, рулетка.

Первые научные работы по теории вероятностей появились в XVII веке, когда такие ученые, как Блез Паскаль и Пьер Ферма, открыли некоторые закономерности, которые возникают при бросании костей. В этот же период к данному вопросу проявлял интерес еще один ученый – Христиан Гюйгенс, который в 1657 г. в своей работе ввел следующие понятия теории вероятностей: понятие вероятности как величины шанса или возможности; математическое ожидание для дискретных случаев, в виде цены шанса, а также теоремы сложения и умножения вероятностей, которые, правда, не были сформулированы в явном виде. Тогда же теория вероятностей стала находить сферы своего применения: демографию, страховое дело, оценку ошибок наблюдений.

Вероятностные представления довольно успешно применялись ещё в XVIII веке такими выдающимися учеными, как П. Лаплас, Ж. Лагранж, А. Лежандр, К. Гаусс, для оценки ошибок измерений, в результате чего уже в то время были заложены основы теории ошибок.

Дальнейшее развитие теории вероятностей привело к необходимости аксиоматизации теории вероятностей и главного понятия – вероятности. Так, становление аксиоматики теории вероятностей произошло в 30-х годах XX века. Самый существенный вклад в заложение основ теории внес А. Н. Колмогоров.

На сегодняшний день теории вероятностей – это самостоятельная наука, имеющая огромную сферу применения.

Последние десятилетия характеризуются резким повышением интереса к тем разделам математики и ее приложений, которые анализируют явления, носящие «случайный» характер. Эта тенденция в значительной степени объясняется тем, что большинство возникших в последние десятилетия новых математических дисциплин, которые ныне обозначаются собирательным термином «кибернетика», оказались тесно связанным с теорией вероятностей. Тем самым теория вероятностей стала чуть ли не самой первой по прикладному значению из всех математических дисциплин. При этом возникновение новых, в большинстве своем «порожденных» теорией вероятностей, наук, например «теория игр», «страховая математика», «стохастическая финансовая математика» или «теория информации», привело к положению, при котором теорию вероятностей приходится рассматривать как объединение большого числа разнородных и достаточно глубоко развитых математических дисциплин.

Примеров реального использования теории вероятности в жизни множество. Практически вся современная экономика базируется на ней. Выпуская на рынок определенный товар, грамотный предприниматель, наверняка, учтет риски, а также вероятности покупки в том или ином рынке, стране и т. д. Практически не представляют свою жизнь без теории вероятностей брокеры на мировых рынках. Предсказывание денежного курса (в котором точно не обойтись без теории вероятностей) на денежных опционах дает возможность зарабатывать на данной теории серьезные деньги.

Теория вероятностей имеет значение в начале практически любой деятельности, а также ее регулирования. Благодаря оценке шансов той или иной неполадки (например, космического корабля), мы знаем, какие усилия нам нужно приложить, что именно проверить, что вообще ожидать в тысячах километров от Земли. Вероятность теракта в метрополитене, экономического кризиса или ядерной войны – всё это можно выразить в процентах. А главное – предпринимать соответствующие контрдействия исходя из полученных данных.

Таким образом, теория вероятностей имеет разные области применения, такие как биологические и химические процессы, история, экономика, кораблестроение и машиностроение, медицина и большинство различной деятельности человека. Люди применяют её как сознательно, так и подсознательно, что проявляется в обычных повседневных фразах и действиях. Разумный человек должен стремиться мыслить исходя из законов вероятностей. Теория вероятностей – это одна из составляющих частей успеха. Если стремиться учитывать законы вероятностей (а, в том случае, если вероятность неблагоприятная – предпринимать соответствующие контрдействия) то можно упростить себе жизнь в разы и сэкономить своё время, которое так ценно для каждого из нас.

1 СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1 Предмет и задачи теории вероятностей. Вероятностный эксперимент. Пространство элементарных исходов. Классификация событий. Операции над событиями

Все науки базируются на некотором количестве понятий и определений, посредством которых определяются все остальные понятия. К первичным (не определяемым с помощью других) понятиям теории вероятностей относятся такие понятия, как вероятностный эксперимент и пространство элементарных исходов.

Вероятностный эксперимент – это испытание, результат которого невозможно заранее однозначно предсказать.

Пример 1.1. Подбрасывание монеты – вероятностный эксперимент. Результат этого испытания заранее предсказать невозможно, поскольку может выпасть или герб, или решка.

Пример 1.2. Произведение выстрела по мишени – вероятностный эксперимент. Исход эксперимента (промах или попадание) предсказать невозможно, поскольку он зависит от большого числа факторов (мастерство стрелка, техническое состояние оружия, силы ветра).

Далее будем рассматривать только вероятностные эксперименты. Обозначать эксперимент (опыт, испытание) будем прописной буквой латинского алфавита $\boldsymbol{E}$.

Случайным событием является любой факт, который в результате проведения эксперимента может произойти или не произойти. Обозначают события буквами латинского алфавита: A, B, C и т. д.

Пример 1.3. E: извлечение наудачу одной карты из колоды карт. A = {будет извлечён валет}, B = {будет извлечён туз}, C = {будет извлечена карта пиковой масти}.

Пример 1.4. E: определение времени безотказной работы мобильного телефона. A = {мобильный телефон проработает безотказно в течение гарантийного срока}, B = {мобильный телефон проработает безотказно в течение двух лет}.

Неразложимым называют результат вероятностного эксперимента, который нельзя разложить хотя бы на два более простых.

Элементарным исходом называется любой мысленно возможный неразложимый результат вероятностного эксперимента. Обозначают элементарный исход буквой греческого алфавита ω.

Пространством элементарных исходов Ω называют множество всех возможных элементарных исходов ω вероятностного эксперимента E.

Пример 1.5. E: подбрасывание монеты.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, где ω_1 = {выпадет герб}, ω_2 = {выпадет решка}.

Обычно это записывают короче: Ω = {г, р}.

Пример 1.6. E: подбрасывание игральной кости.

В качестве пространства элементарных исходов можно рассмотреть множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где ω_i = {выпадет i очков}, $i = \overline{1, 6}$ (в дальнейшем будем обозначать такое пространство элементарных исходов Ω ={1, 2, 3, 4, 5, 6}).

A = {выпадение на грани четного числа очков}, B = {выпадение на грани числа очков больше 5}, C = {выпадение на грани числа очков не меньше 3}.

Выбор пространства элементарных исходов производят в зависимости от того, какие именно случайные исходы хотят исследовать и какие методы при этом использовать.

Пример 1.7. E: подбрасывание двух игральных костей, окрашенных в красный и синий цвета соответственно.

В качестве элементарного исхода рассмотрим ω = (i, j), где i – число очков, выпавших на красной кости; j – число очков, выпавших на синей кости; $i, j = \overline{1, 6}$.

Пространство элементарных исходов будет выглядеть следующим образом:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6). \end{Bmatrix}$$

Как видим, количество всех возможных элементарных исходов равно 36. Такое пространство элементарных исходов можно записать в более компактном виде: $\Omega = \{\omega = (i, j) : i, j = \overline{1, 6}\}$.

Пример 1.8. E: стрельба по мишени до первого попадания. В качестве элементарного исхода можно рассмотреть $\omega = i$ – количество произведённых выстрелов. Очевидно, что минимальное количество выстрелов равно одному (стрелок с первого выстрела попал по мишени), максимальное же число выстрелов не ограничено. В данном случае $\Omega = \{\omega = i : i = 1,\ 2,\ \ldots\}$.

Пример 1.9. E: на отрезке $[a;\ b]$ случайным образом выбирается точка. $\Omega = \{\omega = x : a \le x \le b\}$, где x – координата точки.

Пространства элементарных исходов, рассматриваемые в примерах 1.5–1.7, содержат конечное число элементов, а пространства элементарных исходов, определённые в примерах 1.8 и 1.9, содержат бесконечное количество элементов. При этом в примере 1.8 пространство элементарных исходов является счётным (напомним, что множество является **счётным**, если его элементы можно занумеровать), а в примере 1.9 – несчётным.

Пространство элементарных исходов, которое содержит конечное или счётное число элементов, называется **дискретным**. Пространство элементарных исходов, которое содержит несчётное количество элементов, называется **непрерывным**. Таким образом, в примерах 1.5–1.8 пространство элементарных исходов является дискретным, а в примере 1.9 – непрерывным.

Случайным событием (или просто **событием)** называется любое подмножество A пространства элементарных исходов Ω. Элементарные исходы, принадлежащие множеству A, называются **элементарными исходами, благоприятствующими наступлению события** $\boldsymbol{A}$. Если в результате проведения эксперимента наступил элементарный исход, благоприятствующий наступлению события A, то говорят, что **событие** $\boldsymbol{A}$ **наступило (произошло)**.

Пространство Ω является подмножеством самого себя, следовательно, оно тоже будет являться событием. Такое событие называют **достоверным**, оно обязательно наступит в результате проведения эксперимента, поскольку ему благоприятствует любой из элементарных исходов. Достоверное событие, так же как и пространство элементарных исходов, обозначают буквой Ω. Аналогично пустое множество (множество, не содержащее ни одного элемента) является подмножеством пространства элементарных исходов и, следовательно, является событием. Такое событие называют **невозможным** и обозначают символом $\varnothing$. Оно никогда не наступит в результате проведения эксперимента, т. к. ему не благоприятствует ни один элементарный исход.

Пример 1.10. E: подбрасывание игральной кости. Пространство элементарных исходов данного эксперимента $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Рассмотрим следующие события:

A = {выпадет чётное число очков};

B = {выпадет число очков, кратное 3};

C = {выпадет число очков больше 2};

D = {выпадет 10 очков};

F = {число выпавших очков будет меньше 7}.

Выпишем элементарные исходы, благоприятствующие указанным событиям:

$$A = \{2, 4, 6\},\ B = \{3, 6\},\ C = \{3, 4, 5, 6\}.$$

Событие D является невозможным событием (наступлению этого события не благоприятствует ни один из элементарных исходов), а событие F – достоверным (его наступлению благоприятствуют все элементарные исходы).

Таким образом,

$$D = \varnothing,\ F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega.$$

Рассмотрим некоторый эксперимент E с пространством элементарных исходов Ω. Поскольку события, которые могут произойти в результате проведения данного эксперимента, по определению являются подмножествами Ω, операции над событиями вводятся точно таким же образом, как и операции над множествами.

Суммой событий *A* и *B* называется событие $A \cup B$ (или $A + B$), которое состоит из всех элементарных исходов, благоприятствующих наступлению хотя бы одного из событий A или B. Иными словами, событие $A \cup B$ наступит тогда и только тогда, когда наступит или событие A, или событие B, или события A и B вместе.

Суммой конечного (счётного) числа событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($A_1, A_2, \ldots$) называется событие $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ ($A_1 \cup A_2 \cup \ldots$), которое состоит из всех элементарных исходов, благоприятствующих наступлению хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($A_1, A_2, \ldots$).

Произведением событий *A* и *B* называется событие $A \cap B$ (или AB), которое состоит из всех элементарных исходов, благоприятствующих наступлению событий A и B. Иными словами, событие $A \cap B$ наступает тогда и только тогда, когда в результате проведения эксперимента наступает и событие A, и событие B.

Произведением конечного (счётного) числа событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($A_1, A_2, \ldots$) называется событие $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ ($A_1 \cap A_2 \cap \ldots$), которое состоит из элементарных исходов, благоприятствующих наступлению всех событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($A_1, A_2, \ldots$).

Разностью событий *A* и *B* называется событие $A \setminus B$, которое состоит из всех элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события A, но не благоприятствующих наступлению события B. Иными словами, событие $A \setminus B$ наступает тогда и только тогда, когда наступает событие A, а событие B при этом не наступает. Разность событий A и B также обозначают $A - B$.

Событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ называется **противоположным** к событию A. Событие $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда событие A не происходит, и наоборот, событие A происходит тогда и только тогда, когда событие $\overline{A}$ не происходит. Противоположные события являются взаимоисключающими: одно и только одно из них может наступить в результате проведения эксперимента.

Пример 1.11. E: определение времени твердения бетона. $\Omega = \{\omega = t : t \in [0; +\infty)\}$. Определим событие A = {бетон затвердеет за время, не превосходящее T}. $A = \{\omega = t : t \in [0; T]\}$. Тогда противоположным событием к событию A будет являться событие $\overline{A}$ = {бетон затвердеет за время, большее T}. $\overline{A} = \{\omega = t : t \in (T; +\infty)\}$.

Говорят, что **событие *A* влечёт событие *B***, если все элементарные исходы, благоприятствующие наступлению события A, в то же время благоприятствуют и наступлению события B, т. е. если наступает событие A, то обязательно наступает и событие B. Это означает, что A является подмножеством B ($A \subseteq B$). Отметим, что поскольку любое событие является подмножеством пространства элементарных исходов Ω, то можно сказать, что любое событие влечёт за собой Ω.

События A и B называются **несовместными**, если они не могут произойти в результате проведения одного и того же эксперимента, т.е. наступление одного из них полностью исключает возможность наступления другого. То есть события A и B называются **несовместными**, если

$$A \cap B = \varnothing.$$

Напротив, события, которые могут наступить в результате проведения одного и того же эксперимента, называются **совместными** **(**$A \cap B \neq \varnothing$**)**. Заметим, что утверждение «события A и B совместны» указывает на тот факт, что *некоторые* элементарные исходы, благоприятные наступлению события A, благоприятны также и наступлению события B. И наоборот.

Пример 1.12. E: подбрасывание трёх монет. Пространство элементарных исходов будет содержать восемь элементов:

$$\Omega = \{(\text{ггг}), (\text{ггр}), (\text{грг}), (\text{ргг}), (\text{грр}), (\text{ргр}), (\text{ррг}), (\text{ррр})\}.$$

Рассмотрим три события:

A = {выпадет хотя бы один герб};

B = {выпадет хотя бы одна решка};

C = {на всех монетах выпадет герб}.

Исходы, благоприятствующие наступлению этих событий:

$A = \{(\text{ггг}), (\text{ггр}), (\text{грг}), (\text{ргг}), (\text{грр}), (\text{ргр}), (\text{ррг})\}$,

$B = \{(\text{ггр}), (\text{грг}), (\text{ргг}), (\text{грр}), (\text{ргр}), (\text{ррг}), (\text{ррр})\}$, $C = \{(\text{ггг})\}$.

Совместными являются события A и B, так как $A \cap B$ = {(ггр), (грг), (ргг), (грр), (ргр), (ррг)} $\neq \varnothing$, а также события A и C, так как $A \cap C$ = {(ггг)} $\neq \varnothing$.

События B и C являются несовместными, так как $B \cap C = \varnothing$.

Основные свойства операций над событиями.

1. Переместительное. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.
2. Распределительное. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
3. Сочетательное. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$
4. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
5. $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.
6. $A \cup \Omega = \Omega$; $A \cap \Omega = A$.
7. $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$.
8. $A \cup \overline{A} = \Omega$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
9. $\overline{\Omega} = \varnothing$; $\overline{\varnothing} = \Omega$; $\overline{\overline{A}} = A$.
10. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
11. Законы де Моргана. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Для более наглядной демонстрации операций над множествами хорошо подходят диаграммы Эйлера – Венна.

Пусть эксперимент E заключается в следующем: из прямоугольной области случайным образом выбирается точка. Пространством элементарных исходов Ω данного эксперимента является рассматриваемый прямоугольник. Определим события A = {выбранная точка принадлежит кругу A}, B = {выбранная точка принадлежит кругу B}, C = {выбранная точка принадлежит кругу C}.

На рисунке 1.1 заштрихована область, содержащая исходы, которые благоприятствуют наступлению события $A \cup B$. По определению операции сложения этой области принадлежат все элементарные исходы, благоприятствующие наступлению события A, а также все элементарные исходы, благоприятствующие наступлению события B. Область, содержащая исходы, которые благоприятствуют наступлению события $A \cap B$, заштрихована на рисунке 1.2. По определению этой области принадлежат все элементарные исходы, благоприятствующие наступлению и события A, и события B.

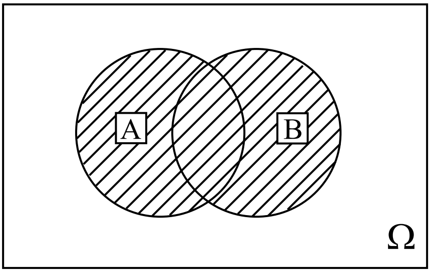


Рисунок 1.1 – $A \cup B$

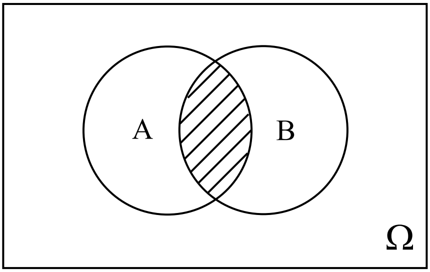


Рисунок 1.2 – $A \cap B$

На рисунке 1.3 заштрихована область, содержащая исходы, которые благоприятствуют событию $A \setminus B$. По определению этой области принадлежат все элементарные исходы, благоприятствующие наступлению события A, но не благоприятствующие наступлению события B. На рисунке 1.4 заштрихована область, содержащая исходы, которые благоприятствуют наступлению события $B \setminus A$.

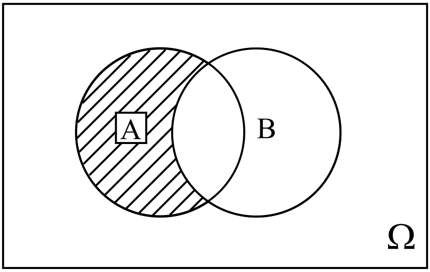


Рисунок 1.3 – $A \setminus B$

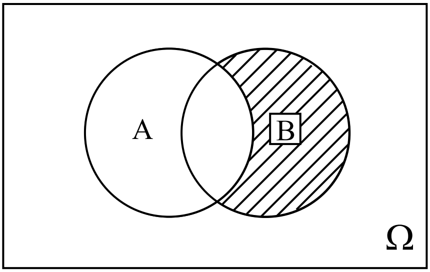


Рисунок 1.4 – $B \setminus A$

На рисунке 1.5 заштрихована область, содержащая исходы, которые благоприятствуют событию $\overline{A}$.

Пусть событие A влечёт за собой событие B (рисунок 1.6).

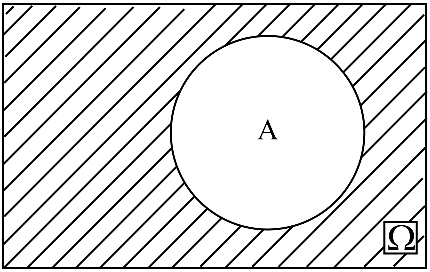


Рисунок 1.5 – $\overline{A}$

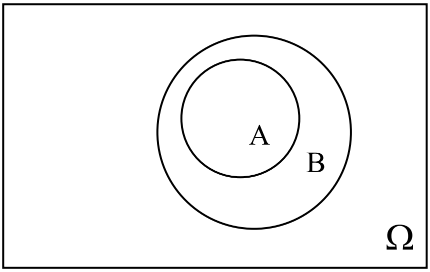


Рисунок 1.6 – $A \subseteq B$

По определению все элементарные исходы, благоприятствующие наступлению события A, являются благоприятствующими наступлению события B. Однако существуют такие элементарные исходы, которые благоприятны наступлению события B, но не благоприятны наступлению события A.

Изобразим области, которые содержат исходы, благоприятствующие наступлению следующих событий:

а) $\overline{A} \cap (B \cup C)$ (рисунок 1.7);

б) $(A \cap B) \setminus C$ (рисунок 1.8);

в) $\overline{A \cup (B \cap C)}$ (рисунок 1.9);

г) $\overline{A} \cap B \cap C$ (рисунок 1.10).

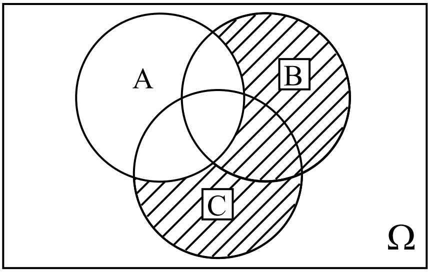


Рисунок 1.7 – $\overline{A} \cap (B \cup C)$

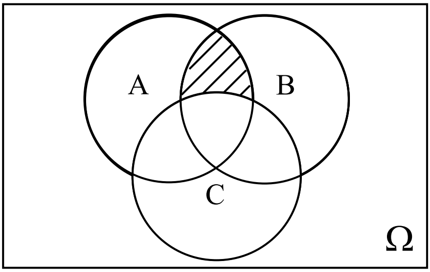


Рисунок 1.8 – $(A \cap B) \setminus C$

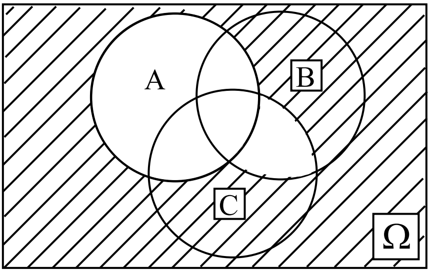


Рисунок 1.9 – $\overline{A \cup (B \cap C)}$

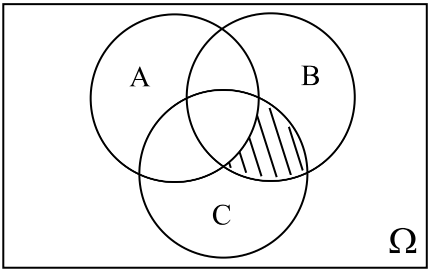


Рисунок 1.10 – $\overline{A} \cap B \cap C$

Говорят, что конечный (счётный) набор событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ($H_1, H_2, \ldots$) образует **полную группу**, если они попарно несовместны (т. е. $H_i \cap H_j = \varnothing$, $\forall\, i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots$), а их сумма есть достоверное событие $\left(\bigcup_i H_i = \Omega\right)$.

Пример 1.13. *E:* подбрасывание монеты. $\Omega = \{г, р\}$.

Определим события

H_1 = {выпадет герб} = {г},

H_2 = {выпадет решка} = {р}.

События H_1 и H_2 образуют полную группу. Действительно, оба эти события не могут произойти в результате проведения одного эксперимента, $H_1 \cap H_2 = \varnothing$. С другой стороны, $H_1 \cup H_2 = \Omega$, поскольку Ω содержит только два элементарных исхода: «выпадет герб» и «выпадет решка».

Иными словами, события образуют полную группу, если в результате проведения эксперимента наступит одно и только одно из них. События, образующие полную группу, часто называют **гипотезами**. События A и $\overline{A}$ образуют полную группу.

1.2 Относительная частота. Вероятность. Аксиомы теории вероятностей. Свойства вероятностей

Рассмотрим некоторый случайный эксперимент E и его пространство элементарных исходов Ω. Определим некоторое событие A и проведём N раз эксперимент E, всякий раз отмечая, наступило данное событие или нет. Обозначим через $N(A)$ число тех экспериментов, в которых событие A наступило, и назовём его **частотой события** A. Число

$$W_N(A) = \frac{N(A)}{N} \tag{1.1}$$

называется **относительной частотой события** A.

Таким образом, относительная частота события показывает, насколько часто событие происходило *ранее*. Относительная частота не является постоянной величиной, она меняется с изменением числа N. Однако для достаточно большого класса явлений справедливо, что при увеличении числа N относительная частота стремится к некоторому числу $P(A)$, иными словами, её значения стабилизируются. Это свойство называют **свойством статистической устойчивости.** Подчеркнём, что теория вероятностей изучает только те массовые случайные явления, которые обладают свойством устойчивости относительной частоты.

Пример 1.14. E: подбрасывание монеты. Проведём серию из $N = 100$ таких экспериментов, фиксируя при этом наступление события A = {появление герба}. Для этой серии испытаний оказалось, что $N(A) = 48$, т. е. монета упала гербом вверх ровно 48 раз. Согласно формуле (1.1) относительная частота события A равна 0,48.

Основные свойства относительной частоты.

1. Относительная частота произвольного события больше либо равна нулю $W_N(A) \geq 0$.

Действительно, согласно формуле (1.1) относительная частота события равна отношению частоты события (неотрицательное число) к количеству экспериментов (положительное число).

2. Относительная частота достоверного события равна единице $W_N(\Omega) = 1$.

Поскольку событие является достоверным, то оно происходит в каждом испытании, т. е. $N(\Omega) = N$:

$$W_N(\Omega) = \frac{N}{N} = 1.$$

3. Относительная частота суммы несовместных событий равна сумме относительных частот этих событий.

Так как события являются несовместными, то в одном эксперименте они произойти не могут. Следовательно, частота суммы событий равна сумме частот каждого из них, т. е. $N(A \cap B) = N(A) + N(B)$. Применив формулу (1.1), получим

$$W_N(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N} = \frac{N(A) + N(B)}{N} =$$

$$= \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N} = W_N(A) + W_N(B).$$

Будем говорить, что совокупность F подмножеств множества Ω называется **алгеброй**, если выполнены следующие условия:

1) $\Omega \in F, \varnothing \in F$;

2) если $A \in F$, то $\overline{A} \in F$;

3) если $A \in F$ и $B \in F$, то $A \cup B \in F$ и $A \cap B \in F$.

Если же помимо перечисленных трёх условий выполняется ещё и четвёртое условие: если $A_i \in F$, $i = 1, 2, \ldots$, то $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in F$, $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in F$, то F называют **σ-алгеброй** (сигма-алгеброй).

Пример 1.15. Совокупность из двух подмножеств $\{\varnothing, \Omega\}$ множества Ω является σ-алгеброй.

Пример 1.16. Совокупность, состоящая из всех подмножеств конечного или счётного множества Ω, является σ-алгеброй. Например, если $\Omega = \{1, 2\}$, то $F = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ – σ-алгебра.

Пример 1.17. Совокупность, состоящая из четырёх подмножеств $\{\varnothing, \Omega, A, \overline{A}\}$, где $A \subset \Omega$, является σ-алгеброй (такая σ-алгебра называется σ-алгеброй, порождённой множеством A).

Пример 1.18. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Рассмотрим совокупность, содержащую шесть подмножеств множества Ω:

$$F = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}.$$

Такая совокупность не является σ-алгеброй (и даже просто алгеброй), поскольку, например, $\varnothing \notin F$.

Пусть Ω – пространство элементарных исходов некоторого эксперимента E и F – σ-алгебра подмножеств Ω. В дальнейшем в качестве событий будем рассматривать только элементы σ-алгебры F.

Вероятностью называется функция $P(A)$, определённая на всей σ-алгебре событий F, принимающая действительные значения и удовлетворяющая следующим трём аксиомам Колмогорова.

***А*1.** *Аксиома неотрицательности.* Вероятность любого события неотрицательна $P(A) \geq 0$.

***А*2.** *Аксиома нормированности.* Вероятность достоверного события равна единице $P(\Omega) = 1$.

***A*3.** *Аксиома счётной аддитивности.* Если события A_1, A_2, … (счётное число событий) попарно несовместны, то вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

(Ω, F, P) называется **вероятностным пространством** эксперимента. Вероятностное пространство является *математической моделью* вероятностного эксперимента.

Пример 1.19. E: подбрасывание монеты.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, где ω_1 = {выпадет герб}, ω_2 = {выпадет решка}.

$F = \{\omega_1, \omega_2, \Omega, \varnothing\}$.

$P = \{P(\omega_1) = 0{,}5,\ P(\omega_2) = 0{,}5,\ P(\Omega) = 1,\ P(\varnothing) = 0\}$.

(Ω, F, P) – вероятностное пространство эксперимента E.

Основные свойства вероятности.

1. $P(\varnothing) = 0$.

Заметим, что $\Omega = \Omega \cup \varnothing$. Так как события Ω и $\varnothing$ являются несовместными, то согласно $A3$ $P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing)$. Из $A2$ следует, что $1 = 1 + P(\varnothing)$. Следовательно, $P(\varnothing) = 0$.

2. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \le P(B)$.

Так как $B = A \cup (B \setminus A)$ и события A и $B \setminus A$ являются несовместными, то по аксиоме $A3$ $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$. Так как $P(B) \ge 0$, $P(A) \ge 0$, $P(B \setminus A) \ge 0$ (аксиома $A1$), то $P(A) \le P(B)$.

3. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

События A и $\overline{A}$ являются несовместными, кроме того, $A \cup \overline{A} = \Omega$. Согласно аксиомам $A2$ и $A3$ $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

4. $0 \le P(A) \le 1$.

По аксиоме $A1$ $P(A) \ge 0$. Так как $A \subseteq \Omega$, то по свойству 2 вероятности $P(A) \le 1$. Следовательно, $0 \le P(A) \le 1$.

5. Если H_1, H_2, …, H_n образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

Так как события H_i образуют полную группу, то, по определению, они попарно несовместны, и при этом $\bigcup_i H_i = \Omega$. Применив аксиомы $A2$ и $A3$, получим, что $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$

1.3 Методы определения вероятностей. Элементы комбинаторики

Пусть производится некоторый эксперимент E, который имеет конечное пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$. Множество F, состоящее из всех подмножеств множества Ω, будет являться σ-алгеброй событий.

Поставим теперь каждому элементарному исходу $\omega_i \in \Omega$ в соответствие число $p(\omega_i)$, которое назовем **вероятностью элементарного исхода**, таким образом, чтобы выполнялись условия неотрицательности $p(\omega_i) \geq 0$ и условие нормированности $\sum_{i=1}^{n} p(\omega_i) = 1.$

Вероятность $P(A)$ для любого события A определим следующим образом:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i). \tag{1.2}$$

Введённая таким образом вероятность удовлетворяет аксиомам Колмогорова $A1$–$A3$. Этот метод называется **конструктивно-аксиоматическим методом определения вероятности.** Он может быть применён и в случае счётного пространства элементарных исходов.

Рассмотрим теперь частный случай. Пусть все исходы $\omega_1, ..., \omega_n$ эксперимента равновозможны, т. е. $p(\omega_i) = p(\omega_j)$ для любых i и j. Поскольку в силу условия нормированности сумма их вероятностей равна единице, то вероятность каждого из них равна $\frac{1}{n}$. Рассмотрим некоторое событие A, наступлению которого благоприятствуют ровно m элементарных исходов. В этом случае формула (1.2) приобретает вид

$$P(A)=\sum_{\omega_i\in A} p(\omega_i)=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{m\text{ раз}}=\frac{m}{n}. \qquad (1.3)$$

Таким образом, приходим к так называемому **классическому методу определения вероятности**. Пусть проводится эксперимент с конечным числом равновозможных исходов. **Вероятностью события *A*** называется отношение числа m элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события A, к общему числу элементарных исходов n:

$$P(A)=\frac{m}{n}. \qquad (1.4)$$

Пример 1.20. E: подбрасывание двух игральных костей: красной и синей. Какова наиболее вероятная сумма выпавших очков?

Решение. Пространство элементарных исходов данного эксперимента выписывалось в примере 1.7. Оно насчитывает 36 элементов (конечное число), все они равновозможны. Таким образом, мы имеем право использовать классический метод определения вероятности.

Для того чтобы ответить на поставленный вопрос, необходимо найти вероятности событий A_i = {сумма выпавших очков равна i}, где i = 2, 3, …, 12. Очевидно, что каждый из 36 элементарных исходов соответствует только одному из одиннадцати интересующих нас событий. Занесём эти исходы в соответствующие строки таблицы 1.1 и подсчитаем их количество. Согласно формуле (1.4) искомые вероятности будут равны отношению числа элементарных исходов, благоприятствующих наступлению данного события, к общему числу исходов (очевидно, что для каждого эксперимента оно неизменно и равно 36).

Отметим, что $\sum_{i=2}^{12} P(A_i)=1.$

Таким образом, наиболее вероятная сумма выпавших очков равна семи. В среднем 7 очков выпадают в одном случае из шести.

К сожалению, классический метод определения вероятности имеет достаточно сильные ограничения. Во-первых, он «работает» только для конечного пространства элементарных исходов. Во-вторых, зачастую нет оснований считать все элементарные исходы равновозможными.

Таблица 1.1 – **Определение наиболее вероятного события (пример 1.20)**

Сумма очков A_i	Благоприятствующие исходы	Количество благоприятствующих исходов m_i	Вероятность события $P(A_i)$
2	(1, 1)	1	1/36
3	(1, 2), (2, 1)	2	2/36 = 1/18
4	(1, 3), (2, 2), (3, 1)	3	3/36 = 1/12
5	(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)	4	4/36 = 1/9
6	(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)	5	5/36
7	**(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)**	**6**	**6/36 = 1/6**
8	(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)	5	5/36
9	(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)	4	4/36 = 1/9
10	(4, 6), (5, 5), (6, 4)	3	3/36 = 1/12
11	(5, 6), (6, 5)	2	2/36 =1/18
12	(6, 6)	1	1/36

Ограничение на количество элементов пространства элементарных исходов снимает **геометрический метод определения вероятности**, который применяется в случае, когда пространство элементарных исходов – несчётное множество. Требование о том, что исходы эксперимента должны быть равновозможными, сохраняется.

Рассмотрим на числовой оси отрезок $[a; b]$ и вложенный в него отрезок $[c; d]$ (рисунок 1.11).

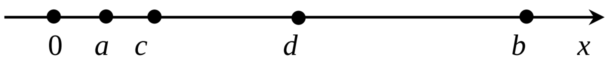


Рисунок 1.11 – Геометрический метод определения вероятности (одномерный случай)

На отрезок $[a; b]$ наугад бросается точка (т. е. из всего несчётного множества точек отрезка $[a; b]$ случайным образом выбирается одна). Пространство элементарных исходов

$$\Omega = \{\omega = x : x \in [a; b]\} = [a; b].$$

Рассмотрим событие A = {будет выбрана точка из отрезка $[c; d]$}.

$$A = \{\omega = x : x \in [c; d]\} = [c; d].$$

Вероятностью события A называется отношение длины отрезка $[c; d]$ к длине отрезка $[a; b]$, т. е.

$$P(A) = \frac{d-c}{b-a}. \tag{1.5}$$

Рассмотрим теперь некоторую ограниченную область D плоскости и область A, лежащую внутри области D (рисунок 1.12).

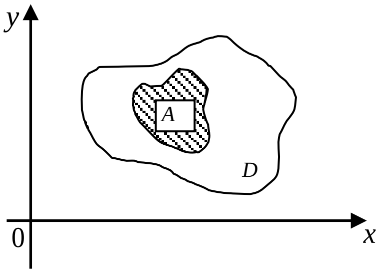


Рисунок 1.12 – Геометрический метод определения вероятности (двумерный случай)

Точка случайным образом бросается в область D.

$$\Omega = \{\omega = (x, y) : (x, y) \in D\} = D.$$

Вероятность того, что точка попадет в область A будет равняться отношению площади области A к площади области D, т. е.

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}. \tag{1.6}$$

В случае если Ω – область трёхмерного пространства, формула (1.6) примет вид

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}, \tag{1.7}$$

где $V(A)$, $V(\Omega)$ – объёмы областей A и Ω соответственно.

Формулы (1.5)–(1.7) можно записать в виде

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}, \tag{1.8}$$

где через *mes* обозначена мера области.

Пример 1.21. (задача о встрече). Два студента договорились о встрече между 13 и 14 часами. Студент пришедший первым ждёт в течение 20 минут и уходит (в том случае, если они не встретились). Предполагая, что каждый из них выбирает момент своего прихода «наудачу», найти вероятность встречи.

Решение. Пусть первый студент пришёл в 13 часов x минут, а второй – в 13 часов y минут. Таким образом, пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega = (x, y) : 0 \le x \le 60,\ 0 \le y \le 60\}$ (рисунок 1.13). Очевидно, что Ω – несчётное множество равновозможных исходов.

Запишем теперь событие A, которое заключается в том, что студенты встретятся: $A = \{\omega = (x, y) :\ |x - y| \le 20,\ 0 \le x \le 60,\ 0 \le y \le 60\}$. Область, содержащая исходы, благоприятствующие наступлению события A, заштрихована на рисунке 1.13.

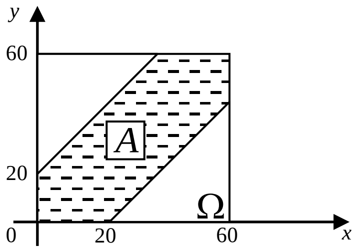


Рисунок 1.13 – Геометрическая интерпретация задачи о встрече

Для нахождения вероятности события A применим геометрический метод определения вероятности, а именно формулу (1.6). Площадь заштрихованной фигуры найдём, отняв от площади квадрата площади двух незаштрихованных треугольников. Вероятность события A

$$P(A) = \frac{60^2 - \frac{1}{2}\cdot 40\cdot 40 - \frac{1}{2}\cdot 40\cdot 40}{60^2} = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9} \approx 0{,}556.$$

Пусть Ω – пространство элементарных исходов некоторого эксперимента E. Проведем эксперимент E при одном и том же комплексе условий N раз. Пусть A – некоторое событие. **Статистический метод определения вероятности** заключается в том, что в качестве вероятности события A принимают относительную частоту этого события

$$P(A)=\frac{N(A)}{N}. \tag{1.9}$$

Недостатком статистического метода определения вероятности является его неоднозначность, поскольку вероятность в этом случае зависит от числа N. Тем не менее статистический метод определения вероятности в некоторых экспериментах является практически единственно возможным. Более того, большинство методов математической статистики так или иначе основывается на статистическом методе определения вероятности.

Комбинаторика – раздел математики, который изучает задачи выбора элементов из некоторого множества и расположения этих элементов в группы по заданным правилам.

Сформулируем **основное правило комбинаторики**.

Пусть множество A содержит m элементов $a_1, a_2, \ldots, a_m$, а множество B – n элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Тогда можно составить ровно $m \cdot n$ упорядоченных пар вида (a_i, b_j), $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, содержащих по одному элементу из каждого множества.

Основное правило комбинаторики распространяется на случай трёх и более множеств.

Пример 1.22. У некоторого молодого человека в гардеробе содержится 7 рубашек и 5 галстуков. Сколькими способами он может выбрать рубашку и галстук для похода в театр? Ответ на этот вопрос легко дать, используя основное правило комбинаторики: первое множество (множество рубашек) содержит 7 объектов, второе множество (множество галстуков) содержит 5 объектов. Согласно правилу общее количество комбинаций равно $7 \cdot 5 = 35$.

Пусть имеется конечное множество различных элементов $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, из которого последовательно выбирается k элементов. Запишем их в порядке появления $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$ и будем называть **выборкой объёма k из n элементов**.

В зависимости от постановки задачи такой выбор может осуществляться двумя различными способами. При первом способе выбранный элемент не возвращают обратно, т. е. в процессе дальнейшего выбора он не участвует. При таком способе полученная выборка называется **выборкой без возвращения**. Очевидно, что в этом случае выборка не будет содержать одинаковых элементов. При втором способе факт выбора элемента фиксируется, а сам элемент возвращается в множество и участвует в дальнейшем выборе. Полученная выборка называется **выборкой с возвращением**. В этом случае выборка может содержать одинаковые элементы.

Выборка объема k из n элементов называется **упорядоченной**, если она считается отличной от выборки с таким же составом элементов, расположенных, однако, в другом порядке. Если же такие выборки отождествляются, то они называются **неупорядоченными**.

Таким образом, возможны четыре типа выборок объёма k из n элементов: упорядоченная с возвращением, упорядоченная без возвращения, неупорядоченная с возвращением, неупорядоченная без возвращения. Формулы для определения количества всех возможных выборок для каждого из четырёх типов приведены в таблице 1.2. Напомним, что произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют **факториалом числа *n*** и обозначают $n!$ Для удобства записи факториал нуля считают равным единице:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n, \quad 0! = 1.$$

Таблица 1.2 – **Подсчёт количества выборок объёма *k* из *n* элементов**

Выборки	Упорядоченные	Неупорядоченные
С возвращением	$\overline{A_n^k} = n^k$	$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
Без возвращения	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Некоторые свойства числа неупорядоченных выборок без возвращения:

1) $C_n^0 = C_n^n = 1$; 2) $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$; 3) $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Пример 1.23. Укажем все возможные выборки объема 2 из множества {1, 2, 3}. Сделать это удобно в таком же виде, какой имеет таблица 1.3.

Таблица 1.3 – **Выборки объёма 2 из множества {1, 2, 3}**

Выборки	Упорядоченные	Неупорядоченные
С возвращением	(1, 1), (1, 2), (1, 3) (2, 1), (2, 2), (2, 3) (3, 1), (3, 2), (3, 3)	(1, 1), (1, 2), (1, 3) (2, 2), (2, 3) (3, 3)
Без возвращения	(1, 2), (1, 3) (2, 1), (2, 3) (3, 1), (3, 2)	(1, 2), (1, 3) (2, 3)

1.4 Теоремы сложения вероятностей. Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей. Независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Теорема (сложения). *Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность того, что оба эти события произойдут одновременно:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (1.10)$$

Вероятность суммы трёх событий определяется по формуле

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) -$$

$$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \quad (1.11)$$

Вероятность суммы двух и более попарно несовместных событий определяется по аксиоме Колмогорова $A3$.

Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны. Тогда

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n). \quad (1.12)$$

Пусть события A_1, A_2, … (счётное число событий) попарно несовместны. Тогда

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots . \qquad (1.13)$$

Пример 1.24. Завод выпускает 30 % продукции высшего сорта, 46 % продукции первого сорта и 23,5 % продукции второго сорта (оставшиеся 0,5 % продукции составляет брак). Наугад извлекается одно изделие. Какова вероятность того, что его качество не ниже, чем первый сорт?

Решение. E: наугад выбирается одно изделие. Определим события:

A = {наугад выбранное изделие высшего сорта};

B = {наугад выбранное изделие первого сорта};

C = {наугад выбранное изделие является изделием не ниже первого сорта}.

По условию $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}46$. Заметим, что $C = A \cup B$.

Так как $A \cap B = \varnothing$, то события A и B несовместны (изделие не может быть одновременно и высшего, и первого сорта). Используем формулу (1.12):

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}3 + 0{,}46 = 0{,}76.$$

Пример 1.25. Найти вероятность того, что наугад выбранное двузначное натуральное число делится на два или на три.

Решение. E: наугад выбирается двузначное натуральное число. Пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega = i : i = \overline{10, 99}\}$. Обозначим события:

A = {наугад выбранное двузначное натуральное число делится на два};

B = {наугад выбранное двузначное натуральное число делится на три};

C = {наугад выбранное двузначное натуральное число делится на два или на три}.

Событие C представим в виде $C = A \cup B$. По формуле (1.10) имеем

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Выпишем исходы, благоприятствующие наступлению событий A, B и $A \cap B$ = {наугад выбранное двузначное натуральное число делится на шесть}:

$A = \{10, 12, \ldots, 98\}$, $m_A = 45$;

$B = \{12, 15, \ldots, 99\}$, $m_B = 30$;

$A \cap B = \{12, 18, \ldots, 96\}$, $m_{A \cap B} = 15$.

Общее количество элементарных исходов $n = 90$.

По классическому методу определения вероятности

$$P(A) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2};\ P(B) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3};\ P(A \cap B) = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}.$$

$$P(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Вероятность некоторых событий может изменяться в зависимости от того, произошли другие события или нет. Поясним это на примере.

Пример 1.26. E: из колоды карт (36 листов) наугад последовательно выбирают две карты (выбранная карта в колоду не возвращается). Рассмотрим события:

A = {первая карта окажется тузом},

B = {вторая карта окажется тузом}.

В случае, если событие A не произошло, вероятность наступления события B равна 4/35, т. к. количество карт уменьшается. Если же событие A наступило, то вероятность наступления события B уменьшается (количество тузов в колоде уменьшилось, а следовательно, уменьшилось число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события B). В этом случае вероятность наступления события B будет равна 3/35.

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство некоторого эксперимента E. Рассмотрим произвольные события A и B, причем $P(B) \neq 0$. **Условной вероятностью события *A* в предположении, что событие *B* наступило,** называется число

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1.14}$$

Аналогично **условной вероятностью события *B* в предположении, что событие *A* наступило,** называется число

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \; P(A) \neq 0.$$

Из формулы (1.14) вытекает следующая теорема.

Теорема (умножения). *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B). \tag{1.15}$$

Пример 1.27. В урне находятся 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Из урны последовательно извлекают два шара. Какова вероятность того, что оба они будут черного цвета?

Решение. E: из урны последовательно извлекаются два шара. Определим события:

A = {первый шар окажется черного цвета};

B = {второй шар окажется черного цвета};

C = {оба шара окажутся черного цвета}.

Заметим, что $C = A \cap B$. Следовательно, по формуле (1.15)

$$P(C) = \mathrm{P}(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Вероятность наступления события A найдём по классическому методу определения вероятностей:

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

После того как событие A наступило, в ящике осталось 9 шаров, из них 3 чёрных. Таким образом, $P(B \mid A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

$$P(C) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}.$$

Говорят, что **событие *A* не зависит от события *B***, если выполняется равенство

$$P(A|B) = P(A). \tag{1.16}$$

В противном случае говорят, что событие A зависит от события B.

Учитывая (1.15), можно дать другое (эквивалентное) определение независимости событий. События A и B называются **независимыми**, если выполняется равенство

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{1.17}$$

Пример 1.28. E: из колоды карт (36 листов) наугад последовательно достают две карты (выбранную карту возвращают в колоду). Рассмотрим события:

A = {первая карта окажется тузом};

B = {вторая карта окажется тузом}.

Вне зависимости от того, наступит событие A или нет, вероятность наступления события B не изменяется (поскольку первая выбранная карта возвращается в колоду)

$$P(B|A) = P(B) = 4/36 = 1/9.$$

Следовательно, события A и B являются независимыми.

Свойства независимых событий.

1. События A и $\varnothing$ являются независимыми.
2. События A и Ω являются независимыми.
3. Пусть события A и B являются независимыми. Тогда независимыми будут являться события A и $\overline{B}$, события $\overline{A}$ и B, события $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **называются независимыми в совокупности**, если выполняются следующие системы равенств:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j),\ i, j = \overline{1, n},\ \ i \neq j; \tag{$*$}$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k),\ i, j, k = \overline{1, n},\ \ i \neq j, i \neq k,\ j \neq k;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \tag{1.18}$$

Система равенств ($*$) из (1.18) требует **попарной независимости**. Отметим, что из попарной независимости не следует независимость в совокупности.

По аналогии с теоремой умножения для двух событий можно определить теорему умножения для конечного числа событий.

Теорема (умножения для конечного числа событий). *Вероятность произведения конечного числа событий определяется по формуле*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|\, A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}). \quad (1.19)$$

В случае, если события независимы в совокупности, теорема умножения примет следующий вид:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n), \quad (1.20)$$

в предположении, что $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$.

Пример 1.29. Студент подготовил 45 вопросов из 50. В экзаменационном билете содержится три вопроса. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого нужно ответить: а) на все три вопроса; б) хотя бы на два вопроса; в) хотя бы на один вопрос?

Решение. Определим события:

A_i = {студент ответит на i-й вопрос}, $i = 1, 2, 3$;

B_1 = {студент ответит на все три вопроса};

B_2 = {студент ответит на два вопроса};

B_3 = {студент ответит хотя бы на один вопрос}.

а) Вероятность события $B_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ определим по формуле (1.19):

$$P(B_1) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|\, A_1) \cdot P(A_3|\, A_1A_2) =$$
$$= \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{43}{48} \approx 0,724.$$

б) Событие B_2 можно выразить следующим образом:

$$B_2 = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Применяя сначала теорему сложения для несовместных событий (1.12), а затем теорему умножения для зависимых событий (1.19), получим

$$P(B_2) = P((A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)) =$$

$$= P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) + P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) + P(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(\overline{A}_3 \mid A_1 \cap A_2) + P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap \overline{A}_2) +$$

$$+ P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2 \mid \overline{A}_1) \cdot P(A_3 \mid \overline{A}_1 \cap A_2) = \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{5}{48} + \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49} \cdot \frac{44}{48} +$$

$$+ \frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{48} \approx 0{,}253.$$

в) Для вычисления вероятности события B_3 удобно рассмотреть событие $\overline{B}_3$ = {студент не ответит ни на один вопрос}. Согласно свойству 3 вероятности

$$P(B_3) = 1 - P(\overline{B}_3) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) =$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1) P(\overline{A}_3 \mid \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = 1 - \frac{5}{50} \cdot \frac{4}{49} \cdot \frac{3}{48} \approx 1 - 0{,}0005 = 0{,}9995.$$

Важным следствием теорем сложения и умножения являются формула полной вероятности и формула Байеса.

Рассмотрим события H_1, H_2, …, H_n, которые образуют полную группу (напомним, что такие события называют *гипотезами*), т. е. $H_i \cap H_j = \varnothing$, $\forall\, i \neq j$ и $\bigcup_i H_i = \Omega$, а также событие A, которое может происходить совместно только с одной из гипотез. Проиллюстрируем ситуацию на рисунке 1.14.

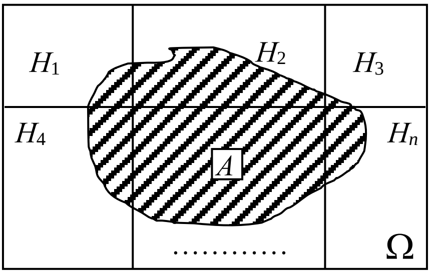


Рисунок 1.14 – Геометрическая интерпретация формулы полной вероятности

Событие A можно представить в виде

$$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \ldots \cup (A \cap H_n).$$

Вероятность наступления каждого из событий $A \cap H_i$, $i = \overline{1, n}$, равна $P(A \cap H_i) = P(H_i)P(A|H_i)$ (используем (1.15) – теорему умножения вероятностей для двух событий). Таким образом, по формуле сложения вероятностей для несовместных событий (1.12) получаем

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i). \tag{1.21}$$

Формула (1.21) носит название **формулы полной вероятности**.

Таким образом, формула полной вероятности применяется, когда событие A может произойти вследствие ряда взаимно исключающих причин. Эти причины и рассматриваются в качестве гипотез.

Пример 1.30. Имеется две партии телевизоров: телевизоры модели А и телевизоры модели В. Известно, что 94 % телевизоров модели А и 82 % телевизоров модели В безотказно работают в течение гарантийного срока. Гипермаркет закупает 25 телевизоров модели А и 75 телевизоров модели В. Какова вероятность того, что случайным образом выбранный телевизор выдержит гарантийный срок?

Решение. Событие A = {случайным образом выбранный телевизор выдержит гарантийный срок}. Поскольку неизвестно, телевизором какой модели он является, выдвигаем две гипотезы:

H_1 = {будет выбран телевизор модели А},

H_2 = {будет выбран телевизор модели В}.

События H_1 и H_2 образуют полную группу, следовательно, вероятность события A можно найти по формуле полной вероятности (1.21). Вероятности гипотез определим по классическому методу:

$$P(H_1) = \frac{25}{25+75} = 0,25; \;\; P(H_2) = \frac{75}{25+75} = 0,75.$$

Условные вероятности наступления события A в предположении, что наступила гипотеза H_1 или H_2, даны нам по условию:

$$P(A \mid H_1) = 0,94, \;\; P(A \mid H_2) = 0,82.$$

По формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i)P(A \mid H_i) = 0,25 \cdot 0,94 + 0,75 \cdot 0,82 = 0,235 + 0,615 = 0,85.$$

Отметим также, что формула (1.21) справедлива и для случая счётного числа гипотез.

На практике встречаются задачи, когда известно, что в результате проведения эксперимента событие A наступило, и необходимо определить вероятность $P(H_j \mid A).$ Такие вероятности гипотез называются **апостериорными**. Вероятности гипотез $P(H_j)$ называются **априорными**.

Выведем формулу для вычисления $P(H_j \mid A),\quad j=\overline{1,n},\quad P(A)\neq 0.$ По формуле (1.14) имеем

$$P(H_j \mid A)=\frac{P(A\cap H_j)}{P(A)}.$$

Применим формулу умножения вероятностей (1.15) в числителе данной дроби и формулу полной вероятности (1.21) в знаменателе. Получим **формулу Байеса**

$$P(H_j \mid A)=\frac{P(H_j)P(A|H_j)}{P(A)}=\frac{P(H_j)P(A|H_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)P(A|H_i)},\quad j=\overline{1,n}. \qquad (1.22)$$

Пример 1.30. (*продолжение*) Выбранный наугад телевизор проработал в течение гарантийного срока. Какова вероятность того, что был выбран телевизор модели B?

Решение. Вероятности гипотез, равно как и условные вероятности, остаются прежними:

$$P(H_1)=\frac{25}{25+75}=0,25;\;\; P(H_2)=\frac{75}{25+75}=0,75;$$

$$P(A|H_1)=0{,}94;\;\; P(A|H_2)=0{,}82;\;\; P(A)=0{,}85.$$

Для определения вероятности $P(H_2 \mid A)$ воспользуемся формулой Байеса (1.22)

$$P(H_2 \mid A)=\frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)}=\frac{P(H_2)P(A|H_2)}{\sum\limits_{i=1}^{2}P(H_i)P(A|H_i)}=\frac{0,615}{0,85}\approx 0,724.$$

1.5 Испытания Бернулли

Конечное число испытаний называются **независимыми**, если их исходы представляют собой события, независимые в совокупности. Иными словами, вероятность наступления некоторого события в каждом из испытаний не зависит от исходов других испытаний.

Пример 1.31. Монета подбрасывается n раз. Поскольку в каждом из испытаний вероятность выпадения герба или решки не зависит от того, какой стороной падала монета в других испытаниях, эти испытания являются независимыми.

Последовательность испытаний называется **испытаниями Бернулли**, если:

1) эти испытания независимы;

2) в каждом из этих испытаний может наступить некоторое событие A, называемое «успехом», с одной и той же вероятностью $p = P(A)$, $0 < p < 1$.

Событие $\overline{A}$ называют «неудачей», $q = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p$.

Пример 1.32. Игральный кубик подбрасывается 11 раз. В качестве «успеха» рассмотрим событие A = {выпадет шесть очков}. Тогда «неудачей» будет являться событие $\overline{A}$ = {выпадет меньше шести очков}: $p = P(A) = \frac{1}{6}$, $q = 1 - p = \frac{5}{6}$. Эти 11 испытаний являются испытаниями Бернулли.

Отметим, что «успехом» необязательно нужно считать событие, которое «успешно» в общепринятом смысле этого слова. Под «успехом» понимается наступление интересующего нас события, которое не обязательно является благополучным. Например, «изделие не выдержало гарантийный срок», «электрическая лампочка перегорела», «произведено бракованное изделие» и т. д.

Пусть необходимо определить вероятность того, что в n испытаниях Бернулли событие A наступит ровно k раз. Как правило, эту вероятность обозначают $P_n(k)$.

Теорема. *Если производится n испытаний Бернулли, то вероятность того, что событие A произойдет ровно k раз, определяется по* ***формуле Бернулли***

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}\,,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n,\ q = 1 - p. \qquad (1.23)$$

Доказательство. Вероятность наступления события, состоящего в том, что событие A в n независимых опытах появится k раз в первых k опытах и не появится $(n - k)$ раз в остальных опытах, по теореме умножения равна

$$\underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{k \text{ раз}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{(n-k) \text{ раз}} = p^k q^{n-k}.$$

Вероятность появления события A снова k раз, но уже в другом порядке, например, появление в первых $(k - 1)$ опытах и в $(k + 1)$-м опыте, будет той же самой, т. е. $p^k q^{n-k}$.

Число таких событий – в n опытах k раз наступило событие A в различном порядке – равно числу неупорядоченных выборок объёма k из n элементов, т.е. C_n^k. Так как все эти события несовместны, то по теореме сложения

$$P_n(k) = \underbrace{p^k q^{n-k} + p^k q^{n-k} + \ldots + p^k q^{n-k}}_{C_n^k} = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Отметим, что

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1,\ \ P_n(0) = C_n^0 p^0 q^n = q^n,\ P_n(n) = C_n^n p^n q^0 = p^n.$$

Пример 1.33. В результате химической коррозии было повреждено 8 арматур из 10. Для проверки случайным образом отобрали 4 арматуры. Какова вероятность того, что 3 из них повреждены?

Решение. Осмотр арматур представляет собой серию из 4 независимых испытаний. В качестве «успеха» рассмотрим событие

A = {арматура окажется повреждённой},

$p = 0,8;\ \ q = 0,2;\ \ n = 4;\ \ k = 3.$

Воспользуемся формулой Бернулли (1.23):

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^{4-3} = 4 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^1 = 0,4096.$$

Вероятность того, что событие A произойдет в n испытаниях Бернулли хотя бы один раз, можно найти по формуле

$$P_n(\geq 1) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1 - P_n(0) = 1 - q^n.$$

Вероятность того, что событие A произойдет от k_1 до k_2 раз, $0 \leq k_1 < k_2 \leq n,$ можно найти по формуле

$$P_n(k_1; k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + ... + P_n(k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Определим наиболее вероятное число наступлений события A в n испытаниях Бернулли, т. е. такое число успехов $k^*,$ $0 \leq k^* \leq n,$ для которого $P_n(k^*)$ будет наибольшей. Для этого используется система неравенств

$$np - q \leq k^* \leq np + p. \tag{1.24}$$

Так как k^* – целое число, а $p + q = 1$, то для испытаний Бернулли существует одно или два наиболее вероятных числа успехов.

При большом количестве испытаний пользоваться формулой Бернулли затруднительно. В этом случае обычно пользуются приближёнными формулами, которые при увеличении числа испытаний будут давать приближённый ответ с достаточно высокой степенью точности.

Теорема (Пуассона). *Если число испытаний Бернулли* $n \to \infty$ *и вероятность успеха в каждом испытании* $p \to 0$, *так, что при этом* $np = \lambda = \text{const}$, *то*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \; k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1.25}$$

Следствие. *Если в испытаниях Бернулли* n *велико, а вероятность успеха* p *мала, то*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \; k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1.26}$$

Обычно формулой (1.26) пользуются, когда $p < 0{,}1$.

Пример 1.34. Каждый из частотомеров, имеющихся на складе завода-изготовителя, выходит из строя до истечения гарантийного срока с вероятностью 0,01. Посредник закупает на заводе 100 частотомеров с целью дальнейшей перепродажи. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока из числа приобретённых посредником частотомеров выйдут из строя ровно 4?

Решение. Рассмотрим серию из 100 испытаний Бернулли.

A = {частотомер выйдет из строя до истечения гарантийного срока}.

$n = 100$, $k = 4$, $p = 0{,}01$, $\lambda = np = 1$.

$$P_{100}(4) \approx \frac{1^4 e^{-1}}{4!} = \frac{1}{24e} = \frac{1}{65{,}232} \approx 0{,}015.$$

Теорема (локальная теорема Муавра – Лапласа). *Если число испытаний Бернулли* $n \to \infty$, *а вероятность успеха* $0 < p < 1$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k)\frac{\sqrt{npq}}{\varphi(x_k)} = 1, \tag{1.27}$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x_k = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Свойства функции $\varphi(x)$:

1) $\varphi(x) = \varphi(-x)$;

2) $\varphi(+\infty) = 0$, $\varphi(-\infty) = 0$;

3) если $|x| \geq 4$, то $\varphi(x) \approx 0$.

Следствие. *Если в испытаниях Бернулли* n *велико, а вероятность успеха* p *не мала и не велика, то*

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_k), \tag{1.28}$$

где $\varphi(x_k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_k^2}{2}}$, $x_k = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Обычно формулой (1.28) пользуются, когда $0{,}1 \leq p \leq 0{,}9$.

В тех случаях, когда требуется вычислить вероятность того, что в n испытаниях событие произойдет не менее k_1, но не более k_2 раз, используют интегральную теорему Муавра – Лапласа.

Теорема (интегральная теорема Муавра – Лапласа). *Если число испытаний Бернулли* $n \to \infty$, *а вероятность успеха* $0 < p < 1$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}(P_n(k_1,k_2) - \Phi(x_{k_2}) + \Phi(x_{k_1})) = 0, \qquad (1.29)$$

где $\Phi(x_{k_i}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{x_{k_i}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\ \ x_{k_i} = \dfrac{k_i - np}{\sqrt{npq}},\ i = 1, 2.$

Функцию $\Phi(x)$ называют функцией Лапласа. Укажем её свойства:

1) $\Phi(x) = -\Phi(-x)$;

2) $\Phi(+\infty) = -0,5.\ \ \Phi(+\infty) = 0,5$;

3) если $x \geq 5$, то $\Phi(x) \approx 0,5$. Если $x \leq -5$, то $\Phi(x) \approx -0,5$.

Следствие. *Если в испытаниях Бернулли* n *велико, а вероятность успеха* p *не мала и не велика, то*

$$P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x_{k_2}) - \Phi(x_{k_1}), \qquad (1.30)$$

где $\Phi(x_{k_i}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{x_{k_i}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\ \ x_{k_i} = \dfrac{k_i - np}{\sqrt{npq}},\ i = 1, 2.$

Обычно формулой (1.30) пользуются, когда $0,1 \leq p \leq 0,9$.

2 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1 Понятие случайной величины. Закон распределения случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения дискретных и непрерывных случайных величин

Случайной величиной называют величину, которая при повторении некоторого эксперимента в одинаковых условиях может принимать различные значения, причем заранее неизвестно, какое именно из них. Будем обозначать случайные величины греческими буквами ξ, η, ζ, …, а их возможные значения – латинскими буквами x, y, z.

Пример 2.1. E: подбрасывание игральной кости. Случайная величина ξ – число выпавших очков. Возможные значения данной случайной величины: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, …, $x_6 = 6$.

E: стрельба по мишени до первого попадания. Случайная величина η – количество выстрелов, предшествующих первому попаданию. Возможные значения данной случайной величины: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$, … .

E: исследование времени безотказной работы прибора. Случайная величина ζ – время безотказной работы прибора. Возможные значения z данной случайной величины принадлежат промежутку $[0; +\infty)$.

Дадим теперь строгое определение случайной величины. Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство некоторого эксперимента E. **Случайной величиной** называется функция $\xi = \xi(\omega)$, измеримая относительно σ-алгебры F, которая каждому элементарному исходу ω ставит в соответствие некоторое действительное число x:

$$\xi : \omega \in \Omega \to x \in \boldsymbol{R}. \tag{2.1}$$

Другими словами, случайная величина – это отображение пространства элементарных исходов на числовую прямую.

Пример 2.2. *E*: подбрасывание двух различимых игральных костей.

$$\Omega = \{\omega = (i, j): i, j = \overline{1, 6}\}.$$

Рассмотрим случайную величину ξ – сумму очков, выпавших на игральных костях. Возможные значения данной случайной величины: 2, 3, …, 12.

$$\xi(\omega) = \xi(i,\ j) = i\ +\ j.$$

Примерами случайных величин являются число бракованных кирпичей в партии, число звонков, поступивших на мобильный телефон в течение суток, время твердения бетона и так далее.

Любое правило, устанавливающее связь между отдельными значениями случайной величины или значениями из некоторого множества и соответствующими им вероятностями, называется **законом распределения случайной величины**.

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F(x)$, которая определяется соотношением

$$F(x) = P\{\xi < x\},\ x \in \boldsymbol{R}. \tag{2.2}$$

Свойства функции распределения $F(x)$.

1. Область определения функции распределения – вся числовая прямая.

2. Область значений функции распределения – отрезок [0; 1], т. е. $0 \le F(x) \le 1$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

4. Функция распределения является неубывающей функцией: если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$.

5. Вероятность принятия случайной величиной ξ значения из промежутка $[a; b)$

$$P\{a \le \xi < b\} = F(b) - F(a). \tag{2.3}$$

6. Функция распределения непрерывна слева: $\lim\limits_{x\to a-0} F(x) = F(a)$.

7. $P\{\xi \geq x\} = 1 - P\{\xi < x\} = 1 - F(x)$.

Не менее часто функцию распределения определяют

$$F(x) = P\{\xi \leq x\},\ x \in \boldsymbol{R}.$$

В этом случае свойства 1–4 остаются в силе, а свойства 5–7 приобретают следующий вид:

5′. $P\{a < \xi \leq b\} = F(b) - F(a)$.

6′. Функция распределения непрерывна справа: $\lim\limits_{x \to a+0} F(x) = F(a)$.

7′. $P\{\xi > x\} = 1 - P\{\xi \leq x\} = 1 - F(x)$.

Функция распределения является законом распределения случайной величины.

Случайная величина ξ называется **дискретной**, если она может принимать конечное или счётное количество значений.

Так, в примере 2.1 число очков, выпавших на игральной кости, и число выстрелов, сделанных до первого попадания в цель, являются дискретными случайными величинами.

Примерами дискретных случайных величин являются: число бракованных кирпичей в партии из 10 000 штук, число отказов лифтового оборудования в течение суток, число асбестоцементных труб, не выдержавших испытания, число окон ПВХ, установленных рабочим за смену.

Пусть ξ – дискретная случайная величина, которая принимает значения x_i с вероятностями $p_i = P\{\xi = x_i\}$. Тогда закон распределения случайной величины ξ может быть задан в виде таблицы

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

,

если число её возможных значений конечно, или

x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

,

если число её возможных значений счётно. Такую таблицу называют **рядом распределения** случайной величины ξ.

Ряд распределения является законом распределения дискретной случайной величины.

Поскольку события $\{\xi = x_i\}$ образуют полную группу, то сумма вероятностей этих событий равна 1:

$$\sum_i p_i = 1.$$

Функция распределения дискретной случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{i:x_i<x} P\{\xi = x_i\} = \sum_{i:x_i<x} p_i. \tag{2.4}$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ p_1, & x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3, \\ \ldots & \\ p_1 + \ldots + p_{n-1}, & x_{n-1} < x \le x_n, \\ 1, & x > x_n, \end{cases}$$

если число возможных значений дискретной случайной величины конечно, и

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ p_1, & x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3, \\ \ldots & \\ p_1 + \ldots + p_{k-1}, & x_{k-1} < x \le x_k, \\ \ldots, & \end{cases}$$

если число возможных значений дискретной случайной величины счётно.

График функции распределения дискретной случайной величины с конечным числом значений представлен на рисунке 2.1.

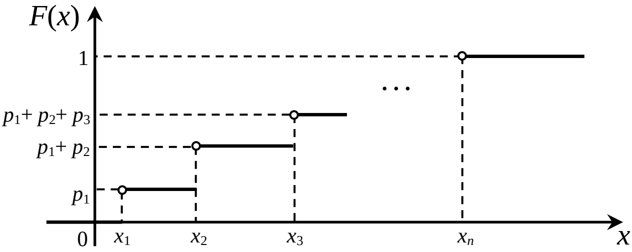


Рисунок 2.1 – График функции распределения дискретной случайной величины

Случайная величина ξ называется **непрерывной**, если она может принимать несчётное множество значений.

Так, в примере 2.1 время безотказной работы прибора является непрерывной случайной величиной. Примерами непрерывных случайных величин являются объём воды, израсходованной предприятием за месяц; толщина древесностружечной плиты; время, необходимое для капитального ремонта жилого здания.

Случайная величина ξ называется **непрерывной**, если существует неотрицательная функция $f(x)$ такая, что функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ может быть представлена в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \; x \in \boldsymbol{R}. \qquad (2.5)$$

Функция $f(x)$ называется **функцией плотности случайной величины** ξ. Функцию плотности $f(x)$ называют ещё **дифференциальной функцией распределения**, тогда как функцию распределения $F(x)$ называют **интегральной функцией распределения**. На рисунках 2.2 и 2.3 приведены графики функции распределения $F(x)$ и функции плотности $f(x)$ соответственно.

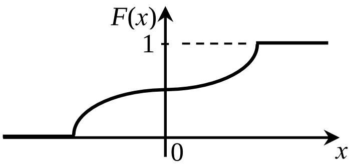


Рисунок 2.2 – График функции распределения непрерывной случайной величины

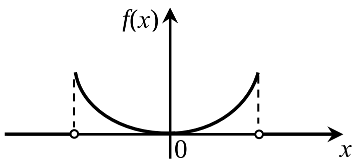


Рисунок 2.3 – График функции плотности непрерывной случайной величины

По свойству интеграла с переменным верхним пределом $F(x)$ является непрерывной функцией.

Можно дать другое (эквивалентное) определение непрерывной случайной величины.

Случайная величина ξ называется **непрерывной**, если её функция распределения $F(x)$ является непрерывной.

Свойства функции плотности $f(x)$.

1. $f(x) \geq 0,\ x \in \boldsymbol{R}$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Геометрически это означает, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции плотности и осью абсцисс, равна 1.

3. $f(x) = F'(x)$.

4. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в промежуток $[a;\ b)$

$$P\{a \leq \xi < b\} = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{2.6}$$

Геометрически это означает, что вероятность принятия непрерывной случайной величиной значения из промежутка $[a;\ b)$ равна площади фигуры, ограниченной графиком функции плотности и осью абсцисс в этом промежутке (рисунок 2.4).

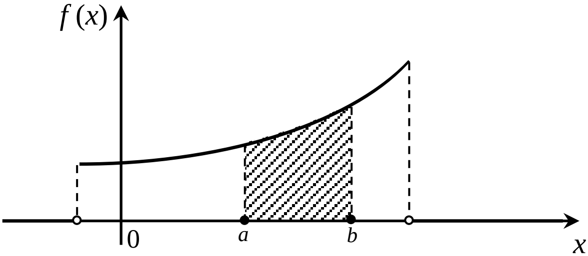


Рисунок 2.4 – Вероятность попадания непрерывной случайной величины в промежуток $[a;\ b)$

Функция плотности, так же как и функция распределения, является законом распределения непрерывной случайной величины.

Отметим, что вероятность события $\{\xi = a\}$ для непрерывной случайной величины равна нулю. Таким образом, для непрерывной случайной величины ξ справедливо

$$P\{a < \xi < b\} = P\{a \le \xi < b\} = P\{a < \xi \le b\} = P\{a \le \xi \le b\}.$$

2.2 Числовые характеристики случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ называется число

$$M[\xi] = \sum_i x_i p_i, \tag{2.7}$$

если ряд сходится абсолютно. В противном случае говорят, что случайная величина не имеет конечного математического ожидания.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ называется число

$$M[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx, \tag{2.8}$$

если интеграл сходится абсолютно. В противном случае говорят, что случайная величина не имеет конечного математического ожидания.

Математическое ожидание – это среднее значение случайной величины.

Свойства математического ожидания.

1. $M[C] = C$, где C – постоянная величина.
2. $M[C\xi] = CM[\xi]$.
3. $M[C_1\xi_1 \pm C_2\xi_2 \pm \ldots \pm C_n\xi_n] = C_1 M[\xi_1] \pm C_2 M[\xi_2] \pm \ldots \pm C_n M[\xi_n]$.

В частности, $M[\xi_1 \pm \xi_2 \pm \ldots \pm \xi_n] = M[\xi_1] \pm M[\xi_2] \pm \ldots \pm M[\xi_n]$.

4. $M\big[\xi - M[\xi]\big] = 0$.
5. Если $P\{\alpha \le \xi \le \beta\} = 1$, то $M[\xi] \in [\alpha; \beta]$.
6. Если $\xi(\omega) \le \eta(\omega)$ для любых $\omega \in \Omega$, то $M[\xi] \le M[\eta]$.
7. Если случайные величины ξ и η независимы и имеют конечные математические ожидания, то случайная величина $\xi \cdot \eta$ имеет конечное математическое ожидание, причем

$$M[\xi \cdot \eta] = M[\xi] \cdot M[\eta].$$

Модой дискретной случайной величины ξ (рисунок 2.5) называется такое значение случайной величины m, для которого выполняются неравенства

$$p_{m-1} \le p_m \text{ и } p_m \ge p_{m+1}.$$

Модой непрерывной случайной величины ξ (рисунок 2.6) называется точка максимума (локального) функции плотности $f(x)$.

Моду будем обозначать $Mod[\xi]$.

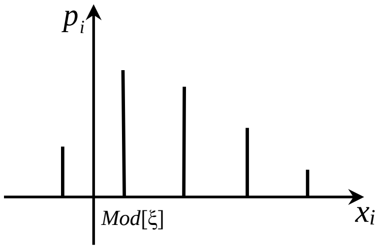


Рисунок 2.5 – Мода дискретной случайной величины

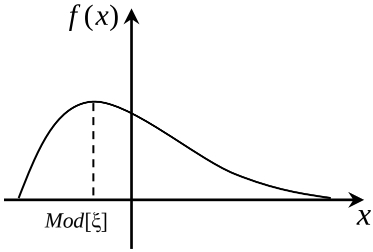


Рисунок 2.6 – Мода непрерывной случайной величины

Если распределение случайной величины имеет одну, две и большее число мод, то такое распределение называется соответственно **унимодальным**, **бимодальным** и **полимодальным**.

Медианой случайной величины ξ называется такое число m, для которого выполняются неравенства

$$F(m) \le \frac{1}{2} \text{ и } F(m+0) \ge \frac{1}{2}.$$

Медиану будем обозначать $Med[\xi]$.

Для непрерывной случайной величины ξ можно дать следующее (эквивалентное) определение. **Медианой** случайной величины ξ называется корень уравнения

$$F(x) = \frac{1}{2}. \tag{2.9}$$

Другими словами, для непрерывной случайной величины ξ одинаково вероятно, примет случайная величина ξ значение больше, чем $Med[\xi]$, или же меньше, чем $Med[\xi]$, т. е.

$$P\{\xi < Med[\xi]\} = P\{\xi > Med[\xi]\} = 0{,}5.$$

Любая случайная величина имеет хотя бы одну медиану. Геометрический смысл медианы непрерывной случайной величины заключается в том, что перпендикуляр к оси абсцисс, проведенный через медиану, делит фигуру, ограниченную графиком функции плотности и осью абсцисс, на две равные по площади части (рисунок 2.7).

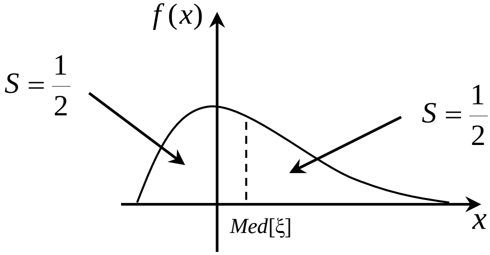


Рисунок 2.7 – Медиана непрерывной случайной величины

Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D[\xi]=M\left[(\xi-M[\xi])^2\right]. \tag{2.10}$$

В случае дискретной случайной величины дисперсию можно найти по формуле

$$D[\xi]=\sum_i (x_i-M[\xi])^2\,p_i. \tag{2.11}$$

Для непрерывной случайной величины

$$D[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M[\xi])^2\cdot f(x)dx. \tag{2.12}$$

Отметим, что вычисление дисперсии по формулам (2.11), (2.12) является достаточно трудоемким процессом. Часто бывает удобно воспользоваться следующей формулой:

$$D[\xi]=M[\xi^2]-(M[\xi])^2. \tag{2.13}$$

Используя (2.13), формулу для вычисления дисперсии дискретной случайной величины можно записать в следующем виде:

$$D[\xi] = \sum_i x_i^2 p_i - (M[\xi])^2, \tag{2.14}$$

а для непрерывной –

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (M[\xi])^2. \tag{2.15}$$

Свойства дисперсии.

1. $D[\xi] \geq 0$.
2. $D[C] = 0$, где C – постоянная величина.
3. $D[C\xi] = C^2 D[\xi]$.
4. $D[C+\xi] = D[\xi]$.
5. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ попарно независимы, то

$$D[C_1\xi_1 \pm C_2\xi_2 \pm \ldots \pm C_n\xi_n] = C_1^{\,2} D[\xi_1] + C_2^{\,2} D[\xi_2] + \ldots + C_n^{\,2} D[\xi_n].$$

В частности,

$$D[\xi_1 \pm \xi_2 \pm \ldots \pm \xi_n] = D[\xi_1] + D[\xi_2] + \ldots + D[\xi_n].$$

Заметим, что дисперсия случайной величины имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины, что не всегда удобно при решении практических задач.

Средним квадратическим отклонением (стандартным отклонением) случайной величины ξ называется число

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D[\xi]}. \tag{2.16}$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma[\xi]$, так же как и $D[\xi]$, показывает степень отклонения значений случайной величины ξ от $M[\xi]$. Можно сказать, что среднее квадратическое отклонение случайной величины есть «расстояние» между значениями случайной величины и средним значением. Среднее квадратическое отклонение случайной величины имеет ту же размерность, что и случайная величина.

Свойства среднего квадратического отклонения.

1. $\sigma[C]=0$.
2. $\sigma[C\,\xi]=|C|\,\sigma[\xi]$.
3. $\sigma[C+\xi]=\sigma[\xi]$.
4. Если случайные величины ξ_1, ξ_2, …, ξ_n попарно независимы, то

$$\sigma[\xi_1\pm\xi_2\pm\ldots\pm\xi_n]=\sqrt{(\sigma[\xi_1])^2+(\sigma[\xi_2])^2+\ldots+(\sigma[\xi_n])^2}.$$

Иногда рассматривают и другие числовые характеристики, например, **коэффициент вариации** (безразмерная мера разброса значений случайной величины), **коэффициент асимметрии** (характеризует симметричность распределения), **коэффициент эксцесса** (характеризует островершинность распределения).

Пример 2.3. Из десяти отопительных конвекторов три являются бракованными. Контролёр для осмотра отбирает три конвектора. Случайная величина ξ – число бракованных конвекторов среди выбранных. Определить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и моду данной случайной величины.

Решение. Построим ряд распределения случайной величины ξ. Данная случайная величина может принимать четыре значения: 0, 1, 2, 3.

Рассмотрим события

A_i = {i-й конвектор окажется бракованным}, i = 1, 2, 3.

События $\{\xi=j\}$, j = 0, 1, 2, 3, можно представить в виде

$\{\xi=0\}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$;

$\{\xi=1\}=(A_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1\cap A_2\cap\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap A_3)$;

$\{\xi=2\}=(\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3)\cup(A_1\cap\overline{A}_2\cap A_3)\cup(A_1\cap A_2\cap\overline{A}_3)$;

$\{\xi=3\}=A_1\cap A_2\cap A_3$.

Применяя теорему сложения вероятностей для несовместных событий и теорему умножения вероятностей для зависимых событий, имеем

$$P\{\xi=0\}=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\,|\,\overline{A}_1)P(\overline{A}_3\,|\,\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{7}{24};$$

$$P\{\xi=1\} = P(A_1)P(\overline{A}_2\,|\,A_1)P(\overline{A}_3\,|\,A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2\,|\,\overline{A}_1)P(\overline{A}_3\,|\,\overline{A}_1A_2) +$$

$$+\ P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\,|\,\overline{A}_1)P(A_3\,|\,\overline{A}_1\overline{A}_2) = \frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{21}{40};$$

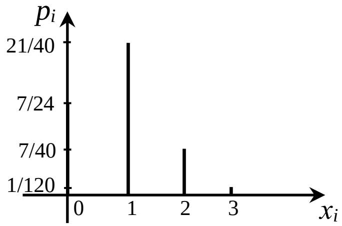
$$P\{\xi=2\} = P(A_1)P(A_2\,|\,A_1)P(\overline{A}_3\,|\,A_1A_2) + P(A_1)P(\overline{A}_2\,|\,A_1)P(A_3\,|\,A_1\overline{A}_2) +$$

$$+\ P(\overline{A}_1)P(A_2\,|\,\overline{A}_1)P(A_3\,|\,\overline{A}_1A_2) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8}+\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{7}{40};$$

$$P\{\xi=3\} = P(A_1)P(A_2\,|\,A_1)P(A_3\,|\,A_1A_2) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{120}.$$

Таким образом, ряд распределения случайной величины ξ имеет вид

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$



Убедимся, что $\sum_{i=1}^{4} p_i = \frac{7}{24}+\frac{21}{40}+\frac{7}{40}+\frac{1}{120}=1.$

Определим математическое ожидание случайной величины ξ. Для этого воспользуемся формулой (2.7):

$$M[\xi]=\sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0\cdot\frac{7}{24}+1\cdot\frac{21}{40}+2\cdot\frac{7}{40}+3\cdot\frac{1}{120}=\frac{21}{40}+\frac{14}{40}+\frac{3}{120}=\frac{9}{10}.$$

Дисперсию и среднее квадратическое отклонение определим по формулам (2.14) и (2.16) соответственно:

$$D[\xi]=\sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - (M[\xi])^2 =$$

$$=0^2\cdot\frac{7}{24}+1^2\cdot\frac{21}{40}+2^2\cdot\frac{7}{40}+3^2\cdot\frac{1}{120}-\left(\frac{9}{10}\right)^2=\frac{49}{100}.$$

$$\sigma[\xi]=\sqrt{D[\xi]}=\sqrt{\frac{49}{100}}=\frac{7}{10}.$$

Как следует из ряда распределения, $Mod[\xi] = 1$.

Пример 2.4. Определить числовые характеристики случайной величины ξ.

Решение. Функция плотности случайной величины ξ имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}4x^3, \ x\in[0;1],\\ 0, \quad x\notin[0;1].\end{cases}$$

Математическое ожидание найдем по формуле (2.8)

$$M[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx+\int_{0}^{1} x\cdot 4x^3dx+\int_{1}^{+\infty} x\cdot 0dx=\left.\frac{4x^5}{5}\right|_0^1=\frac{4}{5}=0,8,$$

дисперсию – по формуле (2.15)

$$D[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx-(M[\xi])^2=$$

$$=\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0dx+\int_{0}^{1} x^2\cdot 4x^3dx+\int_{1}^{+\infty} x^2\cdot 0dx-\left(\frac{4}{5}\right)^2=$$

$$=\left.\frac{2x^6}{3}\right|_0^1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{2}{3}-\frac{16}{25}=\frac{2}{75}\approx 0,027.$$

Среднее квадратическое отклонение определим по формуле (2.16):

$$\sigma[\xi]=\sqrt{0,027}\approx 0,16.$$

Функция плотности случайной величины ξ достигает своего максимума в точке $x = 1$, поэтому $Mod[\xi] = 1$.

Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, \quad x<0;\\ x^4, 0\le x\le 1;\\ 1, \quad x>1.\end{cases}$$

Для определения медианы воспользуемся равенством (2.9):

$$F(x)=0,5.$$

В интервале $(-\infty;\ 0)$ $F(x)=0,$ в интервале $(1;\ +\infty)$ $F(x)=1,$ поэтому решение данного уравнения будем искать только в отрезке $[0;\ 1]$:

$$x^4=0,5.$$

Решая это уравнение, получим $x=\pm\sqrt[4]{0,5}.$

Поскольку $x=-\sqrt[4]{0,5}\notin[0;1],$ то $Med[\xi]=\sqrt[4]{0,5}\approx 0,84.$

2.3 Основные законы распределения случайных величин

2.3.1 Биномиальный закон распределения

Случайная величина ξ имеет **биномиальный закон распределения** с параметрами n и p, если она может принимать конечное число значений 0, 1, 2, …, n с вероятностями, которые определяются по формуле Бернулли:

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

где $n \geq 1$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Обозначается $\xi \sim Bi(n,\ p)$.

Построим ряд распределения случайной величины ξ:

x_i	0	1	…	k	…	n
p_i	q^n	npq^{n-1}		$C_n^k p^k q^{n-k}$		p^n

Биномиальному закону распределения подчиняется случайная величина, характеризующая число успехов в n испытаниях Бернулли.

В зависимости от значений параметров распределения столбцовая диаграмма случайной величины ξ может иметь вид, представленный на рисунках 2.8 и 2.9

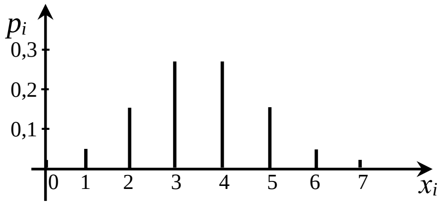


Рисунок 2.8 – Столбцовая диаграмма случайной величины, распределённой по биномиальному закону с параметрами $n = 7$ и $p = 0{,}5$

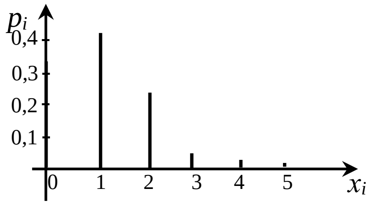


Рисунок 2.9 – Столбцовая диаграмма случайной величины, распределённой по биномиальному закону с параметрами $n = 5$ и $p = 0{,}2$

Основные числовые характеристики случайной величины, распределённой по биномиальному закону,

$$M[\xi] = np,\ \ D[\xi] = npq,\ \ \sigma[\xi] = \sqrt{npq}. \qquad (2.17)$$

Модой случайной величины ξ, распределённой по биномиальному закону, является целое число k^*, удовлетворяющее системе неравенств

$$np - q \le k^* \le np + p.$$

Случайная величина ξ, распределённая по биномиальному закону, может иметь одну или две моды.

Пример 2.5. В осветительную сеть было подключено 10 энергосберегающих ламп. Каждая лампа в течение года перегорает с вероятностью 0,2. Определить среднее число ламп, которые перегорят в течение года.

Решение. Рассмотрим случайную величину ξ – число ламп, которые перегорят в течение года. Возможные значения случайной величины ξ: 0, 1, …, 10. Таким образом, случайная величина ξ характеризует количество наступлений события A = {лампа перегорит в течение года} в 10 независимых испытаниях, причём вероятность наступления события A в каждом испытании остаётся неизменной: $P(A) = 0{,}2$. Следовательно, ξ имеет биномиальный закон распределения с параметрами $n = 10$ и $p = 0{,}2$, т. е. $\xi \sim Bi(10; 0{,}2)$.

Для того чтобы определить среднее число ламп, которые перегорят в течение года, найдём математическое ожидание случайной величины ξ по формуле (2.17):

$$M[\xi] = 10 \cdot 0{,}2 = 2 \text{ [лампы]}.$$

2.3.2 Распределение Пуассона

Случайная величина ξ распределена по **закону Пуассона** с параметром a, $a > 0$, если она принимает счётное число значений 0, 1, 2, …, k, …, с вероятностями, которые определяются по формуле Пуассона:

$$P\{\xi = k\} = \frac{a^k e^{-a}}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Обозначается $\xi \sim \Pi(a)$.

Построим ряд распределения случайной величины ξ:

x_i	0	1	2	...	k	...
p_i	e^{-a}	ae^{-a}	$\dfrac{a^2e^{-a}}{2}$	...	$\dfrac{a^ke^{-a}}{k!}$	...

Убедимся, что $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = e^{-a}\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{a^i}{i!} = e^{-a}\cdot e^{a} = 1.$

В зависимости от значения параметра распределения, столбцовая диаграмма случайной величины ξ может иметь вид, представленный на рисунках 2.10 и 2.11.

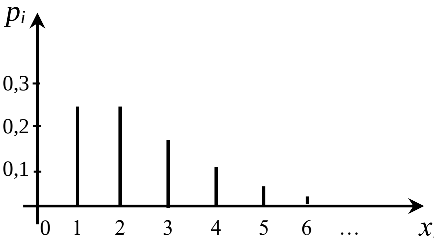


Рисунок 2.10 – Столбцовая диаграмма случайной величины, распределённой по закону Пуассона с параметром a = 2

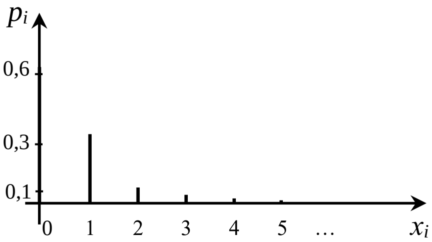


Рисунок 2.11 – Столбцовая диаграмма случайной величины, распределённой по закону Пуассона с параметром a = 0,5

Примерами случайных величин, распределённых по закону Пуассона, являются число вызовов, поступающих на телефонную станцию за время t; число отказов оборудования в течение рабочей смены; число вирусных атак на рабочую станцию за час нахождения в сети Интернет.

Основные числовые характеристики случайной величины, распределённой по закону Пуассона

$$M[\xi]=a,\ \ D[\xi]=a,\ \ \sigma[\xi]=\sqrt{a}. \qquad (2.18)$$

Если a – целое число, то случайная величина ξ имеет две моды:

$$Mod_1[\xi]=a \text{ и } Mod_2[\xi]=a-1.$$

Если a – дробное число, то случайная величина ξ имеет одну моду, которая равна целой части a.

Закон распределения Пуассона является предельным для биномиального распределения при больших значениях n и малых значениях p ($0 < p < 0{,}1$), при этом $a = np$.

Пример 2.6. 0,2 % произведённых паркетных щитов не удовлетворяют ГОСТ 862.4. Какова вероятность того, что из 400 паркетных щитов требованиям ГОСТ не удовлетворяет: а) хотя бы один щит; б) не более двух щитов?

Решение. Рассмотрим случайную величину ξ – число щитов, не удовлетворяющих требованиям ГОСТ. Её возможные значения: 0, 1, …, 400. Данная случайная величина распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 400$ и $p = 0{,}002$.

Введем события A = {требованиям ГОСТ не удовлетворяет хотя бы один щит} и B = {требованиям ГОСТ не удовлетворяет не более двух щитов}.

$P(A) = P\{\xi \geq 1\} = 1 - P\{\xi = 0\}$;

$P(B) = P\{\xi \leq 2\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\}$.

Так как число испытаний n велико, а вероятность успеха $p = 0{,}002$ мала ($p < 0{,}1$), то для определения вероятностей событий $\{\xi = k\}$ воспользуемся формулой Пуассона ($a = np = 400 \cdot 0{,}002 = 0{,}8$). Получим

$$P(A) = 1 - P\{\xi = 0\} \approx 1 - \frac{0{,}8^0 e^{-0{,}8}}{0!} \approx 0{,}5507.$$

$$P(B) = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} \approx$$

$$\approx \frac{0{,}8^0 e^{-0{,}8}}{0!} + \frac{0{,}8^1 e^{-0{,}8}}{1!} + \frac{0{,}8^2 e^{-0{,}8}}{2!} \approx 0{,}4493 + 0{,}3595 + 0{,}1438 = 0{,}9526.$$

Потоком событий называют последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени (поток посетителей в магазине, поток вызовов на АТС и так далее). Поток событий называется **простейшим** или **пуассоновским**, если вероятность появления k событий за время t определяется по формуле Пуассона

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \; k \geq 0, \qquad (2.19)$$

где λ – интенсивность потока ($\lambda > 0$).

Иными словами, случайная величина ξ – число событий простейшего потока за время t имеет распределение Пуассона с параметром $a = \lambda t$.

Отсюда следует, что *среднее число событий* простейшего потока, наступающих за время t есть λt.

Можно дать другое эквивалентное определение простейшего потока. Для этого введём следующие определения.

Поток событий называется **стационарным**, если вероятность появления того или иного числа событий в непересекающиеся промежутки времени зависит только от этих чисел и длин промежутков и не зависит от расположения этих промежутков на временной оси.

Поток событий называется **ординарным**, если вероятность того, что за бесконечно малый промежуток времени может наступить более чем одно событие, пренебрежимо мала. Иными словами, поток событий является ординарным, если события наступают не группами, а поодиночке.

Поток событий называется потоком **без последействия**, если имеет место независимость появления того или иного числа событий в непересекающиеся промежутки времени. Иными словами, «будущее» потока не зависит от его «прошлого» при фиксированном «настоящем».

Поток событий называется **простейшим**, если он стационарный, ординарный и без последействия.

Пример 2.7. На основании статистических данных известно, что в дневное время суток в диспетчерскую службы по обслуживанию лифтов поступает в среднем 6 обращений в час. Считая поток обращений простейшим, определить вероятность того, что в течение 20 минут поступит более 5 обращений.

Решение. Так как поток обращений является простейшим, то случайная величина ξ, определяющая число обращений в течение 20 минут, распределена по закону Пуассона с параметром $a = \lambda t = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2.$

Рассмотрим событие $A = \{$в течение 20 минут поступит более 5 обращений$\}$. Тогда

$$P(A) = P\{\xi > 5\} = 1 - P\{\xi \le 5\} =$$

$$= 1 - \left(P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} + P\{\xi = 3\} + P\{\xi = 4\} + P\{\xi = 5\} \right) =$$

$$=1-\left[\frac{2^0e^{-2}}{0!}+\frac{2^1e^{-2}}{1!}+\frac{2^2e^{-2}}{2!}+\frac{2^3e^{-2}}{3!}+\frac{2^4e^{-2}}{4!}+\frac{2^5e^{-2}}{5!}\right]\approx$$

$$1-0,9834=0,0166.$$

2.3.3 Геометрический закон распределения

Случайная величина ξ имеет **геометрический закон распределения** с параметром p, если она принимает счётное число значений 0, 1, 2, …, k, …, с вероятностями, которые определяются по формуле

$$P\{\xi = k\} = q^k p,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Обозначается $\xi \sim G(p)$.

Случайная величина, имеющая геометрический закон распределения, определяет число испытаний, предшествующих первому появлению события A, которое с вероятностью p может произойти в каждом отельном испытании.

Иногда считают, что случайная величина имеет геометрическое распределение, если она определяет номер испытания, в котором впервые произошло событие A. При таком определении случайная величина, подчинённая геометрическому закону распределения, может принимать значения 1, 2, …, с вероятностями $P\{\xi = k\} = q^{k-1}p$.

Построим ряд распределения случайной величины ξ:

x_i	0	1	2	…	k	…
p_i	p	qp	q^2p	…	q^kp	…

Геометрическое распределение называется именно так, поскольку вероятности p, qp, q^2p, … образуют геометрическую прогрессию.

Убедимся, что $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i = \sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i p = p\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i = p\dfrac{1}{1-q} = \dfrac{p}{p} = 1.$

В зависимости от значения параметра распределения, столбцовая диаграмма случайной величины ξ может иметь вид, представленный на рисунках 2.12 и 2.13.

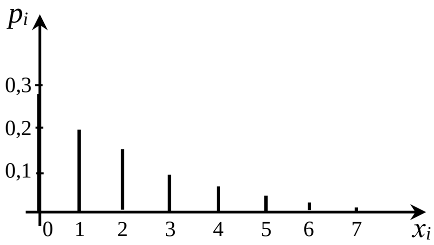


Рисунок 2.12 – Столбцовая диаграмма случайной величины, распределённой по геометрическому закону с параметром p = 0,3

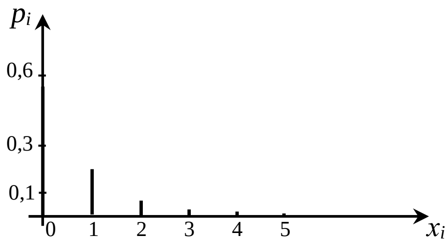


Рисунок 2.13 – Столбцовая диаграмма случайной величины, распределённой по геометрическому закону с параметром p = 0,6

Примерами случайных величин, распределённых по геометрическому закону, являются число выстрелов по мишени до первого попадания, число испытаний прибора до первого отказа, число подбрасываний монеты до первого выпадения герба.

Основные числовые характеристики случайной величины, распределённой по геометрическому закону,

$$M[\xi]=\frac{1-p}{p},\ D[\xi]=\frac{1-p}{p^2},\ \sigma[\xi]=\frac{\sqrt{1-p}}{p},\ Mod[\xi]=0. \qquad (2.20)$$

Пример 2.8. Вероятность того, что попытка модемного соединения с сервером завершится успешно, неизменна для каждой попытки и равна 0,8. Пользователь пытается установить модемное соединение с сервером. Определить среднее число неудачных попыток соединения.

Решение. Рассмотрим событие A = {пользователь установит соединение с сервером} и случайную величину ξ, определяющую число испытаний, предшествующих первому наступлению события A. Так как вероятность наступления события A постоянна в каждом испытании $P(A)$ = 0,8, то ξ имеет геометрический закон распределения с параметром p = 0,8, т. е. $\xi \sim G(0,8)$.Среднее число неудачных попыток соединения с сервером характеризуется математическим ожиданием случайной величины ξ. Определим его по формуле (2.20):

$$M[\xi]=\frac{1-0,8}{0,8}=0,25\,[\text{попыток}].$$

2.3.4 Равномерный закон распределения

Случайная величина ξ имеет **равномерный закон распределения** с параметрами *a* и *b*, *a* < *b*, если её функция плотности имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a;b],\\ 0, & x\notin[a;b].\end{cases}$$

Обозначается $\xi\sim R(a;b)$.

Таким образом, случайная величина ξ, имеющая равномерный закон распределения с параметрами *a* и *b*, принимает значения из отрезка [*a*; *b*].

Определим функцию распределения данной случайной величины

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt:$$

при $x\in(-\infty;a]$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dt=0;$

при $x\in(a;b]$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{a}0dt+\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dt=\left.\frac{t}{b-a}\right|_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a};$

при $x\in(b;+\infty]$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{a}0dt+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dt+\int_{b}^{x}0dt=\left.\frac{t}{b-a}\right|_{a}^{b}=1.$

Таким образом, функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

На рисунках 2.14, 2.15 приведены графики функции плотности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ равномерно распределённой случайной величины.

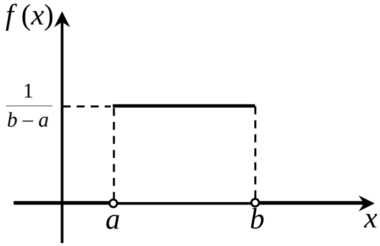


Рисунок 2.14 – График функции плотности равномерно распределённой случайной величины

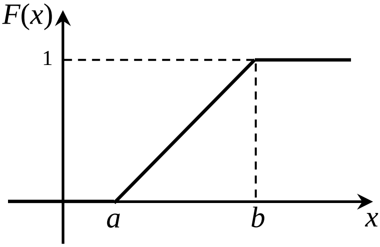


Рисунок 2.15 – График функции распределения равномерно распределённой случайной величины

Случайными величинами, имеющими равномерный закон распределения, являются, например, время ожидания пассажиром транспорта, идущего с постоянным интервалом, величина погрешности при округлении данных.

Пример 2.9. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $\xi \sim R(a;b)$.

Решение. Согласно (2.8) математическое ожидание непрерывной случайной величины

$$M[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} x\cdot 0dx+\int_{a}^{b}\frac{xdx}{b-a}+\int_{b}^{+\infty} x\cdot 0dx=\left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b=$$

$$=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}.$$

Используя формулы (2.15) и (2.16), вычислим дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$D[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx-\left(M[\xi]\right)^2=\int_{-\infty}^{a} x^2\cdot 0dx+\int_{a}^{b}\frac{x^2dx}{b-a}+\int_{b}^{+\infty} x^2\cdot 0dx-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\int_{a}^{b}\frac{x^2dx}{b-a}-\frac{(a+b)^2}{4}=\left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D[\xi]} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Основные числовые характеристики случайной величины, распределённой по равномерному закону,

$$M[\xi] = \frac{a+b}{2},\ D[\xi] = \frac{(b-a)^2}{12},$$
$$\sigma[\xi] = \frac{b-a}{2\sqrt{3}},\ \ Med[\xi] = \frac{a+b}{2}, \tag{2.21}$$
$$A[\xi] = 0,\ \ E[\xi] = -1{,}2,$$
$$Mod[\xi] \in [a;\ b].$$

Модой случайной величины, распределённой по равномерному закону, является любое число, принадлежащее отрезку $[a;\ b]$.

Пример 2.10. Поезда минского метрополитена идут с интервалом в две минуты. Пассажир подходит к перрону в произвольный момент времени. Определить вероятность того, что время ожидания не будет превышать 30 с. Найти среднее время ожидания пассажиром поезда.

Решение. Рассмотрим непрерывную случайную величину ξ – время ожидания пассажиром поезда. Поскольку поезда приходят через одинаковый интервал времени, а пассажир подходит к перрону в произвольный момент времени (мы предполагаем, что пассажир не знает расписания движения поездов), то время ожидания пассажиром поезда равновозможно в интервале [0; 2], т. е. $\xi \sim R(0;\ 2)$. Функция плотности случайной величины ξ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [0;\ 2], \\ 0, & x \notin [0;\ 2]. \end{cases}$$

Рассмотрим событие A = {пассажир будет ожидать поезд не более 30 с}. Переведя секунды в минуты, имеем

$$P(A) = P\{0 \le \xi \le 0{,}5\} = \int_0^{0{,}5} f(x)dx = \int_0^{0{,}5} \frac{1}{2}dx = \frac{x}{2}\bigg|_0^{0{,}5} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25.$$

Вычислим среднее время ожидания по формуле (2.21):

$$M[\xi] = \frac{0+2}{2} = 1 \text{ [минута]}.$$

2.3.5 Показательный (экспоненциальный) закон распределения

Случайная величина ξ имеет **показательный (экспоненциальный) закон распределения** с параметром λ, $\lambda > 0$, если её функция плотности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0), \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \in [0; +\infty). \end{cases}$$

Обозначается $\xi \sim E(\lambda)$.

Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0), \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \in [0; +\infty). \end{cases}$$

На рисунках 2.16, 2.17 приведены графики функции плотности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ показательно распределённой случайной величины.

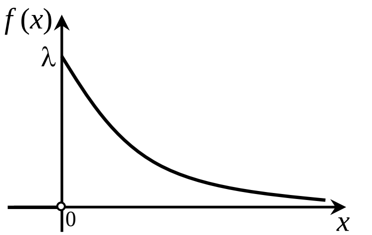


Рисунок 2.16 – График функции плотности показательно распределённой случайной величины

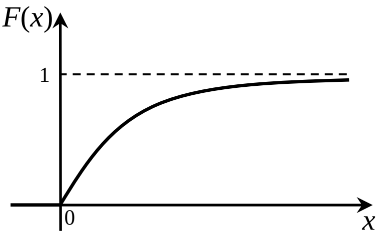


Рисунок 2.17 – График функции распределения показательно распределённой случайной величины

Случайная величина, подчинённая показательному закону распределения, может принимать только неотрицательные значения.

Случайными величинами, имеющими показательный закон распределения, являются, например, продолжительность разговора по мобильному телефону, время безотказной работы прибора, интервал времени между двумя соседними событиями простейшего потока.

Основные числовые характеристики случайной величины, распределённой по показательному закону,

$$M[\xi]=\frac{1}{\lambda},\ D[\xi]=\frac{1}{\lambda^2},$$

$$\sigma[\xi]=\frac{1}{\lambda},\ \ Mod[\xi]=0, \qquad (2.22)$$

$$Med[\xi]=\frac{\ln 2}{\lambda},\ \ A[\xi]=2,\ E[\xi]=6,\ \ V[\xi]=1.$$

Пример 2.11. В результате статистических исследований выяснилось, что среднее время безотказной работы некоторого прибора равно 10^4 часов. Предполагая, что время безотказной работы подчинено показательному закону распределения, найти вероятность того, что прибор проработает безотказно в течение месяца (30 дней = 720 часов).

Решение. Рассмотрим случайную величину ξ – время безотказной работы прибора. По условию ξ имеет показательный закон распределения и $M[\xi]$ = 10^4 [часов]. Параметр λ найдем из соотношения

$$M[\xi]=\frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, $\lambda=\dfrac{1}{M[\xi]}=\dfrac{1}{10^4}=10^{-4}.$

Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty;\,0);\\ 1-e^{-10^{-4}x}, & x\in[0;\,+\infty).\end{cases}$$

Согласно свойству 5 функции распределения имеем

$$P\{\xi\geq 720\}=1-P\{0\leq\xi<720\}=1-\big(F(720)-F(0)\big)=$$

$$=1-\left(1-e^{-0{,}0001\cdot 720}-1+e^{-0{,}0001\cdot 0}\right)=1-\left(1-e^{-0{,}0001\cdot 720}\right)\approx 0{,}93.$$

Лемма об «отсутствии памяти» у показательного распределения. *Если случайная величина* ξ *имеет показательное распределение, то для любых* $t>0$ *и* $t_0 \geq 0$

$$P\{\xi < t+t_0 \mid \xi \geq t_0\} = P\{\xi < t\}.$$

Действительно, по определению условной вероятности имеем

$$P\{\xi < t+t_0 \mid \xi \geq t_0\} = \frac{P\{t_0 \leq \xi < t+t_0\}}{P\{\xi \geq t_0\}} = \frac{F(t+t_0)-F(t_0)}{1-F(t_0)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda t_0} - e^{-\lambda(t+t_0)}}{e^{-\lambda t_0}} = 1-e^{-\lambda t} = F(t) = P\{\xi < t\}.$$

Смысл данной леммы заключается в следующем. Пусть время безотказной работы некоторого прибора описывается случайной величиной ξ, которая подчиняется показательному закону распределения. Предположим, что в момент времени t_0 прибор ещё не вышел из строя, тогда остаточное время безотказной работы прибора имеет тот же закон распределения, что и полное время безотказной работы прибора. Иными словами, показательное распределение обладает свойством «отсутствия памяти», т. е. прибор «не помнит» сколько он уже проработал безотказно.

Пример 2.12. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что прибор проработает безотказно в течение месяца (720 часов), если он уже два месяца (1440 часов) работает безотказно.

Решение. Нам нужно найти следующую условную вероятность:

$$P\{\xi < 720+1440 \mid \xi \geq 1440\}.$$

Используя свойство «отсутствия памяти» у показательного распределения, имеем

$$P\{\xi < 720+1440 \mid \xi \geq 1440\} = P\{\xi < 720\} \approx 0{,}93.$$

Таким образом, вероятность того, что прибор проработает месяц, не зависит от того, сколько он уже проработал. В условиях данной задачи эта вероятность приблизительно равна 0,93.

2.3.6 Нормальный закон распределения

Случайная величина ξ имеет **нормальный закон распределения** с параметрами a и σ^2, $\sigma > 0$, если её функция плотности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \; x \in \boldsymbol{R}.$$

Обозначается $\xi \sim N(a; \sigma^2)$.

Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt, \; x \in \boldsymbol{R}.$$

На рисунках 2.18, 2.19 приведены графики функции плотности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ случайной величины, имеющей нормальный закон распределения.

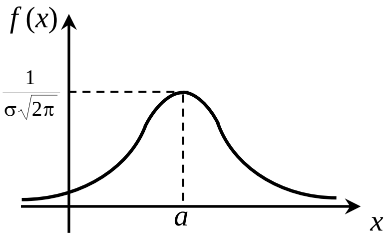


Рисунок 2.18 – График функции плотности нормально распределённой случайной величины

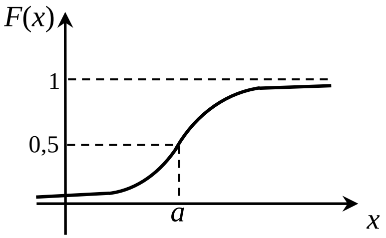


Рисунок 2.19 – График функции распределения нормально распределённой случайной величины

Нормальный закон распределения занимает исключительно важное место в теории вероятностей. Это связано, прежде всего, с тем, что нормальный закон распределения наиболее часто используется на практике. Кроме того, этот закон является предельным законом для некоторых других законов распределения, т. е. некоторые другие распределения можно аппроксимировать с помощью нормального (в частности, биномиальный закон распределения). Доказано, что сумма большого числа случайных величин, имеющих различные законы распределения, подчиняется нормальному закону (с некоторыми нежёсткими ограничениями). Случайными величинами, распределёнными по нормальному закону, являются отклонения реальных значений параметров изготовленного изделия от номинальных, ошибки измерения параметров изделия с помощью измерительных приборов.

Основные числовые характеристики случайной величины, распределённой по нормальному закону,

$$\begin{gathered} M[\xi] = a,\ D[\xi] = \sigma^2,\ \sigma[\xi] = \sigma, \\ Mod[\xi] = a,\ \ Med[\xi] = a, \\ A[\xi] = 0,\ \ E[\xi] = 0. \end{gathered} \tag{2.23}$$

Случайная величина ξ, распределённая по нормальному закону с параметрами $a = 0$ и $\sigma^2 = 1$ ($\xi \sim N(0;1)$), называется случайной величиной, подчинённой **стандартному нормальному распределению**. Функция распределения такой случайной величины имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Вероятность попадания значений случайной величины в отрезок [α; β]**.** Определим вероятность того, что нормально распределённая случайная величина ξ примет значение из промежутка [α; β]. Согласно свойству 5 функции распределения

$$P\{\alpha \le \xi \le \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{t-a}{\sigma} = u \\ dt = \sigma du \end{bmatrix} = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-\frac{u^2}{2}}du+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{u^2}{2}}du-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-\frac{u^2}{2}}du-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=$$

$$=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа.

Таким образом,

$$P\{\alpha\le\xi\le\beta\}=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (2.24)$$

Пример 2.13. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами a и σ^2. Какова вероятность того, что случайная величина примет значение, удалённое от a не более чем на 3σ?

Решение. Для определения искомой вероятности воспользуемся равенством (2.24). Значения функции Лапласа определим по таблице.

$$P\{a-3\sigma\le\xi\le a+3\sigma\}=\Phi\left(\frac{a+3\sigma-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-3\sigma-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi(3)-\Phi(-3)=2\Phi(3)\approx 0,997.$$

Таким образом, вероятность того, что нормально распределённая случайная величина примет значение, отстоящее от своего математического ожидания более чем на три средних квадратических отклонения, примерно равна 0,003. Иными словами, это событие происходит в среднем три раза из тысячи.

При решении практических задач часто считают: вероятностью того, что нормально распределённая случайная величина примет значение больше, чем $a+3\sigma$, или меньше, чем $a-3\sigma$, можно пренебречь. Это правило называют правилом «трёх сигм».

Пример 2.14. Скорость движения пассажирского лифта – нормально распределённая случайная величина с математическим ожиданием 0,72 м/с и средним квадратическим отклонением 0,02 м/с. Определить вероятность того, что скорость движения некоторого пассажирского лифта будет не менее 0,72 м/с и не более 0,75 м/с.

Решение. Рассмотрим случайную величину ξ – скорость движения пассажирского лифта. По условию $\xi \sim N(0,72;\, 0,0004)$. Функция плотности случайной величины ξ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{0,02\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-0,72)^2}{0,0008}}.$$

Для определения вероятности того, что случайная величина ξ примет значение из промежутка $[0,72;\, 0,75]$ воспользуемся равенством (2.24):

$$P\{0,75 \le \xi < +\infty\} = \Phi\left(\frac{0,75-0,72}{0,02}\right) - \Phi\left(\frac{0,72-0,72}{0,02}\right) =$$

$$= \Phi(1,5) - \Phi(0) \approx 0,4332 - 0 = 0,4332.$$

3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

3.1 Предмет и задачи математической статистики. Законы распределения случайных величин, использующиеся в математической статистике

Математическая статистика – система основанных на теоретико-вероятностных моделях понятий, приемов и математических методов, предназначенных для сбора, систематизации, интерпретации и обработки статистических данных с целью получения научных и практических выводов. Математическая статистика опирается на теорию вероятностей и в свою очередь служит основой для разработки методов обработки и анализа статистических результатов.

Круг задач, решаемых математической статистикой, очень широк. В настоящее время практически не существует областей науки, техники и естествознания, где в той или иной мере не применялись бы вероятностно-статистические методы.

3.1.1 Распределение χ^2

Рассмотрим n независимых стандартизованных нормально распределенных случайных величин ξ_1, ξ_2, …, ξ_n (случайная величина ξ называется *стандартизованной*, если $M[\xi]=0,\ \sigma[\xi]=1$). Сумма квадратов этих переменных $\chi^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2$ называется **случайной величиной, распределенной по закону χ^2** с $\nu=n$ степенями свободы.

Распределение χ^2 зависит только от одного параметра ν – числа степеней свободы. На рисунке 3.1, *а* приведены графики функции плотности распределения χ^2 в зависимости от числа степеней свободы ν. Кривая распределения χ^2 имеет положительную асимметрию. С увеличением числа степеней свободы она становится всё более симметричной и при $\nu>30$ это распределение практически совпадает с нормальным.

Известны значения числовых характеристик распределения χ^2:

$$M[\chi^2] = \nu;\ D[\chi^2] = 2\nu^2;\ \sigma[\chi^2] = \sqrt{2}\nu.$$

На практике часто используются квантили $\chi^2_{\alpha,\nu}$ распределения χ^2. **Квантилем** $\chi^2_{\alpha,\nu}$, отвечающим заданному уровню вероятности α, называется такое значение $\chi^2 = \chi^2_{\alpha,\nu}$, при котором

$$P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha,\nu}) = \int\limits_{\chi^2_{\alpha,\nu}}^{\infty} f(\chi^2)d\chi^2 = \alpha.$$

С геометрической точки зрения нахождение квантиля $\chi^2_{\alpha,\nu}$ заключается в выборе такого значения $\chi^2 = \chi^2_{\alpha,\nu}$, при котором площадь заштрихованной криволинейной трапеции (рисунок 3.1, *б*) равна α.

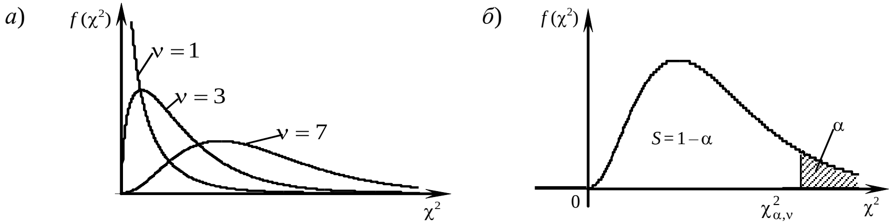


Рисунок 3.1 – Распределение χ^2:
а – зависимость $f(\chi^2)$ от значения параметра ν;
б – геометрическая интерпретация квантиля $\chi^2_{\alpha,\nu}$

3.1.2 *t*-распределение Стьюдента

Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – независимые случайные величины, имеющие стандартизованное нормальное распределение. Тогда случайная величина

$$t = \frac{\xi}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2}}$$

имеет распределение, которое называется ***t*-распределением**, или **распределением Стьюдента** с $\nu = n$ степенями свободы. *t*-распределение симметрично относительно оси ординат при всех значениях ν, и при неограниченном увеличении числа степеней свободы (практически уже при $\nu > 30$) приближается к стандартизованному нормальному распределению (имеющему плотность распределения вероятностей $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$).

На рисунке 3.2 изображены кривые распределения Стьюдента для нескольких значений параметра ν и кривая стандартизованного нормального распределения.

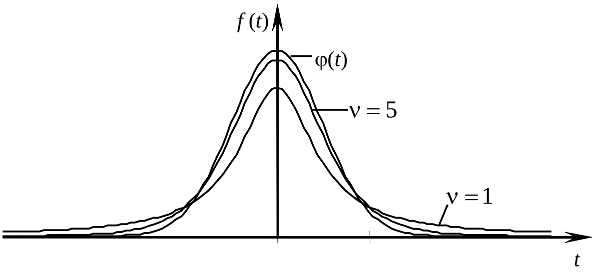


Рисунок 3.2 – Кривые распределения Стьюдента

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины t соответственно:

$$M[t] = 0;\ \ D[t] = \frac{\nu}{\nu - 2};\ \ \sigma[t] = \sqrt{\frac{\nu}{\nu - 2}}.$$

В статистических таблицах приведены значения квантилей распределения Стьюдента $t_{\alpha,\nu}$ в зависимости от числа степеней свободы ν и заданного уровня значимости α, определяемые условием

$$P(t > t_{\alpha,\nu}) = \int_{t_{\alpha,\nu}}^{\infty} f(t)dt = \alpha.$$

На рисунке 3.3, *а* штриховкой отмечена область, площадь которой равна α.

При построении доверительных интервалов для неизвестных параметров распределения часто возникает задача определения таких значений t_1 и t_2, что $P(t_1 < t < t_2) = 1 - \alpha$. Обычно значения t_1 и t_2 выбираются симметричными относительно оси ординат, то есть

$$t_1 = -t_{\alpha/2,\nu}, \qquad t_2 = t_{\alpha/2,\nu}.$$

С геометрической точки зрения это означает, что суммарная площадь заштрихованных на рисунке 3.3, *б* криволинейных трапеций равна α.

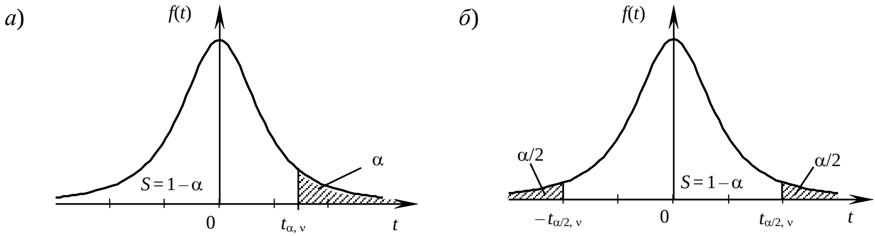


Рисунок 3.3 – Геометрическая интерпретация квантилей распределения Стьюдента

3.1.3 Распределение Фишера

Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ независимы и имеют стандартизованное нормальное распределение.

Тогда случайная величина

$$F = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\eta_j^2}$$

имеет **распределение Фишера**, которое зависит от двух параметров: $\nu_1 = m$ и $\nu_2 = n$, называемых числами степеней свободы.

Кривая F-распределения имеет положительную асимметрию, при больших значениях ν_1 и ν_2 это распределение медленно приближается к нормальному.

Значения квантилей F-распределения F_{α,ν_1,ν_2} найдены путем решения уравнения

$$P(F > F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}) = \int\limits_{F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}}^{\infty} f(F)dF = \alpha.$$

Графики функции плотности F-распределения при различных значениях параметров ν_1 и ν_2 изображены на рисунке 3.4, *а*. На рисунке 3.4, *б* штриховкой выделена фигура, площадь которой равна α.

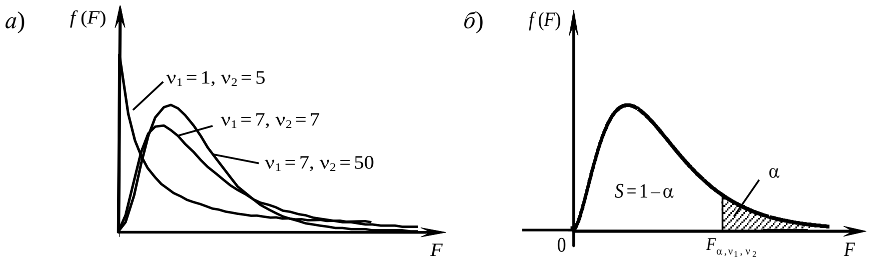


Рисунок 3.4 – Распределение Фишера:
а – зависимость *f(F)* от значений параметров ν_1 и ν_2;
б – геометрическая интерпретация квантилей распределения

3.2 Основные понятия математической статистики

При проведении статистического исследования множество всех объектов, подвергающихся обследованию, называется **генеральной совокупностью**. Иначе говоря, генеральную совокупность можно рассматривать как множество всех мыслимых наблюдений, которые могли бы быть зафиксированы при воспроизведении изучаемого эксперимента.

Очевидно, что наиболее полное представление об изучаемом явлении мы получим в том случае, если сможем исследовать всю генеральную совокупность.

В качестве примеров полного исследования генеральной совокупности можно привести перепись населения, проведение референдумов и выборов, контроль качества всех выпускаемых предприятием изделий и др.

Несмотря на привлекательность полного исследования с точки зрения точности получаемых результатов, на практике оно используется сравнительно редко в силу его дороговизны, ресурсоемкости, длительности проведения, а порой и невозможности его осуществления.

Поэтому при проведении практических исследований широко используется *выборочный метод*, состоящий в том, что из генеральной совокупности определенным образом извлекается часть объектов, называемая **выборкой**, которая подвергается детальному изучению (число элементов выборки обозначается символом n и называется ее *объемом*).

Используя известные теоретико-вероятностные соотношения, по результатам выборочного обследования формулируют выводы о свойствах всей генеральной совокупности. Можно сказать, что основное назначение математико-статистических методов именно в том и состоит, чтобы с их помощью на основании ограниченного набора выборочных данных получить как можно более полное представление о свойствах изучаемой случайной величины.

Приведем *математическую интерпретацию выборочного метода*. Для получения выборки значений исследуемой случайной величины вероятностный эксперимент воспроизводится в одних и тех же условиях независимым образом n раз.

Результат каждого испытания может быть описан с помощью случайной величины ξ_i, $i = 1,\ 2, \ldots,\ n$, причем закон распределения каждой из этих величин совпадает с законом распределения вероятностей исследуемой случайной величины ξ. Таким образом, выборка представляет собой n-мерную случайную величину $(\xi_1,\ \xi_2, \ldots,\ \xi_n)$, компоненты которой независимы и одинаково распределены. Конкретные экспериментально полученные реализации выборки $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ обозначаются $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Для того чтобы по имеющимся опытным данным можно было сделать обоснованный вывод о свойствах всей генеральной совокупности, исследуемая выборка должна быть **репрезентативной (представительной)**, то есть хорошо отображать свойства изучаемой генеральной совокупности.

Один из разделов математической статистики посвящен теории получения репрезентативных выборок. В частности, доказано, что для получения представительной выборки, все элементы должны извлекаться *независимым образом* и с *сохранением принципа случайности*, то есть каждый из элементов генеральной совокупности должен иметь равные с другими шансы быть представленным в выборке. Кроме того, большое значение имеет объем исследуемых данных. Увеличение объема выборки позволяет повысить точность получаемых результатов. Разработаны специальные методы, позволяющие определить объем выборочных данных, необходимый для достижения заданной точности результатов исследования.

В дальнейшем всегда будем предполагать, что все полученные для исследования выборки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ являются репрезентативными и представляют собой экспериментальную реализацию многомерной случайной величины $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, компоненты которой независимы и закон распределения каждой из величин ξ_i совпадает с законом распределения изучаемой случайной величины ξ.

3.2.1 Статистический закон распределения случайной величины

Пусть для исследования свойств случайной величины ξ получена выборка объема n: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Последовательность выборочных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, записанных в порядке их появления, представляет собой исходный статистический материал и называется **простым статистическим рядом**.

Для компактного, удобного и наглядного представления имеющихся статистических данных необходимо произвести их первичную обработку. Естественным первым шагом такой обработки является упорядочение полученных значений. Последовательность элементов выборки, записанных в порядке возрастания (неубывания) их значений, называется **вариационным рядом**, а каждый из элементов вариационного ряда называется **вариантой**.

Если изучается *дискретная случайная величина*, число различных наблюдаемых значений которой не велико, то для каждого из отличающихся друг от друга значений (обозначим их $\tilde{x}_i$) подсчитываются частоты m_i и относительные частоты (частости) m_i / n появления этих значений в выборке*.

Результаты вычислений заносятся в таблицу 3.1, которая называется **сгруппированным статистическим рядом**.

---

* **Частотой** m_i значения $\tilde{x}_i$ называется число повторений этого значения в выборке, а **относительной частотой (частостью)** – отношение частоты к объёму выборки m_i / n.

Таблица 3.1 – **Сгруппированный статистический ряд**

Наблюдаемые значения $\tilde{x}_i$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	…	$\tilde{x}_k$	$k \le n$
Частоты m_i	m_1	m_2	…	m_k	$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$
Относительные частоты m_i / n	m_1 / n	m_2 / n	…	m_k / n	$\sum_{i=1}^{k} m_i / n = 1$

Для графического изображения сгруппированного статистического ряда обычно используется *столбцовая диаграмма*. Этот график представляет собой последовательность вертикальных отрезков длины m_i / n, отложенных от оси абсцисс в точках с координатами $\tilde{x}_i$.

Если изучается *непрерывная случайная величина* (в этом случае все выборочные значения x_i могут оказаться различными), либо дискретная случайная величина, число отличающихся друг от друга значений которой достаточно велико, то диапазон всех наблюдаемых значений x_i разбивается на k разрядов длины h и подсчитывается число вариант, попавших в каждый из разрядов.

Результаты расчетов заносятся в таблицу 3.2, которая называется **интервальным статистическим рядом**.

Таблица 3.2 – **Интервальный статистический ряд**

Интервалы выборочных значений $[C_i; C_{i+1})$	$[C_1; C_2)$	$[C_2; C_3)$	…	$[C_k; C_{k+1})$	
Среднее значение интервала $\tilde{x}_i$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	…	$\tilde{x}_k$	
Частоты m_i	m_1	m_2	…	m_k	$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$
Относительные частоты m_i / n	m_1 / n	m_2 / n	…	m_k / n	$\sum_{i=1}^{k} m_i / n = 1$

Для определения границ частичных интервалов $(C_i; C_{i+1})$ можно воспользоваться следующей методикой.

1. Вычислить размах варьирования выборочных значений:

$$R = x_{\max} - x_{\min},$$

где $x_{\min}$ и $x_{\max}$ – соответственно минимальное и максимальное значения выборки.

2. Определить длину шага разбиения $h = R/k$, где k – число разрядов разбиения (принято использовать значения $5 \le k \le 15$). Для примерной ориентации в выборе значения k можно воспользоваться формулой Стерджесса $k \approx 1 + 3{,}322 \lg n$, где n – объем выборки.

3. Определить границы интервалов разбиения: $C_1 = x_{\min} - h/2$, $C_2 = C_1 + h$, $C_3 = C_2 + h$, …, $C_{k+1} = C_k + h$. Процесс разбиения продолжается до тех пор, пока очередное значение C_{k+1} не превысит максимальный элемент выборки.

Среднее значение $\tilde{x}_i$ i-го частичного интервала можно определить как среднее арифметическое границ этого интервала:

$$\tilde{x}_i = (C_i + C_{i+1})/2, \; i = 1, 2, \ldots, k.$$

Выборочные значения, попавшие на границы интервалов разбиения, могут быть приписаны к какому-то одному из этих интервалов (например, к правому, как это сделано в таблице 3.2), либо частоты этих значений могут быть разделены поровну между двумя соседними интервалами.

Нетрудно заметить, что сумма всех частот m_i равна объему выборки n, а сумма частостей, согласно определению, равна единице:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n, \; \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{n} = 1.$$

Для графического представления интервального статистического ряда используется *гистограмма относительных частот*. При построении гистограммы по оси абсцисс необходимо отложить границы интервалов выборочных значений $(C_i; C_{i+1})$ и на каждом из этих интервалов, как на основании, построить прямоугольники, площади которых равны m_i/n. Следовательно, высоты этих прямоугольников должны быть равны $m_i/(nh)$.

3.2.2 Эмпирическая функция распределения

Напомним, что универсальным способом задания закона распределения дискретных и непрерывных случайных величин является использование *функции распределения* $F(x)$, определяющей для каждого значения $x \in R$ вероятность события $\xi < x$.

Эмпирической функцией распределения $\hat{F}(x)$ * называется функция, которая каждому значению $x \in R$ ставит в соответствие относительную частоту события $\xi < x$,

$$\hat{F}(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n – объем исследуемой выборки; n_x – число элементов выборки, меньших данного фиксированного значения x.

Для вычисления эмпирической функции распределения по данным сгруппированного или интервального статистического рядов можно использовать соотношение

$$\hat{F}(x) = \sum_{\tilde{x}_i < x} \frac{m_i}{n}. \qquad (3.1)$$

Из определения эмпирической функции распределения следует, что она обладает всеми свойствами «теоретической» функции распределения $F(x)$.

1. Все возможные значения эмпирической функции распределения принадлежат отрезку [0; 1]: $0 \le \hat{F}(x) \le 1$.

2. $\hat{F}(x)$ – неубывающая функция своего аргумента, то есть $\hat{F}(x_1) \le \hat{F}(x_2)$ для любых значений x_1 и x_2, таких, что $x_1 < x_2$.

3. Если все выборочные значения исследуемой случайной величины принадлежат отрезку $[a; b]$, то при $x \le a$ $\hat{F}(x) = 0$, при $x > b$ $\hat{F}(x) = 1$.

Важнейшее свойство эмпирической функции распределения состоит в том, что при увеличении объема выборки n значение этой функции в каждой точке приближается к значению функции распределения $F(x)$ в той же точке. То есть эмпирическая функция распределения является экспериментальным аналогом (оценкой) неизвестной исследователю функции распределения $F(x)$.

Рассмотрим примеры построения статистического закона распределения для дискретной и непрерывной случайных величин.

---

* В математической статистике для обозначения выборочных аналогов рассматриваемых величин часто используются такие же обозначения, как и в теории вероятностей, но для указания их экспериментального «происхождения» они снабжаются значком «^» сверху.

Пример 3.1. При исследовании характеристик работы железнодорожной станции получена выборка объёма $n = 100$ значений случайной величины ξ, характеризующей число составов, прибывающих на эту станцию в течение часа.

Выборочные данные:

1, 1, 5, 1, 3, 3, 1, 5, 2, 6, 1, 6, 5, 2, 4, 3, 4, 2, 3, 2, 3, 3, 8, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 5, 0, 3, 1, 7, 3, 2, 3, 3, 5, 1, 3, 1, 1, 4, 5, 1, 7, 1, 2, 1, 2, 3, 5, 2, 4, 2, 1, 1, 3, 2, 2, 3, 5, 1, 5, 4, 3, 1, 5, 3, 3, 3, 5, 3, 3, 1, 4, 4, 0, 2, 2, 2, 0, 1, 1, 6, 5, 4, 3, 3, 4, 2, 1, 1, 0, 0, 2, 5, 8, 2, 1.

Требуется на основании имеющихся опытных данных исследовать свойства случайной величины ξ.

Решение. Построим вариационный ряд, соответствующий данной выборке:

0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8.

Сгруппированный статистический ряд имеет следующий вид:

$\tilde{x}_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
m_i	4	24	19	23	10	13	3	2	2
m_i / n	0,04	0,24	0,19	0,23	0,1	0,13	0,03	0,02	0,02

Столбцовая диаграмма, соответствующая этому ряду, приведена на рисунке 3.6.

Построим эмпирическую функцию распределения изучаемой дискретной случайной величины, используя соотношение (3.1).

При $x \le 0$ $\hat{F}(x) = 0$, поскольку нет выборочных значений случайной величины ξ, меньших рассматриваемых значений x, а значит, нет ни одного слагаемого в сумме (3.1).

При $0 < x \le 1$ меньше рассматриваемых значений x только одно значение: $\xi = 0$. По данным сгруппированного статистического ряда, относительная частота значения $\xi = 0$ равна 0,04. Следовательно, $\hat{F}(x) = 0,04$.

При $1 < x \le 2$ меньше рассматриваемых значений аргумента x выборочные значения $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Суммируя относительные частоты этих значений, получим: $\hat{F}(x) = 0,04 + 0,24 = 0,28$ и т. д.:

при $2 < x \le 3$ $\hat{F}(x) = 0,04 + 0,24 + 0,19 = 0,47$;

при $3 < x \le 4$ $\hat{F}(x) = 0,04 + 0,24 + 0,19 + 0,23 = 0,7$;

при $4 < x \le 5$ $\hat{F}(x) = 0,04 + 0,24 + 0,19 + 0,23 + 0,1 = 0,8$;

при $5 < x \le 6$ $\hat{F}(x) = 0,04 + 0,24 + 0,19 + 0,23 + 0,1 + 0,13 = 0,93;$
при $6 < x \le 7$
$\hat{F}(x) = 0,04 + 0,24 + 0,19 + 0,23 + 0,1 + 0,13 + 0,03 = 0,96;$
при $7 < x \le 8$
$\hat{F}(x) = 0,04 + 0,24 + 0,19 + 0,23 + 0,1 + 0,13 + 0,03 + 0,02 = 0,98;$
при $x > 8$
$\hat{F}(x) = 0,04 + 0,24 + 0,19 + 0,23 + 0,1 + 0,13 + 0,03 + 0,02 + 0,02 = 1.$
Таким образом, имеем

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0,04, & 0 < x \le 1; \\ 0,28, & 1 < x \le 2; \\ 0,47, & 2 < x \le 3; \\ 0,7, & 3 < x \le 4; \\ 0,8, & 4 < x \le 5; \\ 0,93, & 5 < x \le 6; \\ 0,96, & 6 < x \le 7; \\ 0,98, & 7 < x \le 8; \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

График функции $\hat{F}(x)$ приведён на рисунке 3.5.

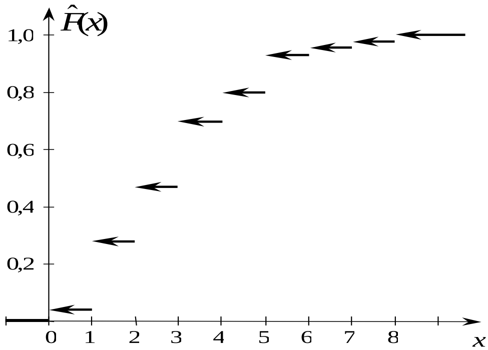


Рисунок 3.5 — График эмпирической функции распределения (пример 3.1)

Пример 3.2. При исследовании параметров работы сортировочной станции произведены измерения случайной величины ξ, характеризующей промежуток времени между моментами прибытия грузовых поездов на данную станцию [в минутах]:

642,23	80,36	571,72	368,41	568,65	300,55	573,41	8,17	405,89	87,54
251,84	41,71	440,87	20,48	308,45	135,90	143,06	467,31	49,82	241,62
598,16	7,91	98,70	92,84	5,49	285,89	349,71	91,76	158,75	124,04
53,40	155,96	12,06	22,77	369,03	50,14	61,02	42,44	184,26	183,59
84,38	402,74	10,39	223,17	130,14	57,61	99,65	257,59	505,05	282,39.

Требуется на основании полученных экспериментальных данных изучить свойства данной случайной величины.

Решение. Построим вариационный ряд:

5,49	7,91	8,17	10,39	12,06	20,48	22,77	41,71	42,44	49,82
50,14	53,40	57,61	61,02	80,36	84,38	87,54	91,76	92,84	98,70
99,65	124,04	130,14	135,90	143,06	155,96	158,75	183,59	184,26	223,17
241,62	251,84	257,59	282,39	285,89	300,55	308,45	349,71	368,41	369,03
402,74	405,89	440,87	467,31	505,05	568,65	571,72	573,41	598,16	642,23

Для записи интервального статистического ряда вычислим границы интервалов разбиения: $h = \dfrac{R}{n} = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,322\lg n} = \dfrac{642,23 - 5,49}{1 + 3,322\lg 50} \approx 95,84;$

$$C_1 = x_{\min} - h/2 = 5,49 - 95,84/2 = -42,43;$$
$$C_2 = C_1 + h = -42,43 + 95,84 = 53,41;$$
$$C_3 = C_2 + h = 53,41 + 95,84 = 149,25;$$
$$C_4 = C_3 + h = 149,25 + 95,84 = 245,09;$$
$$C_5 = C_4 + h = 45,09 + 95,84 = 340,93;$$
$$C_6 = C_5 + h = 340,93 + 95,84 = 436,77;$$
$$C_7 = C_6 + h = 436,77 + 95,84 = 532,61;$$
$$C_8 = C_7 + h = 532,61 + 95,84 = 628,45;$$
$$C_9 = C_8 + h = 628,45 + 95,84 = 724,29.$$

Интервальный статистический ряд имеет следующий вид:

$[C_i, C_{i+1})$	[–42,43; 53,41)	[53,41; 149,25)	[149,25; 245,09)	[245,09; 340,93)	[340,93; 436,77)	[436,77; 532,61)	[532,61; 628,45)	[628,45; 724,29)
$\tilde{x}_i$	5,49	101,33	197,17	293,01	388,85	484,69	580,53	676,37
m_i	12	13	6	6	5	3	4	1
m_i / n	0,24	0,26	0,12	0,12	0,1	0,06	0,08	0,02

Для контроля убедимся, что $\sum_{i=1}^{8} m_i = n = 50$, $\sum_{i=1}^{8} m_i / n = 1$.

На рисунках 3.6 и 3.7 приведены примеры столбцовой диаграммы и гистограммы относительных частот, соответствующие этому интервальному статистическому ряду.

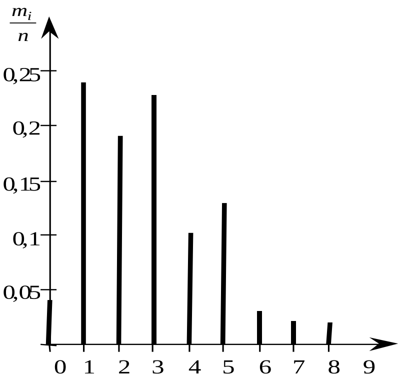


Рисунок 3.6 – Столбцовая диаграмма (пример 3.1)

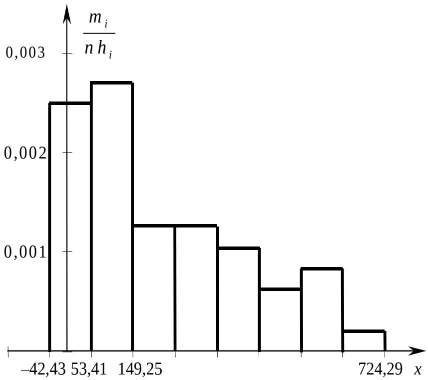


Рисунок 3.7 – Гистограмма относительных частот (пример 3.2)

Для приближённого построения эмпирической функции распределения воспользуемся соотношением $\hat{F}(x) = \sum_{\tilde{x}_i < x} \frac{m_i}{n}$ *,

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 5,49; \\ 0{,}24, & 5,49 < x \le 101,33; \\ 0{,}5, & 101,33 < x \le 197,17; \\ 0{,}62, & 197,17 < x \le 293,01; \\ 0{,}74, & 293,01 < x \le 388,85; \\ 0{,}84, & 388,85 < x \le 484,69; \\ 0{,}9, & 484,69 < x \le 580,53; \\ 0{,}98, & 31,257 < x \le 676,33; \\ 1 & x > 676,33. \end{cases}$$

---

* При использовании этой формулы принимаем допущение о том, что исследуемая случайная величина принимает только значения, соответствующие серединам интервалов [C_i; C_{i+1}) с частотами, равными m_i ($i = 1, 2, \dots, k$).

График вычисленной эмпирической функции распределения приведен на рисунке 3.8.

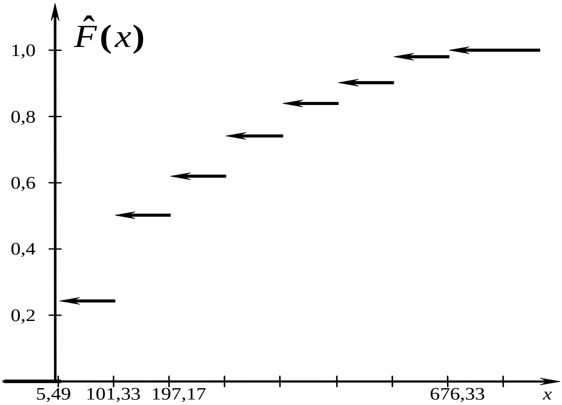


Рисунок 3.8 – Эмпирическая функция распределения (пример 3.2)

3.3 Статистическая оценка параметров распределения

Любая величина $\hat{\Theta}$, представляющая собой функцию элементов выборки $\hat{\Theta} = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, называется ***выборочной статистикой*** или просто ***статистикой***. Статистика $\hat{\Theta}$, используемая в качестве приближённого значения неизвестного параметра Θ, называется ***статистической оценкой параметра*** Θ.

Различают два вида статистических оценок: точечные и интервальные.

Точечные оценки позволяют определить точку $\hat{\Theta}$, являющуюся некоторым приближением оцениваемого параметра Θ.

Интервальная оценка представляет собой интервал $(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2)$, который с заданной (как правило, близкой к единице) вероятностью накрывает неизвестное исследователю значение параметра Θ.

Познакомимся сначала с точечными оценками. Поскольку любая выборка является конечной и случайной, все выборочные функции $\hat{\Theta} = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ являются случайными величинами, то есть при переходе от одной выборки к другой вычисленные значения оценки $\hat{\Theta}$ будут несколько отличаться друг от друга. При этом желательно, чтобы получаемые значения $\hat{\Theta}$ располагались как можно ближе к оцениваемому значению Θ. Это достигается в тех случаях, когда статистическая оценка $\hat{\Theta} = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ обладает такими свойствами точечных оценок, как состоятельность, несмещённость и эффективность.

Статистическая оценка называется **состоятельной**, если ее вычисляемое по опытным данным значение при увеличении объема выборки сходится по вероятности к истинному значению оцениваемого параметра, то есть, для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\Theta - \hat{\Theta}| < \varepsilon) = 1$ (то есть при неограниченном увеличении объема выборки с вероятностью, равной 1, оценка $\hat{\Theta}$ отклонится от оцениваемого значения Θ не более, чем на малую величину ε).

Оценка называется **несмещенной** (или **оценкой без систематической ошибки**), если ее математическое ожидание совпадает со значением оцениваемого параметра: $M[\hat{\Theta}] = \Theta$.

Несмещенная оценка называется **эффективной**, если, по сравнению с другими оценками этого параметра, вычисляемыми на основании выборок одинакового объема *n*, данная оценка обладает наименьшей дисперсией.

3.3.1 Точечные оценки числовых характеристик

Приведём расчетные формулы для вычисления точечных оценок числовых характеристик и некоторые свойства этих оценок.

В качестве оценки математического ожидания используется среднее арифметическое $\bar{x}$ опытных значений. Эта статистика называется **выборочным средним**

$$\hat{M}[\xi] = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Доказано, что $\bar{x}$ является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания исследуемой случайной величины. Если случайная величина ξ распределена по нормальному закону, то $\bar{x}$

является и эффективной оценкой математического ожидания.

Для оценивания по выборочным данным моды распределения используется то значение *сгруппированного статистического ряда* $\hat{x}_{Mod}$, которому соответствует наибольшее значение частоты.

По *интервальному статистическому ряду* определяется модальный интервал, в который попало наибольшее число выборочных значений, и в качестве точечной оценки моды может использоваться среднее значение этого интервала.

Для определения выборочного значения медианы используется вариационный ряд. В качестве оценки медианы $\hat{x}_{Med}$ принимают средний (то есть $\frac{1}{2}(n+1)$-й) член этого ряда, если значение n – нечётно, и среднее арифметическое между двумя средними (то есть между $\frac{1}{2}n$-м и $\left(\frac{1}{2}n+1\right)$-м) членами этого ряда, если n – чётно.

В качестве оценки дисперсии и среднего квадратического отклонения принято использовать следующие статистики:

$$\hat{D}[\xi] = \overline{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2, \qquad \hat{\sigma}[\xi] = \overline{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.$$

Установлено, что эти статистики являются состоятельными и несмещенными оценками дисперсии и среднего квадратического отклонения соответственно.

В качестве оценок коэффициентов асимметрии и эксцесса используются следующие выборочные статистики:

$$\hat{A}[\xi] = \hat{\beta}_1 = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3}{\overline{s}^3}; \qquad \hat{E}x[\xi] = \hat{\beta}_2 = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4}{\overline{s}^4} - 3.$$

Пример 3.3. Вычислим оценки числовых характеристик случайной величины *X*, характеризующей число составов, прибывающих на сортировочную станцию в течение часа (см. пример 3.1).

Решение. Оценка математического ожидания

$$\hat{M}[\xi] = \sum_{i=1}^{100} x_i = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} \tilde{x}_i m_i =$$

$$= \frac{1}{100}(0\cdot 4 + 1\cdot 24 + 2\cdot 19 + 3\cdot 23 + 4\cdot 10 + 5\cdot 13 + 6\cdot 3 + 7\cdot 2 + 8\cdot 2) = 2,84 \text{ [состава].}$$

В качестве оценки моды данной случайной величины можно принять значение 1: $\hat{x}_{Mod} = 1$ [состав], так как этому значению соответствует наибольшее значение частоты.

Оценка дисперсии

$$\hat{D}[\xi] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{7}(x_i - \overline{x})^2 m_i = \frac{1}{99}((0-2,84)^2\cdot 4 + (1-2,84)^2\cdot 24 + (2-2,84)^2\cdot 19 +$$

$$+(3-2,84)^2\cdot 23 + (4-2,84)^2\cdot 10 + (5-2,84)^2\cdot 13 + (6-2,84)^2\cdot 3 + (7-2,84)^2\cdot 2 +$$

$$+(8-2,84)^2\cdot 2) = \frac{319{,}44}{99} = 3{,}226667 \text{ [составов}^2\text{].}$$

Оценка среднего квадратического отклонения

$$\hat{\sigma}[\xi] = \sqrt{\hat{D}[\xi]} = \sqrt{3{,}226667} = 1{,}796292 \text{ [состава].}$$

Пример 3.4. Вычислим оценки числовых характеристик случайной величины X, описывающей промежуток времени между моментами прибытия товарных составов на сортировочную станцию (см. пример 3.2).

Решение. Оценка математического ожидания

$$\hat{M}[\xi] = \overline{x} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} x_i = \frac{1}{50}(642,23 + 80,36 + \cdots + 283,39) = 214,17 \text{ [мин].}$$

В качестве оценки моды примем среднее значение модального интервала (53,41; 149,25): $\hat{x}_{Mod} = 101,33$ [мин].

Оценка медианы $\hat{x}_{Med} = \dfrac{x_{(25)} + x_{(26)}}{2} = \dfrac{143,06 + 155,96}{2} = 149,51$ [мин].

Оценка дисперсии $\hat{D}[\xi] = \dfrac{1}{49}\sum_{i=1}^{50}(x_i - \overline{x})^2 = 34606,7$ [мин^2].

Оценка среднего квадратического отклонения

$$\hat{\sigma}[\xi] = \sqrt{\hat{D}[\xi]} = 186,029 \text{ [мин].}$$

3.3.2 Интервальные оценки числовых характеристик

Заменяя при проведении статистического исследования неизвестное значение параметра Θ его точечной оценкой $\hat{\Theta}$, мы отдаем себе отчет в том, что при этом совершаем некоторую ошибку. Большое практическое значение имеет информация о величине этой ошибки. Другими словами, возникает вопрос об определении **точности** оценки $\hat{\Theta}$, то есть о таком значении ε, что $|\Theta - \hat{\Theta}| < \varepsilon$.

Поскольку в нашем распоряжении имеются лишь выборочные данные, то можно определить только вероятность $\boldsymbol{P}$ осуществления этого неравенства, которая называется **доверительной вероятностью**:

$$P\left(\left|\Theta - \hat{\Theta}\right| < \varepsilon\right) = \boldsymbol{P}. \tag{3.2}$$

Соотношение (3.2) может быть записано следующим образом:

$$P(\hat{\Theta}_1 < \Theta < \hat{\Theta}_2) = \boldsymbol{P}.$$

Это означает, что неизвестное значение оцениваемого параметра Θ с доверительной вероятностью $\boldsymbol{P}$ будет накрыто интервалом $(\hat{\Theta}_1; \hat{\Theta}_2)$, который называется **доверительным интервалом** (или **интервальной оценкой параметра Θ**).

Значение доверительной вероятности выбирается исходя из целей исследования и ответственности при принятии решения в конкретной задаче. Обычно доверительная вероятность $\boldsymbol{P}$ принимается равной 0,95, 0,99, реже – 0,999.

В литературе часто используется еще одно обозначение доверительной вероятности $\boldsymbol{P} = 1 - \alpha$, где α – некоторое малое число (например, $\alpha = 0{,}05$, или $\alpha = 0{,}01$), задающее вероятность того, что оцениваемый параметр окажется за пределами доверительного интервала. Это означает, что при извлечении большого числа выборок объема n из одной и той же генеральной совокупности только в $\alpha \cdot 100\,\%$ случаев построенный по выборочным данным доверительный интервал не будет накрывать значение оцениваемого параметра Θ.

Подчеркнем еще раз, что границы доверительного интервала являются случайными величинами (так как они определяются на основании выборочных данных). Именно поэтому мы можем говорить только о *вероятности* накрыть доверительным интервалом некоторую (неслучайную!) точку Θ. Ширина доверительного интервала существенно зависит от объема выборки n (уменьшается с ростом n) и от величины доверительной вероятности (увеличивается с приближением $\boldsymbol{P}$ к единице).

В общем случае задача построения доверительных интервалов является сложной математической задачей, допускающей сравнительно простое аналитическое решение лишь для некоторых частных случаев.

3.4 Статистическая проверка гипотез. Параметрические и непараметрические гипотезы. Проверка параметрических гипотез о математическом ожидании случайной величины, имеющей нормальное распределение

При проведении статистических исследований часто возникает необходимость проверки согласования с экспериментальными данными некоторых предположений о свойствах изучаемой случайной величины. Формулируемые предположения называются **гипотезами**, а методы, позволяющие решить поставленную задачу, составляют раздел математической статистики, который называется **теорией статистической проверки гипотез**.

Проверяемая гипотеза называется **основной** (или **нулевой**) и обозначается H_0. В случае отклонения гипотезы H_0 полагают, что справедлива некоторая **альтернативная** гипотеза, обозначаемая символом $H_а$ или H_1.

Принято различать параметрические и непараметрические гипотезы. **Непараметрические гипотезы** представляют собой утверждения о виде закона распределения исследуемой случайной величины. В **параметрических гипотезах** сформулированы утверждения о значениях параметров функции распределения известного вида.

Методика проверки согласования гипотез с опытными данными основана на использовании специальных выборочных статистик, называемых **статистическими критериями** (или просто **критериями**). Критерий конструируется таким образом, что позволяет оценить меру отклонения эмпирического распределения (то есть выборочных данных) от предполагаемого теоретического (то есть от проверяемой гипотезы). При этом множество возможных значений критерия разбивается на две непересекающиеся части: *критическую область* и *область допустимых значений*.

Критическая область определяется таким образом, что попадание значения критерия в эту область при справедливости проверяемой гипотезы является маловероятным событием (вероятность которого обозначается α), и полагают, что осуществление этого события вызвано ошибочностью выдвинутой гипотезы. Поэтому при попадании расчетного значения критерия в критическую область проверяемая гипотеза отвергается как не согласующаяся с опытными данными. Если значение критерия принадлежит области допустимых значений, то делают вывод об удовлетворительном согласовании выдвинутого предположения с выборочными данными и об отсутствии оснований для отклонения проверяемой гипотезы. Другими словами, в этом случае полагают, что наблюдаемое различие между эмпирическим и теоретическим распределениями может быть объяснено только случайным характером имеющихся выборочных данных.

Поскольку решение об отклонении или неотклонении проверяемой гипотезы принимается на основании выборочных данных, при этом всегда существует риск совершения ошибки. Допускаемые ошибки могут быть двух видов:

1) отклонение верной гипотезы H_0 (вероятность совершения этой ошибки обозначается α и называется *уровнем значимости критерия*);

2) принятие ложной гипотезы H_0 (вероятность этой ошибки обозначается β).

Схематически возможные ошибки и их вероятности удобно представить в виде следующей таблицы:

Справедливость гипотезы H_0	Принимаемое решение	
	Принять H_0	Отвергнуть H_0
H_0 верна	Верное решение с вероятностью $1 - \alpha$	Ошибочное решение с вероятностью α
H_0 не верна	Ошибочное решение с вероятностью β	Верное решение с вероятностью $1 - \beta$

Вопрос о том, какие значения вероятностей α и β являются приемлемыми при решении поставленной задачи, решается исследователем в каждой конкретной ситуации исходя из практических целей.

В общем случае, при фиксированном объеме выборки одновременно обеспечить достижение сколь угодно малых значений α и β не представляется возможным. Действительно, для уменьшения значения α необходимо сужать размеры критической области, но при этом уменьшается вероятность попадания значения критерия в эту область и при справедливости какой-либо другой гипотезы H_a. Это означает, что, сужая критическую область, мы увеличиваем вероятность совершения ошибки второго рода β. Таким образом, ошибки первого и второго рода являются конкурирующими между собой и чаще всего единственным способом уменьшения вероятностей этих обеих ошибок является увеличение объема выборки, то есть использование дополнительной информации об исследуемом явлении.

В пункте 3.4.1 приведена методика применения одного из так называемых *критериев согласия* – критериев, использующихся для проверки гипотезы о виде закона распределения изучаемой случайной величины. При применении критериев согласия заранее фиксируется значение α и проверяется согласование теоретического и эмпирического распределений при заданном уровне значимости α.

3.4.1 Проверка гипотез о математическом ожидании случайной величины, имеющей нормальное распределение

Пусть случайная величина (с. в.) ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ. Требуется на основании выборки $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ проверить гипотезу о том, что математическое ожидание с. в. равно некоторому предполагаемому значению a_0:

$$H_0\colon a = a_0.$$

Можно рассмотреть два случая:

1. Известно значение среднеквадратического отклонения σ.

Для проверки гипотезы используется критерий значимости

$$u = \frac{\overline{x} - a_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Доказано, что если гипотеза H_0 верна, то с. в. u имеет нормальное распределение с параметрами (0; 1), т. е. $u \sim N(0; 1)$.

В таблице 3.3 приведены условия отклонения нулевой гипотезы в зависимости от вида альтернативной гипотезы, где u_α и $u_{\alpha/2}$ – квантили стандартного нормального распределения для вероятностей α и α/2 соответственно. Значения квантилей стандартного нормального распределения находят по таблице значений функции Лапласа. Некоторые из них приведены в таблице 3.4. Отметим, что в силу симметричности стандартного нормального распределения $u_{1-\alpha} = -u_\alpha$.

Таблица 3.3 – **Условия отклонения гипотезы о равенстве математического ожидания заданному значению при известном среднеквадратическом отклонении**

Альтернативная гипотеза H_a	Условие отклонения нулевой гипотезы в пользу альтернативной
$a \neq a_0$	$u \le -u_{\alpha/2}$, либо $u \ge u_{\alpha/2}$
$a > a_0$	$u \ge u_\alpha$
$a < a_0$	$u \le -u_\alpha$

Таблица 3.4 – **Значения квантилей стандартного нормального распределения**

α	u_α	α	u_α	α	u_α	α	u_α
0,005	2,5758	0,025	1,9600	0,950	1,6449	0,990	–2,3263
0,010	2,3263	0,050	1,6449	0,975	1,9600	0,995	–2,5758

2. Значение среднеквадратического отклонения σ неизвестно.

Для проверки гипотезы используется критерий значимости:

$$t = \frac{\overline{x} - a_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n-1}}.$$

Известно, что если гипотеза H_0 верна, то с. в. t имеет распределение Стьюдента с $\nu = n-1$ степенями свободы, т. е. $t \sim T(\nu)$.

В таблице 3.5 приведены условия отклонения нулевой гипотезы в зависимости от вида альтернативной гипотезы.

Таблица 3.5 – **Условия отклонения гипотезы о равенстве математического ожидания заданному значению при неизвестном среднеквадратическом отклонении**

Альтернативная гипотеза H_a	Условие отклонения нулевой гипотезы в пользу альтернативной
$a \neq a_0$	$t \le -t_{\alpha/2;\, n-1}$, либо $t \ge t_{\alpha/2;\, n-1}$
$a > a_0$	$t \ge t_{\alpha;\, n-1}$
$a < a_0$	$t \le -t_{\alpha;\, n-1}$

Пример 3.5. В графике движения поездов на участке Гомель – Жлобин на основании тяговых расчетов установлено время следования поездов по участку $a_0 = 121$ мин. Известно, что случайная величина – время следования поездов на перегоне – имеет нормальное распределение со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 5{,}1$ мин.

Инженер-графист отдела перевозок провел анализ графика исполненного движения поездов в течение 6 суток и установил затраты времени для 40 поездов. В результате расчетов выборочное среднее времени следования поезда на участке Гомель – Жлобин составило 115 мин.

Можно ли утверждать, что нормы времени на следование поездов на указанном участке, принятые на основании тяговых расчетов, завышены, и поэтому следует откорректировать времена хода по перегонам участка в нормативном графике?

Решение. Из условия следует, что необходимо проверить нулевую гипотезу $H_0:\ a = 121$ мин против альтернативной гипотезы $H_a:\ a < 121$ мин. Так как из условия известно, что среднеквадратическое отклонение исследуемой случайной величины $\sigma = 5{,}1$ мин, то для проверки нулевой гипотезы воспользуемся критерием u.

Вид альтернативной гипотезы указывает на то, что следует воспользоваться критерием с левосторонней критической областью. Примем $\alpha = 0{,}05$. Вычислим значение критерия значимости

$$u = \frac{\overline{x} - a_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{115 - 121}{5{,}1/\sqrt{40}} \approx -7{,}44.$$

В таблице 3.4 квантилей стандартного нормального распределения по уровню значимости α = 0,05 находим критическую точку

$$-u\alpha = -u0{,}05 = -1{,}64.$$

Поскольку $u = -7{,}4 \le -u\alpha = -1{,}64$, то на заданном уровне значимости нулевая гипотеза отклоняется.

Таким образом, с вероятностью ошибки, меньшей 0,05, можно утверждать, что тяговыми расчетами установлены завышенные нормы времени на следование поездов на указанном участке, и поэтому следует откорректировать нормативный график движения поездов.

3.4.2 Применение критерия Пирсона χ^2 для проверки непараметрической гипотезы о виде закона распределения случайной величины

Одним из наиболее широко используемых на практике критериев согласия является критерий χ^2 Пирсона. Он может применяться для проверки гипотез о распределении исследуемой случайной величины по любому из известных законов распределения (как дискретных, так и непрерывных случайных величин).

Для применения этого критерия необходимо представление эмпирического (т. е. экспериментального) распределения в виде интервального или сгруппированного статистического ряда. Обозначим, как и ранее, число используемых разрядов разбиения k, а частоту i-го разряда – m_i ($i = 1, 2, \ldots, k$).

При применении этого критерия на основании выдвинутой гипотезы вычисляются теоретические частоты np_i попадания значений случайной величины ξ, распределенной по предполагаемому закону в частичные разряды разбиения. Критерий χ^2 основан на сопоставлении эмпирических (m_i) и теоретических (np_i) частот попадания значений исследуемой величины в рассматриваемые интервалы. В качестве меры расхождения экспериментального и теоретического распределений используется статистика

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i},$$

которая при $n \to \infty$ независимо от вида предполагаемого распределения стремится к распределению χ^2 с $\nu = k - r - 1$ степенями свободы. Здесь r – число параметров гипотетического (т. е. предполагаемого) распределения, оцениваемых по выборочным данным.

Легко заметить, что при незначительных отклонениях значений m_i от np_i значение критерия χ^2 будет близким к нулю. И наоборот, большое значение критерия χ^2 свидетельствует о существенном отклонении экспериментально полученного распределения от предполагаемого. Поэтому критическая область в данном случае определяется условием: $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,\nu}$ (рисунок 3.9).

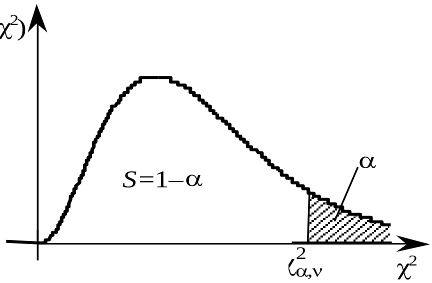


Рисунок 3.9 – Критическая область критерия χ^2

Критическое значение $\chi^2_{\alpha,\nu}$ определяется по таблице квантилей распределения χ^2 в зависимости от уровня значимости α и числа степеней свободы ν.

3.4.3 Алгоритм применения критерия χ^2 для проверки гипотезы о виде закона распределения исследуемой случайной величины

Для проверки гипотезы о виде закона распределения исследуемой случайной величины применяется следующий алгоритм.

1. Выборочные данные представляют в виде сгруппированного или интервального статистического ряда.

2. Выбирают уровень значимости α.

3. Формулируют гипотезу о виде закона распределения исследуемой случайной величины (при выдвижении гипотезы могут использоваться сведения о физической природе и механизме формирования значений этой случайной величины, вид графического изображения статистического распределения, значения оценок числовых характеристик).

4. На основании выдвинутой гипотезы вычисляют вероятности p_i попадания значений случайной величины, распределенной по предполагаемому закону в рассматриваемые разряды разбиения.

Примечание – Если изучается непрерывная случайная величина, то при вычислении значений $p_i = P[C_i \le \xi < C_{i+1})$ необходимо изменить границы первого и последнего частичных разрядов разбиения таким образом, чтобы учесть все возможные значения, которые может принять данная случайная величина. В зависимости от вида проверяемой гипотезы границы частичных интервалов определяются следующим образом:

Вид закона распределения	Первый интервал разбиения	Последний интервал разбиения
Равномерный	$[\hat{a}; C_2)$	$\left[C_k; \hat{b}\right]$
Экспоненциальный	$[0; C_2)$	$[C_k; \infty)$
Нормальный	$(-\infty; C_2)$	$[C_k; \infty)$

5. Определяют значения теоретических частот np_i. Разряды разбиения, характеризующиеся малыми значениями теоретических частот, объединяются с соседними, но с соблюдением условия $k \geq 5$.

6. Вычисляют наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}.$$

7. По таблицам квантилей распределения χ^2 определяют критическое значение $\chi^2_{\alpha,\nu}$, соответствующее заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = k - r - 1$. Сравнивая расчетное значение критерия χ^2 с критическим значением $\chi^2_{\alpha,\nu}$, делают вывод об отклонении или принятии проверяемой гипотезы.

Если $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,\nu}$, то выдвинутая гипотеза отклоняется как не согласующаяся с опытными данными. В случае $\chi^2 \leq \chi^2_{\alpha,\nu}$ делают вывод о том, что выборочные данные не дают оснований для отклонения этой гипотезы. Подчеркнем еще раз, что полученный результат свидетельствует лишь о приемлемом согласовании выдвинутой гипотезы с имеющимися выборочными данными и в общем случае не является доказательством ее истинности.

Пример 3.6. (см. примеры 3.1 и 3.3).

Проверим с помощью критерия χ^2 Пирсона гипотезу о том, что случайная величина ξ, характеризующая число составов, прибывающих на сортировочную станцию в течение часа, подчиняется закону распределения Пуассона.

Решение. Вычислим оценку параметра a распределения Пуассона:

$$\hat{a} = \hat{M}(\xi) = \overline{x} = 2{,}84.$$

По формуле Пуассона вычислим вероятности возможных значений данной случайной величины:

$$P(\xi = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a};$$

$$P(\xi = 0) = \frac{2{,}84^0}{0!} e^{-2{,}84} = 0{,}0584;$$

$$P(\xi = 1) = \frac{2{,}84^1}{1!} e^{-2{,}84} = 0{,}1659;$$

$$P(\xi = 2) = \frac{2{,}84^2}{2!} e^{-2{,}84} = 0{,}2356 \text{ и т. д.;}$$

$$\sum_{i=0}^{8} P(\xi = i) = 0{,}9974.$$

Следовательно, учитывая диапазон возможных значений случайной величины, распределённой по закону Пуассона, вероятность события $\xi > 8$ можно определить следующим образом:

$$P(\xi > 8) = 1 - P(\xi \le 8) = 1 - \sum_{i=0}^{8} P(\xi = i) = 1 - 0{,}9974 = 0{,}0026\,.$$

Занесём это значение в последний столбец расчётной таблицы:

$\tilde{x}_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[9; ∞)
m_i	4	24	19	23	10	13	3	2	2	0
p_i	0,0584	0,1659	0,2356	0,2231	0,1584	0,090	0,0426	0,0173	0,0061	0,0026
np_i	5,84	16,59	23,56	22,31	15,84	9,0	4,26	1,73	0,61	0,26

Поскольку значения np_i в четырёх последних разрядах разбиения не превышают пяти единиц, объединим эти разряды:

$\tilde{x}_i$	0	1	2	3	4	5	[6; ∞)
m_i	4	24	19	23	10	13	7
p_i	0,0584	0,1659	0,2356	0,2231	0,1584	0,090	0,0686
np_i	5,84	16,59	23,56	22,31	15,84	9,0	6,86

Вычислим значение критерия:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{7} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(4-5,84)^2}{5,84} + \frac{(24-16,59)^2}{16,59} + \frac{(19-23,56)^2}{23,56} +$$
$$+ \frac{(23-22,31)^2}{22,31} + \frac{(10-15,84)^2}{15,84} + \frac{(13-9)^2}{9} + \frac{(7-6,86)^2}{6,86} \approx 9,23.$$

По таблицам квантилей распределения χ^2 определим критическое значение $\chi^2_{\alpha,\nu}$, соответствующее уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu = k - r - 1 = 7 - 1 - 1 = 5$: $\chi^2_{0,05;5} = 11,070$.

Поскольку $\chi^2 \le \chi^2_{\alpha,\nu}$, можно сделать вывод о том, что гипотеза о распределении изучаемой случайной величины по закону Пуассона не противоречит выборочным данным.

Пример 3.7. (см. примеры 3.2 и 3.4).

Проверим с помощью критерия χ^2 Пирсона гипотезу о том, что случайная величина ξ, характеризующая промежуток времени между моментами прибытия товарных составов на сортировочную станцию, подчиняется экспоненциальному закону распределения. Эта гипотеза была выдвинута на основании вида полученной гистограммы с учётом диапазона возможных значений этой величины ($x \in [0; \infty)$) и сведений о физическом смысле полученных значений (промежуток времени между моментами наступления событий простейшего потока обычно описывается показательно распределённой случайной величиной).

Решение. Вычислим оценку параметра экспоненциального закона распределения:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{M}(\xi)} = \frac{1}{214{,}17} = 0,0047.$$

Изменим границы первого и последнего интервалов разбиения в соответствии с диапазоном возможных значений показательно распределённой случайной величины и вычислим вероятности попадания значений изучаемой величины в каждый из частичных интервалов $[C_i; C_{i+1})$:

$$P(C_i \le \xi < C_{i+1}) = e^{-\hat{\lambda} C_i} - e^{-\hat{\lambda} C_{i+1}};$$

$$P(0 \le \xi < 53,41) = e^{-0,0047 \cdot 0} - e^{-0,0047 \cdot 53,41} = 1 - 0,778 = 0,222;$$
$$P(53,41 \le \xi < 149,25) = e^{-0,0047 \cdot 53,41} - e^{-0,0047 \cdot 149,25} = 0,778 - 0,496 = 0,282;$$
$$P(149,25 \le \xi < 245,09) = e^{-0,0047 \cdot 149,25} - e^{-0,0047 \cdot 245,09} = 0,496 - 0,316 = 0,18;$$
$$P(245,09 \le \xi < 340,93) = e^{-0,0047 \cdot 245,09} - e^{-0,0047 \cdot 340,93} = 0,316 - 0,201 = 0,115;$$
$$P(340,93 \le \xi < 436,77) = e^{-0,0047 \cdot 340,93} - e^{-0,0047 \cdot 436,77} = 0,201 - 0,128 = 0,073;$$
$$P(436,77 \le \xi < 532,61) = e^{-0,0047 \cdot 436,77} - e^{-0,0047 \cdot 532,61} = 0,128 - 0,082 = 0,046;$$
$$P(532,61 \le \xi < 628,45) = e^{-0,0047 \cdot 532,61} - e^{-0,0047 \cdot 628,45} = 0,082 - 0,052 = 0,03;$$
$$P(628,45 \le \xi < \infty) = e^{-0,0047 \cdot 628,45} - e^{-0,0047 \cdot \infty} = 0,052 - 0 = 0,052.$$

Занесём полученные значения в расчётную таблицу:

$[C_i; C_{i+1})$	[0; 53,41)	[53,41; 149,25)	[149,25; 245,09)	[245,09; 340,93)	[340,93; 436,77)	[436,77; 532,61)	[532,61; 628,45)	[628,45; ∞)
m_i	12	13	6	6	5	3	4	1
p_i	0,222	0,282	0,180	0,115	0,073	0,046	0,030	0,052
np_i	11,1	14,1	9	5, 75	3,65	2,3	1,5	2,6

Объединим три последних интервала, характеризующиеся малыми значениями np_i, в один:

$[C_i; C_{i+1})$	[0; 53,41)	[53,41; 149,25)	[149,25; 245,09)	[245,09; 340,93)	[340,93; 436,77)	[436,77; ∞)
m_i	12	13	6	6	5	8
p_i	0,222	0,282	0,180	0,115	0,073	0,128
np_i	11,1	14,1	9	5,75	3,65	6,4

Вычислим значение критерия:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(12-11,1)^2}{11,1} + \frac{(13-14,1)^2}{14,1} + \frac{(6-9)^2}{9} + \frac{(6-5,75)^2}{5,75} +$$
$$+ \frac{(5-3,65)^2}{3,65} + \frac{(8-6,4)^2}{6,4} \approx 2,069.$$

Критическое значение $\chi^2_{\alpha,\nu}$ определим по таблице квантилей распределения χ^2 для значений α = 0,05, $\nu = k - r - 1 = 6 - 1 - 1 = 4$:

$$\chi^2_{0,05;4} = 9,488.$$

Поскольку $\chi^2 \le \chi^2_{\alpha,\nu}$, экспериментальные данные не дают оснований для отклонения гипотезы об экспоненциальном распределении случайной величины ξ, характеризующей промежуток времени между моментами прибытия товарных поездов на сортировочную станцию.

3.5 Элементы регрессионного анализа. Построение эмпирического уравнения регрессии. Проверка адекватности построенного уравнения регрессии выборочным данным

В предыдущих разделах курса предполагалось, что при проведении вероятностного эксперимента фиксируются значения только одной случайной величины. Однако, как правило, большинство представляющих практический интерес вероятностных явлений имеют более сложный, комплексный характер и описываются некоторым множеством величин, которые могут быть взаимосвязаны.

Две случайные величины могут быть связаны функционально, статистически, либо быть независимыми. Говорят, что две переменные связаны **функционально**, если каждому значению одной величины соответствует единственное значение другой.

Например, функциональная зависимость существует между радиусом и площадью круга, силой тока и напряжением в электрической цепи при известном сопротивлении, давлением и объемом газа в сосуде при постоянной температуре и т. п.

Однако чаще на практике встречаются зависимости другого рода, когда при фиксированном значении одной переменной другая имеет некоторую свободу и принимает не заранее определенное, а одно из своих возможных значений. Такая зависимость называется **статистической** (или **вероятностной**). Она состоит в том, что при изменении значений одной величины происходит изменение закона распределения второй.

Для иллюстрации понятия статистической зависимости приведем несколько примеров:

– зависимость расхода топлива от скорости движения поезда на заданном перегоне;

– связь между производительностью труда и себестоимостью продукции;

– зависимость между временем протекания химической реакции и массой выделившегося вещества;

– связь между временем обработки детали на станке и отклонением размеров детали от номинала и т. п.

Статистической зависимостью между случайными величинами ξ и η называется правило F, позволяющее каждому возможному значению одной величины поставить в соответствие условное распределение другой. Например, статистическая зависимость η от ξ может быть представлена в виде соотношения $x \to F(\eta \mid \xi = x)$.

Наиболее важные особенности статистической зависимости находят отражение в тех изменениях, которые претерпевает центр условного распределения одной величины при изменении значения другой. Поэтому на практике обычно ограничиваются рассмотрением частного случая статистической зависимости, а именно зависимостью математического ожидания одной величины от значения другой. Такая зависимость называется **регрессионной**.

Например, регрессионная зависимость η от ξ может быть представлена в виде

$$M(\eta|\xi = x) = f_1(x). \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) называется **уравнением регрессии η на ξ.** Функция $f_1(x)$ называется **функцией регрессии η на ξ**, а ее график – **линией регрессии**.

Аналогичным образом можно определить регрессию ξ на η:

$$M(\xi|\eta = y) = f_2(y).$$

Если уравнение регрессии известно, то с его помощью можно осуществить прогноз математических ожиданий зависимой переменной, соответствующих заданным значениям независимой переменной.

Для построения уравнения регрессии необходимо знание совместного закона распределения вероятностей случайных величин ξ и η. На практике при обработке экспериментальных данных это распределение, как правило, неизвестно. В распоряжении исследователя имеется только двумерная выборка объема n значений (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ изучаемых случайных величин. Поэтому возникает задача построения на основании имеющихся статистических данных приближенного уравнения регрессии (то есть его оценки) вида $\overline{y}(x) = \varphi(x)$, которое называется **эмпирическим уравнением регрессии**. В качестве экспериментального аналога условного математического ожидания величины η используется условное среднее $\overline{y}(x)$.

При исследовании статистической зависимости между переменными ξ и η на основании опытных данных различают задачи ***регрессионного и корреляционного анализа***.

Методы регрессионного анализа предназначены для построения по имеющимся выборочным данным эмпирического уравнения регрессии, проверки адекватности полученного уравнения опытным данным и использования этого уравнения для осуществления обоснованного прогноза значений зависимой случайной величины.

Методы корреляционного анализа позволяют установить, существует ли какая-либо зависимость между исследуемыми величинами и оценить тесноту существующей связи (то есть близость этой связи к функциональной).

3.5.1 Эмпирическое уравнение регрессии

Важнейшим этапом регрессионного анализа является выбор подходящей регрессионной модели, то есть общего вида функции регрессии. Обычно этот выбор осуществляется на основании знаний о физической сущности задачи и опыта предыдущих исследований. Если имеющейся информации недостаточно, то, как правило, помогает графическое представление экспериментальных данных в виде **диаграммы рассеивания** (этот график еще называют **корреляционным полем**). Для построения диаграммы рассеивания необходимо в декартовой системе координат точками изобразить выборочные значения (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$. Вид функции регрессии выбирается таким образом, чтобы она отражала наиболее существенные и характерные особенности расположения этих точек.

Определившись с видом функции регрессии, мы фактически получаем класс сравниваемых функций определенного типа, зависящих от параметров. В общем случае можно записать:

$$\overline{y}(x) = \varphi(x,\ \beta_0,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_k),$$

где β_i $(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k)$ – параметры функции φ.

Для выбора из этого класса функции, наилучшим образом описывающей наблюдаемую закономерность, используют метод наименьших квадратов. Согласно этому методу значения параметров $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ выбираются таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений выборочных значений y_i от соответствующих им значений на регрессионной кривой $\bar{y}(x_i)$ была бы минимальной. В геометрической интерпретации это означает, что сумма квадратов длин вертикальных отрезков $e_i = |y_i - \bar{y}(x_i)|$ $(i = 1, 2, ..., n)$, изображенных на рисунке 3.10, для «оптимальной» линии регрессии является минимальной.

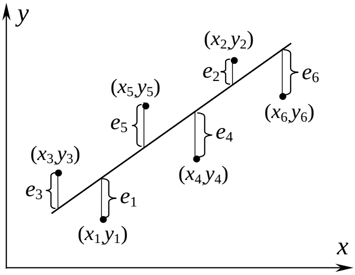


Рисунок 3.10 – Корреляционное поле и линия регрессии

Оценки параметров β_i по методу наименьших квадратов определяются из условия

$$S(\beta_0,\ \beta_1,\ ...,\ \beta_k) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \varphi(x,\ \beta_0,\ \beta_1,\ ...,\ \beta_k))^2 \to \min. \qquad (3.4)$$

Вычисляя частные производные функции $S(\beta_0,\ \beta_1,\ ...,\ \beta_k)$ по переменным β_i $(i = 0,\ 1,\ ...,\ k)$ и, приравнивая их к нулю, получим систему так называемых нормальных уравнений. Решив эту систему, будут найдены «оптимальные», то есть соответствующие условию (3.4) значения коэффициентов $\hat{\beta}_i$.

После построения эмпирического уравнения регрессии $\bar{y}(x) = \varphi(x)$ можно осуществить прогноз ожидаемых средних значений величины η, соответствующих заданным значениям величины ξ. Понятно, что наблюдаемые значения y_i из-за влияния случайных факторов будут отличаться от прогнозных значений $\bar{y}(x_i)$. В общем случае зависимость между наблюдаемыми значениями переменных ξ и η

может быть представлена в виде $y_i = \varphi(x_i) + \varepsilon_i$, где случайная компонента ε_i характеризует влияние неучтенных в данной модели факторов и неконтролируемых изменений условий проведения вероятностного эксперимента.

3.5.2 Простая линейная регрессия

Простейшим видом регрессионной зависимости между переменными ξ и η является простая линейная регрессия, которая может быть определена следующим образом

$$M(\eta | \xi = x) = \beta_1 x + \beta_0.$$

Регрессионная модель такого вида достаточно часто встречается на практике. Исследования показывают, что в большой части случаев наблюдаемая зависимость между изучаемыми величинами по крайней мере приближенно может быть описана с помощью линейной регрессионной модели. В частности, в курсе теории вероятностей доказано, что если случайные величины ξ и η подчиняются закону двумерного нормального распределения вероятностей, то линии регрессии η на ξ и ξ на η являются линейными функциями.

Зависимость значений величины η от ξ в этом случае может быть представлена в виде

$$y_i = \beta_1 x_i + \beta_0 + \varepsilon_i.$$

Доказано, что при справедливости предположения о двумерном нормальном распределении величин ξ и η, отклонения ε_i являются независимыми случайными величинами, имеющими нормальное распределение, причем $M(\varepsilon_i) = 0$, $D(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon{}^2 = \mathrm{const}$ (эти свойства ε_i являются необходимыми условиями для проведения последующего анализа эмпирического уравнения линейной регрессии).

Итак, пусть в результате n независимых испытаний получена двумерная выборка значений изучаемых величин (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, на основании которой необходимо построить уравнение линейной регрессии η от ξ. Соотношение (3.4) в этом случае примет вид

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_1 x_i - \beta_0)^2 = \min.$$

Вычислим частные производные функции $S(\beta_0, \beta_1)$ по переменным β_0 и β_1 и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial S(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0} = (-2)\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_1 x_i - \beta_0) = (-2)\left[\sum_{i=1}^{n} y_i - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - \beta_0 n\right] = 0;$$

$$\beta_0 n + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i;$$

$$\frac{\partial S(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1} = (-2)\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \beta_1 x_i - \beta_0) = (-2)\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i\right] = 0;$$

$$\beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Таким образом, система нормальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \beta_0 n + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i; \\ \beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим значения коэффициентов эмпирического уравнения линейной регрессии $\overline{y}(x) = \hat{\beta}_1 x + \hat{\beta}_0$. В примере 3.8 мы рассмотрим последовательность расчетов для построения эмпирического уравнения линейной регрессии.

Линейные регрессионные модели, хотя и очень широко применяются на практике, не всегда способны достаточно хорошо описать наблюдаемую зависимость между изучаемыми величинами.

В соответствии с описанной выше методикой можно построить эмпирические уравнения регрессии произвольного вида, использование которых сдерживается лишь трудностями, возникающими при решении системы нормальных уравнений. В примере 3.9 мы приведем расчеты для построения эмпирического уравнения регрессии гиперболического вида.

3.5.3 Проверка адекватности эмпирического уравнения регрессии выборочным данным

Пусть на основании двумерной выборки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_{n,} y_n)$ построено эмпирическое уравнение регрессии

$$\bar{y}(x) = \varphi(x,\ \hat{\beta}_0,\ \hat{\beta}_1,\ ...,\ \hat{\beta}_k)$$

(зависящее от $k+1$ параметров $\beta_0,\ \beta_1,\ ...,\ \beta_k$). Прежде чем использовать полученное уравнение для описания зависимости между изучаемыми величинами, необходимо проверить адекватность этого уравнения выборочным данным, то есть проверить согласование с экспериментальными данными гипотезы

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_k = 0,$$

утверждающей, что между изучаемыми величинами отсутствует зависимость предполагаемого вида и отличие полученных оценок коэффициентов регрессии $\hat{\beta}_i$ от нуля объясняется только влиянием случайных факторов. Альтернативная гипотеза H_1 состоит в том, что хотя бы один из коэффициентов β_i не равен нулю.

Для осуществления проверки указанной гипотезы используется дисперсионный анализ. Доказано, что общая сумма квадратов отклонений $S^2_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ наблюдаемых значений зависимой переменной y_i от среднего значения $\bar{y}$ может быть разделена на две составляющие: $S^2_{\text{общ}} = S^2_{\text{регр}} + S^2_{\text{ост}}$, где $S^2_{\text{регр}} = \sum_{i=1}^{n}(\bar{y}(x_i) - \bar{y})^2$ характеризует влияние переменной ξ (описываемое соотношением $\bar{y}(x) = \varphi(x)$); $S^2_{\text{ост}} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}(x_i))^2$ характеризует влияние неучтенных в данной регрессионной модели случайных факторов.

Для проверки гипотезы об отсутствии между переменными ξ и η регрессионной зависимости предполагаемого вида используется статистика $F = \dfrac{S^2_{\text{регр}} / \nu_1}{S^2_{\text{ост}} / \nu_2}$, которая при справедливости этой гипотезы имеет распределение Фишера с $\nu_1 = k$ и $\nu_2 = n - k - 1$ степенями свободы.

Очевидно, что чем больше доля $S^2_{\text{регр}}$ в значении суммы $S^2_{\text{общ}}$, и, соответственно, чем меньше доля $S^2_{\text{ост}}$, тем бóльшая часть рассеяния значений y_i вокруг линии регрессии объясняется зависимостью от значений ξ (задаваемой соотношением $\overline{y}(x) = \xi(x)$), а значит, тем интенсивнее связь данного вида между ξ и η. Таким образом, чем больше значение статистики F, тем менее вероятна справедливость проверяемой гипотезы. И наоборот, получение близких к нулю значений статистики F свидетельствует о слабой зависимости значений переменной η от ξ.

Критическая область в данном случае определяется условием $P(F \geq F_{\alpha, \nu_1, \nu_2}) = \alpha$. Если расчетное значение критерия F окажется больше критического значения F_{α, ν_1, ν_2}, то проверяемую гипотезу об отсутствии между изучаемыми переменными зависимости предполагаемого вида следует отвергнуть. Это означает, что наблюдаемая зависимость между величинами ξ и η не может быть объяснена влиянием только случайных факторов, и построенное эмпирическое уравнение регрессии можно считать адекватным опытным данным.

В противном случае, если $F < F_{\alpha, \nu_1, \nu_2}$, то нет оснований для отклонения выдвинутой гипотезы и полученное уравнение регрессии не является адекватным имеющимся выборочным данным. Следовательно, оно не может использоваться для описания изучаемого явления.

Пример 3.8. В книге «Основы химии» Д. И. Менделеева приведены следующие данные о количестве азотнонатриевой соли (переменная η), которое можно растворить в 100 г воды в зависимости от температуры раствора (переменная ξ, $^{\circ}$C):

ξ	0	4	10	15	21	29	36	51	68
η	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

Требуется на основании имеющихся экспериментальных данных исследовать зависимость значений переменной η от ξ.

Решение. Для наглядного представления выборочных данных построим корреляционное поле (рисунок 3.11, *а*). По виду полученного графика можно судить о том, что между исследуемыми переменными существует достаточно тесная линейная зависимость. Для построения эмпирического уравнения линейной регрессии $\bar{y}(x) = \beta_1 x + \beta_0$ вычислим необходимые значения сумм:

$$\sum_{i=1}^{9} x_i = 0 + 4 + 10 + 15 + 21 + 29 + 36 + 51 + 68 = 234;$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 0 + 4^2 + 10^2 + 15^2 + 21^2 + 29^2 + 36^2 + 51^2 + 68^2 = 10144;$$

$$\sum_{i=1}^{9} y_i = 66{,}7 + 71{,}0 + 76{,}3 + 80{,}6 + 85{,}7 + 92{,}9 + 99{,}4 + 113{,}6 + 125{,}1 = 811{,}3;$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 0 \cdot 66{,}7 + 4 \cdot 71{,}0 + 10 \cdot 76{,}3 + 15 \cdot 80{,}6 + 21 \cdot 85{,}7 + 29 \cdot 92{,}9 +$$

$$+36 \cdot 99{,}4 + 51 \cdot 113{,}6 + 68 \cdot 125{,}1 = 24628{,}6.$$

Таким образом, система нормальных уравнений для определения значений $\hat{\beta}_i$ имеет вид

$$\begin{cases} 9\beta_0 + 234\beta_1 = 811{,}3; \\ 234\beta_0 + 10144\beta_1 = 24628{,}6. \end{cases}$$

Решая ее, получим $\hat{\beta}_0 \approx 67{,}5$; $\hat{\beta}_1 \approx 0{,}87$. Итак, уравнение линейной регрессии, описывающее зависимость количества растворенного вещества от температуры раствора, имеет вид $\bar{y}(x) = 0{,}87x + 67{,}5$. График соответствующей линии регрессии изображен на рисунке 3.11, *б*.

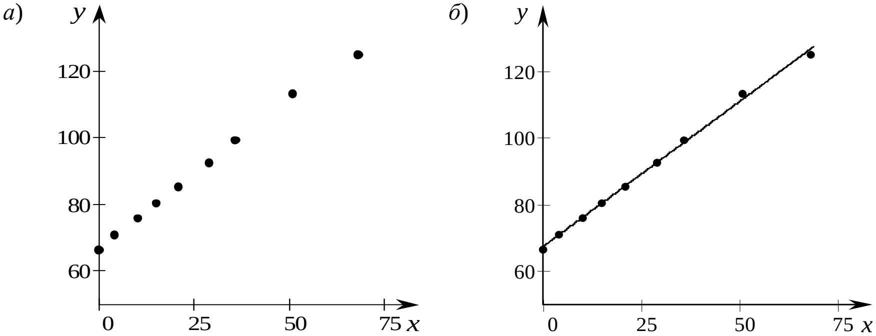


Рисунок 3.11 – Диаграмма рассеивания и график линейной регрессии (пример 3.8)

Пользуясь критерием Фишера, проверим адекватность построенной регрессионной модели $\overline{y}(x) = 0{,}87x + 67{,}5$ выборочным данным.

Определим на основании эмпирического уравнения регрессии значения $\overline{y}(x_i)$:

ξ	0	4	10	15	21	29	36	51	68
η	67,5	70,98	76,2	80,55	85,77	92,73	98,82	111,87	126,66

Вычислим значения сумм:

$$S^2_{\text{регр}} = \sum_{i=1}^{n} (\overline{y}(x_i) - \overline{y})^2 = 3800,395; \qquad S^2_{\text{ост}} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y}(x_i))^2 = 6,59.$$

Выборочное значение критерия Фишера

$$F = \frac{S^2_{\text{регр}} / \nu_1}{S^2_{\text{ост}} / \nu_2} = \frac{3800,395/1}{6,59/7} = 4036,4.$$

По таблице квантилей распределения Фишера определим критическое значение критерия Фишера, соответствующее значениям $\alpha = 0,05;\ \nu_1 = 1;\ \nu_2 = n - 2 = 9 - 2 = 7:\ F_{0,05;\,1;\,7} = 5,59.$

Поскольку $F >> F_{\alpha;\,\nu_1;\,\nu_2}$, гипотезу об отсутствии между изучаемыми величинами линейной зависимости следует отвергнуть. Построенное эмпирическое уравнение линейной регрессии является адекватным опытным данным.

Пример 3.9. При исследовании работы предприятия получены следующие данные, характеризующие зависимость себестоимости выпускаемой продукции от объема производства:

ξ	0,085	0,146	0,237	0,414	0,551	0,653	0,82	0,915	1,043	1,150
η	18,4	14,3	12,1	11,5	10,3	9,4	9,6	9,0	8,8	8,1

Здесь ξ – объем продукции в течение года, млн т; η – фактическая средняя себестоимость одной тонны продукции, ден. ед.

Требуется на основании приведенных опытных данных исследовать зависимость переменной η от ξ.

Решение. Для наглядного изображения имеющихся выборочных данных построим корреляционное поле (рисунок 3.12, *а*).

По виду расположения точек на корреляционном поле можно выдвинуть предположение о том, что между переменными ξ и η существует зависимость гиперболического типа. Для описания наблюдаемой зависимости будем использовать уравнение $\bar{y}(x) = \frac{\beta_1}{x} + \beta_0$.

Для нахождения оптимальных значений параметров $\hat{\beta}_0$ и $\hat{\beta}_1$ вычислим частные производные функции

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \frac{\beta_1}{x_i} - \beta_0)^2$$

и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial S(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0} = (-2)\sum_{i=1}^{n}(y_i - \frac{\beta_1}{x_i} - \beta_0) = (-2)\left[\sum_{i=1}^{n} y_i - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} - \beta_0 n\right] = 0;$$

$$\frac{\partial S(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1} = (-2)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}(y_i - \frac{\beta_1}{x_i} - \beta_0) = (-2)\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i} - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} - \beta_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right] = 0.$$

Таким образом, система нормальных уравнений для определения коэффициентов эмпирического уравнения регрессии гиперболического типа имеет вид

$$\begin{cases} \beta_0 n + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} y_i; \\ \beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{-2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} y_i. \end{cases}$$

Вычислим коэффициенты этой системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^{-1} = 32,726; \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 111,5; \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^{-2} = 218,9551;$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^{-1} y_i = 463,3617.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{cases} 10\beta_0 + 32,726\beta_1 = 111,5; \\ 32,726\beta_0 + 218,9551\beta_1 = 463,9551. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим $\hat{\beta}_0 \approx 8,27$, $\hat{\beta}_1 \approx 0,88$, то есть искомое эмпирическое уравнение регрессии имеет вид

$$\bar{y}(x) = \frac{0,88}{x} + 8,27.$$

График соответствующей линии регрессии изображен на рисунке 3.12, *б*.

Для сравнения на основании того же набора экспериментальных данных можно построить регрессионную модель линейного типа. Уравнение линейной регрессии будет иметь вид: $\bar{y}(x) = -7,26x + 15,52$. График соответствующей линии регрессии также приведен на рисунке 3.12, *б*.

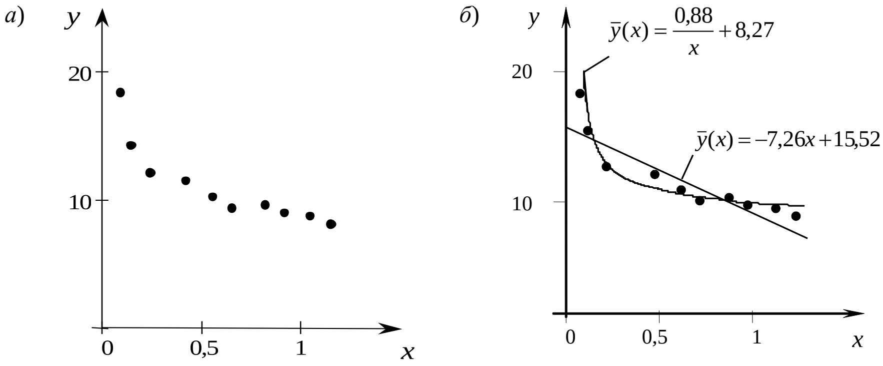


Рисунок 3.12 – Корреляционное поле и линии регрессии (пример 3.10)

Проверим адекватность опытным данным полученных эмпирических уравнений регрессии. Сначала подвергнем анализу гиперболическую модель $\bar{y}(x) = \dfrac{0,88}{x} + 8,27$:

x_i	0,085	0,146	0,237	0,414	0,551	0,653	0,82	0,915	1,043	1,150
$\bar{y}(x_i)$	18,62	14,30	11,98	10,39	9,87	9,62	9,34	9,23	9,11	9,03

Вычислим необходимые значения сумм:

$$S^2_{\text{регр}} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{y}(x_i) - \bar{y})^2 = 86,5722; \quad S^2_{\text{ост}} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}(x_i))^2 = 2,5728.$$

Отсюда получаем $F_{\text{гиперб}} = \dfrac{S^2_{\text{регр}} / \nu_1}{S^2_{\text{ост}} / \nu_2} = \dfrac{86,5722/1}{2,5728/8} = 269,192.$

Аналогичные вычисления выполним для линейной модели $\bar{y}(x) = -7,26x + 15,51$:

x_i	0,085	0,146	0,237	0,414	0,551	0,653	0,82	0,915	1,043	1,150
$\bar{y}(x_i)$	14,89	14,45	13,79	12,5	11,51	10,76	9,55	8,87	7,94	7,16

Значения сумм:

$$S^2_{\text{регр}} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{y}(x_i) - \bar{y})^2 = 61,982; \quad S^2_{\text{ост}} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}(x_i))^2 = 21,163.$$

Значение критерия $F_{\text{лин}} = \dfrac{S^2_{\text{регр}} / \nu_1}{S^2_{\text{ост}} / \nu_2} = \dfrac{67,982/1}{21,163/8} = 25,698.$

С помощью таблицы квантилей распределения Фишера определим критическое значение $F_{\alpha;\, \nu_1;\, \nu_2} = F_{0,05;\, 1;\, 8} = 5,32.$

Поскольку $F_{\text{гиперб}} > F_{\alpha;\, \nu_1;\, \nu_2}$ и $F_{\text{лин}} > F_{\alpha;\, \nu_1;\, \nu_2}$, обе построенные регрессионные модели являются адекватными опытным данным и могут быть использованы для описания изучаемого явления. Тот факт, что $F_{\text{гиперб}} >> F_{\text{лин}}$, свидетельствует о том, что построенная гиперболическая модель более полно описывает наблюдаемую зависимость между изучаемыми величинами.

3.6 Элементы корреляционного анализа. Использование эмпирических коэффициентов корреляции и детерминации для оценки тесноты зависимости между исследуемыми случайными величинами. Проверка значимости коэффициентов корреляции и детерминации

Напомним, что в курсе теории вероятностей для оценки тесноты связи между случайными величинами ξ и η, подчиняющимися закону двумерного нормального распределения, используется коэффициент корреляции r. Известно, что в этом случае линии регрессии η на ξ и ξ на η являются линейными функциями. Таким образом, коэффициент корреляции является мерой тесноты именно линейной зависимости. Этот коэффициент может использоваться в качестве меры коррелированности (то есть линейной зависимости) любых изучаемых случайных величин.

В качестве точечной оценки коэффициента корреляции используется статистика $\hat{r}$, которая называется **эмпирическим коэффициентом корреляции**:

$$\hat{r} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}.$$

Эмпирический коэффициент корреляции обладает всеми свойствами «теоретического» коэффициента корреляции. Его важнейшее свойство состоит в том, что при увеличении объема выборки значение $\hat{r}$ приближается к оцениваемому значению коэффициента корреляции r (то есть $\hat{r}$ является состоятельной оценкой r).

Вычисляя на основании выборочных данных значение эмпирического коэффициента корреляции $\hat{r}$, мы понимаем, что получаем таким образом лишь некоторое приближение неизвестного значения r, которое, особенно при исследовании выборок небольшого объема, может содержать значительную погрешность. В частности, может оказаться, что при $r = 0$, то есть при изучении некоррелированных случайных величин вычисленное значение $\hat{r}$ в силу влияния случайных факторов будет значительно отличаться от нуля. В этом случае, опираясь только на полученное значение оценки коэффициента корреляции $\hat{r}$, мы можем сделать ошибочный вывод о коррелированности исследуемых случайных величин.

Для получения более надежных выводов о существовании линейной зависимости между изучаемыми переменными необходимо **проверить значимость полученного значения** $\hat{r}$, то есть проверить с помощью вероятностно-статистических методов согласование с опытными данными гипотезы $H_0:\ r = 0$ ($H_a:\ r \neq 0$). Проверка этой гипотезы осуществляется в предположении о двумерном нормальном распределении исследуемых случайных величин.

Известно, что статистика

$$t = \hat{r}\sqrt{\frac{n-2}{1-\hat{r}^2}} \tag{3.4}$$

при справедливости сформулированной гипотезы ($r = 0$) независимо от значений $\hat{r}$ и n подчиняется закону распределения Стьюдента с $\nu = n-2$ степенями свободы.

Для заданного уровня значимости α по таблице квантилей распределения Стьюдента можно определить критическое значение $t_{\alpha/2,\, n-2}$, такое, что $P(|t| > t_{\alpha/2;\, n-2}) = \alpha$.

Если окажется, что $|t| > t_{\alpha/2;\, n-2}$, то проверяемая гипотеза $H_0: r = 0$ должна быть отвергнута, то есть наблюдаемое отличие эмпирического коэффициента корреляции от нуля не может быть объяснено только случайностью выборки и является значимым при уровне значимости α.

Если $|t| \le t_{\alpha/2;\, n-2}$, то делают вывод о том, что нет оснований для отклонения гипотезы об отсутствии линейной зависимости между переменными ξ и η.

Пусть для описания зависимости между исследуемыми случайными величинами на основании имеющихся выборочных данных построено эмпирическое уравнение регрессии $\overline{y}(x) = \varphi(x)$ (произвольного вида). В общем случае для оценки тесноты связи между переменными ξ и η, описываемой уравнением $\overline{y}(x) = \varphi(x)$, можно использовать так называемый **коэффициент детерминации**. Вычисление этого коэффициента основано на упоминавшемся в подразделе 3.6.3 разложении общей суммы квадратов отклонений $S^2_{\text{общ}}$ выборочных значений зависимой переменной y_i от среднего значения $\overline{y}$ на две составляющие: $S^2_{\text{регр}}$ и $S^2_{\text{ост}}$. Коэффициент детерминации вычисляется по формуле $\hat{R}^2 = \dfrac{S^2_{\text{регр}}}{S^2_{\text{общ}}}$ и указывает, какая часть общего рассеяния переменной Y может быть объяснена зависимостью от переменной ξ на основании построенного уравнения регрессии.

Свойства коэффициента детерминации $\hat{R}^2$.

1. Возможные значения этого коэффициента принадлежат отрезку [0; 1]: $0 \le \hat{R}^2 \le 1.$

2. Если $\hat{R}^2 = 0$, то между исследуемыми величинами отсутствует зависимость, описываемая эмпирическим уравнением регрессии $\overline{y}(x) = \varphi(x).$

3. Если $\hat{R}^2 = 1$, то между с. в. ξ и η существует функциональная зависимость предполагаемого вида.

4. Чем ближе значение коэффициента детерминации к единице, тем интенсивнее зависимость между величинами ξ и η, описываемая соотношением $\overline{y}(x) = \varphi(x).$

5. Значение коэффициента детерминации $\hat{R}^2$ не зависит от выбора начала отсчета и единиц измерения исследуемых величин ξ и η.

Для проверки значимости $\hat{R}^2$, т. е. для проверки гипотезы об отсутствии между изучаемыми переменными зависимости предполагаемого вида ($H_0 : \hat{R}^2 = 0$) против альтернативной гипотезы $H_a : \hat{R}^2 >> 0$ используется статистика

$$F = \hat{R}^2 \frac{n-m}{(m-1)\left(1-\hat{R}^2\right)},$$

имеющая распределение Фишера с $\nu_1 = m-1$ и $\nu_2 = n-m$ степенями свободы. Здесь m – число неизвестных параметров построенного уравнения регрессии β_i. Вычисленное значение статистики F сравнивается с критическим значением F_{α,ν_1,ν_2}, полученным по таблицам квантилей распределения Фишера в зависимости от значений α, ν_1 и ν_2.

Если $F \ge F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}$, то проверяемая гипотеза об отсутствии между переменными ξ и η зависимости предполагаемого вида отклоняется. Значение коэффициента детерминации признается значимым при заданном уровне значимости α и эмпирическое уравнение регрессии может использоваться для описания изучаемого явления.

Пример 3.10. На основании данных, приведенных в примере 3.8, оценим с помощью эмпирического коэффициента корреляции тесноту связи между переменными ξ и η, характеризующими соответственно температуру раствора и количество растворенной азотнонатриевой соли:

$$\hat{r} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = 0,935.$$

Поскольку вычисленное значение эмпирического коэффициента корреляции очень близко к единице, можно сделать вывод о том, что между исследуемыми переменными существует тесная положительная линейная зависимость.

Проверим значимость полученного значения эмпирического коэффициента корреляции при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

Вычислим значение статистики:

$$t = \hat{r}\sqrt{\frac{n-2}{1-\hat{r}^2}} = 0,935\sqrt{\frac{9-2}{1-0,935^2}} = 6,975.$$

Критическое значение критерия Стьюдента

$$t_{\alpha/2;\, n-2} = t_{0,025;7} = 2,365.$$

Поскольку $|t| > t_{\alpha/2, n-2}$, гипотеза об отсутствии между изучаемыми переменными линейной зависимости отклоняется.

Пример 3.11. При обследовании 14 плавок определенного сорта стали на сталеплавильном заводе получен набор экспериментальных значений:

Номер плавки	ξ – угар кремния, %	η – выход стали, %	Номер плавки	ξ – угар кремния, %	η – выход стали, %
1	7,9	70,3	8	7,2	86,8
2	0,9	85,0	9	8,8	70,1
3	3,7	100,0	10	11,2	81,9
4	8,1	78,1	11	0,5	97,1
5	6,9	77,9	12	4,6	68,2
6	0,8	98,4	13	9,7	92,1
7	6,0	59,2	14	1,0	91,2

Требуется на основании имеющихся опытных данных исследовать зависимость между случайными величинами ξ и η.

Решение. По виду корреляционного поля (рисунок 3.13) трудно сделать вывод о существовании какой-либо ярко выраженной зависимости между изучаемыми переменными.

Однако можно заметить, что бóльшим значениям одной величины, в среднем, соответствуют несколько меньшие значения другой, то есть между переменными ξ и η имеет место некоторая отрицательная корреляция.

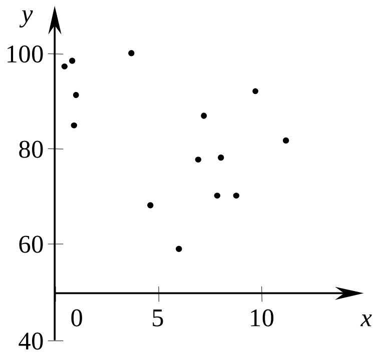


Рисунок 3.13 – Корреляционное поле (пример 3.12)

Вычислим значение эмпирического коэффициента корреляции:

$$\hat{r} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}} \approx -0,46.$$

Полученное значение $\hat{r}$ указывает на существование не тесной отрицательной линейной зависимости между изучаемыми величинами (угаром кремния и выходом стали).

Проверим значимость этого выборочного коэффициента корреляции при $\alpha = 0,05$. В данном случае

$$n = 14, \quad \alpha = 0,05, \quad t_{\alpha/2;\, n-2} = t_{0,025;12} = 2,18.$$

Значение статистики

$$t = \hat{r}\sqrt{\frac{n-2}{1-\hat{r}^2}} = -0,46\sqrt{\frac{14-2}{1-(-0,46)^2}} = -1,415.$$

Поскольку $|t| < t_{\alpha/2;n-2}$, то нет оснований для отклонения гипотезы о некоррелированности случайных величин ξ и η. Это означает, что в данном случае отличие эмпирического коэффициента корреляции от нуля может быть объяснено только влиянием случайных факторов и это значение не является достаточным для признания факта существования линейной зависимости между угаром кремния и выходом стали.

Пример 3.12. (см. пример 3.9). Оценим с помощью коэффициента детерминации тесноту зависимости себестоимости выпускаемой продукции от объемов производства, описываемую уравнением гиперболической регрессии $\bar{y}(x) = \frac{0,88}{x} + 8,27.$

Решение. Вычисляя значения сумм

$$S^2_{\text{регр}} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{y}(x_i) - \bar{y})^2 = 86,5722; \qquad S^2_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = 89,145,$$

получим: $\hat{R}^2_{\text{гиперб}} = \dfrac{S^2_{\text{регр}}}{S^2_{\text{общ}}} = \dfrac{86,5722}{89,145} \approx 0,97.$

То есть данная гиперболическая регрессионная модель описывает 97 % общего рассеяния значений переменной η от среднего значения $\bar{y}$.

Для сравнения вычислим значение коэффициента детерминации для построенной на основании этого же набора опытных данных линейной модели $\bar{y}(x) = -7,26x + 15,51$.

В этом случае

$$S^2_{\text{регр}} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{y}(x_i) - \bar{y})^2 = 67,982; \qquad \hat{R}^2_{\text{лин}} = \frac{S^2_{\text{регр}}}{S^2_{\text{общ}}} = \frac{67,982}{89,145} \approx 0,76.$$

Это означает, что на основании регрессионной модели линейного типа можно объяснить только 76 % наблюдаемого рассеяния значений переменной η.

Проверим значимость $R^2_{\text{гиперб}}$ и $R^2_{\text{лин}}$. В данном случае $m = 2,$ поскольку на основании выборочных данных мы оценивали значения двух параметров ($\hat{\beta}_0$ и $\hat{\beta}_1$).

$$F_{\text{гиперб}} = \hat{R}^2_{\text{гиперб}} \frac{n-m}{(m-1)(1-\hat{R}^2_{\text{гиперб}})} = 0,97 \frac{10-2}{(2-1)(1-0,97)} \approx 258,67;$$

$$F_{\text{лин}} = \hat{R}^2_{\text{лин}} \frac{n-m}{(m-1)(1-\hat{R}^2_{\text{лин}})} = 0,76 \frac{10-2}{(2-1)(1-0,76)} \approx 25,33.$$

По таблицам квантилей распределения Фишера (определим для $\alpha = 0,05,\ \nu_1 = 2-1 = 1,\ \nu_2 = 10-2 = 8 \quad F_{0,05,\,1,\,8} = 5,32.$

Поскольку $F_{\text{гиперб}} > F_{0,05,\,1,\,8}$ и $F_{\text{лин}} > F_{0,05,\,1,\,8}$, значения коэффициентов детерминации, оценивающих тесноту зависимости гиперболического и линейного видов, значимо отличаются от нуля, и построенные уравнения могут быть использованы для описания изучаемой зависимости.

4 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вероятностный эксперимент. Пространство элементарных исходов. Операции над событиями

1. Студенту необходимо сдать три экзамена. Рассмотрим события: A_1 – сдача первого экзамена; A_2 – сдача второго экзамена; A_3 – сдача третьего экзамена. Записать выражения, соответствующие осуществлению следующих событий:

B = {сдача всех трёх экзаменов};

C = {сдача хотя бы одного экзамена из трёх};

D = {сдача только первого экзамена};

F = {сдача не более одного экзамена};

G = {сдача двух экзаменов};

H = {студент не сумел сдать только второй экзамен}.

2. E: из множества студентов случайным образом выбирается один студент. Рассмотрим события:

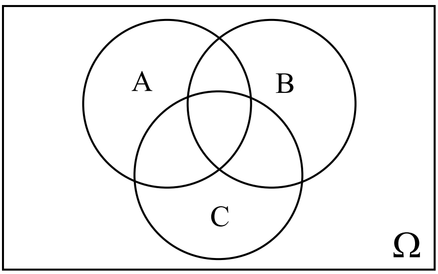
A = {выбранный студент обучается на II курсе};

B = {выбранный студент проживает в общежитии}.

C = {выбранный студент – парень}.

В чём состоят события $C \cup D$, $A \cap B \cap C$, $A \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{B} \cup D$, $A \setminus (C \cup D)$?

3. E: из прямоугольной области случайным образом выбирается точка. Определим события



A = {выбранная точка принадлежит кругу A};

B = {выбранная точка принадлежит кругу B};

C = {выбранная точка принадлежит кругу C}.

Закрасить области, содержащие элементарные исходы, благоприятствующие наступлению следующих событий:

1) $(A-C)+B,\ \bar{A}-BC,\ C(A+\bar{B}),\ \bar{C}(A+B).$

2) $(C-A)+B,\ \overline{AB}-C,\ (A-B)\bar{C},\ (\bar{A}-\bar{B})C.$

3) $AB-C,\ (\bar{A}+\bar{B})-C,\ (\overline{A+B})-C,\ A\overline{BC}.$

4) $A(B-C),\ (\bar{A}-\bar{B})+C,\ (\overline{A+B})C,\ (\bar{A}+\bar{B})C.$

5) $C-AB,\ (\overline{B-C})A,\ (B+C)\bar{A},\ (\bar{A}-\bar{B})-C.$

6) $A-(B+C),\ (\overline{A+B+C}),\ \bar{C}(\bar{A}+B),\ \bar{C}(A-B).$

7) $A+(B-C),\ (\overline{A+C})\bar{B},\ \overline{(A-C)B},\ A+\bar{B}+C.$

8) $AB-C,\ C+(\overline{A-B}),\ C(\overline{A+B}),\ (A-\bar{B})+C.$

9) $(C-A)+B,\ A-(\overline{B+C}),\ A-\bar{B}+\bar{C},\ (A-B)\overline{C}.$

10) $B-(C+A),\ AB\bar{C},\ C-(\overline{A+B}),\ C+(\overline{A-B}).$

Вероятность событий. Методы определения вероятностей. Элементы комбинаторики

1. Подбрасываются три монеты. Какова вероятность того, что: а) одна монета упадёт гербом вверх; б) хотя бы одна монета упадёт гербом вверх; в) не более трёх монет упадут гербом вверх?

2. Подбрасывается игральная кость. Какова вероятность того, что: а) выпадет 3 очка; б) выпадет чётное число очков; в) выпадет не менее 4 очков?

3. Подбрасываются две игральные кости. Определить вероятности следующих событий: A = {сумма выпавших очков будет равна 8}; B = {выпадет чётное число очков}; C = {на первой кости выпадет 3, на второй – чётное число очков}; D = {на первой кости выпадет чётное число очков, на второй – нечётное}; F = {на одной из костей выпадет чётное число очков, на другой – нечётное}; G = {сумма выпавших очков будет делится на 2}; H = {на обеих костях выпадет одинаковое число очков}; I = {на первой кости выпадет в два раза больше очков, чем на второй}.

4. В урне находятся 20 шаров: 8 красных, 6 синих и 6 белых. Случайным образом выбирается 1 шар. Какова вероятность того, что он: а) красного цвета; б) не белый?

5. В лифт 9-этажного дома заходят 3 человека. Считая, что каждый из них может с одинаковой вероятностью выйти на любом этаже со 2-го по 9-й, найти вероятность того, что: а) все люди выйдут на одном этаже; б) все люди выйдут на разных этажах; в) хотя бы два человека выйдут на одном этаже.

6. Студент забыл три последние цифры телефона своего однокурсника. Какова вероятность того, что, набрав эти цифры наугад, студент попадёт по нужному номеру, если: а) он помнит, что это цифры 1, 2, 3 в некотором порядке; б) он помнит, что все цифры разные; в) он ничего о них не помнит?

7. Билет лотереи «Спортлото 5 из 36» считается выигрышным, если угаданы хотя бы 3 числа из 5. Какова вероятность того, что билет окажется выигрышным?

8. В какой из лотерей «Спортлото 5 из 36» и «Спортлото 6 из 45» вероятность выигрыша является наибольшей, если в первой из них билет считается выигрышным, когда угаданы хотя бы 3 числа из 5, а во второй – хотя бы 4 числа из 6?

9. Колода карт (36 листов) делится наугад на две равные части. Какова вероятность того, что: а) в одной из пачек будет 4 туза, а в другой – ни одного; б) в одной из пачек будет 3 туза, а в другой – 1; в) в каждой пачке будет по 2 туза?

10. Студент может добраться до университета на автобусе, который ходит с интервалом 8 минут, или на троллейбусе, который ходит с интервалом 15 минут. Студент пришёл на остановку в произвольный момент времени. Какова вероятность того, что транспорт нужно будет ожидать не более 5 минут?

11. На 10 одинаковых карточках написаны числа от 0 до 9. Определить вероятность того, что наудачу образованное с помощью двух карточек число делится без остатка: а) на 15; б) на 20.

12. В ящике 10 одинаковых деталей, помеченных номерами 1, 2, 3, …, 10. Наудачу извлекают 3 детали. Найти вероятность того, что среди деталей окажется: а) деталь № 1; б) детали № 1 и № 2.

13. На 8 карточках написаны числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Наудачу берутся 2 карточки. Определить вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима.

14. Из 10 билетов выигрышными являются 2. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу 5 билетов: а) один выигрышный; б) два выигрышных.

15. На 4 картах написано слово «сорт». Карты перемешиваются. Найти вероятность того, что на 4 вытянутых по порядку по одной и расположенных в одну линию картах можно будет прочесть слово «трос».

16. В группе 12 студентов, среди которых 4 отличника. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди них: а) 3 отличника; б) 4 отличника.

17. На полке стоит 13 книг, из которых 3 тома А. С. Пушкина. Наудачу берут 8 книг. Найти вероятность того, что среди них: а) 3 тома А. С. Пушкина; б) 2 тома А. С. Пушкина.

18. На 11 картах написано слово «поликлиника». Карты перемешиваются. Найти вероятность того, что на 7 вытянутых по одной и расположенных в одну линию карточках можно будет прочесть слово «клиника».

Теоремы сложения и умножения. Условная вероятность. Независимость событий

1. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом. В 1-й 5 белых, 11 черных, 8 красных шаров; во 2-й – 10, 8 и 6 соответственно. Из обеих урн наудачу извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара одного цвета.

2. На складе имеется 100 тензорезисторов 3-го класса точности, 220 тензорезисторов 2-го класса точности и 180 тензорезисторов 1-го класса точности. Какова вероятность того, что случайным образом выбранный тензорезистор будет иметь класс точности не ниже 2-го?

3. Вероятность того, что изготовленная на 1-м станке деталь будет первосортной, равна 0,6. При изготовлении такой детали на втором станке эта вероятность будет равна 0,7. На первом станке изготовили 3, а на втором – 4 детали. Определить вероятность того, что: а) все 7 деталей будут первосортными; б) все 7 – не первосортные.

4. Известно, что 80 % железобетонных конструкций выпускаются по типовым проектам, 12 % – по повторно применяемым проектам и 8 % – по индивидуальным проектам. Найти вероятность того, что случайным образом выбранная железобетонная конструкция выпущена по типовому или по повторно применяемому проекту.

5. Два стрелка одновременно выполняют по одному выстрелу, пытаясь поразить мишень. Известно, что 1-й стрелок поражает мишень в среднем в 60 случаях из 100, а 2-й стрелок – в 70 случаях из 100. Какова вероятность того, что: а) мишень будет поражена; б) оба стрелка попадут в цель?

6. Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятность попадания в круг равна 0,2, а в кольца – 0,15 и 0,3. найти вероятность попадания в мишень.

7. ОКТ проверяет изделия на соответствие стандарту. Вероятность того, что изделие стандартное, равна 0,7. Найти вероятность того, что из трёх проверенных изделий: а) только одна стандартная; б) ни одной стандартной.

8. При испытании бетона на морозостойкость в качестве среды насыщения и оттаивания можно использовать воду (I метод), а можно – 5%-й водный раствор хлористого натрия (II метод). Известно, что 8 % отобранных из некоторой партии образцов бетона не выдержали проверку на морозостойкость по I методу и 6 % – по II методу. 5 % образцов не выдержали проверку обоими методами. Будут ли являться независимыми события: A = {образец не выдержал проверку на морозостойкость по I методу}; B = {образец не выдержал проверку на морозостойкость по II методу}?

9. На складе находятся 5 рулонов рубероида с пылевидной посыпкой и 10 рулонов рубероида с мелкозернистой посыпкой. Кладовщик заметил, что в результате неправильного хранения было повреждено 4 рулона. Какова вероятность того, что пылевидную посыпку имеют: а) все 4 повреждённых рулона; б) хотя бы 2 повреждённых рулона; в) не более 3 повреждённых рулонов?

10. Имеется набор из 9 одинаковых свёрл для перфоратора. Для работы каждый день берут 3 сверла, после работы их возвращают обратно. При выборе свёрл новые от бывших в употреблении не отличаются. Какова вероятность того, что после трёх дней работы в наборе не останется новых свёрл?

11. Группа инструментального приёмочного контроля выборочно проверяет соответствие выполненных строительно-монтажных работ проекту, строительным нормам и правилам, стандартам и другим действующим нормативным документам. Вероятность обнаружения несоответствия за один цикл проверок равна p. Найти вероятность

того, что за n циклов проверок будет обнаружено хотя бы одно несоответствие.

12. Из N водонагревательных приборов M бракованных. Для контроля выбирается n приборов. Какова вероятность того, что среди выбранных приборов окажется ровно m бракованных?

13. В изготовлении термомеханически упрочнённой арматурной стали для железобетонных конструкций последовательно задействовано трое рабочих. Первый рабочий нарушает технологический процесс с вероятностью 0,05, второй – с вероятностью 0,04 и третий – с вероятностью 0,03. Какова вероятность того, что технологический процесс будет нарушен?

14. Завод изготавливает асбестоцементные трубы. Каждая труба может не выдержать испытания на разрыв с вероятностью 0,01, на раздавливаемость – с вероятностью 0,05 и на изгиб – с вероятностью 0,02. Какова вероятность того, что: а) труба будет забракована; б) труба не выдержит только проверку на раздавливаемость; в) труба не выдержит ни одного из трёх испытаний?

15. Завод изготавливает отопительные конвекторы. Каждый конвектор имеет дефект с вероятностью p_1. Конвектор осматривается контролёром, который обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_2. Если дефект не обнаружен, то конвектор пропускается в готовую продукцию. Кроме того, контролёр может по ошибке забраковать конвектор, не имеющий дефекта, с вероятностью p_3. Найти вероятность того, что: а) конвектор будет забракован; б) конвектор будет ошибочно забракован; в) бракованный конвектор будет пропущен в готовую продукцию?

16. Студент пришёл на экзамен, зная из тридцати вопросов только 25. В билете три вопроса. Найти вероятность того, что: а) он сумеет ответить на все вопросы; б) он сумеет ответить на два вопроса из трёх; в) он не сможет ответить ни на один из вопросов.

17. Студенту необходимо сдать три экзамена. Вероятность сдать первый равна 0,8, второй – 0,7, третий – 0,6. Сколько экзаменов он вероятнее всего сдаст?

18. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что для ввода двигателя в работу придётся включить зажигание: а) один раз; б) два раза; в) не более двух раз; г) более трёх раз.

Формулы полной вероятности и Байеса

1. Партия изделий включает в себя 20 % изделий высшего сорта, 70 % изделий первого сорта и 10 % изделий второго сорта. Известно, что гарантийный срок выдерживает 99 % изделий высшего сорта, 90 % изделий первого сорта и 80 % изделий второго сорта. Наудачу отбирают одно изделие. Найти вероятность того, что: а) изделие выдержит гарантийный срок; б) изделие является изделием первого сорта, если известно, что оно выдержало гарантийный срок.

2. Страховая компания делит застрахованных по классам риска: первый класс – малый риск, второй класс – средний риск, третий класс – большой риск. Среди всех клиентов 50 % – первого класса, 40 % – второго класса, 10 % – третьего класса. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса равняется 0,04, второго класса – 0,02, третьего класса – 0,01. Какова вероятность того, что случайно выбранный клиент получит страховое вознаграждение. Клиент получил вознаграждение, какова вероятность того, что он относится к 1-му классу риска.

3. Три контролёра проверяют три пластмассовых трубопровода. В каждом из трубопроводов имеются дефекты, о которых контролёры заранее не знают. Каждый контролёр выбирает трубопровод случайным образом и независимо от других. Трубопровод, обследованный контролёром, будет признан негодным с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что два трубопровода будут признаны негодными, а третий – нет?

4. В ящике хранятся 12 новых свёрл для перфоратора и 8 бывших в употреблении. Для работы взяли 2 сверла, после работы их вернули обратно. Через некоторое время из ящика опять взяли 2 сверла. Найти вероятность того, что оба они новые.

5. Прибор состоит из двух узлов, работа каждого из них необходима для работы прибора в целом. Для первого узла вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока равна 0,98, для второго – 0,95. В результате эксплуатации оказалось, что прибор вышел из строя до истечения гарантийного срока. Найти вероятность того, что первый узел исправен, а второй отказал.

6. На складе находятся четыре однотипных прибора, характеризующиеся различными сроками эксплуатации. Для этих приборов вероятности безотказной работы в течение времени T равны соответ-

ственно 0,9, 0,8, 0,7 и 0,6. Рабочий случайным образом выбирает один из приборов. Какова вероятность того, что в течение времени T этот прибор проработает безотказно?

7. На открытой площадке хранятся три партии оконных панелей, по 100 штук в каждой. Известно, что в первой партии находятся три панели, отклонения линейных размеров которых превышают допустимые. Во второй партии имеется две таких панели, а в третьей – ни одной. Для контрольной проверки линейных размеров случайным образом отбирают панель из какой-либо партии: а) какова вероятность того, что линейные размеры выбранной панели будут превышать допустимые; б) какова вероятность того, что панель была выбрана из первой партии или из второй, если линейные размеры выбранной панели превышают допустимые?

8. В строительную организацию поступила партия пассажирских лифтов, 30 % из которых изготовлено на заводе А, а 70 % – на завод В. Известно, что 95 % лифтов, изготовленных на заводе А, и 90 % лифтов, изготовленных на заводе В, имеют среднюю наработку на отказ не менее 500 часов. При строительстве жилого дома был установлен пассажирский лифт: а) какова вероятность того, что он имеет среднюю наработку на отказ менее 500 часов; б) какова вероятность того, что он изготовлен на заводе В, если установленный лифт имеет среднюю наработку на отказ менее 500 часов?

9. Имеются две партии образцов строительной извести. Первая партия содержит 100 образцов, из которых 6 по результатам проведения химического анализа не соответствуют ГОСТ. Вторая партия содержит 150 образцов, из которых 8 не соответствуют ГОСТ. Из первой партии берётся 60 образцов, а из второй – 40 образцов. Эти 100 образцов смешиваются, и образуется новая партия. Из новой партии извлекается один образец. Какова вероятность того, что по результатам проведения химического анализа он не будет соответствовать ГОСТ?

10. На 5 железобетонных сборных конструкциях нанесена маркировка – порядковый номер конструкции в партии, представляющая собой числа от 1 до 5 включительно. Для контроля выбирают одну за другой две конструкции. Какова вероятность того, что разность между порядковым номером первой конструкции и порядковым номером второй конструкции будет не менее 2?

Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли

1. Тестовое задание состоит из 10 вопросов, предусматривающих ответы «да» или «нет». Предположим, тестируемый не знает ответ ни на один из вопросов и выбирает ответы наугад. Требуется: а) определить вероятность того, что он даст не менее 5 правильных ответов, необходимых для сдачи теста; б) найти наиболее вероятное число правильных ответов, которые даст тестируемый, и вероятность получения этого наиболее вероятного числа ответов.

2. В наличии имеются железо-ванадиевые и медные сварочные электроды в отношении 7:3. Для ручной дуговой сварки выбирается 8 электродов. Какова вероятность того, что среди них: а) хотя бы один медный; б) не менее двух медных; в) ровно два медных?

3. Телевизионный канал рекламирует новый вид автомобилей. Вероятность того, что телезритель увидит эту рекламу, оценивается в 10 %. Требуется: а) определить вероятность того, что из 20 телезрителей, отобранных в случайном порядке, рекламу увидят ровно 5 человек; б) определить вероятность того, что из 20 телезрителей, отобранных в случайном порядке, рекламу увидят более 4 человек; в) найти наиболее вероятное число телезрителей, увидевших рекламу автомобилей.

4. Девять железобетонных конструкций проходят испытания защитного лакокрасочного покрытия на паронепроницаемость. Вероятность того, что покрытие успешно пройдёт испытание, равна 0,9. Какова вероятность того, что из пяти конструкций испытания успешно завершатся для четырёх?

5. В осветительную сеть было подключено 6 энергосберегающих ламп. Каждая лампа в течение года перегорает с вероятностью 0,1. Какова вероятность того, что в течение года необходимо будет заменить не менее половины ламп?

6. В результате проверки на огнестойкость выяснилось, что только 2/3 стальных балок имеют предел огнестойкости свыше 18 минут. Какова вероятность того, что из 5 балок хотя бы 3 будут иметь предел огнестойкости свыше 18 минут?

7. В течение времени t эксплуатируются 10 приборов. Вероятность выхода из строя за это время для каждого из них равна 0,6. Какова вероятность того, что мастер, вызванный для ремонта неисправ-

ных приборов по истечении времени t, не справится со своей задачей за 8 часов, если для ремонта каждого прибора ему требуется 2 часа?

8. Завод выпускает 70 % изделий высшего сорта, 20 % – первого сорта и 10 % – второго сорта. Покупатель приобретает 8 изделий. Найти вероятность того, что среди них будет 5 изделий высшего сорта и 3 – второго.

Предельная теорема Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа

1. В выставке фирм, реализующих компьютерную технику и комплектующие для нее, участвуют 70 представителей фирм. Вероятность того, что в определенный день представителем фирмы будет заключен контракт на продажу продукции, равна 0,15 Определить вероятность того, что из 70 представителей фирм в определенный день заключат контракты: а) более 50 представителей; б) ровно 50 представителей.

2. Два процента произведённых паркетных щитов не удовлетворяют ГОСТ 862.4. Какова вероятность того, что из 500 паркетных щитов не удовлетворяет требованиям ГОСТ 862.4: а) один щит; б) не более двух щитов?

3. Партия фанерных плит марки ПФ-Х содержит 35 % плит с отклонением по толщине. Предприятие закупило 700 плит. Какова вероятность того, что имеют отклонение по толщине: а) ровно 300 плит; б) не более 300 плит?

4. Вероятность того, что выпускник экономического факультета «откроет свое дело», равна 0,03. Определить вероятность того, что из 100 выпускников экономического факультета свое дело откроют: а) менее 5 выпускников; б) не менее 5 выпускников; в) хотя бы один выпускник.

5. Известно, что за счет типизации количество вновь разработанных чертежей деталей и узлов в проекте составляет 11 %. Проект включает в себя 800 чертежей деталей и узлов. Найти наиболее вероятное число чертежей деталей и узлов, которые необходимо будет разработать, и определить вероятность этого события.

6. При подборе состава строительных растворов в 40 % случаев используется рецептурно-технологический способ, а в 60 % случаев – расчётно-экспериментальный метод. Состав строительных растворов

подбирался 250 раз. Какова вероятность того, что рецептурно-технологический способ подбора использовался ровно 95 раз? Какова вероятность того, что рецептурно-технологический способ подбора использовался от 90 до 140 раз?

7. Аварийное усиление строительных конструкций наблюдается в среднем в 1 случае из 500. Какова вероятность того, что из 1000 проведённых усилений строительных конструкций аварийное усиление имело место: а) два раза; б) не менее пяти раз?

8. В кирпичных многоквартирных домах расположено 25 % квартир частного жилищного фонда. На продажу выставлено 480 квартир. Какова вероятность того, что не более 100 из них находятся в кирпичных домах?

Дискретные случайные величины. Закон распределения и числовые характеристики дискретных случайных величин

Для определенной в условиях задач (с 1 по 10) дискретной случайной величины ξ:

1) построить ряд распределения и столбцовую диаграмму;

2) найти функцию распределения и построить ее график;

3) вычислить числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и моду.

1. Производятся три броска мячом в корзину. Вероятность попадания мячом в корзину при каждом броске равна 0,4. Случайная величина ξ – число попаданий в серии из трех бросков.

2. Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов, для каждого из которых вероятности отказа соответственно, равны: 0,4; 0,3; 0,2; 0,1. Случайная величина ξ – число отказавших приборов.

3. На пути движения автомашины 3 светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Случайная величина ξ – число светофоров, пройденное машиной без остановки.

4. Производятся 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,7 и после каждого произведенного выстрела она уменьшается на 0,1. Случайная величина ξ – число попаданий в серии из трех выстрелов.

5. Вероятность безотказной работы в течение гарантийного срока для телевизоров первого, второго и третьего типа соответственно равны: 0,8; 0,7; 0,6. Случайная величина ξ – число телевизоров, проработавших гарантийный срок среди трех телевизоров разных типов.

6. Вероятность выпуска прибора, удовлетворяющего требованиям высшего качества, равна 0,9. В контрольной партии 4 прибора. Случайная величина ξ – число приборов в контрольной партии, удовлетворяющих требованиям высшего качества.

7. Вероятность поступления вызова на АТС в течение 1 минуты равна 0,5. Случайная величина ξ – число вызовов, поступивших на АТС в течение четырех минут.

8. Вероятность успешной сдачи данного экзамена для каждого из трех студентов равна 0,8. Случайная величина ξ – число студентов, успешно сдавших экзамен.

9. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 1/5. Случайная величина ξ – число выигрышных билетов среди четырех купленных.

10. При установившемся технологическом процессе предприятие выпускает 3/4 своих изделий первым сортом и 1/4 – вторым. Случайная величина ξ – число изделий первого сорта среди взятых наугад четырех изделий.

11. Завод отправил на базу 500 доброкачественных изделий. Для каждого из изделий вероятность повреждения в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что среди прибывших на базу изделий будет не более трех поврежденных.

12. Найти вероятность того, что в течение смены произойдет не более двух отказов оборудования, при условии, что среднее число отказов в течение смены равно 2 (поток отказов оборудования можно считать простейшим).

13. Поток заявок, поступающих на телефонную станцию, представляет собой простейший поток событий. Известно, что в течение некоторого промежутка времени среднее число вызовов, поступающих за один час, равно 200. Для этого промежутка времени найти вероятность того, что за одну минуту поступит более трех вызовов.

14. По данным длительной проверки качества запчастей определенного вида брак составляет 5 %. Изготовлено 600 запчастей. Определить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа годных запчастей.

15. Поток грузовых железнодорожных составов, прибывающих на сортировочную горку, можно считать простейшим с интенсивностью 3 состава в час. Найти вероятность того, что в течение 30 минут на горку прибудет хотя бы один состав.

16. Для некоторого промежутка времени суток известно, что среднее число запросов, поступающих в справочную службу вокзала в течение часа, равно 30. Поток поступающих запросов можно считать простейшим. Для этого промежутка времени найти вероятность того, что в течение минуты поступит не менее двух вызовов.

17. Завод отправил на базу 400 доброкачественных изделий. Для каждого из изделий вероятность повреждения в пути равна 0,001. Найти вероятность того, что среди прибывших на базу изделий будет не более трех поврежденных.

18. Поток отказов пассажирских лифтов в течение месяца в жилом 8-подъездном доме удовлетворяет требованиям простейшего потока событий. Среднее число отказов в течение месяца равно 15. Определить вероятность того, что число отказов лифтового оборудования в течение суток не превысит двух.

19. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Считая, что ошибки измерения распределены равномерно, найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, меньшая 0,04.

20. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения – 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 минут.

Непрерывные случайные величины. Закон распределения и числовые характеристики непрерывных случайных величин

Закон распределения непрерывной случайной величины ξ задан функцией плотности $f(x)$ (задачи с 1 по 10). Требуется:

1) определить значение параметра C, построить график функции плотности;

2) найти функцию распределения данной случайной величины и построить её график;

3) вычислить числовые характеристики случайной величины ξ: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану;

4) найти вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, принадлежащее отрезку $[a; b]$.

1. $$f(x)=\begin{cases} C(3-x), & x\in[0;\,2]; \\ 0, & x\notin[0;\,2]; \end{cases}$$
$a=1;\ b=2.$

2. $$f(x)=\begin{cases} C\,|\,x\,|, & x\in[-2;\,2]; \\ 0, & x\notin[-2;\,2]; \end{cases}$$
$a=-1;\ b=1.$

3. $$f(x)=\begin{cases} C(x-4), & x\in[0;\,3]; \\ 0, & x\notin[0;\,3]; \end{cases}$$
$a=0;\ b=2.$

4. $$f(x)=\begin{cases} C\,|\,x^3\,| & x\in[-1;\,1]; \\ 0, & x\notin[-1;\,1]; \end{cases}$$
$a=0;\ b=1.$

5. $$f(x)=\begin{cases} Cx^2, & x\in[-3;\,0]; \\ 0, & x\notin[-3;\,0]; \end{cases}$$
$a=-3;\ b=-2.$

6. $$f(x)=\begin{cases} C, & x\in[-3;\,5]; \\ 0, & x\notin[-3;\,5]; \end{cases}$$
$a=0;\ b=3.$

7. $$f(x)=\begin{cases} C(1-x^2), & x\in[-1;\,1]; \\ 0, & x\notin[-1;\,1]; \end{cases}$$
$a=-0{,}5;\ b=0{,}5.$

8. $$f(x)=\begin{cases} C(x^2-x), & x\in[1;\,3]; \\ 0, & x\notin[1;\,3]; \end{cases}$$
$a=2;\ b=4.$

9. $$f(x)=\begin{cases} x+C, & x\in[4;\,5]; \\ 0, & x\notin[4;\,5]; \end{cases}$$
$a=4;\ b=4{,}5.$

10. $$f(x)=\begin{cases} C\,|1-x\,|, & x\in[0;\,5]; \\ 0, & x\notin[0;\,5]; \end{cases}$$
$a=0;\ b=3.$

11. Высота грузовой платформы после года эксплуатации имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием 1100 мм и средним квадратическим отклонением 30 мм. По правилам технической эксплуатации допускаются изменения высоты до 20 мм в сторону увеличения и 50 мм в сторону уменьшения. Найти вероятность того, что через год эксплуатации высота платформы будет соответствовать правилам технической эксплуатации.

12. Номинальный размер ширины колеи стрелочного перевода равен 1520 мм, а фактический размер имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием, равным 1520 мм, и средним квадратическим отклонением 10 мм. Колея не требует ремонта,

если отклонение её ширины от номинального размера не превышает по сужению 4 мм, по уширению – 8 мм. Найти вероятность того, что колею не придется ремонтировать.

13. Размер деталей подчинен закону нормального распределения с математическим ожиданием 15 мм и дисперсией 0,25 мм^2. Определить ожидаемый процент брака, если допустимые размеры деталей находятся в пределах от 14 до17 мм.

14. Время ремонта пути имеет показательный закон распределения со средним значением 6 часов. Найти вероятность того, что ремонт пути будет длиться не более 8 часов.

15. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 100 м. Найти вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной.

16. Для замера напряжений в конструкциях используются специальные тензодатчики. Определить среднюю квадратическую ошибку тензодатчика, если известно, что он не имеет систематических ошибок, а случайные ошибки распределены нормально и с вероятностью 0,8 не выходят за пределы $\pm$ 2 мкм.

17. Производится измерение вала без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением, равным 1 мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 1,5 мм.

18. При взвешивании на весах допускаются случайные ошибки с дисперсией, равной 100 г^2, и систематической ошибкой, равной 20 г. Полагая, что ошибки распределены по нормальному закону, определить вероятность того, что ошибка при взвешивании предмета по абсолютной величине не превысит 50 г.

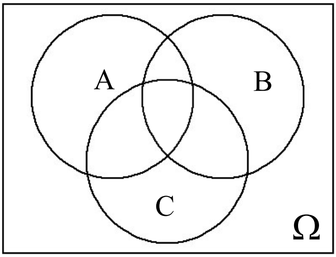
19. Срок службы прибора представляет собой случайную величину, подчиненную закону нормального распределения со средним значением 15 лет и средним квадратическим отклонением 2 года. Определить вероятность того, что прибор прослужит свыше 20 лет.

20. Расход воды предприятием на поливку территории имеет показательный закон распределения со средним 350 м^3/год. Найти вероятность того, что расход воды будет менее 400 м^3/год.

5 ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Расчётно-графическая работа № 1
Случайные события. Вероятности случайных событий

Задача 1. E: из прямоугольной области случайным образом выбирается точка. Определим события:

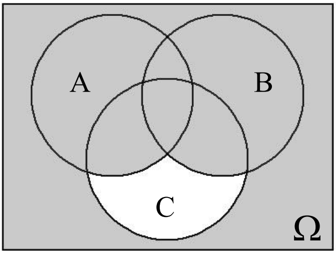


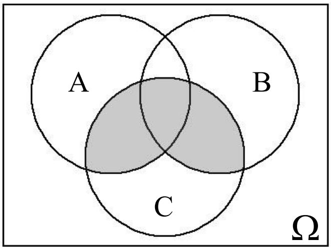
A = {выбранная точка принадлежит кругу A}; B = {выбранная точка принадлежит кругу B}; C = {выбранная точка принадлежит кругу C}.

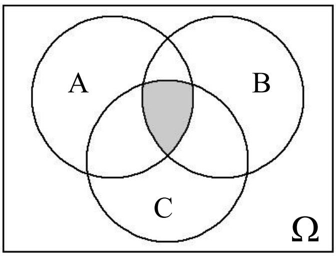
Заштриховать области, которые содержат исходы, благоприятствующие наступлению следующих событий:

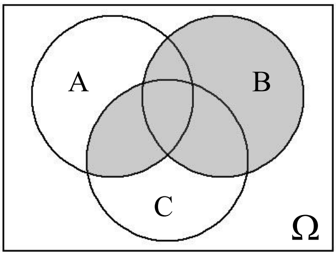
а) $A\cup B\cup\overline{C}$; б) $(A\cup B)\cap C$; в) $A\setminus\overline{C\cap B}$; г) $(C\setminus\overline{A})\cup B$.

Решение.

а)


б)


в)


г)


Задача 2. Строительной организации необходимо сдать три объекта: объект A_1, объект A_2 и объект A_3. Считая все возможные варианты очерёдности сдачи объектов равновероятными, найти вероятности следующих событий:

A = {объект A_2 будет сдан первым};

B = {объект A_1 будет сдан позже объекта A_2};

C = {объект A_1 будет сдан первым, A_2 – вторым, A_3 – третьим}.

Решение. E: строительная организация сдаёт объекты A_1, A_2 и A_3 в произвольном порядке. Поставим в соответствие объекту A_1 число 1, объекту A_2 – число 2, а объекту A_3 – число 3.

В качестве элементарного исхода рассмотрим $\omega = (i_1, i_2, i_3)$, где i_1, i_2, i_3 – номера объектов, которые сдадут соответственно первым, вторым и третьим. Тогда пространство элементарных исходов будет иметь вид

$\Omega = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 2, 1), (3, 1, 2)\}$.

Число всех возможных исходов $n = 6$ конечно, все исходы равновозможны, поэтому для вычисления вероятностей интересующих нас событий можно воспользоваться классическим методом.

Выпишем исходы, благоприятствующие событию A:

$$A = \{(2, 1, 3), (2, 3, 1)\}.$$

Число исходов, благоприятствующих событию A, равно 2: $m_A = 2$.

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Выпишем исходы, благоприятствующие событию B:

$$B = \{(2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 2, 1)\}.$$

Число исходов, благоприятствующих событию B, равно 3: $m_B = 3$.

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично найдем вероятность события C: $C = \{(1, 2, 3)\}$, $m_C = 1$.

$$P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{1}{6}.$$

О т в е т : $P(A) = 1/3$; $P(B) = 1/2$; $P(C) = 1/6$.

Задача 3. На складе находятся 20 выносных удлинителей, среди которых 14 изготовлены из инвара. Для установки индикаторов случайным образом отбираются 3 удлинителя. Какова вероятность того, что: а) все 3 удлинителя изготовлены из инвара, б) только один удлинитель изготовлен из инвара.

Решение. Определим события:

A_i = {i-й удлинитель изготовлен из инвара}, i = 1, 2, 3;

B_1 = {3 удлинителя изготовлены из инвара};

B_2 = {только 1 удлинитель изготовлен из инвара}.

а) Событие B_1 можно представить в виде

$$B_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

События A_1, A_2 и A_3 являются зависимыми. Применяя теорему умножения для зависимых событий, получим

$$P(B_1) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) =$$
$$= \frac{14}{20} \cdot \frac{13}{19} \cdot \frac{12}{18} \approx 0,319.$$

б) Событие B_2 можно выразить следующим образом:

$$B_2 = (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3).$$

События $A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$, $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3$, $\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3$ являются несовместными. Применяя сначала теорему сложения для несовместных событий, а затем теорему умножения для зависимых событий, получим

$$P(B_2) = P((A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3)) =$$
$$= P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) =$$
$$= P(A_1)P(\overline{A}_2 \mid A_1)P(\overline{A}_3 \mid A_1 \cap \overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2 \mid \overline{A}_1)P(\overline{A}_3 \mid \overline{A}_1 \cap A_2) +$$
$$+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)P(A_3 \mid \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = \frac{14}{20} \cdot \frac{6}{19} \cdot \frac{5}{18} + \frac{6}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{5}{18} +$$
$$+ \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{14}{18} \approx 0,184.$$

О т в е т : а) 0,319; б) 0,184.

Задача 4. Изделие проверяется на стандартность одним из двух контролеров. Первый контролер проверяет 60 % всех изделий, второй – 40 %. Вероятность того, что изделие будет признано стандартным первым контролером, равна 0,9, вторым – 0,8: а) какова вероятность того, что случайно выбранное изделие окажется стандартным; б) какова вероятность того, что изделие проходило проверку у второго контролера, если известно, что оно признано стандартным?

Решение. E: проверяется качество случайно выбранного изделия. Рассмотрим событие A = {случайно выбранное изделие будет признано стандартным}. Поскольку неизвестно, какой из контролеров будет проверять это изделие, выдвинем две гипотезы:

H_1 = {изделие будет проверять первый контролер};

H_2 = {изделие будет проверять второй контролер}.

По условию вероятности гипотез: $P(H_1) = 0{,}6$, $P(H_2) = 0{,}4$.

Условные вероятности события A при осуществлении этих гипотез: $P(A|H_1) = 0{,}9$, $P(A|H_2) = 0{,}8$.

а) Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}9 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}86.$$

б) Для определения вероятности того, что изделие проверял второй контролер, при условии, что оно признано стандартным, воспользуемся формулой Байеса

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A \mid H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}8}{0{,}86} \approx 0{,}372.$$

Ответ: а) 0,86; б) 0,372.

Задача 5. На складе находятся партии образцов мелкозернистого бетона. Известно, что 75 % образцов соответствуют классу В25. Случайным образом отбирается 5 образцов. Какова вероятность того, что: а) 3 образца будут соответствовать классу В25; б) классу В25 будут соответствовать не более 2 образцов?

Решение. E: классификация 5 образцов бетона. Данный эксперимент можно рассматривать как серию из $n = 5$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность события A = {образец будет соответствовать классу В25} одинакова и равна 0,75: $p = 0{,}75$, $q = 0{,}25$.

а) Для вычисления события B = {3 образца будут соответствовать классу В25} воспользуемся формулой Бернулли ($k = 3$):

$$P(B) = P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}75^3 \cdot 0{,}25^{5-3} = 10 \cdot 0{,}75^3 \cdot 0{,}25^2 \approx 0{,}26\,.$$

б) Найдем вероятность события C = {классу В25 будут соответствовать не более 2 образцов}:

$$P(C) = P_5(\le 2) = \sum_{k=0}^{2} P_5(k) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2).$$

Применяя формулу Бернулли для каждого слагаемого, имеем:

$P_5(0) = C_5^0 \cdot 0,75^0 \cdot 0,25^{5-0} = 0,25^5 \approx 0,001;$

$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0,75^1 \cdot 0,25^{5-1} = 5 \cdot 0,75^1 \cdot 0,25^4 \approx 0,015;$

$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,75^2 \cdot 0,25^{5-2} = 10 \cdot 0,75^2 \cdot 0,25^3 \approx 0,088;$

$P(C) = P_5(\le 2) \approx 0,001 + 0,015 + 0,088 = 0,104.$

Ответ: а) 0,26; б) 0,104.

Задача 6. В наличии имеется 98 % безосновных тензорезисторов и 2 % безанкерных тензорезисторов. Для регистрации деформации конструкций было использовано 100 тензорезисторов. Какова вероятность того, что: а) 3 из них – безанкерные; б) было использовано не более 5 безанкерных тензорезисторов?

Решение. *E*: классификация 100 тензорезисторов. Данный эксперимент можно рассматривать как серию из $n = 100$ независимых испытаний, в каждом из которых с одной и той же вероятностью $p = 0,02$ может наступить событие A = {выбран безанкерный тензорезистор}.

а) Поскольку n велико, а вероятность «успеха» p мала (< 0,1), то для вычисления вероятности события B = {из 100 использованных тензорезисторов 3 безанкерных} воспользуемся приближенной формулой Пуассона. В данном случае $n = 100$; $k = 3$; $p = 0,02$; $\lambda = np = 2$.

$$P(B) = P_{100}(3) \approx \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = \frac{8e^{-2}}{6} \approx 0,18.$$

б) Найдем вероятность события C = {из 100 использованных тензорезисторов не более 5 безанкерных}:

$$P(C) = P_{100}(\le 5) = \sum_{k=0}^{5} P_{100}(k).$$

Применяя формулу Пуассона для каждого слагаемого, имеем

$$P(C) = P_{100}(\le 5) \approx \frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!} + \frac{2^3 e^{-2}}{3!} + \frac{2^4 e^{-2}}{4!} + \frac{2^5 e^{-2}}{5!} =$$

$$= e^{-2}\left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15}\right) \approx 0,982.$$

Ответ: а) 0,18; б) 0,982.

Контрольные вопросы к расчетно-графической работе № 1

1. Что такое вероятностный эксперимент? Приведите примеры.
2. Что называют элементарным исходом эксперимента?
3. Какое пространство элементарных исходов называется дискретным?
4. Какое пространство элементарных исходов называется непрерывным?
5. Что называют случайным событием? Приведите примеры.
6. Какое событие называют достоверным? Приведите примеры.
7. Какое событие называют невозможным? Приведите примеры.
8. Что называют суммой двух событий? Суммой трех событий?
9. Какие события называются совместными? Приведите примеры.
10. Какие события называются несовместными? Приведите примеры.
11. Какие события образуют полную группу? Приведите примеры.
12. Что изучает комбинаторика?
13. Сформулируйте основное правило комбинаторики.
14. Какой способ выбора элементов называется выбором без возвращения? Какой – с возвращением? Приведите примеры.
15. Какая выборка называется упорядоченной? Приведите примеры.
16. Какая выборка называется неупорядоченной? Приведите примеры.
17. Что называют вероятностью?
18. Что называют вероятностным пространством эксперимента?
19. Укажите свойства вероятности.
20. Сформулируйте классический метод определения вероятности.
21. При каких условиях можно применять классический метод определения вероятности?
22. Сформулируйте теорему сложения для двух событий.
23. Сформулируйте теорему сложения для двух несовместных событий.
24. Сформулируйте теорему умножения для двух событий.
25. В каком случае события A и B называются независимыми?
26. Сформулируйте теорему умножения для двух независимых событий.
27. Запишите формулу полной вероятности.
28. Запишите формулу Байеса. В каком случае она применяется?
29. В каком случае испытания являются независимыми?
30. Какие должны выполняться условия для того, чтобы последовательность из n испытаний называлась испытаниями Бернулли?
31. Запишите формулу Бернулли.
32. Запишите формулу для нахождения наиболее вероятного числа успехов испытаний Бернулли.
33. Сформулируйте теорему Пуассона.
34. Сформулируйте локальную теорему Муавра – Лапласа.
35. Сформулируйте интегральную теорему Муавра – Лапласа.

Расчётно-графическая работа № 2
Случайные величины.
Законы распределения случайных величин

Задача 7. Для определенной в условии задачи дискретной случайной величины:

1) построить ряд распределения и столбцовую диаграмму;

2) найти функцию распределения и построить ее график;

3) вычислить числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду.

Рассматривается работа трёх независимо функционирующих водонагревательных приборов. Вероятности безотказной работы в течение времени T для каждого из приборов равны соответственно: 0,7, 0,8 и 0,9. Случайная величина ξ – число приборов, проработавших безотказно в течение времени T.

Решение. Построим ряд распределения случайной величины ξ. Данная случайная величина может принимать четыре значения: 0, 1, 2, 3.

Рассмотрим события A_i = {i-й водонагревательный прибор проработал безотказно в течение времени T }, $i = 1, 2, 3$. Тогда $P(A_1) = 0{,}7$, $P(A_2) = 0{,}8$, $P(A_3) = 0{,}9$.

События $\{\xi = j\}$, $j = 0, 1, 2, 3$, можно представить в виде

$$\{\xi = 0\} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3;$$

$$\{\xi = 1\} = (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3);$$

$$\{\xi = 2\} = (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3);$$

$$\{\xi = 3\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

По теореме умножения вероятностей для независимых событий и теореме сложения вероятностей для несовместных событий имеем

$$P\{\xi = 0\} = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}006;$$

$$P\{\xi = 1\} = P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3)) =$$
$$= 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}092;$$

$$P\{\xi = 2\} = P((\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3)) =$$
$$= 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}398;$$

$$P\{\xi = 3\} = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}504.$$

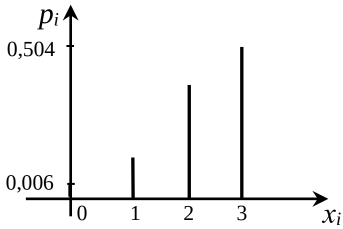
Здесь $P(\overline{A}_1) = 0{,}3$; $P(\overline{A}_2) = 0{,}2$; $P(\overline{A}_3) = 0{,}1$.

Таким образом, ряд распределения случайной величины ξ имеет вид

x_i	0	1	2	3
p_i	0,006	0,092	0,398	0,504

Проверка: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0,006 + 0,092 + 0,398 + 0,504 = 1.$

Построим столбцовую диаграмму случайной величины ξ:



Найдем функцию распределения $F(x) = P\{\xi < x\}$ случайной величины ξ:

при $x \le 0$ $F(x) = P\{\xi < x\} = 0;$

при $0 < x \le 1$ $F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} = 0,006;$

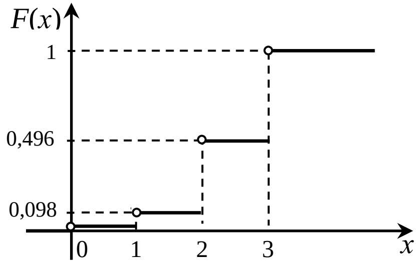
при $1 < x \le 2$ $F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} =$
$= 0,006 + 0,092 = 0,098;$

при $2 < x \le 3$ $F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} =$
$= 0,006 + 0,092 + 0,398 = 0,496;$

при $x > 3$ $F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} + \ldots + P\{\xi = 3\} =$
$= 0,006 + 0,092 + 0,398 + 0,504 = 1.$

Таким образом, функция распределения случайной величины ξ и её график имеют вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0,006, & 0 < x \le 1, \\ 0,098, & 1 < x \le 2, \\ 0,496, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$



Определим математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины:

$$M[\xi]=\sum_{i=1}^{4}x_i p_i = 0\cdot 0{,}006+1\cdot 0{,}092+2\cdot 0{,}398+3\cdot 0{,}504=2{,}4.$$

$$D[\xi]=\sum_{i=1}^{4}x_i^2 p_i-(M[\xi])^2=$$

$$=0^2\cdot 0{,}006+1^2\cdot 0{,}092+2^2\cdot 0{,}398+3^2\cdot 0{,}504-(2{,}4)^2=0{,}46.$$

$$\sigma[\xi]=\sqrt{D[\xi]}=\sqrt{0{,}46}\approx 0{,}678.$$

Как следует из ряда распределения $Mod[\xi]=3$.

Задача 8. Закон распределения непрерывной случайной величины задан функцией плотности $f(x)$.

1. Определить значение параметра C, построить график функции плотности.
2. Найти функцию распределения данной случайной величины и построить её график.
3. Вычислить числовые характеристики случайной величины ξ: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану.
4. Найти вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, принадлежащее отрезку $[a;\, b]$.

$$f(x)=\begin{cases} x+C, & x\in[0;1];\\ 0, & x\notin[0;1].\end{cases} \quad a=0{,}5;\ b=1.$$

Решение. Для определения неизвестного параметра C воспользуемся свойством функции плотности:

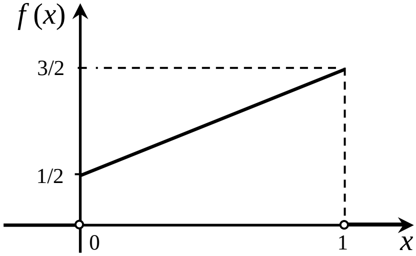
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{1}(x+C)dx+\int_{0}^{+\infty}0dx=\left(\frac{x^2}{2}+Cx\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}+C=1.$$

Отсюда $C=1/2$.

Таким образом, функция плотности и ее график имеют вид

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}, & x\in[0;1]; \\ 0, & x\notin[0;1]. \end{cases}$$



Найдем функцию распределения данной случайной величины

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt:$$

при $x\in(-\infty;0]$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0;$

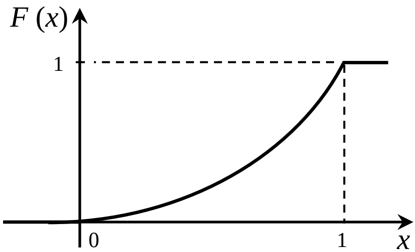
при $x\in(0;1]$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{x}\left(t+\dfrac{1}{2}\right)dt=\left(\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t}{2}\right)\Bigg|_0^x=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2};$

при $x\in(1;+\infty]$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{1}\left(t+\dfrac{1}{2}\right)dt+\int_{1}^{+\infty} 0dt=$

$$=\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Таким образом, функция распределения и ее график имеют вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}, & 0<x\le 1; \\ 1, & x>1. \end{cases}$$



Определим числовые характеристики случайной величины ξ:

$$M[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx+\int_{0}^{1} x\cdot (x+\frac{1}{2})dx+\int_{1}^{+\infty} x\cdot 0dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{12}\approx 0,583.$$

$$D[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx-(MX)^2=$$

$$=\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0dx+\int_{0}^{1} x^2\cdot (x+\frac{1}{2})dx+\int_{1}^{+\infty} x^2\cdot 0dx-\left(\frac{7}{12}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1-\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{60}{144}-\frac{49}{144}=\frac{11}{144}\approx 0,076.$$

$$\sigma[\xi]=\sqrt{D[\xi]}=\sqrt{0,076}\approx 0,276.$$

Функция плотности случайной величины ξ достигает своего локального максимума в точке x = 1, поэтому $Mod[\xi]=1$.

Для определения медианы воспользуемся равенством

$$F(Med[\xi])=0,5.$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Решая это уравнение, получим $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\quad x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}.$

Поскольку $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\approx -1,618\notin[0;1],\quad Med[\xi]=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0,618.$

Для вычисления вероятности того, что случайная величина попадёт в промежуток [0,5; 1], воспользуемся свойством функции плотности:

$$P(a\le\xi\le b)=\int_a^b f(x)dx.$$

$$P(0,5\le\xi\le 1)=\int_{0,5}^{1}(x+\frac{1}{2})dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{0,5}^{1}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}.$$

Задача 9. Производится испытание образцов бетона на морозостойкость. Известно, что испытание не выдерживают 5 % образцов. Испытания проводятся до обнаружения первого бракованного образца. Определить среднее число успешных испытаний.

Решение. Рассмотрим событие A = {образец бетона не выдержит испытание}, и случайную величину ξ – число испытаний, предшествующих первому наступлению события A. Так как вероятность наступления события A постоянна в каждом испытании $P(A) = 0{,}05$, то ξ имеет геометрический закон распределения с параметром $p = 0{,}05$, т. е. $\xi \sim G(0{,}05)$. Среднее число испытаний характеризуется математическим ожиданием случайной величины ξ

$$M[\xi] = \frac{1-p}{p} = \frac{1-0{,}05}{0{,}05} = 19 \text{ [испытаний]}.$$

Ответ: 19 испытаний.

Задача 10. Время, необходимое для устройства системы водоотвода на мостовых сооружениях, распределено по экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 0{,}08$ сут$^{-1}$. Определить вероятность того, что для устройства системы водоотвода понадобится не более 10 суток.

Решение. Рассмотрим случайную величину ξ – время, необходимое для устройства системы водоотвода на мостовых сооружениях. По условию случайная величина ξ имеет экспоненциальный закон распределения с параметром $\lambda = 0{,}08$, т. е. $\xi \sim E(0{,}08)$. Функция плотности случайной величины ξ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0), \\ 0{,}08e^{-0{,}08x}, & x \in [0; +\infty). \end{cases}$$

Определим вероятность события A = {устройство системы водоотвода будет длиться не более 10 суток}:

$$P(A) = P(0 < \xi \le 10) = \int_0^{10} f(x)dx = \int_0^{10} 0{,}08e^{-0{,}08x}dx = -e^{-0{,}08x}\Big|_0^{10} \approx$$
$$\approx -0{,}449 + 1 = 0{,}551.$$

Ответ: 0,551.

Контрольные вопросы к расчетно-графической работе № 2

1. Что называют случайной величиной? Приведите примеры.
2. Что называют законом распределения случайной величины?
3. Что называют функцией распределения случайной величины?
4. Какая случайная величина называется дискретной?
5. Приведите примеры дискретных случайных величин.
6. Какая случайная величина называется непрерывной?
7. Приведите примеры непрерывных случайных величин.
8. Перечислите свойства функции распределения непрерывной случайной величины.
9. Как связаны между собой функция распределения и функция плотности? Перечислите свойства функции плотности.
10. Когда случайные величины являются независимыми?
11. Какие свойства независимых случайных величин вы знаете?
12. Является ли случайной величиной сумма (произведение) двух дискретных случайных величин? Непрерывных случайных величин?
13. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины? Непрерывной случайной величины?
14. В чём заключается смысл математического ожидания?
15. Перечислите свойства математического ожидания.
16. Что называется модой дискретной случайной величины? Непрерывной случайной величины?
17. Что называется медианой случайной величины?
18. Что характеризует дисперсия случайной величины?
19. Что называется средним квадратическим отклонением случайной величины?
20. Какие дискретные и непрерывные законы распределения случайных величин вы знаете?
21. При каких условиях случайная величина будет иметь биномиальный закон распределения? Приведите примеры.
22. При каких условиях случайная величина будет иметь геометрический закон распределения? Приведите примеры.
23. При каких условиях случайная величина будет иметь распределение Пуассона? Приведите примеры.
24. При каких условиях случайная величина будет иметь равномерный закон распределения? Приведите примеры.
25. При каких условиях случайная величина будет иметь показательный (экспоненциальный) закон распределения? Приведите примеры.
26. При каких условиях случайная величина будет иметь нормальный закон распределения? Приведите примеры.

6 ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Лабораторная работа № 1
Первичная обработка статистических данных

Цель работы: ознакомиться с понятиями математической статистики и методикой проведения исследования статистических данных.

Задание: произвести обработку полученных экспериментальных данных и сделать обоснованный вывод о свойствах изучаемой случайной величины.

Параметры технического устройства могут выходить из области допустимых значений. В этом случае необходимо производить переналадку устройства. Исследуемая случайная величина ξ представляет собой продолжительность безотказной работы устройства (выраженную в часах) между двумя последовательными переналадками:

6,421;	5,034;	0,599;	10,687;	26,294;	7,852;	14,040;	8,933;	4,062;	1,573;
5,455;	2,810;	15,658;	3,692;	1,825;	17,760;	8,030;	3,218;	2,872;	8,247;
0,417;	1,995;	0,611;	12,059;	0,665;	21,434;	22,102;	10,709;	2,283;	5,649;
6,773;	30,034;	3,702;	12,834;	2,723;	5,255;	12,595;	3,533;	34,540;	9,238;
1,673;	24,919;	15,511;	7,154;	1,816;	8,401;	22,239;	2,902;	3,083;	7,176.

Произвести первичную обработку полученных опытных данных с целью изучения свойств случайной величины ξ.

Решение. 1. Построим вариационный ряд:

0,417;	0,599;	0,61;	0,665;	1,573;	1,673;	1,816;	1,825;	1,995;	2,283;
2,723;	2,810;	2,872;	2,902;	3,083;	3,218;	3,533;	3,692;	3,703;	4,062;
4,176;	5,034;	5,255;	5,455;	5,649;	6,421;	6,773;	7,154;	7,852;	8,030;
8,247;	8,401;	8,933;	9,238;	10,687;	10,709;	12,059;	12,595;	12,834;	14,040;
15,511;	15,658;	17,760;	21,434;	22,102;	22,239;	24,919;	26,294;	30,034;	34,540.

Статистический закон распределения данной непрерывной случайной величины представим в виде интервального статистического ряда.

Вычислим длину интервала:

$$h = \frac{R}{k} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,322\lg n} = \frac{34,54 - 0,417}{1 + 3,322\lg 50} = 5,14.$$

Определив границы интервалов разбиения ($C_1 = x_{\min} - h/2 = 0,417 - 2,57 = -2,153$; $C_2 = C_1 + h = -2,153 + 5,14 = 2,987$; $C_3 = C_2 + h = 2,987 + 5,14 = 8,127$ и т. д.), построим интервальный статистический ряд:

$[C_i; C_{i+1})$	[–2,153; 2,987)	[2,987; 8,127)	[8,127; 13,267)	[13,267; 18,407)	[18,407; 23,547)	[23,547; 28,687)	[28,687; 33,827)	[33,827; 38,967)
$\tilde{x}_i$	0,417	5,557	10,697	15,837	20,977	26,117	31,257	36,397
m_i	14	16	9	4	3	2	1	1
m_i / n	0,28	0,32	0,18	0,08	0,06	0,04	0,02	0,02

Для контроля убедимся, что $\sum_{i=1}^{k} m_i = n = 50$, $\sum_{i=1}^{k} m_i / n = 1$.

Графическое изображение интервального статистического ряда приведено на рисунке 6.1.

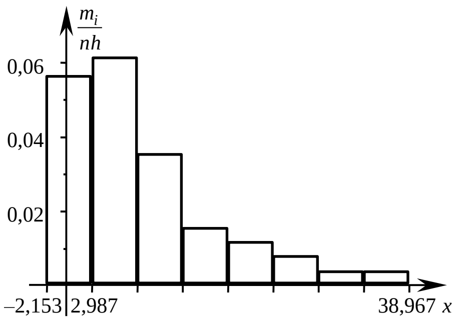


Рисунок 6.1 – Гистограмма относительных частот

2. Для приближённого построения эмпирической функции рас-

пределения воспользуемся соотношением $\hat{F}[x] = \sum\limits_{\tilde{x}_i < x} \frac{m_i}{n}$ $(*)$:

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0,417; \\ 0{,}28 & \text{при} \quad 0,417 < x \le 5,557; \\ 0{,}6 & \text{при} \quad 5,557 < x \le 10,697; \\ 0{,}78 & \text{при} \quad 10,697 < x \le 15,837; \\ 0{,}86 & \text{при} \quad 15,837 < x \le 20,977; \\ 0{,}92 & \text{при} \quad 20,977 < x \le 26,117; \\ 0{,}96 & \text{при} \quad 26,117 < x \le 31,257; \\ 0{,}98 & \text{при} \quad 31,257 < x \le 36,397; \\ 1 & \text{при} \quad x > 36,397. \end{cases}$$

При использовании формулы $(*)$ принимается допущение о том, что исследуемая случайная величина принимает только значения, соответствующие серединам интервалов $[C_i; C_{i+1})$ с частотами, равными m_i ($i = 1, 2, \ldots, k$).

График полученной таким образом эмпирической функции распределения приведён на рисунке 6.2.

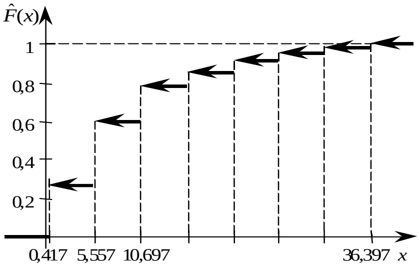


Рисунок 6.2 – График эмпирической функции распределения

Вычислим точечные оценки числовых характеристик случайной величины, обозначающей продолжительность безотказной работы устройства между двумя последовательными переналадками:

$$\hat{M}[\xi] = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{50} x_i = 8{,}92174 \ \text{[ч]};$$

$$\hat{D}[\xi] = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{50} (x_i - \overline{x})^2 = 69{,}322 \ \text{[ч}^2\text{]};$$

$$\hat{\sigma}[\xi] = \hat{\sigma} = 8{,}326 \ \text{[ч]};$$

$$\hat{A}\left[\xi\right] = \hat{\beta}_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3}{\left(n-1\right)\left(n-2\right)\hat{\sigma}^3} = 1{,}36715;$$

$$\hat{E}\left[\xi\right] = \hat{\beta}_2 = \frac{n\left(n+1\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4 - 3\left(n-1\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right)^2}{\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n-3\right)\hat{\sigma}^4} = 1{,}27.$$

В качестве оценки моды можно принять среднее значение модального интервала [2,987; 8,127): $\hat{x}_{Mod} = 5{,}557$ ч.

В качестве оценки медианы примем среднее значение между 25-м и 26-м элементами вариационного ряда:

$$\hat{x}_{Med} = (5{,}649 + 6{,}421)/2 = 6{,}035 \ \text{ч.}$$

Выводы. В результате исследования выборки значений непрерывной случайной величины, характеризующей время безотказной работы устройства между двумя последовательными переналадками, получили следующие результаты, ч: минимальное время безотказного функционирования – 0,417; максимальное – 34,54; среднее значение времени безотказного функционирования устройства – 8,922; наиболее вероятное значение – 5,557; средневероятное – 6,035. Среднеквадратическое отклонение времени безотказного функционирования устройства от среднего значения – 8,326. Оценка коэффициента асимметрии – 1,367; оценка коэффициента эксцесса – 1,27.

Порядок выполнения работы

1. Произвести вручную обработку статистических данных:

– построить вариационный ряд;

– построить интервальный статистический ряд и его графическое изображение;

– вычислить эмпирическую функцию распределения и построить график этой функции;

– вычислить точечные оценки числовых характеристик изучаемой случайной величины.

2. Произвести первичную обработку полученной выборки на компьютере с помощь пакетов прикладных программ «Statistica» или «Statgrafics»:

– вычислить оценки числовых характеристик;

– построить гистограмму частот исследуемой выборки.

3. Сравнить результаты, полученные при ручном расчёте и расчёте на компьютере с помощь пакетов прикладных программ.

4. Сделать вывод о свойствах изучаемой случайной величины.

Контрольные вопросы

1. Что называется случайной величиной? Какие типы случайных величин вы знаете?
2. Что называется генеральной совокупностью?
3. Что называется выборкой? Какими свойствами должна обладать выборка?
4. Для чего используется выборочный метод? Какая выборка называется репрезентативной?
5. Что называется вариационным рядом?
6. Укажите последовательность проведения первичной обработки статистических данных.
7. Опишите методику построения интервального статистического ряда.
8. Дайте определение эмпирической функции распределения и укажите ее свойства.
9. Что называется выборочной статистикой? Что представляют собой точечные оценки?
10. Какие требования предъявляются к статистическим оценкам?
11. Какие статистики используются в качестве точечных оценок числовых характеристик?

Лабораторная работа № 2
Построение интервальных оценок параметров распределения

Цель работы: изучить методику построения интервальных оценок параметров распределения вероятностей случайной величины.

Задание: построить интервальные оценки математического ожидания и дисперсии исследуемой случайной величины.

1. Из многочисленного коллектива работников фирмы случайным образом отобрано n = 25 работников. Средняя заработная плата этих работников составила $\overline{x} = 700$ ден. ед. при выборочном среднеквадратическом отклонении $\hat{\sigma} = 100$ ден. ед. Требуется с доверительной вероятностью $P = 0,95$ определить интервальную оценку:

а) для средней месячной заработной платы на фирме;

б) суммы затрат фирмы на заработную плату отдела, состоящего из 520 сотрудников.

Решение. а) Среднемесячная заработная плата на фирме характеризуется генеральной средней a. Требуется найти интервальную оценку $\left(\hat{a}_1; \hat{a}_2\right)$ параметра a с доверительной вероятностью $P = 0,95$. Имеем

$$a \in \left(\overline{x} \pm t_{(\alpha/2;\, n-1)} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} \right),$$

где $t_{(\alpha/2;\, n-1)}$ – $\alpha/2$-процентная точка t-распределения (распределения Стьюдента). По таблице распределения Стьюдента находим $t(0,025;\ 24) = 2,064$. Поэтому

$$a \in \left(700 \pm 2,064 \cdot \frac{100}{\sqrt{24}} \right).$$

Таким образом, с вероятностью $P = 0,95$ можно гарантировать, что средняя заработная плата на фирме находится в пределах:

$$\left\{ 657,88 \text{ ден. ед.} < a < 742,12 \text{ ден. ед.} \right\}.$$

б) Средняя сумма затрат фирмы на заработную плату отдела из N сотрудников составит $N \cdot a$ ден. ед. Следовательно, с вероятностью

$P = 0,95$ можно утверждать, что затраты фирмы на заработную плату отдела не выйдут за пределы интервала:

$$\left\{520 \cdot 657,88 < N \cdot a < 520 \cdot 742,12\right\},$$

$$\left\{342098 \text{ ден. ед.} < N \cdot a < 385902 \text{ ден. ед.}\right\}.$$

2. При анализе точности фасовочного автомата было проведено $n = 24$ контрольных взвешиваний пятисотграммовых пачек кофе. По результатам измерений рассчитано выборочное среднее квадратическое отклонение $\hat{\sigma} = 0,8$ г. Требуется с доверительной вероятностью $P = 0,95$ оценить точность фасовочного автомата, то есть определить интервальную оценку σ.

Решение. Интервальная оценка дисперсии

$$\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{(\alpha/2;\, n-1)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2;\, n-1)}}.$$

По таблице процентных точек χ^2-распределения найдем

$$\chi^2_{(\alpha/2;\, n-1)} = \chi^2_{(0,025;\, 23)} = 38,0757;$$

$$\chi^2_{(1-\alpha/2;\, n-1)} = \chi^2_{(0,975;\, 23)} = 11,6885.$$

Следовательно,

$$\sigma^2 \in \left(\frac{23 \cdot 0,64}{38,0757}; \frac{23 \cdot 0,64}{11,6885} \right).$$

Значит, с доверительной вероятностью $P = 0,95$ можно утверждать, что истинное значение среднего квадратического отклонения σ будет находиться в интервале

$$0,622 \text{ г} < \sigma < 1,122 \text{ г}.$$

Предположив, что ошибка фасовочного автомата есть нормально распределенная случайная величина с нулевой средней и среднеквадратическим отклонением σ, можно с вероятностью 0,954 утверждать, что вес пачек кофе будет в пределах

$$\left(500 - 2\sigma;\, 500 + 2\sigma\right) = (500 - 2,244;\, 500 + 2,244) = (497,756;\, 502,244).$$

Порядок выполнения работы

1. Постройте вручную интервальные оценки для неизвестных истинных значений $M\left[\xi\right]$ и $\sigma\left[\xi\right]$.

2. Вычислите интервальные оценки для $M\left[\xi\right]$ и $\sigma\left[\xi\right]$ с помощью пакетов прикладных программ «Statistica» или «Statgrafics».

3. Сделать вывод.

Контрольные вопросы

1. Что такое точечная и интервальная оценки параметров?
2. Почему возникает необходимость построения интервальной оценки параметра?
3. Что называется доверительной вероятностью?
4. Дайте определение доверительного интервала.
5. Что такое точность вычисления интервальной оценки?

Лабораторная работа № 3
Подбор закона распределения одномерной случайной величины

Цель работы: изучить методику применения критерия χ^2 Пирсона для проверки гипотезы о виде закона распределения случайной величины.

Задание: с помощью критерия χ^2 проверить согласование выдвинутой гипотезы о виде закона распределения исследуемой случайной величины с имеющимися выборочными данными.

На основании опытных данных, приведённых в лабораторной работе № 1, подобрать закон распределения непрерывной случайной величины ξ, характеризующей время безотказной работы оборудования между двумя последовательными переналадками. Уровень значимости α принять равным 0,05.

Решение. Используя результаты первичной обработки выборочных данных (вид полученной гистограммы и значения оценок числовых характеристик: $\hat{M}[\xi] = 8{,}98174 \approx \hat{\sigma}[\xi] = 8{,}34$), а также учитывая сведения о физическом смысле полученных значений, выдвигаем гипотезу о том, что случайная величина ξ распределена по экспоненциальному закону:

$$H_0 : f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \lambda > 0, x \geq 0,$$

$$H_a : f(x) \neq \lambda e^{-\lambda x}, \lambda > 0, x \geq 0 .$$

Проверим согласование сформулированной гипотезы H_0 с экспериментальными данными с помощью критерия χ^2.

Вычислим оценку параметра экспоненциального закона распределения:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{M}[\xi]} = \frac{1}{8{,}98174} \approx 0{,}1113.$$

При вычислении вероятностей $p_i = P(C_i \leq \xi < C_{i+1})$ изменим границы первого и последнего интервалов разбиения.

C_i	$Z_i = e^{-0{,}1113C_i}$	$P_i = Z_i - Z_{i+1}$
0	1	0,2828
2,987	0,7172	0,3124
8,127	0,4047	0,1763
13,267	0,2284	0,0995
18,407	0,1289	0,0562
23,547	0,0727	0,0317
28,687	0,0410	0,0179
33,827	0,0232	0,0232
∞	0	–
–	–	$\sum_i P_i = 1$

Определим значения теоретических частот и занесём их в расчётную таблицу:

$[C_i; C_{i+1})$	[0; 2,987)	[2,987; 8,127)	[8,127; 13,267)	[13,267; 18,407)	[18,407; 23,547)	[23,547; 28,687)	[28,687; 33,827)	[33,827; ∞)
m_i	14	16	9	4	3	2	1	1
p_i	0,2828	0,3124	0,1763	0,0995	0,0562	0,0317	0,0179	0,0232
np_i	14,140	15,620	8,815	4,975	2,810	1,585	0,895	1,160

Поскольку значения np_i, соответствующие четырем последним интервалам разбиения, не превышают пяти единиц, объединим эти интервалы в один и для вычисления значения критерия χ^2 составим следующую расчётную таблицу:

$[C_i; C_{i+1})$	[0; 2,987)	[2,987; 8,127)	[8,127; 13,267)	[13,267; 18,407)	[18,407; ∞)
m_i	14	16	9	4	7
p_i	0,2828	0,3124	0,1763	0,0995	0,1290
np_i	14,140	15,620	8,815	4,975	6,450

Вычислим значение критерия χ^2:

$$\chi^2 = \frac{(14-14,140)^2}{14,140} + \frac{(16-15,620)^2}{15,620} + \frac{(9-8,815)^2}{8,815} +$$

$$+\frac{(4-4,975)^2}{4,975} + \frac{(7-6,450)^2}{6,450} = 0,252.$$

Критическое значение критерия, соответствующее значениям $\alpha = 0,05$ и $\nu = k - r - 1 = 5 - 1 - 1 = 3$, определим с помощью таблиц распределения χ^2: $\chi^2_{\alpha,\nu} = \chi^2_{0,05;3} = 7,82$.

Поскольку $\chi^2 < \chi^2_{\alpha,\nu}$, можно сделать вывод о том, что проверяемая гипотеза об экспоненциальном законе распределения изучаемой случайной величины X не противоречит экспериментальным данным и нет основания для отклонения нулевой гипотезы.

Порядок выполнения работы

1. Произвести обработку полученных статистических данных.
2. Выдвинуть гипотезу о виде закона распределения изучаемой случайной величины.

3. Проверить согласование сформулированной гипотезы с имеющимися выборочными данными:

– вычислить оценки параметров предполагаемого закона распределения;

– вычислить вероятности попадания значений случайной величины в i-й интервал $p_i = P(C_i \le \xi < C_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, k$;

– определить значения теоретических частот np_i, $i = 1, 2, \ldots, k$;

– вычислить выборочное значение критерия χ^2;

– сравнить выборочное значение критерия с критическим значением $\chi^2_{\alpha,\nu}$ и сделать вывод.

4. Проверить согласование выдвинутой гипотезы с имеющимися экспериментальными данными с помощью пакетов прикладных программ «Statistica» или «Statgrafics»:

– вычислить выборочное значение критерия χ^2;

– построить совместное графическое изображение статистического и предполагаемого теоретического распределений изучаемой случайной величины.

5. Сделать вывод о законе распределения вероятностей изучаемой случайной величины.

Контрольные вопросы

1. Что такое непараметрическая гипотеза?
2. Что такое нулевая, альтернативная гипотезы?
3. Из каких соображений выдвигается гипотеза о виде закона распределения случайной величины?
4. Что такое статистический критерий?
5. Какие ошибки могут быть совершены при статистической проверке гипотез?
6. Что такое уровень значимости статистического критерия?
7. Что называется статистическим критерием значимости?
8. По какой формуле вычисляется критерий χ^2?
9. Сформулируйте алгоритм применения критерия Пирсона.
10. Как найти критическое значение критерия $\chi^2(\alpha, \nu)$?
11. Как вычислить число степеней свободы ν?

Лабораторная работа № 4
Статистическая проверка параметрических гипотез

Цель работы: изучить основные понятия теории статистической проверки гипотез и проверки параметрических гипотез.

Задание: по заданным выборкам провести статистическую проверку гипотез о равенстве математического ожидания некоторому фиксированному значению.

Технологией развоза местного груза на участке Минск – Молодечно предусмотрена норма времени стоянки сборного поезда на станции Уша для выполнения операций прицепки-отцепки вагонов в 45 мин. В отдел перевозок поступил доклад начальника станции Уша, в котором утверждается, что в связи с увеличением числа местных вагонов для станции фактическое время стоянки превысило нормативное. Начальник станции предлагает пересмотреть норму времени стоянки сборного поезда в сторону увеличения. Инженер-технолог отдела перевозок проанализировал отчетные данные времени стоянки 30 сборных поездов на станции Уша за последний месяц. Как на основании собранных статистических данных дать аргументированный ответ на предложение начальника станции?

Решение. Пусть по выборке установлено, что выборочное среднее $\hat{a} = \overline{x} = 47$ мин и выборочное среднеквадратическое отклонение $\hat{\sigma} = 6,7$ мин. Зададим уровень значимости $\alpha = 0,01$.

Из условия следует, что необходимо проверить нулевую гипотезу H_0: $a = 45$ мин против альтернативной гипотезы H_a: $a > 45$ мин. Так как точное значение среднеквадратического отклонения неизвестно и альтернативная гипотеза H_a: $a > a_0$, воспользуемся t-критерием с правосторонней критической областью. Вычислим значение t-критерия:

$$t = \frac{\overline{x} - a_0}{\hat{\sigma}\big/\sqrt{n-1}} = \frac{47-45}{6,7\big/\sqrt{30-1}} \approx 1,608.$$

В таблице квантилей распределения Стьюдента по уровню значимости $\alpha = 0,01$ и числу степеней свободы $\nu = n - 1 = 29$ находим $t_{\alpha;\, n-1} = t_{0,01;\, 29} = 2,462$.

Так как $t = 1,608 < t_{0,01;\,29} = 2,462$, то имеющиеся данные не дают оснований для отклонения нулевой гипотезы, т. е. нет оснований пересматривать в сторону увеличения норму времени стоянки сборного поезда на станции Уша.

Порядок выполнения работы

1. По одной из выборок и заданному значению математического ожидания провести проверку гипотезы о равенстве математического ожидания заданному значению против предложенного вида альтернативной гипотезы:

– вручную рассчитать значение выборочной статистики и сравнить его с критическим значением;

– с помощью пакетов прикладных программ «Statistica» или «Statgrafics».

2. По двум выборкам провести проверку гипотезы о равенстве математических ожиданий двух нормально распределенных случайных величин против предложенного вида альтернативной гипотезы:

– вручную рассчитать значение выборочной статистики и сравнить его с критическим значением;

– с помощью пакетов прикладных программ «Statistica» или «Statgrafics».

3. Сделать вывод.

Контрольные вопросы

1. Что называется статистической гипотезой?
2. Дайте определение параметрической и непараметрической статистических гипотез.
3. Что такое нулевая и альтернативная гипотезы?
4. Что называется статистическим критерием?
5. Что называется уровнем значимости статистического критерия?
6. Что называется областью допустимых значений статистического критерия?
7. Сформулируйте правило принятия решения на основании выборочного значения статистического критерия.

Лабораторная работа № 5
Построение регрессионной модели системы двух случайных величин

Цель работы: изучить основные методы регрессионного и корреляционного анализа; исследовать зависимость между двумя случайными величинами, заданными выборками.

Задание: по виду корреляционного поля сделать предположение о форме регрессионной зависимости между двумя случайными величинами; используя метод наименьших квадратов, найти параметры уравнения регрессии; оценить качество описания зависимости полученным уравнением регрессии.

По результатам десяти совместных измерений скорости движения локомотива ξ, км/ч, и соответствующего расхода топлива η, л/100 км, представленных в таблице 6.1, необходимо исследовать зависимость между данными величинами с целью определения «крейсерской» скорости локомотива и прогнозирования величины расхода топлива при заданной скорости движения поезда.

Таблица 6.1 – **Исходные данные**

ξ	40,23	19,63	29,01	89,14	74,96	57,89	34,33	21,01	16,69	9,24
η	50,66	67,82	60,95	65,53	46,84	52,91	43,71	70,52	67,02	89,96

Решение. На величину расхода топлива локомотивом η, помимо скорости движения ξ, влияние оказывает масса состава, профиль и качество железнодорожного полотна, качество подвижного состава, направление и скорость ветра и другие факторы. Поэтому зависимость между величиной расхода топлива локомотивом η и скоростью движения поезда ξ является статистической: на одной скорости движения при различных дополнительных условиях расход топлива может принимать различные значения. Для решения поставленной задачи определения «крейсерской» скорости локомотива и прогнозирования величины расхода топлива при заданной скорости движения поезда ограничимся отысканием регрессионной зависимости.

Диаграмма рассеяния, построенная по результатам наблюдений исследуемых величин, представлена на рисунке 6.3.

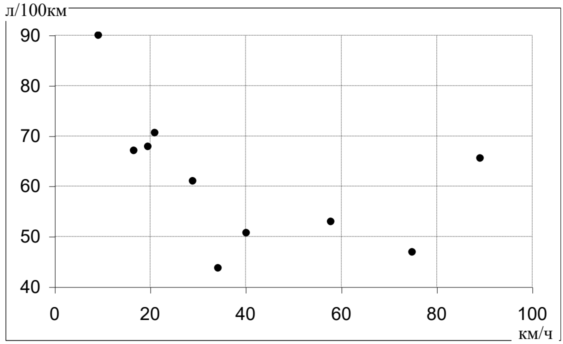


Рисунок 6.3 – Диаграмма рассеяния случайных величин ξ и η

Характер расположения точек на диаграмме рассеяния позволяет сделать предположение о параболической регрессионной зависимости

$$\overline{y}(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2.$$

Оценки параметров β_0, β_1 и β_2 найдем методом наименьших квадратов. Для этого составим функцию $S(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$, которая в случае параболической регрессии примет вид

$$S(\beta_0,\beta_1,\beta_2) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_1 x_i^2)]^2.$$

Для отыскания оценок параметров β_0, β_1 и β_2, минимизирующих функцию $S(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$, составим и решим систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(\beta_0,\beta_1,\beta_2)}{\partial\beta_0} = 0; \\ \dfrac{\partial S(\beta_0,\beta_1,\beta_2)}{\partial\beta_1} = 0; \\ \dfrac{\partial S(\beta_0,\beta_1,\beta_2)}{\partial\beta_2} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\sum\limits_{i=1}^{n}[(\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2)] = 0; \\ -2\sum\limits_{i=1}^{n}[(\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2]x_i = 0; \\ -2\sum\limits_{i=1}^{n}[(\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2]x_i^2 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}[(\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2)] = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{n}[(\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2]x_i = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{n}[(\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2]x_i^2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \beta_0 n - \beta_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - \beta_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i - \beta_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - \beta_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \beta_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^2 - \beta_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \beta_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 - \beta_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Для вычисления значений сумм, входящих в систему уравнений (6.1), составим расчетную таблицу 6.2.

Таблица 6.2 – **Результаты промежуточных вычислений**

N	x_i	y_i	x_i^2	$x_i\, y_i$	x_i^3	x_i^4	$x_i^2\, y_i$
1	40,23	50,66	1618,45	2038,05	65110,36	2619389,79	81990,82
2	19,63	67,82	385,34	1331,31	7564,16	148484,53	26133,55
3	29,01	60,95	841,58	1768,16	24414,24	708257,06	51294,31
4	89,14	65,53	7945,94	5841,34	708301,06	63137956,13	520697,42
5	74,96	46,84	5619,00	3511,13	421200,36	31573178,98	263194,03
6	57,89	52,91	3351,25	3062,96	194003,98	11230890,64	177314,75
7	34,33	43,71	1178,55	1500,56	40459,58	1388977,51	51514,37
8	21,01	70,52	441,42	1481,63	9274,24	194851,70	31128,95
9	16,69	67,02	278,56	1118,56	4649,10	77593,50	18668,83
10	9,24	89,96	85,38	831,23	788,89	7289,33	7680,57
Σ	392,13	615,92	21745,5	22484,9	1475766	111086869,2	1229617,6

После подстановки значений система уравнений (1) примет вид:

$$\begin{cases} 615,92 - 10\beta_0 - 392,13\beta_1 - 21745,47\beta_2 = 0; \\ 22484,93 - 392,13\beta_0 - 21745,47\beta_1 - 1475765,97\beta_2 = 0; \\ 1229617,6 - 21745,5\beta_0 - 1475765,97\beta_1 - 111086869,2\beta_2 = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Решив систему уравнений (6.2) известными методами или с помощью MAthCAD, получим следующее решение: $\hat{\beta}_0 = 103,00457$; $\hat{\beta}_1 = -2,095621$; $\hat{\beta}_2 = 0,0187455$, а уравнение регрессии примет вид

$$\overline{y}(x) = 103,00457 - 2,095621x + 0,0187455x^2. \quad (6.3)$$

На рисунке 6.4 представлена диаграмма рассеяния случайных величин ξ и η с нанесённой линией регрессии.

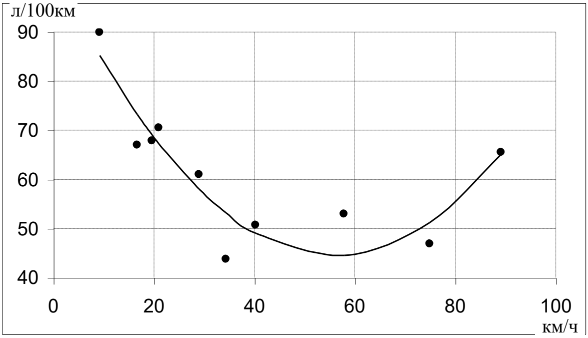


Рисунок 6.4 – Диаграмма рассеяния случайных величин
ξ и η с нанесённой линией регрессии

Оценим качество описания зависимости между величиной расхода топлива локомотивом (η) и скоростью его движения (ξ) полученным уравнением регрессии с помощью коэффициента детерминации, где $\bar{y}(x)$ – значение расхода топлива, предсказываемое уравнением регрессии, при скорости локомотива x_i,

$$\bar{y}(x) = 103,00457 - 2,095621x + 0,0187455x^2;$$

$\bar{y}$ – среднеарифметическое наблюденных значений расхода топлива,

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{615,92}{10} = 61,592 \text{ л/100 км}.$$

Таблица 6.3 – **Значения расхода топлива локомотивом**

N	Скорость, x_i	Наблюденное (фактическое) значение расхода топлива, y_i	Значение, предсказываемое уравнением регрессии, $\bar{y}(x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2$
1	40,23	50,66	49,036
2	19,63	67,82	69,091
3	29,01	60,95	57,986
4	89,14	65,53	65,152
5	74,96	46,84	51,248
6	57,89	52,91	44,510
7	34,33	43,71	53,154
8	21,01	70,52	67,250
9	16,69	67,02	73,250
10	9,24	89,96	85,241
Σ	392,13	615,92	–

$$\hat{R}^2 = \sum_{i=1}^{n} (\overline{y}(x_i) - \overline{y})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 =$$

$$= \frac{(49,036 - 61,592)^2 + (69,091 - 61,592)^2 + ... + (85,241 - 61,592)^2}{(50,66 - 61,592)^2 + (67,82 - 61,592)^2 + ... + (89,96 - 61,592)^2} =$$

$$= \frac{157,6408 + 56,23316 + ... + 559,2981}{119,5086 + 38,78798 + ... + 804,7434} = \frac{1436,761}{1700,897} = 0,844708 .$$

Расчётное значение коэффициента детерминации $\hat{R}^2 = 0,844708$ указывает на удовлетворительность описания зависимости между величиной скорости (ξ) и расхода топлива (η), выбранным уравнением регрессии. Проверим, однако, значимость оценки коэффициента детерминации с помощью статистики Фишера

$$\hat{F} = 0,844708 \cdot \frac{10 - 3}{(3-1)(1 - 0,844708)} = 19,03818.$$

Вывод. Критическое значение статистики Фишера для степеней свободы $\nu_1 = 3 - 1 = 2$ и $\nu_2 = 10 - 3 = 7$ и уровня значимости $\alpha = 0,05$ составляет $F_{0,05;2;7} = 4,737$. Поскольку расчётное значение статистики Фишера больше критического ($\hat{F} = 19,03818 > 4,737 = F_{0,05;2;7}$), то вычисленный коэффициент детерминации значимо отличается от нуля, и выбранное уравнение регрессионной зависимости (6.3) между величинами скорости и расхода топлива локомотивом может быть использовано в практических целях.

Например, при движении локомотива со скоростью 70 км/ч можно ожидать в среднем расход

$$\overline{y}(70) = 103,00457 - 2,095621 \cdot 70 + 0,0187455 \cdot 70^2 = 48,164$$

литров топлива на каждые 100 км пути. Следовательно, можно контролировать фактический расход топлива локомотивом.

Для определения «крейсерской» скорости локомотива необходимо решить задачу минимизации функции $\overline{y}(x)$. Для этого приравняем к нулю производную функции $\overline{y}(x)$ и решим полученное уравнение:

$$(\overline{y}(x))' = -2,095621 + 0,0187455 \cdot 2x = 0;$$

$$0,037491035x = 2,095621 \quad \Rightarrow \quad x = 55,89658024.$$

Таким образом, «крейсерская» скорость составляет 55,897 км/ч.

Порядок выполнения работы

1. С помощью пакетов прикладных программ «Statistica» или «Statgrafics» создать файл с выборками исследуемых случайных величин. По заданной двумерной выборке построить диаграмму рассеяния.

2. По виду корреляционного поля сделать предположение о форме регрессионной зависимости между исследуемыми случайными величинами.

3. Найти параметры предполагаемого уравнения регрессии методом наименьших квадратов.

4. Оценить качество описания зависимости между исследуемыми случайными величинами и выбранным уравнением регрессии с помощью коэффициента корреляции (в случае линейной зависимости), или с помощью коэффициента детерминации (в случае нелинейной зависимости).

5. Выполнить регрессионный и корреляционный анализ в пакетах прикладных программ «Statistica» или «Statgrafics».

6. Сравнить результаты ручного расчета и компьютерного анализа.

7. Проверить значимость полученного значения коэффициента корреляции (детерминации) для ручного и компьютерного расчета.

8. Сформулировать общие выводы о зависимости между исследуемыми случайными величинами.

Контрольные вопросы

1. Какая зависимость называется функциональной? Какая зависимость называется статистической?

2. Какие случайные величины называются независимыми?

3. Для чего необходим анализ зависимостей между величинами?

4. Что изучает регрессионный и корреляционный анализ?

5. Какая зависимость называется регрессионной?

6. Для чего применяется метод наименьших квадратов?

7. Сформулируйте идею аппроксимации опытных точек на диаграмме рассеяния методом наименьших квадратов.

8. Что характеризует коэффициент корреляции

9. Что характеризует коэффициент детерминации?

10. Укажите назначение проверки значимости оценки коэффициента корреляции (детерминации).

7 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Номера задач, которые необходимо выполнить, определяются с помощью таблицы 7.1. Номер варианта указывается преподавателем. Первая расчётно-графическая работа включает в себя шесть задач (разделы 1–6), вторая – четыре задачи (разделы 6–10).

Таблица 7.1 – **Исходные данные для расчётно-графических работ**

Номер варианта	**Номер задания**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	30	29	28	27	26	25	24	23	22
2	2	1	30	29	28	27	26	25	24	23
3	3	2	1	30	29	28	27	26	25	24
4	4	3	2	1	30	29	28	27	26	25
5	5	4	3	2	1	30	29	28	27	26
6	6	5	4	3	2	1	30	29	28	27
7	7	6	5	4	3	2	1	30	29	28
8	8	7	6	5	4	3	2	1	30	29
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	30
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
12	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
13	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
14	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
16	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7
17	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8
18	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9
19	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
20	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
21	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
22	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
23	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14

Продолжение таблицы 7.1

Номер варианта	**Номер задания**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
24	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
25	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
26	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17
27	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18
28	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19
29	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20
30	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
31	1	30	29	28	27	26	25	24	23	22
32	2	1	30	29	28	27	26	25	24	23
33	3	2	1	30	29	28	27	26	25	24
34	4	3	2	1	30	29	28	27	26	25
35	5	4	3	2	1	30	29	28	27	26
36	6	5	4	3	2	1	30	29	28	27
37	7	6	5	4	3	2	1	30	29	28
38	8	7	6	5	4	3	2	1	30	29
39	9	8	7	6	5	4	3	2	1	30
40	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
41	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
42	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
43	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
44	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
45	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
46	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7
47	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8
48	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9
49	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
50	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
51	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
52	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
53	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
54	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
55	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
56	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17
57	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18
58	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19
59	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20

Продолжение таблицы 7.1

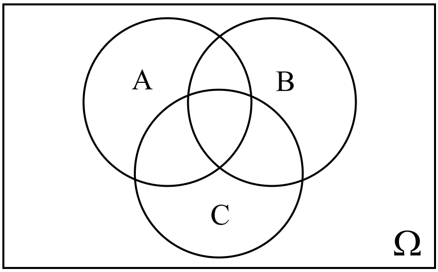
Номер варианта	**Номер задания**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
60	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
61	1	30	29	28	27	26	25	24	23	22
62	2	1	30	29	28	27	26	25	24	23
63	3	2	1	30	29	28	27	26	25	24
64	4	3	2	1	30	29	28	27	26	25
65	5	4	3	2	1	30	29	28	27	26
66	6	5	4	3	2	1	30	29	28	27
67	7	6	5	4	3	2	1	30	29	28
68	8	7	6	5	4	3	2	1	30	29
69	9	8	7	6	5	4	3	2	1	30
70	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
71	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
72	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
73	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
74	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
75	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
76	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7
77	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8
78	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9
79	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
80	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
81	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
82	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
83	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
84	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
85	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
86	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17
87	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18
88	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19
89	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20
90	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
91	1	30	29	28	27	26	25	24	23	22
92	2	1	30	29	28	27	26	25	24	23
93	3	2	1	30	29	28	27	26	25	24
94	4	3	2	1	30	29	28	27	26	25
95	5	4	3	2	1	30	29	28	27	26

Окончание таблицы 7.1

Номер варианта	**Номер задания**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
96	6	5	4	3	2	1	30	29	28	27
97	7	6	5	4	3	2	1	30	29	28
98	8	7	6	5	4	3	2	1	30	29
99	9	8	7	6	5	4	3	2	1	30
100	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Задание 1

E: из прямоугольной области случайным образом выбирается точка. Определим события



A = {выбранная точка принадлежит кругу A},

B = {выбранная точка принадлежит кругу B},

C = {выбранная точка принадлежит кругу C}.

Заштриховать области, содержащие элементарные исходы, благоприятствующие наступлению следующих событий:

1.1. $(B\setminus C)\setminus A,\ B\cap(C\cup A),\ (C\cap B)\cup\overline{A},\ (C\cup A)\setminus\overline{B}.$

1.2. $C\cup B\cup A,\ (B\setminus C)\cap A,\ \overline{C}\cup(B\cap A),\ (C\setminus\overline{A})\cup B.$

1.3. $(C\setminus B)\cup A,\ B\setminus(C\cap A),\ (C\cup\overline{B})\cap A,\ C\cup\overline{A}\cup\overline{B}.$

1.4. $(C\cup B)\setminus A,\ (B\cap C)\setminus A,\ \overline{A}\cap(B\setminus C),\ (\overline{B}\setminus A)\setminus\overline{C}.$

1.5. $(C\setminus B)\setminus A,\ B\cap(C\setminus A),\ (\overline{A}\cap B)\setminus C,\ (\overline{B}\cup A)\setminus\overline{C}.$

1.6. $\overline{(A\setminus B)\cup C},\ (C\cup A)\cap B,\ A\setminus\overline{B\cap C},\ (B\setminus\overline{A})\cup\overline{C}.$

1.7. $(\overline{A}\setminus C)\cup B,\ C\cup(A\cap B),\ (\overline{A}\setminus B)\cap C,\ \overline{B}\cup\overline{A}\cup C.$

1.8. $(B\cup\overline{A})\setminus C,\ (C\cap A)\cup B,\ A\cap\overline{B\cup C},\ (A\setminus B)\setminus\overline{C}.$

1.9. $(B\setminus C)\cup\overline{A},\ C\cap(A\cup B),\ (A\cap\overline{B})\cup C,\ (\overline{A}\cup B)\setminus\overline{C}.$

1.10. $(C\cup\overline{B})\setminus A,\ (C\setminus A)\cap B,\ A\cup\overline{B\cap C},\ (A\setminus\overline{B})\cup C.$

1.11. $(\overline{C}\setminus A)\cup B,\ C\setminus(A\cap B),\ (A\cup B)\cap\overline{C},\ \overline{A\cup B}\cup C.$

1.12. $A\cup B\cup C,\ (A\cup B)\cap C,\ C\setminus\overline{A\cap B},\ (\overline{C}\setminus A)\cup\overline{B}.$

1.13. $(A \setminus B) \cup C,\ A \cup (B \cap C),\ (\overline{C} \setminus A) \cap B,\ (C \cup \overline{B}) \setminus \overline{A}.$

1.14. $(A \cup B) \setminus C,\ (A \cap B) \cup C,\ C \cap \overline{A \cup B},\ (B \setminus \overline{C}) \cup \overline{A}.$

1.15. $(A \setminus B) \setminus C,\ A \cap (B \cup C),\ (C \cap \overline{A}) \cup B,\ (B \cup \overline{A}) \setminus \overline{C}.$

1.16. $B \cup A \cup C,\ (A \setminus B) \cap C,\ C \cup \overline{A \cap B},\ (\overline{A} \setminus C) \cup B.$

1.17. $(B \setminus A) \cup C,\ A \setminus (B \cap C),\ (C \cup A) \cap \overline{B},\ (\overline{A} \setminus \overline{B}) \cup C.$

1.18. $(B \cup A) \setminus C,\ (A \cap B) \setminus C,\ \overline{B} \cap (C \setminus A),\ (C \setminus \overline{B}) \setminus A.$

1.19. $(B \setminus A) \setminus C,\ A \cap (B \setminus C),\ (B \cap C) \setminus \overline{A},\ (\overline{C} \cup B) \setminus \overline{A}.$

1.20. $C \cup A \cup B,\ (C \cup B) \cap A,\ \overline{B} \setminus (C \cap A),\ (C \setminus \overline{B}) \cup \overline{A}.$

1.21. $(C \setminus A) \cup B,\ C \cup (B \cap A),\ (B \setminus \overline{C}) \cap A,\ \overline{C} \cup B \cup \overline{A}.$

1.22. $(C \cup A) \setminus B,\ (C \cap B) \cup A,\ \overline{B} \cap (C \cup A),\ (B \setminus \overline{C}) \setminus A.$

1.23. $(C \setminus A) \setminus B,\ C \cap (B \cup A),\ (\overline{B} \cap C) \cup A,\ (\overline{B} \cup C) \setminus \overline{A}.$

1.24. $A \cup C \cup B,\ (C \setminus B) \cap A,\ B \cup \overline{C \cap A},\ (B \setminus \overline{C}) \cup A.$

1.25. $(A \setminus C) \cup B,\ C \setminus (B \cap A),\ (\overline{B} \cup C) \cap A,\ B \cup \overline{C} \cup \overline{A}.$

1.26. $(A \cup C) \setminus B,\ (C \cap B) \setminus A,\ C \cap \overline{B \setminus A},\ (A \setminus \overline{C}) \setminus \overline{B}.$

1.27. $(A \setminus C) \setminus B,\ C \cap (B \setminus A),\ (C \cap \overline{B}) \setminus A,\ (\overline{A} \cup C) \setminus \overline{B}.$

1.28. $B \cup C \cup A,\ (B \cup C) \cap A,\ C \setminus \overline{B \cap A},\ (A \setminus \overline{C}) \cup \overline{B}.$

1.29. $(B \setminus C) \cup A,\ B \cup (C \cap A),\ (C \setminus B) \cap \overline{A},\ \overline{A} \cup \overline{C} \cup B.$

1.30. $(B \cup C) \setminus A,\ (B \cap C) \cup A,\ \overline{C} \cap (B \cup A),\ (\overline{C} \setminus \overline{A}) \setminus B.$

Задание 2

2.1. Из натуральных чисел от 1 до 106 случайным образом выбирают одно. Найти вероятность того, что выбранное число будет: а) принадлежать отрезку [10; 30]; б) кратно 6.

2.2. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 60. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлечённого жетона будет: а) кратным 3; б) содержать цифру 5.

2.3. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны два человека. Найти вероятность того, что среди отобранных будет: а) два мужчины; б) одна женщина.

2.4. Правильную монету подбросили три раза. Найти вероятность того, что решка выпадет: а) два раза; б) не менее двух раз.

2.5. Из пяти строительных объектов с номерами 1, 2, 3, 4, 5 для проверки случайным образом выбирают два. Найти вероятность того, что будут проверяться: а) объекты № 1 и № 5; б) объект № 3.

2.6. Для определения номера квартиры будущим жителям подъезда предложили тянуть жребий. В подъезде 18 двухкомнатных квартир – по две на каждом этаже. Найти вероятность того, что владелец квартиры, выбирающий первым, будет жить: а) на первом этаже; б) на втором или третьем этаже.

2.7. В урне имеется 20 шаров: 15 белых и 5 чёрных. Случайным образом выбирается два шара. Найти вероятность того, что среди выбранных будет: а) два белых шара; б) один белый шар.

2.8. В ящике лежат 25 предохранителей, из которых 5 со скрытым дефектом. Необходимо заменить два предохранителя. Найти вероятность того, что из двух наугад взятых предохранителей без дефектов будут: а) два; б) только один.

2.9. Правильную монету подбросили четыре раза. Найти вероятность того, что: а) решка выпадет три раза; б) решка выпадет не более двух раз.

2.10. Пользователь некоторого web-портала помнит, что его пароль состоит из цифр «1», «2», «3», «4» в каком-то порядке. Найти вероятность того, что при случайном наборе этих цифр пользователь получит доступ.

2.11. В урне имеется 20 шаров: 3 белых, 10 чёрных и 7 красных. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что он окажется: а) белым; б) цветным (т. е. не белым)?

2.12. Трёхтомник А. П. Чехова расставили на полке в случайном порядке. Найти вероятность того, что: а) тома стоят в порядке $1-2-3$; б) первым стоит том с номером 2.

2.13. Производится подбрасывание двух различимых игральных костей. Найти вероятность того, что: а) на обеих костях выпадет одинаковое число очков; б) сумма очков будет не менее 10.

2.14. Из натуральных чисел от 1 до 100 случайным образом выбирают одно. Найти вероятность того, что выбранное число будет: а) кратно 5; б) не менее 80.

2.15. Из пяти строительных объектов с номерами 1, 2, 3, 4, 5 для проверки случайным образом выбирают два. Найти вероятность того, что будут проверяться: а) объекты № 1 и № 5; б) объект № 3.

2.16. В ящике 100 микросхем. Известно, что 50 из них произведены цехом № 1, 35 – цехом № 2 и 15 – цехом № 3. Случайным образом выбрали одну микросхему. Найти вероятность того, что она произведена: а) цехом № 3; б) цехом № 1 или цехом № 3.

2.17. Пользователь некоторого web-портала помнит, что его пароль состоит из букв «к», «о», «д» в каком-то порядке. Найти вероятность того, что при случайном наборе этих букв пользователь получит доступ.

2.18. Производится подбрасывание игральной кости. Найти вероятность того, что выпадет: а) четное число очков; б) не менее 5 очков; в) не более 5 очков.

2.19. В ящике 100 деталей. Известно, что 50 из них – первого сорта, 30 – второго, 20 – третьего. Случайным образом выбрали одну деталь. Найти вероятность того, что она будет: а) первого сорта; б) иметь сорт не ниже второго.

2.20. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 30. Найти вероятность того, что номер первого, наудачу извлеченного жетона будет: а) не менее 20; б) содержать цифру 7.

2.21. Правильную монету подбросили четыре раза. Найти вероятность того, что: а) герб выпадет четыре раза; б) герб выпадет только один раз.

2.22. Для определения номера квартиры будущим жителям подъезда предложили тянуть жребий. В подъезде 18 трёхкомнатных квартир – по две на каждом этаже. Найти вероятность того, что владелец квартиры, выбирающий первым, будет жить: а) на последнем этаже; б) на третьем или четвёртом этаже.

2.23. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

2.24. В денежно-вещевой лотерее на серию в 1000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Студент купил один билет. Найти вероятность того, что: а) студент выиграет денежный приз; б) студент выиграет денежный или вещевой приз.

2.25. Из 20 филиалов предприятия 10 расположены за чертой города. Для проверки случайным образом выбрали 2 филиала. Найти вероятность того, что среди выбранных в черте города окажется: а) два филиала; б) только один филиал.

2.26. В ящике 50 микросхем. Известно, что 30 из них произведены цехом № 1, 15 – цехом № 2 и 5 – цехом № 3. Случайным образом выбрали одну микросхему. Найти вероятность того, что она произведена: а) цехом № 2; б) цехом № 1 или цехом № 2.

2.27. В магазине имеются 30 телевизоров, причем 10 из них импортные. В течение дня продали 2 телевизора. Предполагая, что вероятности покупки телевизоров разных марок одинаковы, найти вероятность того, что продали: а) два импортных телевизора; б) один импортный телевизор.

2.28. В урне имеется 15 шаров: 3 белых, 7 чёрных и 5 красных. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что он окажется: а) белым; б) цветным (т. е. не белым)?

2.29. В коробке 30 жетонов с номерами от 1 до 30. Случайным образом выбирается один жетон. Найти вероятность того, что номер жетона: а) является простым числом; б) принадлежит отрезку [5; 20].

2.30. Из пяти карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 произвольным образом выбираются две и укладываются на стол в порядке их появления. Предполагая, что все возможные исходы данного эксперимента равновероятны, найти вероятность того, что полученное таким образом число будет: а) четным; б) не менее 50.

Задание 3

3.1. В цехе работают 3 станка. Вероятность выхода из строя в течение смены для первого станка равна 0,02, для второго – 0,03 и для третьего – 0,01. Найти вероятность того, что в течение смены выйдут из строя: а) три станка; б) два станка.

3.2. На 6 карточках написаны буквы «т», «е», «о», «р», «и», «я». Случайным образом выбирают 3 карточки и располагают их в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «тир».

3.3. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени первым выстрелом равна 0,6, вторым – 0,7, третьим – 0,8. Найти вероятность того, что мишень будет поражена: а) 3 раза; б) 2 раза.

3.4. На контроль поступила партия деталей. Вероятность того, что при проверке деталь окажется бракованной, равна 0,05. Найти вероятность того, что из 3 проверяемых деталей окажется: а) 3 бракованных; б) не менее 1 бракованной.

3.5. Стрелочный перевод состоит из двух частей: электрической и механической. Вероятность выхода из строя в течение месяца электрической части равна 0,05, механической – 0,01. Найти вероятность безотказной работы перевода в течение месяца, если для этого необходимо функционирование обоих частей.

3.6. Проводятся испытания на прочность асбестоцементных труб. Вероятность для каждой трубы не выдержать испытания равна 0,1. Найти вероятность того, что из трех труб испытания не выдержат: а) три; б) одна.

3.7. На складе находятся образцы мелкозернистого бетона. Известно, что 75 % образцов соответствуют классу В25. Случайным образом отбирается 2 образца. Найти вероятность того, что среди них: а) 2 образца имеют класс В25; б) только 1 образец имеет класс В25.

3.8. Вероятности безотказной работы в течение времени t для каждого из трёх водонагревательных приборов равны соответственно: 0,85, 0,8 и 0,95. Найти вероятность того, что в течение времени t выйдут из строя: а) три прибора; б) один прибор.

3.9. Два студента по одному разу пробивают футбольный «пенальти», выигрывает тот, кто первым забьёт мяч в ворота. Вероятность забить мяч в ворота для первого студента составляет 0,6, для второго – 0,7. Найти вероятности: а) ничьей; б) выигрыша второго студента.

3.10. Для сигнала о пожаре в помещении установлено два автономных пожарных извещателя. При этом при пожаре первый из них срабатывает с вероятностью 0,95, а второй – с вероятностью 0,99. Найти вероятность того, что при пожаре сработает: а) хотя бы один из извещателей; б) два извещателя.

3.11. В урне 15 белых и 10 чёрных шаров. Из урны случайным образом извлекают два шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара будут белыми; б) хотя бы один шар будет белым.

3.12. На 6 карточках написаны буквы «т», «е», «о», «р», «и», «я». Случайным образом выбирают 3 карточки и располагают их в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «тор».

3.13. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени в каждом выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что мишень будет поражена: а) только 1 раз; б) 3 раза.

3.14. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди вынимают по одному билету. Найти вероятность того, что: а) обоим студентам достанутся «хорошие» билеты; б) только одному студенту достанется «хороший» билет.

3.15. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом. В первой: 5 белых, 5 чёрных, 10 красных; во второй – 6, 6, 8 соответственно. Из обеих урн наудачу извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что: а) один из шаров будет белым, а другой чёрным; б) оба шара будут одного цвета.

3.16. На контроль поступила партия деталей. Вероятность того, что при проверке деталь окажется стандартной, равна 0,9. Найти вероятность того, что из трёх проверяемых деталей окажется: а) 3 стандартные; б) только 1 стандартная.

3.17. Студент пришел на зачёт, зная из 30 вопросов только 25. Какова вероятность сдать зачёт, если для этого необходимо ответить хотя бы на два вопроса из трёх, содержащихся в билете?

3.18. Прибор состоит из трёх элементов, работающих независимо. Вероятность выхода из строя за время t для первого элемента равна 0,02; для второго – 0,05; для третьего – 0,03. Найти вероятность того, что за время t: а) выйдут из строя три элемента; б) выйдет из строя хотя бы один элемент.

3.19. Среди 40 деталей 5 нестандартных. Случайным образом извлекают 3 детали. Найти вероятность того, что среди выбранных деталей нет нестандартных.

3.20. Диагностика неисправности детали производится двумя различными приборами. Первый прибор определяет неисправность с вероятностью 0,9; второй – с вероятностью 0,95. Деталь подлежит замене, если неисправность детали определит хотя бы один из приборов. Найти вероятность того, что деталь заменят.

3.21. Из шести карточек с буквами Л, И, Т, Е, Р, А случайным образом выбирают четыре и располагают в порядке появления. Найти вероятность того, что при этом получится слово ТИРЕ.

3.22. В партии, состоящей из 20 изделий, имеется 5 бракованных. Наудачу выбирает 3 изделия. Найти вероятность того, что среди них окажется: а) 3 бракованных; б) не менее 2 бракованных.

3.23. Для изготовления детали необходимы три операции. Вероятность появления брака на первой операции равна 0,03, на второй – 0,02 и на третьей – 0,015. Появление брака на отдельных операциях –

независимые события. Определить вероятность изготовления стандартной детали.

3.24. Вероятность того, что в течение одной смены возникнет неполадка станка, равна 0,04. Какова вероятность того, что не произойдет ни одной неполадки за 3 смены.

3.25. Из 100 лотерейных билетов 5 выигрышных. Случайным образом выбирают 3 билета. Найти вероятность того, что среди них окажется: а) три выигрышных; б) хотя бы один выигрышный.

3.26. По статистическим данным прошлых лет известно, что водохозяйственный баланс неправильно составлен в среднем для 5 % предприятий. Для проверки случайным образом выбрали 3 предприятия. Найти вероятность того, что среди них водохозяйственный баланс неправильно составлен: а) на трех предприятиях; б) только на двух.

3.27. Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятность выхода из строя за время t для первого элемента равна 0,02; для второго – 0,05. Найти вероятность того, что за время t: а) выйдут из строя оба элемента; б) выйдет из строя хотя бы один элемент.

3.28. Причиной разрыва электрической цепи служит выход из строя элемента K_1 или одновременный выход из строя двух элементов: K_2 и K_3. Элементы могут выйти из строя независимо друг от друга с вероятностями, равными соответственно: 0,1; 0,15; 0,2. Какова вероятность разрыва электрической цепи?

3.29. Вероятность выхода из строя стрелочного перевода в течение месяца равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение трех месяцев стрелочный перевод выйдет из строя: а) только один раз; б) не менее одного раза.

3.30. В урне 20 белых и 5 чёрных шаров. Из урны случайным образом извлекают два шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара будут чёрными; б) хотя бы один шар будет чёрным.

Задание 4

4.1. Стрелочный перевод состоит из двух частей: электрической и механической. Безотказная работа каждой части необходима для работы стрелочного перевода. Вероятность выхода из строя в течение месяца электрической части равна 0,05, механической – 0,01. В течение месяца перевод вышел из строя. Найти вероятность того, что отказала электрическая часть.

4.2. При сдаче экзамена студент выучил 70 % билетов, а для оставшихся сделал шпаргалки. Если ему попадётся билет, который он учил, то вероятность сдать экзамен равна 0,99. Если ему попадётся билет, который он не учил и он будет пытаться списать, то вероятность сдать экзамен равна 0,5. Найти вероятность того, что: а) студент сдаст экзамен; б) студент списал, если он сдал экзамен.

4.3. Прибор может работать в трёх режимах: нормальном, форсированном и недогруженном. Нормальный режим наблюдается в 70 % случаев работы прибора, форсированный – в 20 % и недогруженный – в 10 %. Надёжность прибора (вероятность безотказной работы в течение времени t) для нормального режима равна 0,9, для форсированного – 0,4, для недогруженного – 0,95. Найти: а) полную (с учетом случайности условий) надёжность прибора; б) вероятность того, что прибор работал в нормальном режиме, если он проработал безотказно в течение времени t.

4.4. В продажу поступают телефоны трех производителей. Продукция первого производителя содержит 10 % телефонов со скрытым дефектом, второго – 15 %, третьего – 8 %. В магазин поступило 40 телефонов от первого производителя, 30 от второго и 60 от третьего. Найти вероятность того, что: а) случайно выбранный телефон будет исправен; б) телефон поступил от второго производителя, если он оказался исправен.

4.5. В тире имеются четыре ружья, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,9; 0,8; 0,75; 0,7. Найти вероятность того, что: а) мишень поражена выстрелом из наугад выбранного ружья; б) произведён выстрел из ружья, вероятность попадания из которого равна 0,7, если мишень поражена.

4.6. В данный район изделия поставляются двумя фирмами в соотношении 2:3. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 80 %, второй – 90 %. Найти вероятность того, что: а) приобретённое изделие окажется стандартным; б) изделие изготовлено первой фирмой, если оно оказалось стандартным.

4.7. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,6. Мишень была поражена один раз. Найти вероятность того, что в мишень попал второй стрелок.

4.8. В сборочный цех поступают детали с двух поточных линий. Производительности этих линий относятся как 5:4. Вероятность брака для первой линии составляет 0,02, для второй – 0,04. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая деталь является бракованной; б) деталь сделана на первой линии, если она оказалась бракованной.

4.9. В тире имеются 10 винтовок, из которых 7 являются пристрелянными. Вероятность попадания в мишень из пристрелянной винтовки равна 0,8, из непристрелянной – 0,1. Наугад берётся винтовка, и из неё делается выстрел. Найти вероятность того, что: а) произошёл промах; б) выстрел сделан из пристрелянной винтовки, если мишень была поражена.

4.10. Студент купил три лотерейных билета, два из которых подарил друзьям. Считая все возможные предположения о числе выигрышных билетов из трех равновероятными, найти вероятность того, что себе он оставил выигрышный билет.

4.11. Прибор состоит из двух элементов. Вероятность выхода из строя за время t для первого элемента равна 0,02. Вероятность выхода из строя за время t для второго элемента при работающем первом равна 0,01, при неработающем – 0,05. Найти вероятность того, что: а) за время t выйдет из строя второй элемент; б) выйдет из строя первый элемент, если второй элемент вышел из строя.

4.12. Студент идёт на экзамен, зная только 25 билетов из 30. Выбранные билеты далее не используются. Студент планирует пойти вторым по счету. Найти вероятность того, что: а) второй студент сдал экзамен; б) первый студент вытащил билет, который второй студент не знал, если второй студент сдал экзамен.

4.13. В сборочный цех поступают детали с трех поточных линий. Производительности этих линий относятся как 5:3:2. Вероятность брака для первой линии составляет 0,01, для второй – 0,02 и для третьей линии – 0,03. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая деталь является бракованной; б) деталь сделана на третьей линии, если она оказалась бракованной.

4.14. В телеграфном сигнале «точки» и «тире» появляются в отношении 3:4. При передаче сигналы могут быть искажены: «точки» заменяются на «тире» с вероятностью 0,25, в то время как «тире» превращается в «точки» с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что: а) при передаче сигнал не будет искажен; б) переданный сигнал – «точка», если он не был искажён.

4.15. В цехе 14 установок с автоматическим контролем и 6 с ручным. Вероятность изготовления бракованной продукции для установок с автоматическим контролем составляет 0,001, с ручным контролем – 0,002. Найти вероятность того, что: а) взятая на лабораторный анализ продукция цеха оказалась бракованной; б) продукция производилась на установке с ручным контролем, если она оказалась бракованной.

4.16. Среди клиентов страховой компании 50 % первого класса риска, 30 % – второго и 20 % – третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01, второго – 0,03, третьего – 0,05. Найти вероятность того, что: а) клиент компании получит денежное вознаграждение; б) клиент принадлежал к группе первого класса риска, если он получил вознаграждение.

4.17. В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90 %, второй – 85 %, третьей – 75 %. Найти вероятность того, что: а) приобретённое изделие окажется нестандартным; б) изделие изготовлено третьей фирмой, если оно оказалось нестандартным.

4.18. На складе хранятся три водонагревательных прибора. Известно, что среди них есть бракованные, причём все возможные предположения о числе бракованных приборов являются равновероятными. Найти вероятность того, что: а) наудачу извлечённый прибор является бракованным; б) на складе было два бракованных прибора, если наудачу извлечённый прибор оказался бракованным.

4.19. На конвейер поступают детали с двух станков. Производительность первого станка в 2 раза больше производительности второго. Вероятность брака на первом станке равна 0,01, на втором станке – 0,02. Найти вероятность того, что: а) наудачу взятая деталь стандартна; б) взятая деталь сделана на первом станке, если она оказалась стандартной.

4.20. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20 % телевизоров со скрытым дефектом, второго – 10 %, третьего – 5 %. В магазин поступило 30 телевизоров первого завода, 20 – второго, 50 – третьего. Найти вероятность того, что: а) случайно выбранный телевизор будет исправен; б) выбранный телевизор сделан на первом заводе, если он оказался исправен.

4.21. В бригаде 8 рабочих и 2 ученика. Вероятность изготовить бракованное изделие для рабочего составляет 0,05, для ученика – 0,2. Производительность рабочего в два раза выше, чем у ученика. Какова вероятность, что некоторое изделие, изготовленное бригадой, окажется бракованным?

4.22. В первой урне лежат 8 белых и 12 чёрных шаров, во второй урне – 4 белых и 15 чёрных шаров. Из первой урны во вторую перекладывается один шар, затем из второй урны извлекается шар. Найти вероятность того, что: а) извлечённый шар белый. б) из первой урны извлекли белый шар, если из второй урны извлекли белый шар.

4.23. В тире имеются 10 винтовок, из которых 7 являются пристрелянными. Вероятность попадания в мишень из пристрелянной винтовки равна 0,9, из непристрелянной – 0,2. Наугад берется винтовка, и из неё делается выстрел. Найти вероятность того, что: а) мишень поражена; б) выстрел сделан из непристрелянной винтовки, если мишень была поражена.

4.24. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,5. Мишень была поражена один раз. Найти вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

4.25. Студент купил два лотерейных билета, один из которых подарил другу. Считая все возможные предположения о числе выигрышных билетов из двух равновероятными, найти вероятность того, что другу он подарил выигрышный билет.

4.26. Вся продукция цеха проверяется двумя контролёрами, причем первый контролёр проверяет 60 % изделий, а второй – остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие, равна 0,01, второй – 0,02. Найти вероятность того, что: а) наудачу взятое изделие, маркированное как стандартное, окажется нестандартным; б) изделие проверялось вторым контролёром, если оно оказалось нестандартным.

4.27. На вход радиолокационного устройства с вероятностью 0,8 поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью 0,2 – только помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие сигнала с вероятностью 0,7, если только помеха, то – с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что: а) устройство зарегистрирует наличие сигнала; б) в составе зарегистрированного сигнала есть полезный сигнал, если устройство зарегистрировало наличие сигнала.

4.28. Стрелочный перевод состоит из двух частей: электрической и механической. Безотказная работа каждой части необходима для работы стрелочного перевода. Вероятность выхода из строя в течение месяца электрической части равна 0,05, механической – 0,01. В течение месяца перевод вышел из строя. Найти вероятность того, что отказала механическая часть.

4.29. Иногородний студент может уехать домой на поезде или на автобусе. Билет он покупает за сутки до отправления, причём автобус выбирает в 20 % случаев. Вероятность того, что к моменту обращения студента в кассу билеты будут распроданы, равна для железнодорожного вокзала 0,3, для автобусного 0,5. Найти вероятность того, что: а) студент уедет домой; б) студент ехал на поезде, если он уедет домой.

4.30. На складе хранятся три прибора. Известно, что среди них могут быть бракованные, причём все возможные предположения о числе бракованных приборов являются равновероятными. Найти вероятность того, что: а) наудачу извлечённый прибор является бракованным; б) на складе было два бракованных прибора, если извлечённый прибор оказался бракованным.

Задание 5

5.1. Два равносильных противника играют в шахматы. Что более вероятно: выиграть 1 партии из 2 или 2 партии из 4? (Ничьи в расчет не принимаются).

5.2. Вероятность изготовления на автоматическом станке бракованной детали равна 0,15. Найти вероятность того, что из 6 изготовленных деталей бракованных будет: а) одна; б) не более двух.

5.3. В среднем пятая часть поступающих в продажу автомобилей некомплектны. Найти вероятность того, что среди десяти автомобилей имеют некомплектность: а) три автомобиля; б) не менее трёх.

5.4. Производится залп из пяти орудий по некоторому объекту. Вероятность попадания в объект из каждого орудия равна 0,7. Найти вероятность ликвидации объекта, если для этого необходимо не менее трёх попаданий.

5.5. В среднем по 15 % договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из десяти договоров страховая компания выплатит страховую сумму: а) по трём договорам; б) не более чем по трём договорам.

5.6. Прибор состоит из 7 узлов. Вероятность безотказной работы за время t для каждого из узлов равна 0,8. Найти вероятность того, что за время t безотказно работать будут: а) шесть узлов; б) не менее шести узлов.

5.7. В бригаде 10 человек. Вероятность невыхода на работу одного человека по причине болезни равна 0,05. Найти вероятность того, что по причине болезни на работу не выйдут: а) два человека; б) не более двух.

5.8. Тест состоит из пяти вопросов, предусматривающих ответы «да» или «нет». Студент не знает ответ ни на один вопрос и выбирает ответы наугад. Найти: а) наиболее вероятное число правильных ответов и соответствующую этому событию вероятность; б) вероятность того, что число правильных ответов будет не менее четырёх.

5.9. Вероятность того, что изделие успешно пройдет контроль, равна 0,8. Найти вероятность того, что из шести изделий контроль успешно пройдут: а) четыре изделия; б) не менее четырех изделий.

5.10. В автопарке предприятия имеется 10 автомобилей, для каждого из которых вероятность работы без простоев из-за ремонта в течение месяца равна 0,8. Найти: а) наиболее вероятное число автомобилей, не потребовавших ремонта в течение месяца, и соответствующую этому событию вероятность; б) вероятность того, что в течение месяца без простоев проработают не менее восьми автомобилей.

5.11. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,4. Определить вероятность того, что в шести опытах число опасных перегрузок будет: а) равно трём; б) не более двух.

5.12. Биатлонист производит 5 выстрелов по мишени. Вероятность поражения мишени в каждом выстреле постоянна и равна 0,85. Найти вероятность того, что мишень будет поражена: а) четыре раза; б) не менее четырех.

5.13. Вероятность того, что при проверке деталь окажется бракованной, равна 0,1. Найти вероятность того, что из шести проверяемых деталей окажется: а) одна бракованная; б) не более одной бракованной.

5.14. Вероятность сдачи студентом каждого из пяти экзаменов равна 0,7. Найти вероятность того, что студент сдаст: а) все экзамены; б) не менее трех.

5.15. Игральная кость подбрасывается пять раз. Найти вероятность того, что 4 выпадет: а) три раза; б) не менее трёх раз.

5.16. Вероятность выигрыша по лотерейному билету составляет 0,1. Найти вероятность того, что среди 5 лотерейных билетов выигрышных будет: а) два билета; б) не менее трех.

5.17. Испытывается каждый из 10 элементов некоторого устройства. Вероятность выдержать испытание для каждого элемента составляет 0,9. Найти: а) наиболее вероятное число выдержавших испытание элементов и соответствующую этому событию вероятность; б) вероятность того, что испытание выдержат не менее 8 элементов.

5.18. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,85. Найти вероятность того, что из 5 изготовленных деталей стандартных будет: а) четыре; б) не менее четырех.

5.19. Технологический процесс контролируется по 14 параметрам. Вероятность выхода каждого параметра за границы технических допусков составляет 0,2. Найти: а) наиболее вероятное число параметров, выходящих за границы технических допусков, и соответствующую этому событию вероятность; б) вероятность выхода за границы технических допусков не более 3 параметров.

5.20. Вероятность малому предприятию стать банкротом за время t равна 0,2. Найти вероятность того, что из шести малых предприятий за время t сохранятся: а) два; б) более двух.

5.21. Монета бросается 6 раз. Найти: а) наиболее вероятное число выпадений герба и соответствующую вероятность; б) вероятность того, что герб появится не менее 4 раз.

5.22. Два равносильных противника играют в шахматы. Что более вероятно: выиграть 2 партии из 4 или 3 партии из 6? (Ничьи в расчёт не принимаются.)

5.23 Прибор состоит из 10 узлов. За время t каждый из узлов может выйти из строя независимо от других с вероятностью 0,1. Найти: а) наиболее вероятное число вышедших из строя узлов и соответствующую этому событию вероятность; б) вероятность того, что за время t выйдет из строя хотя бы один узел.

5.24. Отдел технического контроля проверяет партию изделий из 10 деталей. Вероятность того, что деталь будет стандартной, равна

0,75. Найти: а) наиболее вероятное число деталей, которые будут признаны стандартными; б) вероятность того, что число стандартных деталей будет не менее 8.

5.25. Вероятность попадания бомбы в цель составляет 0,25. Сбрасывается 8 бомб. Найти вероятность того, что число попаданий будет: а) равно 4; б) не менее 7.

5.26. Экспериментально установлено, что при подбрасывании спичечного коробка количества его падений на меньшую, среднюю и большую грани относятся как 1:4:15. Найти вероятность того, что при 6 подбрасываниях коробок: а) 5 раз упадет на большую грань; б) 1 раз упадет на среднюю грань.

5.27. Вероятность возникновения трещины в оси колёсной пары за время t равна 0,05. Найти вероятность того, что среди десяти колёсных пар за время t трещины образуются: а) в одной колёсной паре; б) не более чем в одной.

5.28. В квартире 8 электролампочек. Вероятность работы лампочки в течение года равна 0,9. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить: а) четыре лампочки; б) не менее половины лампочек?

5.29. Фирма, занимающаяся продажей строительных материалов, имеет пять магазинов. Ежедневно с вероятностью 0,3 каждый магазин, независимо от других, может заказать на следующий день крупную партию товара. Найти вероятность того, что на определённый день поступит: а) две заявки; б) хотя бы одна заявка.

5.30. По статистическим данным 10 % открывающихся новых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Найти вероятность того, что из семи малых предприятий прекратят свою деятельность: а) пять; б) не менее пяти.

Задание 6

6.1. Фирма, занимающаяся установкой металлических дверей, раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. По статистике, примерно в одном случае из трех тысяч следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 10 тысяч листков число заказов будет: а) равно 10; б) не менее 5.

6.2. На контроль поступила партия из 150 деталей. Вероятность того, что при проверке деталь окажется стандартной, равна 0,7.

Найти вероятность того, что в партии окажется: а) 90 стандартных деталей; б) не менее половины стандартных.

6.3. Вероятность выхода из строя двигателя в течение года для строительной машины определённого типа равна 0,01. Организация имеет 70 машин данного типа. Найти вероятность того, что число машин, у которых двигатель выйдет из строя в течение года, будет: а) равно трём; б) не более трёх.

6.4. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. На поезд продано 700 билетов. Найти: а) наиболее вероятное число опоздавших пассажиров и соответствующую этому событию вероятность; б) вероятность того, что число опоздавших пассажиров будет не более четырёх.

6.5. Депо производит ремонт вагонов. Вероятность того, что ремонт будет произведён со сдачей с первого предъявления, равна 0,65. Найти вероятность того, что из 100 вагонов, отремонтированных в депо, с первого предъявления будут сданы: а) ровно 65 вагонов; б) не менее 65 вагонов.

6.6. Строительная организация заказала 100 оконных рам. Вероятность того, что при перевозке оконная рама будет испорчена, равна 0,02. Найти: а) наиболее вероятное число оконных рам, испорченных при перевозке, и соответствующую этому событию вероятность; б) вероятность того, что при перевозке будут испорчены не более двух рам.

6.7. Электрическая цепь состоит из 90 однотипных элементов. Вероятность выхода из строя за время t для каждого элемента одинакова и равна 0,45. Элементы работают независимо друг от друга. Найти вероятность того, что число вышедших из строя элементов будет: а) равно 50; б) от 50 до 70 включительно.

6.8. Организация устанавливает окна и двери. По статистическим данным 35 % заказов являются заказами на установку дверей. Найти вероятность того, что из 120 заказов число заказов на установку дверей будет: а) равно 60; б) не более 60.

6.9. Вероятность отклонения от принятого стандарта при штамповке клемм равна 0,03. Найти вероятность того, что в партии из 100 клемм не соответствуют стандарту: а) пять клемм; б) не более четырех клемм.

6.10. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что среди 1000 новорожденных: а) мальчиков будет ровно половина; б) мальчиков будет не менее 500 и не более 600.

6.11. Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,002. Свёрла укладываются в коробки по 100 штук. Найти вероятность того, что: а) в коробке не окажется бракованных свёрл; б) число бракованных свёрл окажется не более трёх.

6.12. На контроль поступила партия из 100 деталей. Вероятность того, что при проверке деталь окажется стандартной, равна 0,8. Найти вероятность того, что в партии окажется: а) три стандартные детали; б) не менее половины стандартных.

6.13. Вероятность того, что в течение одной смены возникнет неполадка станка, равна 0,04. Найти: а) наиболее вероятное число неполадок за квартал (90 дней); б) вероятность того, что за квартал (90 дней) произойдет не более трёх неполадок.

6.14. По статистическим данным известно, что в определённом городе 60 % жителей имеют выход в интернет. Найти вероятность того, что из 200 человек выход в интернет имеют: а) половина; б) не менее половины.

6.15. Магазин получил 1000 стеклянных бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка будет разбита, равна 0,003. Найти вероятность того, что при перевозке будут разбиты: а) две бутылки; б) не более двух бутылок.

6.16. По статистическим данным, в среднем 87 % новорожденных доживают до 50 лет. Найти вероятность того, что из 1000 новорожденных до 50 лет доживут: а) половина; б) не менее половины.

6.17. Лабораторную работу по математической статистике с первого раза успешно выполняют 50 % студентов. Найти вероятность того, что из 100 студентов работу успешно выполнят: а) 60 студентов; б) не менее 60 студентов.

6.18. Электрическая цепь состоит из 120 однотипных элементов. Вероятность выхода из строя за время t для каждого элемента одинакова и равна 0,3. Элементы работают независимо друг от друга. Найти: а) наиболее вероятное число элементов, вышедших из строя за время t, и соответствующую этому событию вероятность; б) вероятность того, что число вышедших из строя элементов будет от 50 до 100 включительно.

6.19. Строительная организация заказала партию из 10000 кирпичей. Вероятность того, что при перевозке кирпич будет испорчен, равна 0,0002. Найти: а) наиболее вероятное число кирпичей, испорченных при перевозке, и соответствующую этому событию вероятность; б) вероятность того, что при перевозке будут испорчены не более десяти кирпичей.

6.20. Вероятность изготовления на заводе первосортного холодильника составляет 0,9. В магазин поступили 100 холодильников. Найти вероятность того, что: а) среди них будет 92 первосортных холодильника; б) число первосортных холодильников будет находиться в пределах от 80 до 90 включительно.

6.21. Вероятность брака при переплёте дипломной работы в типографии составляет 0,01. В типографию поступило 300 работ. Найти вероятность того, что при переплёте работ брак будет допущен: а) 3 раза; б) не более 3 раз.

6.22. Депо производит ремонт вагонов. Вероятность того, что ремонт будет произведен со сдачей с первого предъявления, равна 0,92. Найти вероятность того, что из 150 вагонов, отремонтированных в депо, с первого предъявления будут сданы: а) ровно 80 вагонов; б) не менее 80 вагонов.

6.23. Всхожесть семян новой культуры составляет 85 %. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян взойдёт: а) ровно половина; б) не менее половины.

6.24. По статистическим данным, 3 % паркетных щитов не удовлетворяют требованиям ГОСТ 862.4. Найти вероятность того, что из 100 паркетных щитов требованиям ГОСТ 862.4 не будут удовлетворять: а) пять щитов; б) не более пяти щитов.

6.25. Строительная фирма, занимающаяся установкой окон ПВХ, раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. По статистике примерно в одном случае из двух тысяч следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 100 тысяч листков число заказов будет: а) равно 48; б) находиться в границах от 45 до 55.

6.26. Вероятность выхода из строя трансмиссии в течение года для строительной машины определённого типа равна 0,05. Организация имеет 70 машин данного типа. Найти наиболее вероятное число машин, у которых трансмиссия выйдет из строя в течение года, и соответствующую этому событию вероятность.

6.27. Депо производит ремонт вагонов. Вероятность того, что ремонт будет произведён со сдачей с первого предъявления, равна 0,78. Найти вероятность того, что из 200 вагонов, отремонтированных в депо, с первого предъявления будут сданы: а) ровно 100 вагонов; б) не менее 150 вагонов.

6.28. Вероятность выхода из строя энергосберегающей лампочки в течение года равна 0,4. Найти вероятность того, что из 80 лампочек выйдут из строя в течение года: а) 10 лампочек; б) не более 10.

6.29. В учебном заведении насчитывается 1825 студентов. Найти вероятность того, что 1 сентября является днём рождения: а) четырёх студентов; б) не менее четырёх студентов.

6.30. Организация устанавливает окна и двери. По статистическим данным 60 % заказов являются заказами на установку окон. Найти вероятность того, что из 100 заказов число заказов на установку окон будет: а) равно 70; б) не более 80.

Задание 7

Для определённой в условии задачи дискретной случайной величины:

1) построить ряд распределения и столбцовую диаграмму;

2) найти функцию распределения и построить её график;

3) вычислить числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду.

7.1. Сигнальное охранное устройство предприятия состоит из трёх независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в течение месяца равна 0,2. Случайная величина ξ – число отказавших элементов.

7.2. Вероятности выдержать испытания на разрыв для каждой из трёх асбестоцементных труб соответственно равны 0,8; 0,9 и 0,95. Случайная величина ξ – количество труб, которое выдержало испытания на разрыв.

7.3. Вероятности утечки воды на каждом из трех участков водопровода соответственно равны 0,1; 0,05 и 0,2. Случайная величина ξ – число участков водопровода, на которых произойдет утечка воды.

7.4. Вероятность выхода из строя электрооборудования в течение года для каждой из трёх строительных машин равна 0,01. Случайная величина ξ – число машин, у которых в течение года выйдет из строя электрооборудование.

7.5. В партии из 6 изделий имеется 4 стандартных. Наудачу отобрали 3 изделия. Случайная величина ξ – число стандартных изделий среди отобранных.

7.6. Для трех проверяемых образцов вероятности выдержать многоступенчатые испытания прочности соответственно равны 0,5; 0,6 и 0,3. Случайная величина ξ – число образцов, выдержавших испытания.

7.7. Вероятность поступления вызова в службу экстренной помощи в течение дня равна 0,6. Случайная величина ξ – число вызовов, поступивших за три дня.

7.8. Оптовая база обслуживает 3 магазина, занимающихся продажей строительных материалов. От каждого из этих магазинов может поступить заявка на товары на следующий день с вероятностью 0,7. Случайная величина ξ – число поступивших заявок.

7.9. Предприятие приобрело 10 компьютеров и 20 ноутбуков. Для подразделения выделяют 3 ПЭВМ. Случайная величина ξ – число ноутбуков среди ПЭВМ, выделенных для подразделения.

7.10. Вероятности выхода из строя ходовой части в течение года для каждой из трёх строительных машин соответственно равны 0,25; 0,17 и 0,2. Случайная величина ξ – число машин, у которых в течение года случится поломка ходовой части.

7.11. Известно, что в определенном городе 40 % горожан предпочитают добираться на работу личным автотранспортом. Случайная величина ξ – количество людей, добирающихся на работу личным автотранспортом из четырёх выбранных наугад.

7.12. Студент пришел на зачёт, зная из 30 вопросов только 25. В билете три вопроса. Случайная величина ξ – число вопросов в билете, которые студент знает.

7.13. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени в каждом выстреле равна 0,6. Случайная величина ξ – число попаданий в серии из трёх выстрелов.

7.14. Прибор состоит из трёх элементов. Вероятность выхода из строя за время t для первого элемента равна 0,01; для второго – 0,04; для третьего – 0,02. Случайная величина ξ – число элементов прибора, вышедших из строя за время t.

7.15. Вероятность того, что при проверке деталь окажется стандартной, равна 0,8. Случайная величина ξ – число стандартных деталей из четырех.

7.16. Вероятности появления брака на каждой из трёх операций соответственно равны 0,05; 0,04; 0,02. Случайная величина ξ – число операций, при которых был допущен брак.

7.17. Вероятность того, что в течение одной смены возникнет неполадка станка, равна 0,03. Случайная величина ξ – число неполадок за четыре смены.

7.18. В партии из 40 деталей имеется 10 нестандартных. Случайная величина ξ – число стандартных деталей из трёх наугад извлеченных.

7.19. Вероятность поступления вызова в службу экстренной помощи в течение часа равна 0,2. Случайная величина ξ – число вызовов, поступивших за четыре часа.

7.20. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени первым выстрелом равна 0,8; вторым – 0,7; третьим – 0,6. Случайная величина ξ – число попаданий в серии из трёх выстрелов.

7.21. В партии из 25 деталей имеется 5 нестандартных. Случайная величина ξ – число нестандартных деталей из трёх наугад извлечённых.

7.22. Вероятности безотказной работы в течение времени t для каждого из трёх приборов равны соответственно 0,7; 0,9 и 0,8. Случайная величина ξ – число приборов, вышедших из строя за время t.

7.23. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,3. Случайная величина ξ – число опасных перегрузок в серии из четырёх экспериментов.

7.24. Из 30 лотерейных билетов 5 выигрышных. Случайная величина ξ – число выигрышных билетов из трёх наугад выбранных.

7.25. Для данного студента вероятности успешной сдачи каждого из трёх экзаменов соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7. Случайная величина ξ – число успешно сданных экзаменов.

7.26. В данной организации 40 % всех заказов – это заказы на установку балконных рам. Случайная величина ξ – число заказов на установку рам из четырёх, поступивших в организацию.

7.27. Вероятности утечки воды на каждом из трёх участков водопровода соответственно равны 0,2; 0,1 и 0,15. Случайная величина ξ – число участков водопровода, на которых произойдёт утечка воды.

7.28. Предприятие приобрело 4 монитора. Вероятность повреждения монитора при транспортировке равна 0,02. Случайная величина ξ – число поврежденных мониторов.

7.29. Вероятности выхода из строя двигателя в течение года для каждой из трех строительных машин соответственно равны 0,01; 0,02 и 0,03. Случайная величина ξ – число машин, у которых в течение года случится поломка двигателя.

7.30. Из 10 водонагревательных приборов 4 бракованных. Случайная величина ξ – число бракованных приборов из трёх наугад выбранных.

Задание 8

Закон распределения непрерывной случайной величины задан функцией плотности $f(x)$.

1. Определить значение параметра C, построить график функции плотности.

2. Найти функцию распределения данной случайной величины и построить её график.

3. Вычислить числовые характеристики случайной величины ξ: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану.

4. Найти вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, принадлежащее отрезку $[a;\, b]$.

8.1. $f(x)=\begin{cases} Cx, & x\in[0;1]; \\ 0, & x\notin[0;1]. \end{cases}$ $a = 0,\ b = 0{,}5.$

8.2. $f(x)=\begin{cases} Cx^2, & x\in[-2;2]; \\ 0, & x\notin[-2;2]. \end{cases}$ $a = -1,\ b = 1.$

8.3. $f(x)=\begin{cases} C, & x\in[2;8]; \\ 0, & x\notin[2;8]. \end{cases}$ $a = 4,\ b = 6.$

8.4. $f(x)=\begin{cases} x+C, & x\in[3;6]; \\ 0, & x\notin[3;6]. \end{cases}$ $a = 4,\ b = 5.$

8.5. $f(x)=\begin{cases} Cx^3, & x\in[0;2]; \\ 0, & x\notin[0;2]. \end{cases}$ $a = 0{,}5,\ b = 1{,}5.$

8.6. $f(x)=\begin{cases} C(x^2+x), & x\in[0;1]; \\ 0, & x\notin[0;1]. \end{cases}$ $a = 0,\ b = 0{,}5.$

8.7. $f(x)=\begin{cases}Cx, & x\in[-3;0];\\ 0, & x\notin[-3;0].\end{cases}$
$a=-2$, $b=-1$.

8.8. $f(x)=\begin{cases}C(x^2-x), & x\in[0;1];\\ 0, & x\notin[0;1].\end{cases}$
$a=0$, $b=0{,}5$.

8.9. $f(x)=\begin{cases}Cx+1/3, & x\in[0;1];\\ 0, & x\notin[0;1].\end{cases}$
$a=0$, $b=0{,}5$.

8.10. $f(x)=\begin{cases}Cx^4, & x\in[-1;1];\\ 0, & x\notin[-1;1].\end{cases}$
$a=-1$, $b=0$.

8.11. $f(x)=\begin{cases}C(x+1), & x\in[1;3];\\ 0, & x\notin[1;3].\end{cases}$
$a=1{,}5$, $b=2$.

8.12. $f(x)=\begin{cases}C\,|\,x\,|, & x\in[-2;2];\\ 0, & x\notin[-2;2].\end{cases}$
$a=-1{,}5$, $b=0{,}5$.

8.13. $f(x)=\begin{cases}Cx, & x\in[-2;0];\\ 0, & x\notin[-2;0].\end{cases}$
$a=-1$, $b=-0{,}5$.

8.14. $f(x)=\begin{cases}x-C, & x\in[1;2];\\ 0, & x\notin[1;2].\end{cases}$
$a=1$, $b=1{,}5$.

8.15. $f(x)=\begin{cases}Cx^2, & x\in[-2;0];\\ 0, & x\notin[-2;0].\end{cases}$
$a=-1$, $b=0$.

8.16. $f(x)=\begin{cases}C, & x\in[-5;5];\\ 0, & x\notin[-5;5].\end{cases}$
$a=0$, $b=3$.

8.17. $f(x)=\begin{cases}C(x+1), & x\in[0;1];\\ 0, & x\notin[0;1].\end{cases}$
$a=0{,}5$, $b=0{,}8$.

8.18. $f(x)=\begin{cases}C/x^2, & x\in[1;3];\\ 0, & x\notin[1;3].\end{cases}$
$a=2$, $b=2{,}5$.

8.19. $f(x)=\begin{cases}C\,|\,x\,|, & x\in[-1;1];\\ 0, & x\notin[-1;1].\end{cases}$
$a=-0{,}5$, $b=0{,}8$.

8.20. $f(x)=\begin{cases}Cx^2, & x\in[2;4];\\ 0, & x\notin[2;4].\end{cases}$
$a=2$, $b=3{,}5$.

8.21. $f(x)=\begin{cases}Cx^3, & x\in[-2;0];\\ 0, & x\notin[-2;0].\end{cases}$
$a=-1{,}5$, $b=-0{,}5$.

8.22. $f(x)=\begin{cases}C(x+2), & x\in[0;2];\\ 0, & x\notin[0;2].\end{cases}$
$a=1{,}5$, $b=2$.

8.23. $f(x)=\begin{cases}C\sqrt{x}, & x\in[0;4];\\ 0, & x\notin[0;4].\end{cases}$
$a=1$, $b=3$.

8.24. $f(x)=\begin{cases}C(x^2+1), & x\in[-1;1];\\ 0, & x\notin[-1;1].\end{cases}$
$a=-0{,}5$, $b=0{,}5$.

8.25. $f(x)=\begin{cases}C(x+4), & x\in[-1;1];\\ 0, & x\notin[-1;1].\end{cases}$
$a=0$, $b=0{,}5$.

8.26. $f(x)=\begin{cases}C(x-2), & x\in[2;4];\\ 0, & x\notin[2;4].\end{cases}$
$a=2{,}5$, $b=3{,}5$.

8.27. $f(x)=\begin{cases}C, & x\in[4;10];\\ 0, & x\notin[4;10].\end{cases}$
$a = 4$, $b = 6$.

8.28. $f(x)=\begin{cases}C(x^2+2), & x\in[0;1];\\ 0, & x\notin[0;1].\end{cases}$
$a = 0$, $b = 0{,}5$.

8.29. $f(x)=\begin{cases}Cx, & x\in[0;9];\\ 0, & x\notin[0;9].\end{cases}$
$a = 1$, $b = 5$.

8.30. $f(x)=\begin{cases}C/x^2, & x\in[2;4];\\ 0, & x\notin[2;4].\end{cases}$
$a = 2$, $b = 2{,}5$.

Задание 9

9.1. Для проведения испытаний прочности на растяжение армирующего материала выбирают 100 образцов. Известно, что каждый из них выдерживает испытания с вероятностью 0,97. Определить вероятность того, что испытания выдержат не менее 96 образцов.

9.2. Среднее число отказов оборудования на предприятии в месяц равно 3. Поток отказов оборудования можно считать простейшим. Найти, сколько дней в месяц работник, отвечающий за ремонт и настройку оборудования, не будет ничего делать с вероятностью 0,5.

9.3. Известно, что 2 % бордюрных камней не выдерживают испытание на водопоглощение. Проверяется партия из 100 камней. Определить наиболее вероятное число камней, не прошедших испытание, и вероятность того, что испытание не выдержат менее двух.

9.4. При испытаниях строительных материалов на воспламеняемость каждый образец успешно проходит испытание с вероятностью 0,7. Испытания проводятся до первой неудачи. Определить среднее значение, дисперсию и моду случайной величины, характеризующей число образцов, успешно прошедших испытания.

9.5. Поток пассажирских железнодорожных составов, прибывающих на станцию, можно считать простейшим с интенсивностью 4 состава в час. Найти вероятность того, что в течение 20 минут на станцию прибудет не менее двух составов.

9.6. При каждом включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,99. Найти среднее значение и моду случайной величины, характеризующей число попыток включения до первого отказа.

9.7. Испытывается 10 однотипных приборов. Вероятность отказа каждого не зависит от отказов остальных и составляет 0,2. Найти наиболее вероятное и среднее число отказавших приборов.

9.8. Строительная организация заказала партию из 5000 кирпичей. Вероятность того, что при перевозке кирпич будет испорчен, равна 0,0002. Найти среднее значение и моду случайной величины, характеризующей число кирпичей, повреждёных при перевозке.

9.9. Испытание на истираемость выдерживают 98,5 % бордюрных камней. Определить вероятность того, что из 100 камней испытание не выдержат не более двух.

9.10. Среднее число неполадок станка в течение месяца равно 5. Поток неполадок станка можно считать простейшим. Найти, сколько дней в месяц работник, отвечающий за настройку станка, ничего не будет делать с вероятностью 0,6.

9.11. Вероятность того, что мост в течение года потребует усиления, равна 0,2. В городе 10 мостов. Найти вероятность того, что в течение года усиления потребуют не более 3 мостов.

9.12. Предполагая, что число дефектов на данном железнодорожном перегоне имеет закон распределения Пуассона с параметром $a = 2$, найти вероятность того, что количество дефектов будет не более двух.

9.13. Проводится осмотр деталей. Каждая деталь может оказаться бракованной с вероятностью 0,02. Найти среднее количество деталей, которые будут проверены до первого выявления брака.

9.14. Число мест утечки воды на 100 км водопровода имеет распределение Пуассона с параметром $a = 5$. Найти наиболее вероятное число мест утечки воды и вероятность того, что количество мест утечки будет не более трёх.

9.15. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте оценивается как 0,4. Исследования проводятся до возникновения первой опасной перегрузки. Найти среднее количество опытов, которые необходимо провести.

9.16. По данным длительной проверки качества запчастей определённого вида брак составляет 4 %. Найти среднее количество бракованных запчастей в партии из 200 штук и вероятность того, что в указанной партии бракованных запчастей будет не более 5 штук.

9.17. Среднее количество остановок станков в неделю равно 3. Считая, что число остановок станков в неделю имеет распределение Пуассона, найти вероятность того, что число остановок станков будет не более четырёх.

9.18. В строительной организации главный инженер снимается с должности в случае, если объект не будет сдан в срок. Вероятность сдачи в срок для каждого объекта оценивается как 0,95. Найти среднее количество объектов, которые организация сдаст в срок при нынешнем главном инженере.

9.19. Вероятность безотказной работы в течение смены для строительной машины данного типа равна 0,8. В ремонтно-строительной организации 20 машин такого типа. Найти среднее число машин, вышедших из строя в течение смены, и вероятность того, что в течение смены выйдут из строя не более 2 машин.

9.20. Поток грузовых железнодорожных составов, прибывающих на станцию, можно считать простейшим с интенсивностью 2 состава в час. Найти вероятность того, что в течение 30 минут на станцию прибудет хотя бы один состав.

9.21. Для асбестоцементной трубы вероятность выдержать испытания на разрыв равна 0,9. Испытания продолжаются до выявления первой трубы, не выдержавшей нагрузку. Найти среднее число испытаний.

9.22. Вероятность поставки в срок технологического оборудования каждого типа равна 0,9. На данный объект организацией должно быть поставлено 10 видов оборудования. Найти вероятность того, что все виды оборудования будут поставлены в срок.

9.23. Число дефектов на 100 мм сварочного шва характеризуется случайной величиной, распределённой по закону Пуассона с параметром $a = 1$. Определить вероятность того, что на 100 мм сварочного шва будет более четырёх дефектов.

9.24. Для строительного механизма вероятность безотказной работы в течение дня равна 0,87. Найти среднее число дней в неделю, в течение которых механизм проработает безотказно, и вероятность того, что механизм проработает безотказно в течение 5 дней.

9.25. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,85. Произведено 100 деталей. Найти наиболее вероятное и среднее количество стандартных деталей.

9.26. Вероятность того, что на 50 км водопровода будет хотя бы одно место утечки воды, равна 0,9. Предполагая, что число мест утечки воды имеет распределение Пуассона, найти среднее количество мест утечки воды.

9.27. Для испытания строительных материалов на воспламеняемость изготовили 12 образцов. Каждый из образцов успешно проходит испытания с вероятностью 0,8. Определить среднее значение, дисперсию и моду случайной величины, характеризующей число образцов, успешно прошедших испытания.

9.28. В строительной организации прораб снимается с должности в случае, если объект не будет сдан в срок. Вероятность сдачи в срок для каждого объекта оценивается как 0,89. Найти вероятность того, что число объектов, которые организация сдаст в срок при нынешнем прорабе, будет не более трёх.

9.29. Фирма занимается продажей строительных материалов. Число заказов в день имеет распределение Пуассона с параметром $a = 7$. Найти вероятность того, что в определённый день поступит не более пяти заказов.

9.30. При демонтаже строительных конструкций вероятность повторного использования каждой из конструкций равна 0,6. Организации нужно демонтировать 10 конструкций. Найти наиболее вероятное и среднее число конструкций, которые можно будет повторно использовать.

Задание 10

10.1. Предположим, что объём воды, израсходованной предприятием в месяц на бытовые нужды, равномерно распределён в промежутке от 20 до 50 м^3. Найти вероятность того, что объём воды, израсходованной предприятием в данный месяц, будет находиться в промежутке от 15 до 30 м^3.

10.2. Процент содержания органических добавок в цементе – нормально распределённая случайная величина с параметрами $a = 0{,}25$ % и $\sigma^2 = 0{,}006$. Согласно государственному стандарту Республики Беларусь содержание органических добавок не должно превышать 0,5 %. Определить вероятность того, что содержание добавок соответствует стандарту.

10.3. Срок службы сверла для перфоратора представляет собой случайную величину, подчинённую показательному закону распределения с параметром $\lambda = 0{,}1$ суток$^{-1}$. Найти вероятность того, что сверло прослужит не менее 10 суток.

10.4. Для определения содержания вредных серосодержащих примесей в песке используют весы аналитические с погрешностью измерения 0,0002 г. Считая, что ошибки измерения распределены равномерно, определить вероятность того, что погрешность по абсолютной величине не превысит 0,0001 г.

10.5. Содержание диоксида кремния в 1 килограмме песка, применяемого для испытаний цемента, – нормально распределённая случайная величина с параметрами a = 950 г и σ^2 = 25 г^2. Определить вероятность того, что содержание диоксида кремния в выборочной пробе песка будет не менее 93 % (песок, содержащий менее 93 % диоксида кремния, к испытаниям не допускается).

10.6. Предположим, что объём воды, израсходованной предприятием в месяц на производственные нужды, равномерно распределён в промежутке от 100 до 200 м^3. Найти вероятность того, что объём воды, израсходованной предприятием в данный месяц, будет находиться в промежутке от 150 до 180 м^3.

10.7. Время ремонта пути имеет показательный закон распределения со средним значением 6 часов. Найти вероятность того, что ремонт пути будет длиться не более 8 часов.

10.8. При взвешивании проб гравия используются весы с ценой деления 200 г. Показания округляются до ближайшего целого деления. Считая, что ошибки при округлении распределены равномерно, найти вероятность того, что будет сделана ошибка, не превышающая по абсолютной величине 50 г.

10.9. Расстояние от оси пути для низких платформ имеет нормальный закон распределения со средним значением, равным 1745 мм, и средним квадратическим отклонением 20 мм. Найти вероятность того, что указанное расстояние будет соответствовать нормативам, т. е. находиться в пределах от 1720 до 1775 мм.

10.10. Случайная величина, характеризующая время, необходимое для доведения габаритов моста до нормы, распределена по показательному закону с математическим ожиданием, равным 1 суткам. Какова вероятность того, что указанное время будет не более 3 суток?

10.11. При определении толщины рулонных материалов для полов используется оптическое устройство, снабжёное измерительной шкалой с ценой деления 0,1 мм. Какова вероятность того, что при измерении абсолютная ошибка не превысит 0,02 мм?

10.12. Высота грузовой платформы после года эксплуатации имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием 1100 мм и средним квадратическим отклонением 30 мм. По правилам технической эксплуатации допускаются изменения высоты до 20 мм в сторону увеличения и 50 мм в сторону уменьшения. Найти вероятность того, что через год эксплуатации высота платформы будет соответствовать правилам технической эксплуатации.

10.13. Время, необходимое для капитального ремонта жилого здания, распределено по показательному закону с параметром $\lambda = 0{,}4$ мес$^{-1}$. Определить среднее время, необходимое для капитального ремонта. Какова вероятность того, что для ремонта понадобится более трёх месяцев?

10.14. Ошибка при измерении диаметра диска имеет равномерный закон распределения с параметрами $a = -0{,}02$ и $b = 0{,}02$. Найти вероятность того, что ошибка при одном измерении будет по абсолютной величине меньше, чем 0,01.

10.15. Номинальный размер ширины колеи равен 1520 мм, а фактический размер имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием, равным 1520 мм, и средним квадратическим отклонением 10 мм. Колея не требует ремонта, если отклонение её ширины от номинального размера не превышает по сужению 4 мм, по уширению – 8 мм. Найти вероятность того, что колею не придется ремонтировать.

10.16. Время проверки двух главных путей путеизмерительным вагоном имеет показательный закон распределения с параметром $\lambda = 0{,}025$ мин$^{-1}$. Найти вероятность того, что время проверки будет менее 1 часа.

10.17. При определении прочности бетона методом пластических деформаций используется штангенциркуль, обеспечивающий измерения с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,1 мм. Какова вероятность того, что при измерении ошибка превысит 0,04 мм?

10.18. Расстояние от оси пути для высоких платформ имеет нормальный закон распределения со средним значением, равным 1920 мм, и средним квадратическим отклонением 20 мм. Найти вероятность того, что указанное расстояние будет соответствовать нормативам, т. е. находиться в пределах от 1895 до 1950 мм.

10.19. Расход воды предприятием на поливку территории имеет показательный закон распределения со средним 350 м^3/год. Найти вероятность того, что расход воды будет менее 400 м^3/год.

10.20. Фактический объём строительно-монтажных работ в месяц имеет нормальный закон распределения со средним квадратическим отклонением, равным 5 млн руб., и средним квадратическим отклонением 0,3 млн руб. Найти вероятность того, что объём работ будет находиться в пределах от 1 до 6 млн руб.

10.21. Время поставки технологического оборудования на объект ремонтно-строительной организации имеет показательный закон распределения с параметром $\lambda = 0{,}2$ суток$^{-1}$. Найти вероятность того, что указанное время будет не менее 5 и не более 10 суток.

10.22. Плановая стоимость ремонтно-строительных работ на данный месяц равна 4 млн руб. Фактическая стоимость имеет нормальный закон распределения со средним значением, равным 4 млн руб. и средним квадратическим отклонением 0,2 млн руб. Найти вероятность того, что фактическая стоимость будет находиться в пределах от 3 до 5 млн руб.

10.23. Высота грузовой платформы после года эксплуатации имеет нормальный закон распределения с параметрами $a = 200$ мм и $\sigma = 25$ мм. По правилам технической эксплуатации допускаются изменения высоты до 20 мм в сторону увеличения и 50 мм в сторону уменьшения. Найти вероятность того, что через год эксплуатации высота платформы будет соответствовать правилам.

10.24. Случайная величина, характеризующая время, необходимое для уширения и усиления мостовых сооружений, распределена по показательному закону с математическим ожиданием, равным 4 суткам. Какова вероятность того, что на уширение и усиление сооружений понадобится не менее 3, но не более 6 суток?

10.25. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,1. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Считая, что ошибки измерения распределены равномерно, найти вероятность того, что при измерении будет сделана ошибка, не превышающая по абсолютной величине 0,02.

10.26. Изменение уровня воды в реке в весенний период имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием, равным 1 м, и средним квадратическим отклонением 0,5 м. Найти вероятность того, что изменение уровня воды будет находиться в пределах от 0 до 2 метров.

10.27. Случайная величина, характеризующая продолжительность непрерывного пламенного горения негорючих строительных материалов, распределена по показательному закону с математическим ожиданием, равным 1 с. Определить вероятность того, что взятый наугад образец будет гореть не менее 5 секунд.

10.28. При испытаниях цемента допускается использование песка с содержанием оксида кремния не менее 96 %. Процент содержания оксида кремния в песке – случайная величина, равномерно распределённая в промежутке от $a = 92$ % до $b = 99$ %. Определить вероятность того, что выбранная партия песка может быть использована при испытаниях цемента.

10.29. Плотность материала, применяемого в звукоизоляционных прослойках, является нормально распределённой случайной величиной с математическим ожиданием $a = 20$ кг/м^3 и средним квадратическим отклонением $\sigma = 3$ кг/м^3. Определить вероятность того, что плотность исследуемого образца будет не менее 15 кг/м^3 и не более 25 кг/м^3.

10.30. Время на установку одной балконной рамы имеет показательный закон распределения со средним значением, равным 5 ч. Найти вероятность того, что на установку рамы понадобится не более 6 часов.

8 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Номера, которые необходимо выбрать, для выполнения лабораторных работ № 1–4, определяются с помощью первой буквы фамилии и двух последних цифр шифра студента +50 значений, признак выбирается по начальной букве фамилии студента.

Например, если фамилия начинается на В, две последние цифры шифра студента 22, то выбираем с 22 по 71 строку со 2-го столбца по признаку «Вес грузового поезда» (таблица 8.1).

Таблица 8.1 – **Данные для лабораторных работ № 1–4**

Номер п/п	Вес грузового поезда, т А – Д	Средняя участковая скорость, км/ч Е – Л	Время нахождения поезда на участке, ч М – Т	Время простоя состава под скрещением, мин У – Ц	Время технического обслуживания состава, мин Ч – Я
1	5161,48	30,31	4,1	20,6	63,9
2	5124,75	30,4	4,185	7,54	71,3
3	4435,68	31,1	4,098	23,3	70,9
4	5100,58	30,35	4,19	7,04	75,9
5	4885,41	30,7	4,156	2,47	75,9
6	5416,94	30,1	4,225	39,8	66,2
7	4496,66	31,1	4,108	0,42	61,9
8	4722,08	30,9	3,95	15	63,8
9	5537,91	29,85	4,2	18,1	78,4
10	5074,01	30,45	4,18	5,5	76,6
11	4807,09	30,79	4,145	1,48	65,6
12	4046,02	31,7	4,05	10,8	72
13	4683,93	31,1	4,13	16,9	68,5
14	4872,42	30,65	4,154	9,77	65,4
15	4003,22	31,8	4,04	0,55	74,7
16	4628,01	30,95	4,122	26,2	63,4
17	4293,44	31,35	4,274	1,46	61,9
18	5035,7	30,46	4,175	5,3	76,2
19	5780,28	29,56	4,274	9,09	77,6
20	4752,14	31	3,97	8,96	72,7

Продолжение таблицы 8.1

Номер п/п	Вес грузового поезда, т А – Д	Средняя участковая скорость, км/ч Е – Л	Время нахождения поезда на участке, ч М – Т	Время простоя состава под скрещением, мин У – Ц	Время технического обслуживания состава, мин Ч – Я
21	6115,63	29,2	4,32	11,7	66,8
22	4788,77	30,75	4,143	12	62,3
23	5140,42	30,33	4,189	0,68	63,1
24	5856,44	29,47	4,285	2,16	70,1
25	5243,49	31,5	4,2	0,24	75,5
26	5007,53	30,5	4,17	11,5	66,1
27	5321,63	30,11	4,21	5,01	69,4
28	5296,32	30,2	4,3	19,3	71,2
29	4046,73	31,65	4,05	3,21	65,8
30	4051,41	31,64	4,05	26,5	79
31	4795,27	30,75	4,146	10,4	60,5
32	4736,68	30,9	4,137	9,45	77,3
33	4687,59	30,87	4,13	9,27	78,1
34	4399,2	31,22	4,09	16,8	60,8
35	5428,04	30,2	4,22	1,22	78,9
36	5079,74	30,4	4,181	13,2	64,6
37	4934,46	30,65	4,162	1,99	62
38	5207,58	30,3	4,2	6,6	63,8
39	5556,51	30,5	4,244	10,4	72,6
40	3543,68	32,25	3,987	2,43	66,1
41	4878,13	30,8	4,156	7,16	77,7
42	5590,46	31	4,25	1,72	68
43	5194,84	30,27	4,2	20,3	76,7
44	4216,72	31,6	4,07	23,8	60,3
45	4790,17	30,75	4,143	16,8	78,5
46	5584,01	29,8	4,248	11,3	78,8
47	4909,11	30,61	4,156	3,01	76,5
48	4677,98	30,95	4,128	8,59	60
49	5343,27	30	4,214	1,08	68,8
50	4864,33	30,66	4,15	12,4	75,8
51	5135,47	30,34	4,19	33,7	71,6
52	5222,85	30,23	4,2	9,13	79,6
53	5339,34	29,5	4,22	6,49	66,3
54	4939,53	30,6	4,162	9,2	60,5
55	4366,78	31,7	4,09	11,9	70,5
56	4553,22	31,05	4,01	9,63	79,9
57	5130,41	30,34	4,19	9,14	77,5
58	5063,37	30,42	4,18	22,4	69,7
59	5711,62	29,65	4,265	2,5	77,7

Продолжение таблицы 8.1

Номер п/п	Вес грузового поезда, т А – Д	Средняя участковая скорость, км/ч Е – Л	Время нахождения поезда на участке, ч М – Т	Время простоя состава под скрещением, мин У – Ц	Время технического обслуживания состава, мин Ч – Я
60	4730,51	30,82	4,136	5,26	72,8
61	5027,05	30,47	4,174	14,6	79,2
62	5224,4	31,2	4,2	14,9	68,8
63	5537,1	29,86	4,24	5,7	76,5
64	5510	30,1	4,238	6,67	73,2
65	5233,44	30,22	4,2	1,87	68,6
66	4912,66	30,6	4,16	23,8	76,1
67	5329,88	30,1	4,2	1,76	63,6
68	5455,61	29,95	4,231	9,85	61,1
69	5196,83	30,26	4,19	8,13	71,2
70	5924,08	30,1	4,294	5,49	77,8
71	4476,26	31,2	4,1	1,92	79,1
72	4849,98	30,68	4,15	1,9	63
73	6030,83	29,7	4,31	3,9	75,6
74	5302,24	30,14	4,21	4,17	64,7
75	5189,26	30,27	4,19	3,88	72,4
76	4718,08	30,84	4,137	20,5	75,7
77	5381,27	30,04	4,22	1,07	61,1
78	5044,9	30,45	4,18	0,14	62,1
79	4982,15	30,52	4,168	0,88	69,6
80	4576,45	31,01	4,214	3,51	62,4
81	4717,06	31	4,137	20,7	78,1
82	6040,33	29,5	4,314	19,3	70,8
83	4358,76	31,27	4,09	3,24	71,7
84	5470,73	30,1	4,233	1,92	74,4
85	4886,58	30,64	4,156	8,24	79,8
86	4832,32	30,7	4,15	13,5	61,7
87	5255,13	30,2	4,21	26,4	72
88	4378,64	31,25	4,09	1,29	72,9
89	5237,14	30,2	4,2	12,6	62,5
90	6154,79	29,1	4,325	22,9	76,9
91	3884,28	31,8	4,09	5,74	72,3
92	4216,6	31,44	4,07	8,01	64,5
93	5174,03	30,29	4,19	25,1	78,1
94	5757,94	30,1	4,271	15,8	63,1
95	4857,76	30,67	4,156	17,8	72,7
96	4974,92	30,53	4,167	14,3	74,1
97	4468,04	31,14	4,1	1,41	70,5
98	4750,51	30,8	4,138	4,87	63,3

Окончание таблицы 8.1

Номер п/п	Вес грузового поезда, т А – Д	Средняя участковая скорость, км/ч Е – Л	Время нахождения поезда на участке, ч М – Т	Время простоя состава под скрещением, мин У – Ц	Время технического обслуживания состава, мин Ч – Я
99	5281,84	30,16	4,208	1,53	65,3
100	5455,57	30,9	4,234	10,7	70,4

Номера, которые необходимо выбрать, для выполнения лабораторной работы № 5 определяются с помощью первой буквы фамилии и двух последних цифр шифра студента +15 значений. Значения ξ выбираются всеми студентами со 2-го столбца (вес грузового поезда), значения η выбираем по первой букве фамилии студента (таблица 8.2).

Таблица 8.2 – **Данные для лабораторной работы № 5**

Номер п/п	Вес грузового поезда, т А – Д	Средняя участковая скорость, км/ч Е – Л	Время нахождения поезда на участке, ч М – Т	Время простоя состава под скрещением, мин У – Ц	Время технического обслуживания состава, мин Ч – Я
1	5161,48	30,31	4,1	33,2	66,61
2	5124,75	30,4	4,185	32,8	66,25
3	4435,68	31,1	4,098	26,6	59,36
4	5100,58	30,35	4,19	32,6	66,01
5	4885,41	30,7	4,156	30,7	63,85
6	5416,94	30,1	4,225	35,5	69,17
7	4496,66	31,1	4,108	27,2	59,97
8	4722,08	30,9	3,95	29,2	62,22
9	5537,91	29,85	4,2	36,5	70,38
10	5074,01	30,45	4,18	32,4	65,74
11	4807,09	30,79	4,145	30	63,07
12	4046,02	31,7	4,05	23,1	55,46
13	4683,93	31,1	4,13	28,9	61,84
14	4872,42	30,65	4,154	30,6	63,72
15	4003,22	31,8	4,04	22,7	55,03
16	4628,01	30,95	4,122	28,4	61,28
17	4293,44	31,35	4,274	25,3	57,93
18	5035,7	30,46	4,175	32	65,36
19	5780,28	29,56	4,274	38,7	72,8
20	4752,14	31	3,97	29,5	62,52
21	6115,63	29,2	4,32	41,7	76,16
22	4788,77	30,75	4,143	29,8	62,89
23	5140,42	30,33	4,189	33	66,4
24	5856,44	29,47	4,285	39,4	73,56
25	5243,49	31,5	4,2	33,9	67,43

Продолжение таблицы 8.2

Номер п/п	Вес грузового поезда, т А – Д	Средняя участковая скорость, км/ч Е – Л	Время нахождения поезда на участке, ч М – Т	Время простоя состава под скрещением, мин У – Ц	Время технического обслуживания состава, мин Ч – Я
26	5007,53	30,5	4,17	31,8	65,08
27	5321,63	30,11	4,21	34,6	68,22
28	5296,32	30,2	4,3	34,4	67,96
29	4046,73	31,65	4,05	23,1	55,47
30	4051,41	31,64	4,05	23,2	55,51
31	4795,27	30,75	4,146	29,9	62,95
32	4736,68	30,9	4,137	29,3	62,37
33	4687,59	30,87	4,13	28,9	61,88
34	4399,2	31,22	4,09	26,3	58,99
35	5428,04	30,2	4,22	35,6	69,28
36	5079,74	30,4	4,181	32,4	65,8
37	4934,46	30,65	4,162	31,1	64,34
38	5207,58	30,3	4,2	33,6	67,08
39	5556,51	30,5	4,244	36,7	70,57
40	3543,68	32,25	3,987	18,6	50,44
41	4878,13	30,8	4,156	30,6	63,78
42	5590,46	31	4,25	37	70,9
43	5194,84	30,27	4,2	33,5	66,95
44	4216,72	31,6	4,07	24,7	57,17
45	4790,17	30,75	4,143	29,8	62,9
46	5584,01	29,8	4,248	37	70,84
47	4909,11	30,61	4,156	30,9	64,09
48	4677,98	30,95	4,128	28,8	61,78
49	5343,27	30	4,214	34,8	68,43
50	4864,33	30,66	4,15	30,5	63,64
51	5135,47	30,34	4,19	32,9	66,35
52	5222,85	30,23	4,2	33,7	67,23
53	5339,34	29,5	4,22	34,8	68,39
54	4939,53	30,6	4,162	31,2	64,4
55	4366,78	31,7	4,09	26	58,67
56	4553,22	31,05	4,01	27,7	60,53
57	5130,41	30,34	4,19	32,9	66,3
58	5063,37	30,42	4,18	32,3	65,63
59	5711,62	29,65	4,265	38,1	72,12
60	4730,51	30,82	4,136	29,3	62,31
61	5027,05	30,47	4,174	31,9	65,27
62	5224,4	31,2	4,2	33,7	67,24
63	5537,1	29,86	4,24	36,5	70,37
64	5510	30,1	4,238	36,3	70,1
65	5233,44	30,22	4,2	33,8	67,33
66	4912,66	30,6	4,16	30,9	64,13
67	5329,88	30,1	4,2	34,7	68,3
68	5455,61	29,95	4,231	35,8	69,56

Окончание таблицы 8.2

Номер п/п	Вес грузового поезда, т А – Д	Средняя участковая скорость, км/ч Е – Л	Время нахождения поезда на участке, ч М – Т	Время простоя состава под скрещением, мин У – Ц	Время технического обслуживания состава, мин Ч – Я
69	5196,83	30,26	4,19	33,5	66,97
70	5924,08	30,1	4,294	40	74,24
71	4476,26	31,2	4,1	27	59,76
72	4849,98	30,68	4,15	30,3	63,5
73	6030,83	29,7	4,31	41	75,31
74	5302,24	30,14	4,21	34,4	68,02
75	5189,26	30,27	4,19	33,4	66,89
76	4718,08	30,84	4,137	29,2	62,18
77	5381,27	30,04	4,22	35,1	68,81
78	5044,9	30,45	4,18	32,1	65,45
79	4982,15	30,52	4,168	31,5	64,82
80	4576,45	31,01	4,214	27,9	60,76
81	4717,06	31	4,137	29,2	62,17
82	6040,33	29,5	4,314	41,1	75,4
83	4358,76	31,27	4,09	25,9	58,59
84	5470,73	30,1	4,233	35,9	69,71
85	4886,58	30,64	4,156	30,7	63,87
86	4832,32	30,7	4,15	30,2	63,32
87	5255,13	30,2	4,21	34	67,55
88	4378,64	31,25	4,09	26,1	58,79
89	5237,14	30,2	4,2	33,8	67,37
90	6154,79	29,1	4,325	42,1	76,55
91	3884,28	31,8	4,09	21,7	53,84
92	4216,6	31,44	4,07	24,6	57,17
93	5174,03	30,29	4,19	33,3	66,74
94	5757,94	30,1	4,271	38,5	72,58
95	4857,76	30,67	4,156	30,4	63,58
96	4974,92	30,53	4,167	31,5	64,75
97	4468,04	31,14	4,1	26,9	59,68
98	4750,51	30,8	4,138	29,5	62,51
99	5281,84	30,16	4,208	34,2	67,82
100	5455,57	30,9	4,234	35,8	69,56

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(*справочное*)

Значения функции плотности

стандартного нормального распределения $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,000134									

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(*справочное*)

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,499952									
4,0	0,499968									
4,5	0,499997									
5,0	0,49999971									

ПРИЛОЖЕНИЕ В
(*справочное*)

Критические точки распределения Стьюдента

Степень свободы ν	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)							
	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
1	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	318,29	636,58
2	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,328	31,600
3	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924
4	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,894	6,869
6	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,689
28	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,660
30	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,849	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
60	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
70	0,847	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435
80	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416
90	0,846	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402
100	0,845	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390
150	0,844	1,287	1,655	1,976	2,351	2,609	3,145	3,357
200	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340
500	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310
∞	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,290
Степень свободы	0,4	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
ν	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)							

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

(*справочное*)

Критические точки распределения χ^2

Степени свободы ν	Уровень значимости α								
	0,001	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99
1	10,827	6,635	5,024	3,841	2,706	0,016	0,0039	0,00098	0,00016
2	13,815	9,210	7,378	5,991	4,605	0,211	0,103	0,051	0,020
3	16,266	11,345	9,348	7,815	6,251	0,584	0,352	0,216	0,115
4	18,466	13,277	11,143	9,488	7,779	1,064	0,711	0,484	0,297
5	20,515	15,086	12,832	11,070	9,236	1,610	1,145	0,831	0,554
6	22,457	16,812	14,449	12,592	10,645	2,204	1,635	1,237	0,872
7	24,321	18,475	16,013	14,067	12,017	2,833	2,167	1,690	1,239
8	26,124	20,090	17,535	15,507	13,362	3,490	2,733	2,180	1,647
9	27,877	21,666	19,023	16,919	14,684	4,168	3,325	2,700	2,088
10	29,588	23,209	20,483	18,307	15,987	4,865	3,940	3,247	2,558
11	31,264	24,725	21,920	19,675	17,275	5,578	4,575	3,816	3,053
12	32,909	26,217	23,337	21,026	18,549	6,304	5,226	4,404	3,571
13	34,527	27,688	24,736	22,362	19,812	7,041	5,892	5,009	4,107
14	36,124	29,141	26,119	23,685	21,064	7,790	6,571	5,629	4,660
15	37,698	30,578	27,488	24,996	22,307	8,547	7,261	6,262	5,229
16	39,252	32,000	28,845	26,296	23,542	9,312	7,962	6,908	5,812
17	40,791	33,409	30,191	27,587	24,769	10,085	8,672	7,564	6,408
18	42,312	34,805	31,526	28,869	25,989	10,865	9,390	8,231	7,015
19	43,819	36,191	32,852	30,144	27,204	11,651	10,117	8,907	7,633
20	45,314	37,566	34,170	31,410	28,412	12,443	10,851	9,591	8,260
21	46,796	38,932	35,479	32,671	29,615	13,240	11,591	10,283	8,897
22	48,268	40,289	36,781	33,924	30,813	14,041	12,338	10,982	9,542
23	49,728	41,638	38,076	35,172	32,007	14,848	13,091	11,689	10,196
24	51,179	42,980	39,364	36,415	33,196	15,659	13,848	12,401	10,856
25	52,619	44,314	40,646	37,652	34,382	16,473	14,611	13,120	11,524
26	54,051	45,642	41,923	38,885	35,563	17,292	15,379	13,844	12,198
27	55,475	46,963	43,195	40,113	36,741	18,114	16,151	14,573	12,878
28	56,892	48,278	44,461	41,337	37,916	18,939	16,928	15,308	13,565
29	58,301	49,588	45,722	42,557	39,087	19,768	17,708	16,047	14,256
30	59,702	50,892	46,979	43,773	40,256	20,599	18,493	16,791	14,953
31	61,098	52,191	48,232	44,985	41,422	21,434	19,281	17,539	15,655
32	62,487	53,486	49,480	46,194	42,585	22,271	20,072	18,291	16,362
33	63,869	54,775	50,725	47,400	43,745	23,110	20,867	19,047	17,073
34	65,247	56,061	51,966	48,602	44,903	23,952	21,664	19,806	17,789
35	66,619	57,342	53,203	49,802	46,059	24,797	22,465	20,569	18,509
36	67,985	58,619	54,437	50,998	47,212	25,643	23,269	21,336	19,233
37	69,348	59,893	55,668	52,192	48,363	26,492	24,075	22,106	19,960
38	70,704	61,162	56,895	53,384	49,513	27,343	24,884	22,878	20,691
39	72,055	62,428	58,120	54,572	50,660	28,196	25,695	23,654	21,426
40	73,403	63,691	59,342	55,758	51,805	29,051	26,509	24,433	22,164

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

(*справочное*)

Критические точки распределения Фишера

(число степеней свободы бо́льшей дисперсии – ν_1, меньшей – ν_2)

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$												
ν_2	ν_1											
	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	∞
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	238,88	243,90	246,47	249,05	251,77	254,31
2	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,329	19,371	19,412	19,433	19,454	19,476	19,496
3	10,128	9,552	9,277	9,117	9,013	8,941	8,845	8,745	8,692	8,638	8,581	8,526
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,041	5,912	5,844	5,774	5,699	5,628
5	6,608	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,818	4,678	4,604	4,527	4,444	4,365
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,147	4,000	3,922	3,841	3,754	3,669
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,726	3,575	3,494	3,410	3,319	3,230
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,688	3,581	3,438	3,284	3,202	3,115	3,020	2,928
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,230	3,073	2,989	2,900	2,803	2,707
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,072	2,913	2,828	2,737	2,637	2,538
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	2,948	2,788	2,701	2,609	2,507	2,404
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,849	2,687	2,599	2,505	2,401	2,296
13	4,667	3,806	3,411	3,179	3,025	2,915	2,767	2,604	2,515	2,420	2,314	2,206
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,699	2,534	2,445	2,349	2,241	2,131
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,790	2,641	2,475	2,385	2,288	2,178	2,066
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,591	2,425	2,333	2,235	2,124	2,010
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,548	2,381	2,289	2,190	2,077	1,960
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,510	2,342	2,250	2,150	2,035	1,917
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,477	2,308	2,215	2,114	1,999	1,878
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,447	2,278	2,184	2,082	1,966	1,843
21	4,325	3,467	3,072	2,840	2,685	2,573	2,420	2,250	2,156	2,054	1,936	1,812
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,397	2,226	2,131	2,028	1,909	1,783
23	4,279	3,422	3,028	2,796	2,640	2,528	2,375	2,204	2,109	2,005	1,885	1,757
24	4,260	3,403	3,009	2,776	2,621	2,508	2,355	2,183	2,088	1,984	1,863	1,733
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,337	2,165	2,069	1,964	1,842	1,711
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,321	2,148	2,052	1,946	1,823	1,691
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,305	2,132	2,036	1,930	1,806	1,672
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,291	2,118	2,021	1,915	1,790	1,654
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,278	2,104	2,007	1,901	1,775	1,638
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,266	2,092	1,995	1,887	1,761	1,622
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,449	2,336	2,180	2,003	1,904	1,793	1,660	1,509
50	4,034	3,183	2,790	2,557	2,400	2,286	2,130	1,952	1,850	1,737	1,599	1,438
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,097	1,917	1,815	1,700	1,559	1,389
70	3,978	3,128	2,736	2,503	2,346	2,231	2,074	1,893	1,790	1,674	1,530	1,353
80	3,960	3,111	2,719	2,486	2,329	2,214	2,056	1,875	1,772	1,654	1,508	1,325
90	3,947	3,098	2,706	2,473	2,316	2,201	2,043	1,861	1,757	1,639	1,491	1,302
100	3,936	3,087	2,696	2,463	2,305	2,191	2,032	1,850	1,746	1,627	1,477	1,283
150	3,904	3,056	2,665	2,432	2,274	2,160	2,001	1,817	1,711	1,590	1,436	1,223
200	3,888	3,041	2,650	2,417	2,259	2,144	1,985	1,801	1,694	1,572	1,415	1,189
500	3,860	3,014	2,623	2,390	2,232	2,117	1,957	1,772	1,664	1,539	1,376	1,113
∞	3,841	2,996	2,605	2,372	2,214	2,099	1,938	1,752	1,644	1,517	1,350	1,000

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$												
ν_2	ν_1											
	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	∞
1	4052,2	4999,3	5403,5	5624,3	5764,0	5859,0	5981,0	6106,7	6170,0	6234,3	6302,3	6365,6
2	98,502	99,000	99,164	99,251	99,302	99,331	99,375	99,419	99,437	99,455	99,477	99,499
3	34,116	30,816	29,457	28,710	28,237	27,911	27,489	27,052	26,826	26,597	26,354	26,125
4	21,198	18,000	16,694	15,977	15,522	15,207	14,799	14,374	14,154	13,929	13,690	13,463
5	16,258	13,274	12,060	11,392	10,967	10,672	10,289	9,888	9,680	9,466	9,238	9,020
6	13,745	10,925	9,780	9,148	8,746	8,466	8,102	7,718	7,519	7,313	7,091	6,880
7	12,246	9,547	8,451	7,847	7,460	7,191	6,840	6,469	6,275	6,074	5,858	5,650
8	11,259	8,649	7,591	7,006	6,632	6,371	6,029	5,667	5,477	5,279	5,065	4,859
9	10,562	8,022	6,992	6,422	6,057	5,802	5,467	5,111	4,924	4,729	4,517	4,311
10	10,044	7,559	6,552	5,994	5,636	5,386	5,057	4,706	4,520	4,327	4,115	3,909
11	9,646	7,206	6,217	5,668	5,316	5,069	4,744	4,397	4,213	4,021	3,810	3,602
12	9,330	6,927	5,953	5,412	5,064	4,821	4,499	4,155	3,972	3,780	3,569	3,361
13	9,074	6,701	5,739	5,205	4,862	4,620	4,302	3,960	3,778	3,587	3,375	3,165
14	8,862	6,515	5,564	5,035	4,695	4,456	4,140	3,800	3,619	3,427	3,215	3,004
15	8,683	6,359	5,417	4,893	4,556	4,318	4,004	3,666	3,485	3,294	3,081	2,868
16	8,531	6,226	5,292	4,773	4,437	4,202	3,890	3,553	3,372	3,181	2,967	2,753
17	8,400	6,112	5,185	4,669	4,336	4,101	3,791	3,455	3,275	3,083	2,869	2,653
18	8,285	6,013	5,092	4,579	4,248	4,015	3,705	3,371	3,190	2,999	2,784	2,566
19	8,185	5,926	5,010	4,500	4,171	3,939	3,631	3,297	3,116	2,925	2,709	2,489
20	8,096	5,849	4,938	4,431	4,103	3,871	3,564	3,231	3,051	2,859	2,643	2,421
22	7,945	5,719	4,817	4,313	3,988	3,758	3,453	3,121	2,941	2,749	2,531	2,305
24	7,823	5,614	4,718	4,218	3,895	3,667	3,363	3,032	2,852	2,659	2,440	2,211
28	7,636	5,453	4,568	4,074	3,754	3,528	3,226	2,896	2,716	2,522	2,300	2,064
30	7,562	5,390	4,510	4,018	3,699	3,473	3,173	2,843	2,663	2,469	2,245	2,006
40	7,314	5,178	4,313	3,828	3,514	3,291	2,993	2,665	2,484	2,288	2,058	1,805
50	7,171	5,057	4,199	3,720	3,408	3,186	2,890	2,563	2,382	2,183	1,949	1,683
60	7,077	4,977	4,126	3,649	3,339	3,119	2,823	2,496	2,315	2,115	1,877	1,601
70	7,011	4,922	4,074	3,600	3,291	3,071	2,777	2,450	2,268	2,067	1,826	1,540
80	6,963	4,881	4,036	3,563	3,255	3,036	2,742	2,415	2,233	2,032	1,788	1,494
90	6,925	4,849	4,007	3,535	3,228	3,009	2,715	2,389	2,206	2,004	1,759	1,457
100	6,895	4,824	3,984	3,513	3,206	2,988	2,694	2,368	2,185	1,983	1,735	1,427
150	6,807	4,749	3,915	3,447	3,142	2,924	2,632	2,305	2,122	1,918	1,665	1,331
200	6,763	4,713	3,881	3,414	3,110	2,893	2,601	2,275	2,091	1,886	1,629	1,279
500	6,686	4,648	3,821	3,357	3,054	2,838	2,547	2,220	2,036	1,829	1,566	1,164
∞	6,635	4,605	3,782	3,319	3,017	2,802	2,511	2,185	2,000	1,791	1,523	1,000

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

(*справочное*)

Критические точки стандартного нормального распределения

α	u_α	α	u_α	α	u_α	α	u_α
0,005	2,5758	0,025	1,9600	0,950	–1,6449	0,990	–2,3263
0,010	2,3263	0,050	1,6449	0,975	–1,9600	0,995	–2,5758

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж
(*справочное*)
Рабочая программа по дисциплине
«Прикладная математика»

Раздел 1. Теория вероятностей

Случайные события и их вероятности

Предмет и задачи теории вероятностей. Вероятностный эксперимент. Пространство элементарных исходов.

Случайные события и операции над ними. Относительная частота случайного события.

Вероятность случайного события. Аксиомы теории вероятностей. Вероятностное пространство. Методы вычисления вероятностей.

Классический метод определения вероятности. Свойства вероятностей. Элементы комбинаторики.

Условная вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли.

Теоремы Муавра – Лапласа, Пуассона.

Одномерные случайные величины

Случайная величина. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения случайной величины.

Формы задания закона распределения дискретной случайной величины (ряд распределения, функция распределения).

Формы задания закона распределения непрерывной случайной величины (функция плотности, функция распределения).

Основные законы распределения дискретной случайной величины (биномиальный, геометрический, Пуассона).

Основные законы распределения непрерывной случайной величины (равномерный, показательный (экспоненциальный), нормальный).

Числовые характеристики случайной величины.

Многомерные случайные величины

Многомерная случайная величина. Закон распределения многомерной случайной величины.

Многомерные дискретные, непрерывные и смешанные случайные величины. Независимые случайные величины. Ковариация. Коэффициент корреляции.

Раздел 2. Математическая статистика

Основные понятия математической статистики. Разведочный анализ данных

Предмет и задачи математической статистики. Генеральная совокупность. Случайная выборка.

Статистический закон распределения случайной величины. Графическое изображение статистического закона распределения.

Точечные оценки числовых характеристик случайной величины. Интервальные оценки числовых характеристик случайной величины. Доверительная вероятность. Доверительный интервал.

Статистическая проверка гипотез

Статистические гипотезы. Статистическая проверка гипотез. Статистический критерий значимости.

Ошибки первого и второго родов. Уровень значимости и мощность статистического критерия.

Проверка гипотез о математическом ожидании случайной величины, имеющей нормальное распределение.

Проверка гипотез о равенстве математических ожиданий случайных величин, имеющих нормальный закон распределения. Критерий χ^2 – Пирсона для проверки гипотезы о виде закона распределения случайной величины.

Элементы регрессионного и корреляционного анализа

Основные понятия регрессионного и корреляционного анализа. Построение выборочного уравнения регрессии методом наименьших квадратов.

Коэффициент корреляции. Коэффициент детерминации Проверка адекватности уравнения регрессии экспериментальным данным.

Проверка значимости коэффициентов корреляции и детерминации. Прогноз по регрессии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей : учеб. для вузов / Е. С. Вентцель. – М. : Высш. шк., 1998. – 576 с.

2 **Колемаев, В. А.** Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. / В. А. Колемаев, И. Н. Калинина. – М. : ИНФРА-М, 1997. – 301 с.

3 **Гмурман, В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1998. – 400 с.

4 **Бородин, А. Н.** Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики / А. Н. Бородин. – СПб. : Лань, 1998. – 224 с.

5 **Гнеденко, Б. В.** Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М. : Наука, 1980. – 400 с.

6 **Пугачев, В. С.** Теория вероятностей и математическая статистика / В. С. Пугачев. – М. : Наука, 1979. – 496 с.

7 **Феллер, В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения : пер. с англ. В 2 т. Т. 1 / В. Феллер. – М. : Мир, 1984. – 528 с.

8 **Мацкевич, И. П.** Сборник задач и упражнений по высшей математике. Теория вероятностей и математическая статистика / И. П. Мацкевич, Г. П. Свирид, Г. М. Булдык. – Минск : Выш. шк., 1996. – 318 с.

9 **Малинковский, Ю. В.** Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1: Теория вероятностей / Ю. В. Малинковский. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – 355 с.

10 **Гаврилюк, А. А.** Методы теории вероятностей : учеб.-метод. пособие для студентов строительных специальностей / А. А. Гаврилюк, А. Н. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2010. – 187 с.

11 **Евдокимович, В. Е.** Основы теории вероятностей : учеб.-метод. пособие / В. Е. Евдокимович. – Гомель : БелГУТ, 2007. – 122 с.

12 **Прищепова, Т. В.** Основы теории вероятностей : учеб.-метод. пособие для студентов экономических специальностей факультета безотрывного обучения / Т. В. Прищепова. – Гомель : БелГУТ, 2008. – 140 с.

13 **Алымова, Т. В.** Основы математической статистики : учеб.-метод. пособие / Т. В. Алымова. – Гомель : БелГУТ, 2018. – 135 с.

14 **Сазонова, Е. Л.** Теория вероятностей и математическая статистика : пособие для студентов ФБО. В 2 ч. Ч. 1: Теория вероятностей / Е. Л. Сазонова ; под ред. В. С. Серёгиной. – 2-е изд., испр. – Гомель : БелГУТ, 2003. – 95 с.

15 **Сазонова, Е. Л.** Теория вероятностей и математическая статистика : пособие для студентов ФБО. В 2 ч. Ч. 2: Математическая статистика / Е. Л. Сазонова ; под ред. В. С. Серёгиной. – Гомель : БелГУТ, 2008. – 70 с.

16 Анализ статистических данных на персональном компьютере : лаб. практикум / Т. В. Прищепова [и др.] ; под ред. В. С. Серёгиной. – Гомель : БелГУТ, 2006. – 95 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

КУЛАЖЕНКО Юрий Иванович
ЕВДОКИМОВИЧ Владислав Евгеньевич

ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методическое пособие

Редактор А. А. Павлюченкова
Технический редактор В. Н. Кучерова

Подписано в печать 14.04.2023 г. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 12,79. Уч.-изд. л. 10,60. Тираж 200 экз.
Зак № 755. Изд № 2.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
№ 3/1583 от 14.11.2017.
Ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель