

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ  
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра технической физики и теоретической механики

А. О. ШИМАНОВСКИЙ

## СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию  
в области транспорта и транспортной деятельности  
для обучающихся по специальностям  
1-37 02 01 «Тяговый состав железнодорожного транспорта»,  
1-37 02 02 «Подвижной состав железнодорожного транспорта»,  
1-37 02 03 «Техническая эксплуатация погрузочно-разгрузочных, путевых,  
дорожно-строительных машин и оборудования»  
в качестве учебно-методического пособия  
по учебной дисциплине «Статика твердого тела»*

Гомель 2023

УДК 531.2(075.8)

ББК 22.2

Ш61

Рецензенты: кафедра механики Гомельского государственного технического университета им. П. О. Сухого (заведующий кафедрой – д-р физ.-мат. наук, профессор *О. Н. Шабловский*); заведующий кафедрой локомотивов канд. техн. наук, доцент *С. Я. Френкель* (БелГУТ).

**Шимановский, А. О.**

Ш61      Статика твердого тела : учеб.-метод. пособие / А. О. Шимановский ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2023. – 87 с.  
ISBN 978-985-891-089-1

Изложены краткие сведения из раздела «Статика» курса теоретической механики, изучаемого студентами транспортных специальностей. Также пособие может быть полезным при обучении инженеров по иным специальностям.

Предназначено для студентов дневной и заочной форм обучения.

**УДК 531.2(075.8)**

**ББК 22.2**

**ISBN 978-985-891-089-1**

© Шимановский А. О., 2023  
© Оформление. БелГУТ, 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ .....	5
1.1 Основные понятия статики .....	5
1.2 Понятие силы .....	6
1.3 Классификация сил и систем сил .....	7
1.4 Виды механических связей, наиболее часто встречающиеся на практике, и их реакции .....	8
2 ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ И АКСИОМЫ СТАТИКИ .....	11
2.1 Основные задачи статики .....	11
2.2 Аксиомы статики .....	11
3 СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ .....	14
3.1 Приведение системы сходящихся сил к равнодействующей .....	14
3.2 Применение аналитического способа для сложения сходящихся сил .....	15
3.3 Условия равновесия тела, находящегося под действием системы сходящихся сил .....	17
3.4 Последовательность действий при решении задач статики .....	18
4 МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ И ОСИ .....	21
4.1 Сложение двух параллельных одинаково направленных сил .....	21
4.2 Момент силы относительно точки. Условие равновесия рычага .....	22
4.3 Момент силы как вектор .....	25
4.4 Теорема Вариньона о моменте равнодействующей системы сходящихся сил....	27
4.5 Момент силы относительно оси .....	28
4.6 Связь момента силы относительно оси, с моментом силы относительно точки оси .....	29
5 ТЕОРИЯ ПАР СИЛ .....	31
5.1 Пара сил и ее момент .....	31
5.2 Свойства пар сил .....	32
5.3 Теорема о сложении пар сил.....	35
6 УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СИСТЕМ СИЛ .....	36
6.1 Лемма о переносе силы на параллельную линию действия (метод Пуансо)..	36
6.2 Теорема о приведении системы сил к центру (теорема Пуансо). Главный вектор и главный момент системы сил.....	36
6.3 Условия равновесия тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил .....	38
6.4 Условия равновесия тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил .....	39
6.5 Учет распределенных сил при составлении уравнений равновесия тел .....	41

7 РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМ ТЕЛ .....	43
7.1 Равновесие систем тел .....	43
7.2 Равновесие гибких элементов сооружений, нагруженных силами собственного веса .....	43
7.3 Статически определимые и статически неопределимые системы .....	47
8 РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ .....	51
8.1 Понятие о ферме .....	51
8.2 Допущения, применяемые при расчете ферм .....	51
8.3 Определение внутренних сил фермы способом вырезания узлов .....	52
8.4 Расчет простых плоских ферм способом сечений .....	54
8.5 Графический метод определения внутренних сил в стержнях простой плоской фермы (метод Максвелла-Кремоны) .....	55
8.6 Решение задач о расчете ферм на ЭВМ .....	58
9 РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПРИ УЧЕТЕ ТРЕНИЯ .....	60
9.1 Силы трения скольжения .....	60
9.2 Угол трения. Конус трения .....	61
9.3 Трение гибких тел .....	62
9.4 Трение вращения .....	63
9.5 Равновесие тела при учете трения качения .....	65
10 ПРИВЕДЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ ..	67
10.1 Инварианты системы сил .....	67
10.2 Динамический винт.....	68
10.3 Частные случаи приведения системы сил.....	69
11 ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ И ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ .....	70
11.1 Центр параллельных сил .....	70
11.2 Центр тяжести .....	71
11.3 Методы определения положения центра тяжести .....	73
11.4 Центры тяжести отдельных тел .....	73
11.5 Теорема Паппа – Гюльдина об объеме тела вращения .....	75
11.6 Теорема Паппа – Гюльдина о площади поверхности тела вращения .....	76
12 ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ СТАТИКИ .....	77
12.1 Понятие о возможных перемещениях .....	77
12.2 Элементарная работа силы на возможном перемещении. Идеальные связи.....	78
12.3 Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа) .....	79
12.4 Применение принципа возможных перемещений для определения реакций связей .....	39
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	71

# 1 ВВЕДЕНИЕ

## 1.1 Основные понятия статики

Статика твердого тела является частью теоретической механики.

**Теоретическая механика** – раздел механики, то есть науки о механическом движении и механическом взаимодействии материальных тел.

**Механическим движением** называется происходящее в пространстве с течением времени изменение положения тел друг относительно друга, а также изменение относительного положения частиц данного тела, то есть его деформация.

Под **механическим взаимодействием** понимается такое взаимодействие тел, при котором происходит изменение движения этих тел или их деформация.

Теоретическая механика изучает и формулирует *наиболее общие* законы механического движения, лежащие в основе теории всех остальных механических дисциплин: теории упругости, гидромеханики, строительной механики и т. д.

**Объектами исследования механики** являются любые реальные тела: деформируемые твердые тела, газообразные, жидкие, сыпучие среды и т. д. *Теоретическая механика* исследует закономерности движения и возникающие при этом взаимодействия идеализированных объектов, *моделирующих* реальные тела: материальной точки, системы материальных точек, абсолютно твердого тела. Это позволяет выявить *наиболее общие законы*, справедливые для механического движения всех тел, независимо от их конкретных физических свойств.

**Материальная точка** – тело конечной массы, размерами (следовательно, и вращением) которого можно пренебречь при решении данной задачи.

**Системой материальных точек** называется совокупность точек, положения и движения которых взаимно связаны. Частным случаем системы материальных точек является абсолютно твердое тело.

**Абсолютно твердым** называется тело, расстояния между любыми двумя точками которого всегда остаются неизменными.

Теоретическая механика включает три основных раздела: статику, кинематику и динамику.

В *статике* рассматриваются методы преобразования одних совокупностей сил в другие, эквивалентные данным, выясняются условия равновесия тел, а также определяются возможные положения их равновесия.

В *кинематике* исследуется движение тел без учета причин, вызывающих его.

В *динамике* изучаются зависимости между механическим движением материальных тел и действующими на них силами.

В теоретической механике на основе изучения *равновесия и движения* различных тел устанавливаются *общие их законы*. В других механических науках эти общие законы теоретической механики используются для решения конкретных технических задач.

На стадии формирования первобытного человека законы механики использовались интуитивно. Соединяя различные элементы друг с другом, удалось построить сначала простые конструкции, а впоследствии и более сложные сооружения. Начальные теоретические положения статики были заложены в трудах Аристотеля и Архимеда, которыми на основе анализа свойств простейших механизмов установлены первые количественные законы: правило рычага и золотое правило механики, а также разработаны основы гидростатики.

Основы классической механики были заложены в XVII в. Г. Галилеем и И. Ньютоном. Тогда же П. Вариньоном в виде цельной науки была изложена геометрическая статика твёрдого тела, где он рассмотрел силы как векторы. Дальнейшее развитие учения о равновесии твердых тел связано с творчеством Л. Пуансо, который вывел уравнения равновесия твёрдого тела, находящегося под действием различных систем сил и пар сил.

Начало новой ветви в теории, называемой «Аналитическая механика», было положено в XVIII в. Ж. Л. Лагранжем, с именем которого связана разработка принципа возможных перемещений. Дальнейшее развитие статики твердого тела связано с необходимостью решения различных практических задач. Создание современной техники в той или иной мере опирается на теоретическую механику, в частности, на статику, и, предъявляя к ней новые требования, побуждает ее к дальнейшему развитию.

Более подробную информацию об истории развития статики как науки можно найти в книге [1].

## 1.2 Понятие силы

Изменение движения материальных тел, а также их деформация всегда являются результатом взаимодействия тел.

Мера механического действия на данное тело со стороны других тел, характеризующая величину и направление этого действия, называется **силой**, приложенной к данному телу.

В теоретической механике нас интересует не столько физическая природа сил, сколько их свойства, описываемые математическими соотношениями.

Действие силы на рассматриваемое тело определяется тремя факторами:

1) точкой приложения;

- 2) направлением;
- 3) численным значением.

*Точка приложения силы* – та материальная частица данного тела, на которую действует сила (это понятие условно, так как реальные взаимодействия всегда происходят по площадкам или объемам).

Под *направлением силы* понимают направление того перемещения, которое получает под действием этой силы свободная материальная точка, вначале находившаяся в покое. Прямая, по которой направлена данная сила, называется **линией действия силы**.

*Численное значение силы* находится путем сравнения ее с некоторой силой, принятой за единицу.

В международной системе единиц (СИ) в качестве единицы силы используется *ньютон*.

Приведенному определению силы соответствует образ вектора, равного по модулю выраженной в масштабе величине силы, приложенного в заданной точке и направленного в сторону действия силы.

### 1.3 Классификация сил и систем сил

Совокупность сил, действующих на данное тело или систему тел, называется **системой сил**. Системы сил различают по расположению векторов сил (сходящиеся, параллельные, произвольные) и по результатам их действия.

Если одну систему сил, приложенных к заданному твердому телу, можно заменить другой системой, не изменяя движения тела, то такие две системы сил называются **эквивалентными**. Для обозначения эквивалентности систем сил далее используется знак «~».

Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется **равнодействующей** данной системы сил.

Если под действием системы сил *свободное твердое тело* (то есть тело, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве) сохраняет состояние покоя или поступательного равномерно прямолинейного движения, то приложенная к нему система сил называется *уравновешенной*.

Сила, при добавлении которой к данной системе сил получается уравновешенная система сил, называется *уравновешивающей силой*.

Таким образом, любая из сил уравновешенной системы является уравновешивающей по отношению ко всем остальным.

*Внешними* называются силы, действующие на тела механической системы со стороны тел, не принадлежащих рассматриваемой механической системе.

*Внутренними* называются силы, действующие между телами, принадлежащими рассматриваемой системе.

Все силы, действующие на тела, делятся на активные и реакции связей.

Под **активными** понимаются силы, побуждающие тела к движению.

Тело, перемещения которого в пространстве ограничены, называется *несвободным*.

Тела, ограничивающие свободу перемещения данного тела, называются **механическими связями**.

Силы, которыми связи действуют на рассматриваемое тело, называются **реакциями связей**.

#### 1.4 Виды механических связей, наиболее часто встречающиеся на практике, и их реакции

##### Гладкая поверхность (опора без трения).

Такая связь имеет место при опирании одного тела на другое. Она препятствует проникновению исследуемого тела внутрь связи, но не мешает его движению вдоль касательной к поверхности контакта. Реакция гладкой поверхности направляется перпендикулярно касательной к поверхности, проведенной в точке контакта тел, в сторону рассматриваемого тела (рисунок 1.1).

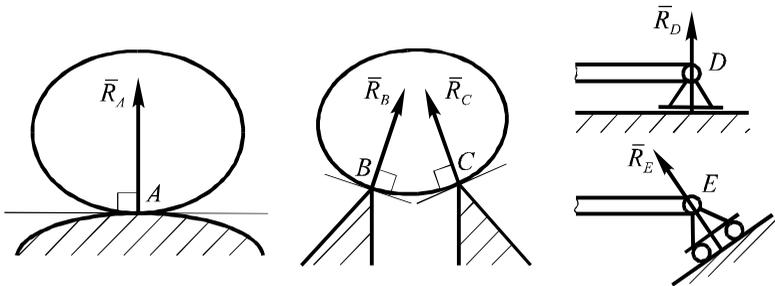


Рисунок 1.1

##### Шероховатая поверхность (опора с трением).

Этот вид связи отличается от предыдущего учетом трения скольжения.

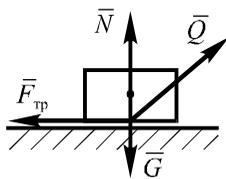


Рисунок 1.2

Реакция шероховатой поверхности включает две составляющие: нормальную  $\bar{N}$  и силу трения  $\bar{F}_{\text{тр}}$ , которая направляется в сторону, противоположную возможному относительному смещению контактирующих со связью точек рассматриваемого тела при отсутствии трения.

На рисунке 1.2  $\bar{Q}$  и  $\bar{G}$  – активные силы.

### Цилиндрический шарнир.

Он представляет собой соединение твердых тел, допускающее их относительное вращение. Реакция цилиндрического шарнира  $\bar{R}$  может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси цилиндрического шарнира. Как правило, при решении задач определяется не сама сила  $\bar{R}$ , а ее проекции на оси координат (рисунок 1.3).

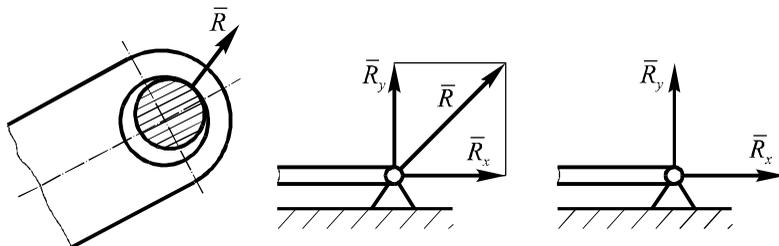


Рисунок 1.3

### Сферический шарнир. Подпятник.

Сферический шарнир закрепляет одну точку тела и допускает лишь его поворот вокруг этой точки. Точно также и подпятник не допускает перемещения связанной точки тела. Поэтому реакции этих связей направляются произвольным образом в пространстве (рисунок 1.4). При решении задач вычисляются, как правило, проекции реакций сферического шарнира и подпятника на оси координат.

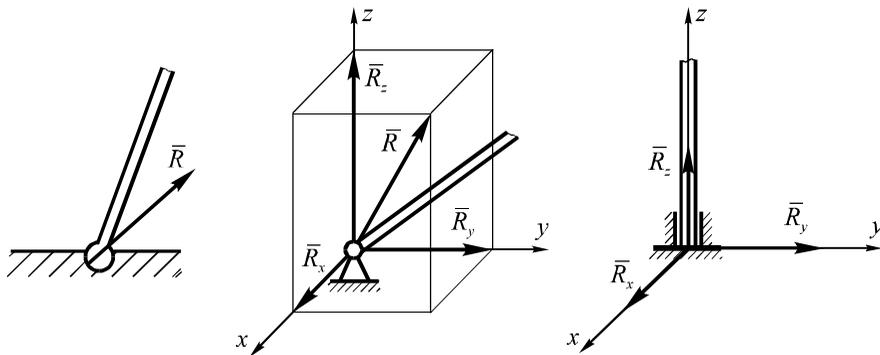


Рисунок 1.4

### Невесомый стержень.

Реакция невесомого стержня проходит вдоль линии, соединяющей точки, в которых с ним взаимодействуют иные тела. Эта сила может быть направлена как к стержню, так и от него, в зависимости от величин и направлений действующих на стержень сил (рисунок 1.5).

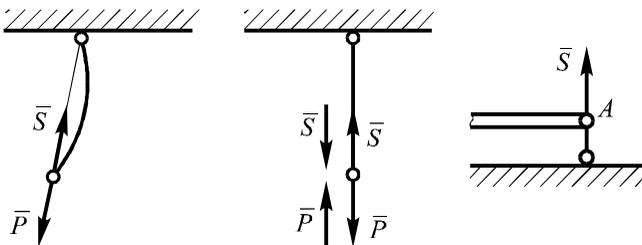


Рисунок 1.5

**Гибкая нить.**

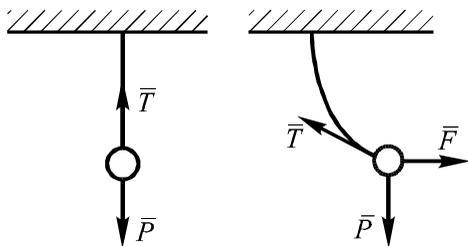


Рисунок 1.6

Ею могут моделироваться тросы, канаты, цепи и т. п. Нить способна препятствовать только тем действиям, которые пытаются ее растянуть. В случае сжатия нити она сминается и не оказывает сопротивления этому воздействию. Поэтому сила натяжения гибкой нити направляется по касательной к нити в сторону точки подвеса (рисунок 1.6).

**Заделка (зашемление).**

Данная связь (например, бетонное основание столба) исключает любые перемещения взаимодействующего с ней тела. Реакция заделки включает силу и пару сил. При решении задач вычисляют проекции соответствующих им векторов силы и момента пары сил на оси координат (о понятии «пара сил» подробно рассказано в разделе 5 пособия).

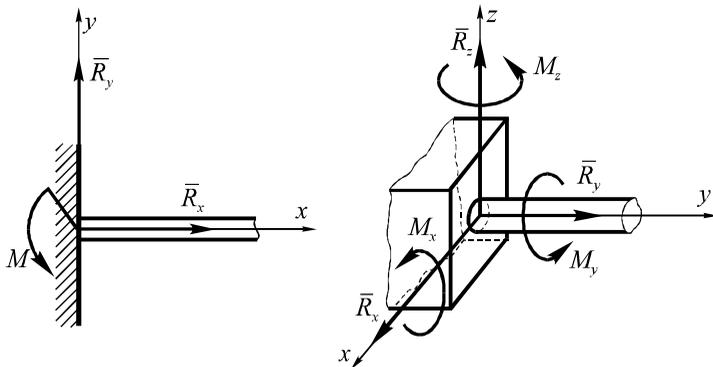


Рисунок 1.7

## 2 ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ И АКСИОМЫ СТАТИКИ

### 2.1 Основные задачи статики

Содержание статики абсолютно твердого тела составляют две основные задачи:

1) замена данной системы сил, приложенных к твердому телу, другой системой сил, ей эквивалентной;

2) вывод общих условий, при которых твердое тело под действием приложенных к нему сил находится в состоянии равновесия. В рамках этой задачи определяются либо значения неизвестных сил, либо положения тел при равновесии.

Под **равновесием** твердого тела понимается состояние его покоя или равномерного движения по отношению хотя бы к одной инерциальной системе отсчета. В инженерной статике такой можно считать систему отсчета, жестко связанную с Землей.

В основе статики лежит ряд теоретических положений, называемых аксиомами статики.

### 2.2 Аксиомы статики

Первая аксиома формулирует условие динамического равновесия абсолютно твердого тела. Следующие три используются при доказательстве большинства теорем статики и поэтому являются основой для вывода ее фундаментальных математических соотношений. Пятая аксиома дает возможность исследования взаимодействия нескольких тел. И, наконец, последняя позволяет осуществлять переход от реальных тел к их моделям.

**Аксиома 1** (*аксиома инерции*) – первый закон Ньютона. Всякое тело, находящееся под действием взаимно уравновешенных сил, сохраняет скорость своего поступательного прямолинейного движения (в частности сохраняет состояние покоя).

**Аксиома 2** (*аксиома о двух уравновешивающихся силах*). Для взаимного уравновешивания двух сил, приложенных к абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю и направлены по прямой, соединяющей точки их приложения, в противоположные стороны.

**Аксиома 3** (*аксиома о добавлении уравновешивающейся системы сил*). Не изменяя действия данной системы сил на абсолютно твердое тело, можно прибавить к этой системе или отнять от нее две уравновешивающиеся силы, то есть две силы, равные по модулю и направленные по одной прямой в противоположные стороны.

**Следствие. Теорема о переносе силы вдоль линии действия:**

Не изменяя действия данной силы на абсолютно твердое тело, точку приложения этой силы можно переносить по ее линии действия в пределах рассматриваемого тела.

Доказательство.

Пусть на точку  $A$  тела действует сила  $\vec{F}_A$ . Приложим к точке  $B$  тела, лежащей на линии действия рассматриваемой силы, систему двух уравновешивающихся сил  $\{\vec{F}_B; \vec{F}'_B\}$  ( $F_B = F'_B = F_A$ ) (рисунок 2.1). Тогда заданная сила  $\vec{F}_A$  оказывается эквивалентной системе сил  $\{\vec{F}_A; \vec{F}_B; \vec{F}'_B\}$ .

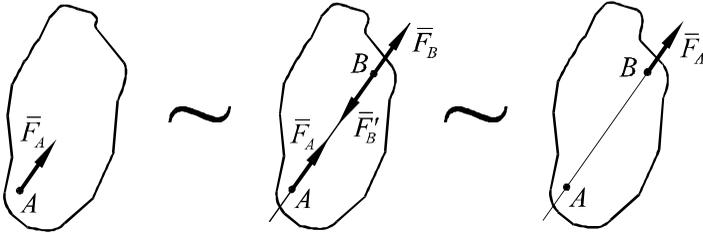
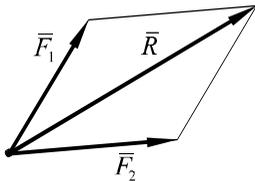


Рисунок 2.1

Силы  $\vec{F}_A$  и  $\vec{F}'_B$  лежат на одной прямой, равны по модулю и противоположно направлены, поэтому их можно отбросить. Следовательно, сила  $\vec{F}_B$  эквивалентна той же системе сил, что и  $\vec{F}_A$ .

Таким образом, сила из точки  $A$  перенесена в точку  $B$ , что и требовалось доказать.

**Аксиома 4 (аксиома о сложении двух сил).** Не меняя движения тела, две силы, приложенные к одной его точке, можно заменить одной равнодействующей силой, приложенной в той же точке и равной геометрической сумме складываемых сил (рисунок 2.2).



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Рисунок 2.2

Изображенный на рисунке 2.2 способ сложения векторов называют **правилом параллелограмма**.

**Следствие. Теорема о трех непараллельных силах:**

Если три непараллельные силы, лежащие в одной плоскости, уравновешиваются, то их линии действия пересекаются в одной точке.

Доказательство.

Пусть на тело действует система трех сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ . Линии действия сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  пересекаются в точке  $A$ .

Перенесем силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  по их линиям действия в точку  $A$  и заменим равнодействующей  $\vec{R}$  (рисунок 2.3):

$$\vec{R} = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2.$$

Следовательно, система трех сил сводится к силам  $\vec{R}$  и  $\vec{F}_3$ . Чтобы тело находилось в равновесии,  $\vec{R}$  и  $\vec{F}_3$  должны иметь общую линию действия. Поэтому линии действия сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$  пересекаются в точке  $A$ , что и требовалось доказать.

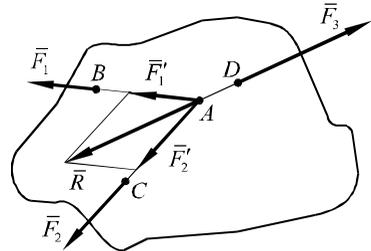


Рисунок 2.3

Построением параллелограмма сил легко решается и обратная задача о разложении данной силы на две составляющие, приложенные к той же точке и имеющей заданные линии действия.

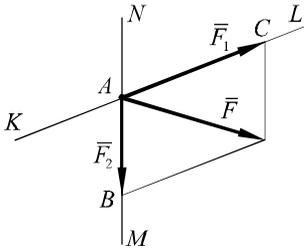


Рисунок 2.4

Пусть на точку  $A$  тела действует сила  $\vec{F}$ . Разложим ее на составляющие, параллельные прямым  $KL$  и  $MN$ . Для этого проведем через конец вектора  $\vec{F}$  линии, параллельные направлениям  $KL$  и  $MN$  (рисунок 2.4). Полученные точки  $B$  и  $C$  являются концами искомых составляющих  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  силы  $\vec{F}$ . Поскольку прямые  $KL$  и  $MN$  могут занимать любые положения, то существует бесконечное число разложений силы  $\vec{F}$  на составляющие.

**Аксиома 5 (аксиома о действии и противодействии)** – третий закон Ньютона. Силы, которыми действуют друг на друга два тела, всегда равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

**Замечание.** Эти силы приложены к двум разным телам. Поэтому их нельзя называть уравновешивающимися.

**Аксиома 6 (аксиома о затвердевании).** Если деформируемое тело находится в равновесии, то равновесие его без изменения системы приложенных сил не нарушится при превращении деформируемого тела в абсолютно твердое.

### 3 СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

#### 3.1 Приведение системы сходящихся сил к равнодействующей

Силы называются **сходящимися**, если линии их действия пересекаются в одной точке.

Исследование систем сходящихся сил выполняется при решении ряда практических задач, в числе которых расчет ферм.

#### **Теорема о равнодействующей системы сходящихся сил.**

*Система сходящихся сил эквивалентна одной силе, которая равна геометрической сумме всех этих сил и проходит через точку пересечения их линий действия.*

Доказательство.

Пусть задана система сходящихся сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  (рисунок 3.1).

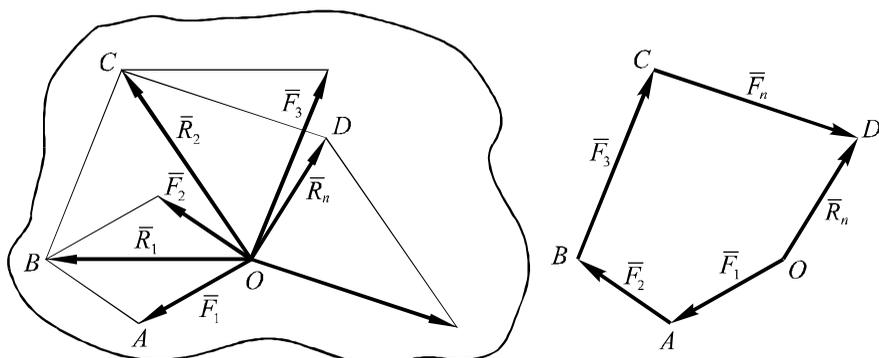


Рисунок 3.1

Перенесем все силы по их линиям действия в точку пересечения этих линий. Определим равнодействующую сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ :

$$\vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Далее найдем равнодействующую сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ :

$$\vec{R}_3 = \vec{R}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Данную операцию выполняем  $(n - 1)$  раз, доходя до силы  $\vec{F}_n$ , и получаем равнодействующую  $\vec{R}$  всей системы  $n$  сил

$$\vec{R} = \vec{R}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

что и требовалось доказать.

Построение равнодействующей может быть упрощено, если вместо параллелограммов строить многоугольник  $OABCD$  (см. рисунок 3.1).

При этом равнодействующая выражается вектором, соединяющим начальную и конечную точки ломаной линии, стороны которой представляют собой векторы, равные векторам, изображающим данные силы, причем конец каждого предыдущего вектора совпадает с началом последующего.

Полученный таким образом пространственный (в общем случае) многоугольник называется **силовым многоугольником**.

Если для вычисления равнодействующей силы при помощи силового многоугольника используются правила геометрии и тригонометрии (теоремы синусов, косинусов, Пифагора и т. п.), то такой способ ее определения называется **геометрическим**.

В случае плоской системы сил, откладывая силы в некотором масштабе, равнодействующую можно определить непосредственно измерениями по чертежу. Такой способ ее нахождения называется **графическим**.

Наиболее общим способом определения величины и направления равнодействующей является **аналитический**, основанный на применении *проекции сил* на оси координат.

### 3.2 Применение аналитического способа для сложения сходящихся сил

**Проекцией силы на ось** называется направленный отрезок на оси [1], заключенный между перпендикулярами, опущенными из начала и конца вектора на ось.

**Величина проекции вектора силы на ось** равна произведению модуля силы на косинус угла между ее вектором и осью (рисунок 3.2). Если направление проекции совпадает с направлением оси, то проекция вектора на ось положительна; в противном случае – отрицательна (рисунок 3.3).

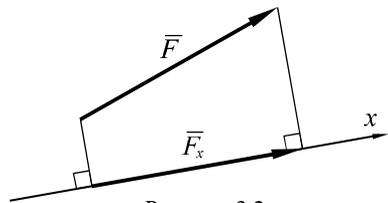
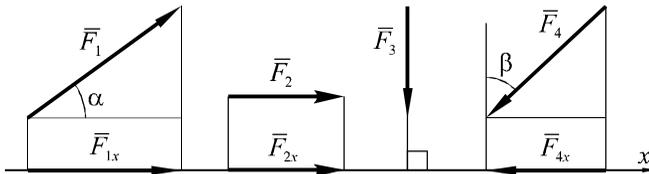


Рисунок 3.2

Примеры определения проекций сил на ось:



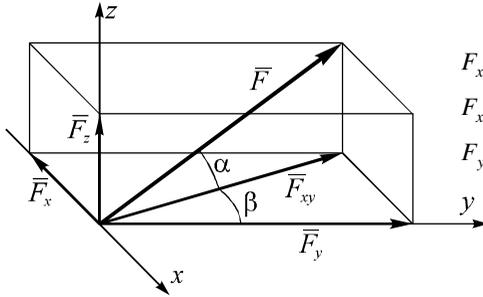
$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha; F_{2x} = F_2; F_{3x} = 0; F_{4x} = -F_4 \cos (90^\circ - \beta) = -F_4 \sin \beta.$$

Рисунок 3.3

При решении многих задач приходится иметь дело с силами, лежащими не в плоскости, а в трехмерном пространстве. В этом случае для определения осевых проекций сил часто используется **метод двойного проецирования**.

Смысл его заключается в следующем. Сначала определяется проекция вектора силы на координатную плоскость, угол между которой и вектором силы известен. Затем она, в свою очередь, проецируется на координатные оси (рисунок 3.4).

Пример использования метода двойного проецирования.



$$F_{xy} = F \cos \alpha;$$

$$F_x = -F_{xy} \cos (90^\circ - \beta) = -F \cos \alpha \sin \beta;$$

$$F_y = F_{xy} \cos \beta = F \cos \alpha \cos \beta.$$

Рисунок 3.4

Для нахождения равнодействующей системы сил спроецируем силы, входящие в силовой многоугольник, на оси декартовых координат (рисунок 3.5).

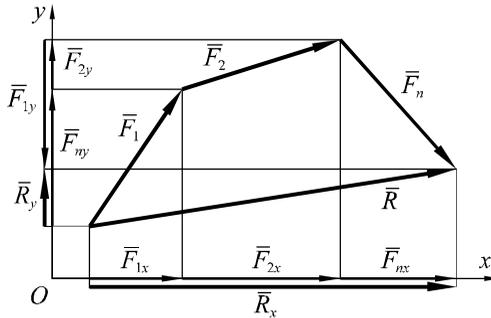


Рисунок 3.5

Как видно из рисунка 3.5, проекции равнодействующей на оси координат равны соответственно:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix};$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy}.$$

Если силы не лежат в одной плоскости, то также выполняется соотношение:

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum_{i=1}^n F_{iz}.$$

Таким образом, *проекции равнодействующей системы сходящихся сил на оси координат равны алгебраическим суммам проекций этих сил на соответствующие оси.*

Поскольку оси координат принимаются обычно перпендикулярными друг другу, модуль равнодействующей силы определяется по формуле:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

### 3.3 Условия равновесия тела, находящегося под действием системы сходящихся сил

Системе сходящихся сил эквивалентна равнодействующая сила. Отсюда вытекает следующее условие:

*Для равновесия тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая их была равна нулю:*

$$\bar{R} = 0. \quad (3.1)$$

Следовательно, в силовом многоугольнике конец последнего вектора должен совпадать с началом первого. Такой силовой многоугольник называют **замкнутым**. Этим он отличается от **разомкнутого** силового многоугольника, у которого начало первого и конец последнего вектора не совпадают (рисунок 3.6).

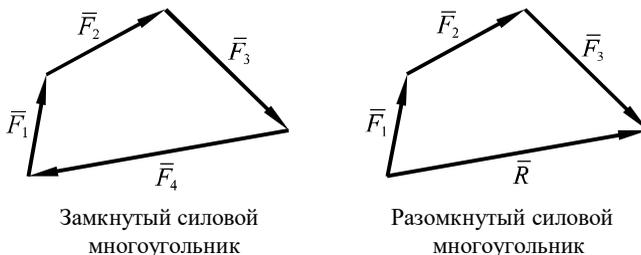


Рисунок 3.6

Векторному условию (3.1) соответствуют равенства

$$R_x = 0; R_y = 0; R_z = 0.$$

Воспользовавшись выражением проекций равнодействующей через проекции сил системы, получаем аналитические условия равновесия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n X_i = 0; \\ \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \\ \sum_{i=1}^n Z_i = 0. \end{array} \right.$$

*Для равновесия тела, находящегося под действием системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из координатных осей.*

Если все силы лежат в одной плоскости, то третье уравнение отпадает.

### 3.4 Последовательность действий при решении задач статики

1 Изображаются исследуемые тела с наложенными на них механическими связями.

2 Выявляется узловое тело (узловая точка) системы. Под узловым понимается тело (точка), на которое действуют известные силы и силы, подлежащие определению.

3 На рисунке изображаются векторы активных сил.

4 Определяются виды механических связей, наложенных на узловое тело (точку), и расставляются векторы соответствующих сил реакций связей.

5 Проводятся оси координат так, чтобы они составляли известные или легко определяемые углы со всеми векторами рассматриваемых сил.

6 Определяется вид системы сил, приложенных к узловому телу, и составляются уравнения равновесия, соответствующие полученной системе сил.

7 Определяются промежуточные неизвестные: углы и расстояния, входящие в уравнения равновесия.

8 Путем решения системы уравнений равновесия находят величины, подлежащие вычислению по условию задачи.

### Примеры

*Задача.* Груз 1 веса  $P$  подвешен на гибком нерастяжимом тросе  $OB$ , отклоненном от вертикали на угол  $\alpha$ , и удерживается в равновесии с помощью другого гибкого нерастяжимого троса  $BAC$ , охватывающего идеальный блок  $A$  и несущего на свободном конце груз 2 (рисунок 3.7). Считая, что при

равновесии участок троса  $AB$  горизонтален, определить вес  $Q$  груза 2 и натяжение троса  $OB$ . Размерами груза 1 и весом тросов пренебречь.

**Решение.**

Поскольку заданная и искомые силы действуют на груз 1, именно это тело является узловым. Поэтому на рисунке 3.7 показаны силы, действующие только на него: активная –  $\bar{P}$  и реакции нитей  $\bar{T}_{OB}$  и  $\bar{T}_{AB}$ .

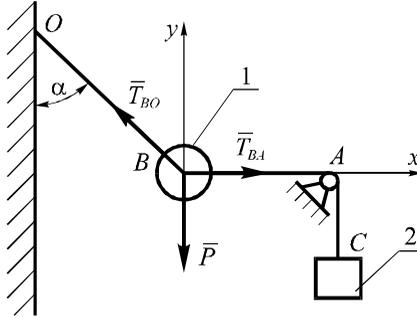


Рисунок 3.7

По условию трение на блоке отсутствует, поэтому сила натяжения троса  $AB$  равна силе тяжести груза 2:  $T_{AB} = Q$ .

На тело 1 действует система сходящихся сил, лежащих в одной плоскости, поэтому составляем два уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0; & T_{AB} - T_{OB} \sin \alpha &= 0; \\ \sum F_{iy} &= 0; & T_{OB} \cos \alpha - P &= 0. \end{aligned}$$

Из них находим: 
$$T_{OB} = \frac{P}{\cos \alpha}; T_{AB} = Q = P \operatorname{tg} \alpha.$$

**Задача.** Прямоугольная пластина 1 со сторонами  $AB = a$  и  $BC = b$  шарнирно закреплена в вершине  $B$ , а вершиной  $A$  опирается на гладкую вертикальную стену  $KL$ . Пренебрегая весом пластины, определить модули реакции стены и шарнира, если к вершине  $C$  пластины подвешен груз 2 веса  $G$ .

**Решение.**

На узловое тело (пластину) действуют сила тяжести груза 2 –  $\bar{G}$ , а также реакции: стены –  $\bar{N}$  и цилиндрического шарнира  $\bar{R}$  (рисунок 3.8).

В соответствии с теоремой о трех непараллельных силах их линии действия должны пересекаться в одной точке. Определим ее положение.

Векторы сил  $\bar{G}$  и  $\bar{N}$  имеют однозначно определенные линии действия. Пересекаются они в точке  $O$ . Поэтому через нее должна проходить и линия действия силы  $\bar{R}$ .

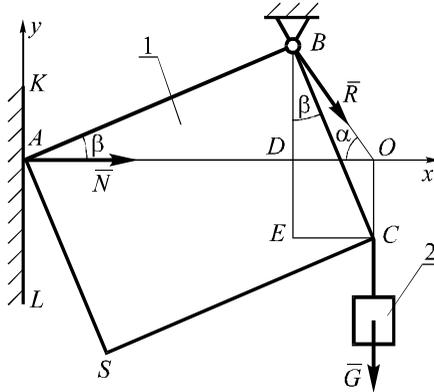


Рисунок 3.8

Уравнения равновесия тела под действием полученной системы сил приобретают вид:

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0; & N + R \cos \alpha &= 0; \\ \sum F_{iy} &= 0; & -R \sin \alpha - G &= 0.\end{aligned}$$

Из их решения следует, что

$$R = -\frac{G}{\sin \alpha}; \quad N = G \operatorname{ctg} \alpha.$$

Угол  $\alpha$  не задан, поэтому выразим его тригонометрические функции через размеры  $a$  и  $b$ . Рассматривая треугольники  $ABD$  и  $BEC$ , находим:

$$BD = AB \sin \beta = a \sin \beta; \quad EC = BC \sin \beta = b \sin \beta.$$

Тогда

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{DO}{BD} = \frac{EC}{BD} = \frac{b \sin \beta}{a \sin \beta} = \frac{b}{a}.$$

Соответственно

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Окончательно получаем:

$$R = -G \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}; \quad N = G \cdot \frac{b}{a}.$$

Знак «минус», полученный при расчете силы  $\bar{R}$ , говорит как здесь, так и в иных подобных случаях о том, что действительное направление силы противоположно изображенному на рисунке.

## 4 МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ И ОСИ

### 4.1 Сложение двух параллельных одинаково направленных сил

Предположим, что на точки  $A$  и  $B$  тела действуют две параллельные силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (рисунок 4.1). Для определения их равнодействующей выполним следующие операции.

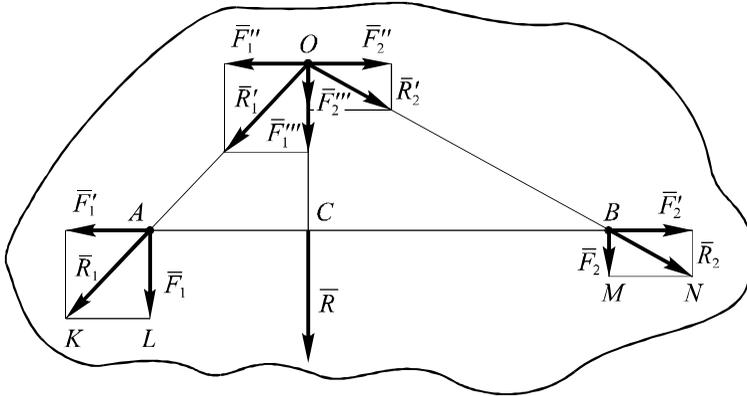


Рисунок 4.1

1 Прикладываем к точкам  $A$  и  $B$  тела систему двух взаимно уравновешивающихся сил  $\vec{F}_1'$  и  $\vec{F}_2'$ . Тогда

$$\{\vec{F}_1; \vec{F}_2\} \sim \{\vec{F}_1; \vec{F}_1'; \vec{F}_2; \vec{F}_2'\}.$$

2 Определяем равнодействующие силы:

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_1'; \quad \vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_2';$$

соответственно

$$\{\vec{F}_1; \vec{F}_1'; \vec{F}_2; \vec{F}_2'\} \sim \{\vec{R}_1; \vec{R}_2\}.$$

3 Переносим силы  $\vec{R}_1$  и  $\vec{R}_2$  в точку пересечения их линий действия.

4 Раскладываем векторы  $\vec{R}_1'$  и  $\vec{R}_2'$  на составляющие, параллельные силам  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_1'$ ,  $\vec{F}_2'$ . Тогда  $\{\vec{R}_1'; \vec{R}_2'\} \sim \{\vec{F}_1''; \vec{F}_1''; \vec{F}_2''; \vec{F}_2''\}$ .

5 Силы  $\vec{F}_1''$  и  $\vec{F}_2''$  уравновешивают друг друга и потому отбрасываются, а векторы  $\vec{F}_1'''$  и  $\vec{F}_2'''$  складываются по правилу сложения коллинеарных векторов. Поэтому

$$\{\vec{F}_1''; \vec{F}_1''; \vec{F}_2''; \vec{F}_2''\} \sim \{\vec{F}_1'''; \vec{F}_2'''\};$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1''' + \vec{F}_2''' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2; \quad R = F_1 + F_2.$$

Линия действия равнодействующей параллельна линиям действия слагаемых. Определим положение точки  $C$ , для чего рассмотрим подобные треугольники  $OAC$  и  $AKL$ ,  $OCB$  и  $BMN$ :

$$\frac{OC}{AC} = \frac{AL}{KL}; \quad \frac{OC}{CB} = \frac{BN}{MN}.$$

Тогда 
$$AC = \frac{OC \cdot KL}{AL}; \quad CB = \frac{OC \cdot MN}{BM}.$$

Поскольку  $KL = F'_1$ ;  $AL = F_1$ ;  $MN = F'_2$ ;  $BM = F_2$ , то

$$AC = \frac{OC \cdot F'_1}{F_1}; \quad CB = \frac{OC \cdot F'_2}{F_2}.$$

Окончательно получаем 
$$\frac{AC}{CB} = \frac{F_2}{F_1} \quad (4.1)$$

Таким образом, система двух параллельных сил, направленных в одну сторону, имеет равнодействующую, параллельную этим силам. Модуль ее равен сумме модулей слагаемых; линия действия равнодействующей делит расстояние между точками приложения сил внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям этих сил.

## 4.2 Момент силы относительно точки. Условие равновесия рычага

Твердое тело, имеющее возможность поворачиваться вокруг неподвижной оси, называют **рычагом**.

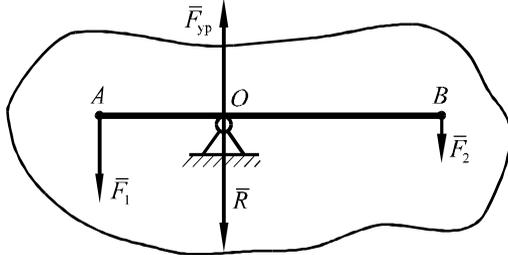


Рисунок 4.2

Предположим, что на рычаг действуют две параллельные силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ , а их равнодействующая равна  $\bar{R}$ .

В соответствии с аксиомой о двух уравновешивающихся силах рычаг будет находиться в равновесии, если равнодействующая имеет ту же линию действия, что и уравновешивающая ее реакция шарнира  $\bar{F}_{yp}$ .

В таком случае она проходит через ось вращения рычага (рисунок 4.2). Следовательно, выполняется условие (4.1):

$$\frac{OA}{OB} = \frac{F_2}{F_1};$$

или

$$F_1 \cdot OA = F_2 \cdot OB. \quad (4.2)$$

То есть, в рассматриваемом случае действие сил на рычаг определяется не только их величинами, но и положениями прямых, вдоль которых они направлены.

Теперь допустим, что рычаг находится в равновесии под действием двух непараллельных сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ . Как и в предыдущем случае, это возможно, если равнодействующая  $\vec{R}$  заданных сил проходит через ось вращения рычага (рисунок 4.3).

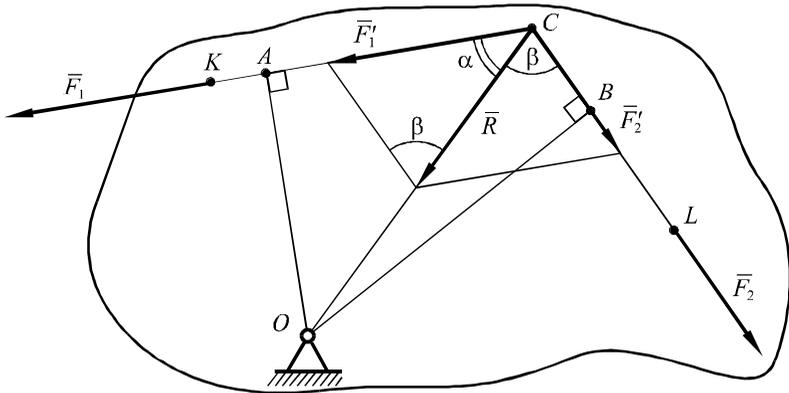


Рисунок 4.3

Соответственно должно выполняться соотношение, вытекающее из теоремы синусов:

$$\frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \alpha} \quad \text{или} \quad F_1 \sin \alpha = F_2 \sin \beta.$$

Умножая левую и правую части равенства на  $OC$ , получим:

$$F_1 \cdot OC \sin \alpha = F_2 \cdot OC \sin \beta$$

или

$$F_1 \cdot OA = F_2 \cdot OB. \quad (4.3)$$

Таким образом, из выражений (4.2) и (4.3) следует, что действие сил на рычаг, нацеленное на его вращение, характеризуется не только их модулями, но и расстояниями от линий действия сил до оси вращения рычага.

Длину перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на линию действия силы, называют **плечом** этой силы.

Произведение модуля силы на плечо называют **моментом силы относительно точки**. Обозначают  $M_o(\vec{F})$ .

Если сила стремится повернуть тело вокруг точки  $O$  *против* хода часовой стрелки, то момент силы относительно этой точки считается *положительным*, а если *по* ходу часовой стрелки – *отрицательным*.

Измеряется момент силы в Н·м (ньютон-метр).

Сила, линия действия которой проходит через точку  $O$ , не сможет повернуть тело, закрепленное в этой точке. Поэтому если линия действия силы проходит через точку  $O$ , то момент силы относительно этой точки равен нулю.

**Примеры** (рисунок 4.4).

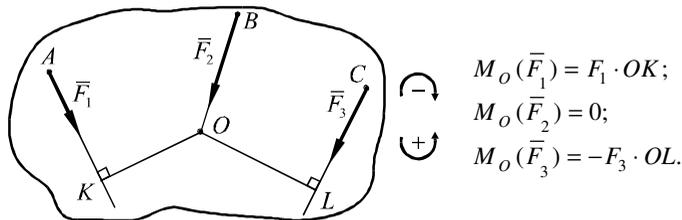


Рисунок 4.4

Одна и та же сила может иметь положительный момент относительно одной точки и отрицательный – относительно другой (рисунок 4.5).

**Пример.**

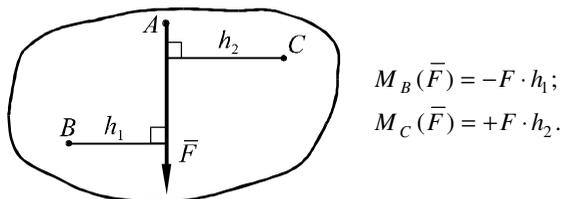


Рисунок 4.5

Используя принятое правило знаков, условия равновесия рычага (4.2) и (4.3) можно записать в виде:

$$M_O(\vec{F}_1) = -M_O(\vec{F}_2)$$

или

$$M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) = 0.$$

Обобщая полученное соотношение на случай большего числа сил, получаем следующее условие:

Для равновесия рычага, находящегося под действием нескольких сил, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма их моментов относительно оси вращения была равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i) = 0.$$

### 4.3 Момент силы как вектор

В теоретической механике используется понятие вектора момента силы относительно точки. Его можно ввести следующим образом.

Пусть на точку  $A$  твердого тела действует сила  $\vec{F}$  (рисунок 4.6). Совместим начало отсчета с некоторой точкой  $O$ . Введем в рассмотрение радиус-вектор  $\vec{r}$  точки приложения силы.

Тогда

$$M_O(\vec{F}) = F \cdot OC ;$$

$$OC = r \sin \alpha ;$$

$$M_O(\vec{F}) = Fr \sin \alpha . \quad (4.4)$$

Правая часть соотношения (4.4) соответствует известному из курса линейной алгебры выражению модуля векторного произведения векторов  $\vec{F}$  и  $\vec{r}$ . Поэтому примем, что **вектор момента силы относительно точки** равен векторному произведению радиуса-вектора точки приложения силы на вектор силы:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} .$$

Получим выражения проекций вектора момента на оси координат.

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k} .$$

Поскольку вектор момента может быть представлен в виде:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = M_{Ox}\vec{i} + M_{Oy}\vec{j} + M_{Oz}\vec{k} ,$$

то его проекции на оси декартовой системы координат:

$$M_{Ox}(\vec{F}) = yF_z - zF_y ;$$

$$M_{Oy}(\vec{F}) = zF_x - xF_z ;$$

$$M_{Oz}(\vec{F}) = xF_y - yF_x .$$

Модуль момента может быть выражен через его проекции формулой:

$$M_O(\vec{F}) = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} .$$

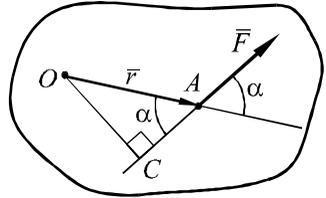


Рисунок 4.6

Проиллюстрируем правильность полученных выражений на примере.

Пусть к точке  $A(x, y)$  тела приложена сила  $\vec{F}$ , проекции которой на оси координат  $F_x, F_y$  (рисунок 4.7).

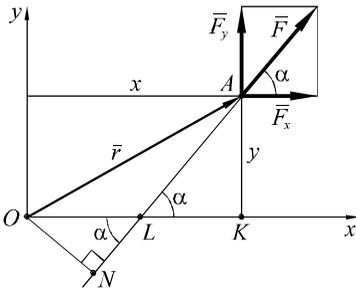


Рисунок 4.7

Тогда

$$M_O(\vec{F}) = F \cdot ON = F \cdot OL \sin \alpha ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{AK}{LK} = \frac{y}{LK} ;$$

$$LK = \frac{yF_x}{F_y} .$$

Следовательно,

$$OL = OK - LK = x - \frac{yF_x}{F_y} = \frac{xF_y - yF_x}{F_y} .$$

Поскольку  $F_y = F \sin \alpha$ , то

$$M_O(\vec{F}) = F \cdot \frac{xF_y - yF_x}{F \sin \alpha} \cdot \sin \alpha = xF_y - yF_x = M_{Oz}(\vec{F}) .$$

Направление вектора  $\vec{M}_O(\vec{F})$  определяется в соответствии с общим правилом векторного умножения двух векторов. Он должен быть перпендикулярным плоскости, образованной векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , и направленным так, чтобы возможное движение точки приложения силы вокруг точки  $O$  наблюдалось с его конца происходящим против хода стрелки часов (рисунок 4.8).

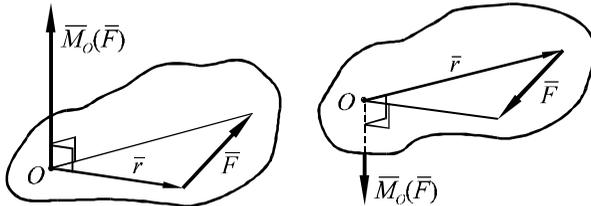


Рисунок 4.8

Если вектор силы  $\vec{F}$  переместить вдоль линии ее действия в пределах абсолютно твердого тела, к которому эта сила приложена, оставив тем же положение точки  $O$ , то вектор момента останется неизменным, так как не изменится плечо силы. Отсюда следует, что состояние твердого тела не изменяется при перенесении силы вдоль линии ее действия. Этот же результат был получен в теореме о переносе силы вдоль линии действия (см. подразд. 2.2). Итак, вектор силы является скользящим вектором.

Если же переместить точку  $O$ , то в общем случае изменится расстояние  $h$ , следовательно, изменится и момент силы. Поэтому момент силы относительно какой-либо точки  $O$  является вектором прикрепленным: он приложен к точке  $O$ , и переносить его в какое либо другое место тела нельзя.

**Сложение векторов моментов сил**, вычисленных относительно одной точки, выполняют по правилу параллелограмма.

Если же все силы и центр моментов  $O$  расположены в одной плоскости, то векторы моментов этих сил направлены от точки  $O$  перпендикулярно указанной плоскости в ту или другую сторону. В таком случае *моменты сил складывают алгебраически*.

#### 4.4 Теорема Вариньона о моменте равнодействующей системы сходящихся сил

*Момент равнодействующей пространственной системы сходящихся сил относительно произвольной точки равен векторной сумме моментов слагаемых сил относительно той же точки.*

Доказательство.

Пусть на тело действуют сходящиеся силы  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ . Если  $\vec{R}$  – их равнодействующая, то

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n.$$

Вычислим ее момент относительно произвольной точки  $O$ :

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{r}_A \times \vec{R} = \vec{r}_A \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n),$$

где  $\vec{r}_A$  – радиус-вектор точки пересечения линий действия сил, отложенный от точки  $O$ .

В результате преобразований получаем

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{R}) &= \vec{r}_A \times \vec{F}_1 + \vec{r}_A \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_A \times \vec{F}_n = \\ &= \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Если силы расположены в одной плоскости, то момент равнодействующей равен *алгебраической сумме* моментов составляющих сил:

$$M_O(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \bar{M}_O(\vec{F}_i).$$

Теорема Вариньона может применяться для вычисления момента силы, если ее плечо трудно определить. В этом случае вектор силы раскладывается на такие составляющие, чтобы плечо каждой легко находилось.

**Пример.**

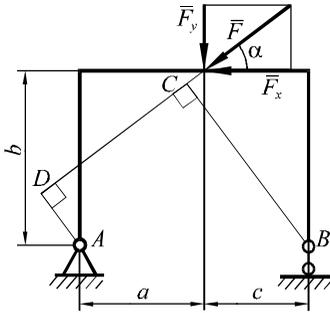


Рисунок 4.9

Вычислим моменты силы  $\vec{F}$  относительно точек  $A$  и  $B$  (рисунок 4.9). Определение длин  $BC$  и  $AD$  требует громоздких вычислений, поэтому применим теорему Вариньона.

$$M_A(\vec{F}) = F_x \cdot b - F_y \cdot a = F \cos \alpha \cdot b - F \sin \alpha \cdot a;$$

$$M_B(\vec{F}) = F_x \cdot b + F_y \cdot c = F \cos \alpha \cdot b + F \sin \alpha \cdot c.$$

**4.5 Момент силы относительно оси**

Предположим, что к телу, которое может поворачиваться вокруг неподвижной оси  $Oz$ , приложена сила  $\vec{F}$  (рисунок 4.10). Разложим ее на две составляющие, одна из которых,  $\vec{F}_z$ , параллельна оси  $Oz$ , а вторая  $\vec{F}_{xy}$  лежит в плоскости, перпендикулярной  $Oz$ . Проекция  $F_z$  стремится переместить дверь вдоль оси  $Oz$ , но не способствует ее вращению.

Следовательно, действие силы  $\vec{F}$  на закрепленную на оси дверь, направленное на ее поворот, определяется величиной и направлением только составляющей  $F_x$ . Количественной мерой этого действия является *момент силы относительно оси*.

Правило его вычисления выглядит так:

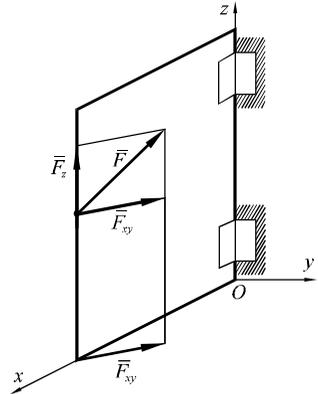


Рисунок 4.10

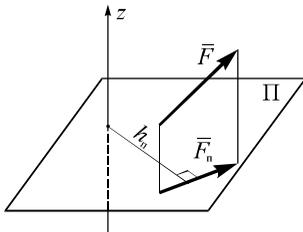


Рисунок 4.11

Чтобы определить **момент силы относительно оси**, нужно эту силу спроецировать на плоскость, перпендикулярную оси, и найти момент проекции силы относительно точки пересечения оси и плоскости (рисунок 4.11)

$$M_z(\vec{F}) = F_n h_n.$$

Этот момент считается положительным, если при наблюдении с положительного конца оси сила представляет поворачивающую тело против хода стрелки часов, и отрицательным – в противном случае.

Момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси или пересекает ее. Эти два случая могут быть объединены в один: момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

#### 4.6 Связь момента силы относительно оси с моментом силы относительно точки оси

Для того чтобы установить зависимость между упомянутыми в заголовке величинами, выполним рисунок 4.12.

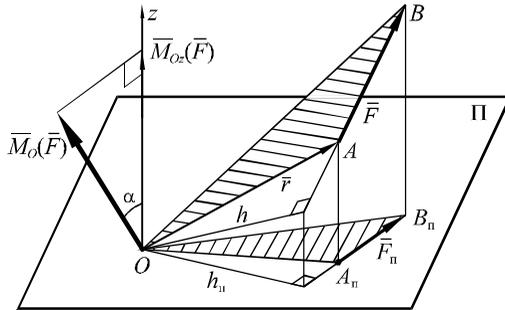


Рисунок 4.12

По определению момента силы относительно точки его величина равна произведению силы на плечо, то есть:

$$M_O(\vec{F}) = Fh.$$

С другой стороны, площадь треугольника  $OAB$  равна половине произведения основания на высоту. Поэтому

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} Fh; \quad M_O(\vec{F}) = 2S_{\Delta OAB}.$$

Аналогично момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $Oz$ :

$$M_{Oz}(\vec{F}) = F_n h_n.$$

Индекс «п» здесь и далее соответствует проекциям на плоскость  $\Pi$ . Площадь треугольника  $OA_nB_n$

$$S_{\Delta OA_nB_n} = \frac{1}{2} F_n h_n, \quad \text{то есть } M_{Oz}(\vec{F}) = 2S_{\Delta OA_nB_n}.$$

Из геометрии известно, что площадь проекции плоской фигуры равна площади проецируемой фигуры, умноженной на косинус двугранного угла между плоскостями, в которых расположены эти фигуры. Этот угол измеряется углом между перпендикулярами к плоскостям. Перпендикуляром к

плоскости треугольника  $OA_nB_n$  является ось  $Oz$ , а перпендикуляром к плоскости треугольника  $OAB$  – вектор момента.

Таким образом,

$$S_{\Delta OA_nB_n} = S_{\Delta OAB} \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между вектором момента  $\vec{M}_O(\vec{F})$  и осью  $Oz$ .

Отсюда

$$M_{Oz}(\vec{F}) = 2S_{\Delta OA_nB_n} = 2S_{\Delta OAB} \cdot \cos \alpha = M_O(\vec{F}) \cdot \cos \alpha.$$

Следовательно, момент силы относительно оси равен проекции на эту ось вектора момента силы относительно любой точки той же оси.

Теперь, используя связь момента силы относительно оси с моментом силы относительно точки оси, можно записать формулы для выражений моментов относительно осей координат через осевые проекции силы и координаты точки ее приложения. Они имеют такой же вид, как и проекции на координатные оси вектора момента силы относительно точки, полученные в п. 4.3.

$$M_x(\vec{F}) = M_{Ox}(\vec{F}) = yF_z - zF_y;$$

$$M_y(\vec{F}) = M_{Oy}(\vec{F}) = zF_x - xF_z;$$

$$M_z(\vec{F}) = M_{Oz}(\vec{F}) = xF_y - yF_x.$$

### Пример.

Вычислим момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $O_1x_1$  как проекцию на эту ось вектора момента той же силы относительно точки  $A$  (рисунок 4.13).

$$M_{O_1x_1}(\vec{F}) = -M_A(\vec{F}) \cdot \cos \alpha, \quad M_A(\vec{F}) = F \cdot b, \quad \cos \alpha = \frac{AB}{AO_1} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

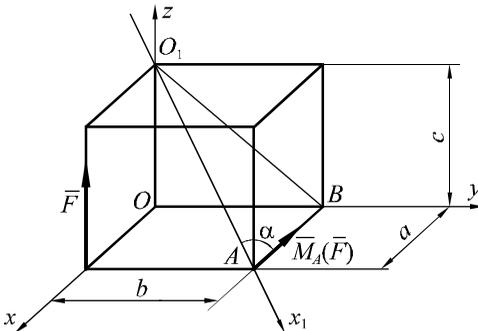


Рисунок 4.13

Подстановка дает 
$$M_{O_1x_1}(\vec{F}) = -\frac{Fab}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

## 5 ТЕОРИЯ ПАР СИЛ

### 5.1 Пара сил и ее момент

**Парой сил** называется система двух приложенных к одному телу равных по величине параллельных сил  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ , направленных в противоположные стороны по несовпадающим линиям действия (рисунок 5.1).

Плоскость, в которой лежат силы, составляющие пару, называется плоскостью действия пары сил или **плоскостью пары**.

Пара сил, приложенная к твердому телу, вызывает вращение твердого тела, если этому не препятствуют наложенные на тело связи.

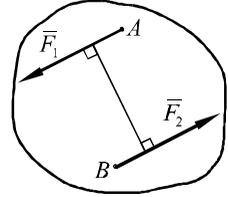


Рисунок 5.1

В соответствии с рисунком 5.2 вычислим сумму моментов сил, составляющих пару, относительно произвольной точки  $O$ , лежащей в плоскости пары.

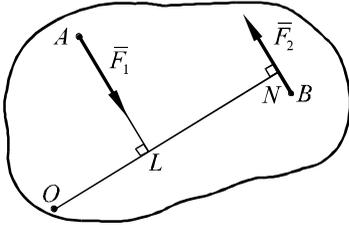


Рисунок 5.2

$$M_O(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = -F_1 \cdot OL + F_2 \cdot ON = F_1 \cdot (ON - OL) = F_1 \cdot LN.$$

Таким образом, полученная сумма моментов не зависит от положения точки  $O$ , относительно которой вычисляются моменты, а определяется лишь величинами сил пары и расстоянием между их линиями действия.

Расстояние  $h = LN$  между линиями действия сил пары называется **плечом пары**.

Произведение модуля силы, входящей в пару, на плечо пары называется **моментом пары**.

Вычислим теперь сумму моментов сил, составляющих пару, относительно произвольной точки пространства (рисунок 5.3).

$$M_O(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2;$$

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1, \text{ поэтому}$$

$$M_O(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_1) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{\rho} \times \vec{F}_1.$$

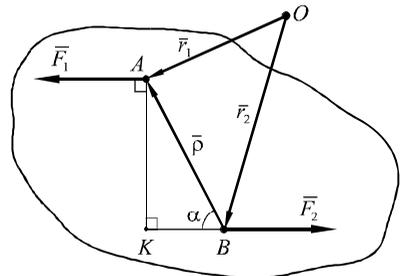


Рисунок 5.3

Полученный результат так же не зависит от положения точки  $O$ .

Векторное произведение вектора, соединяющего точки приложения сил пары, на вектор силы называется **вектором момента пары сил**.

Модуль этого вектора

$$\bar{M}(\bar{F}_1; \bar{F}_2) = F_1 \cdot \rho \sin \alpha = F_1 \cdot AK .$$

Вектор момента пары направлен перпендикулярно к плоскости ее действия в ту сторону, откуда возможное вращение тела под действием пары видно происходящим против хода стрелки часов (рисунок 5.4).

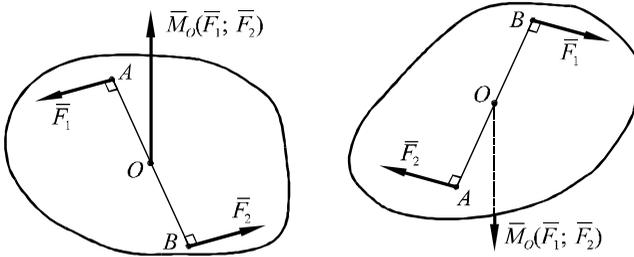


Рисунок 5.4

## 5.2 Свойства пар сил

1 Не нарушая действия пары сил на абсолютно твердое тело, ее можно повернуть в своей плоскости на произвольный угол.

Доказательство.

Пусть на точки  $A$  и  $B$  тела действуют силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ , составляющие пару (рисунок 5.5).

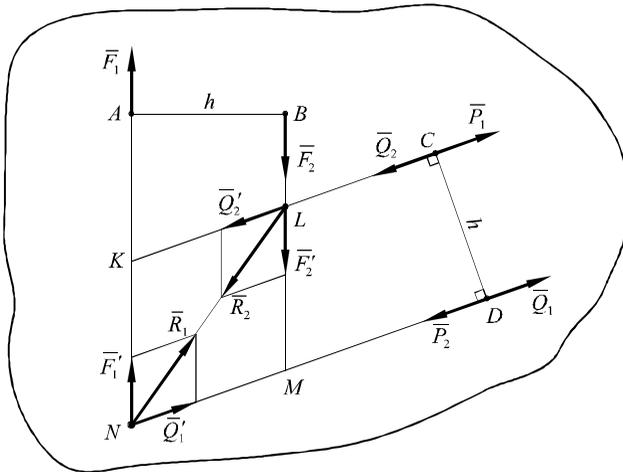


Рисунок 5.5

Приложим к некоторым точкам  $C$  и  $D$ , отстоящим друг от друга на расстоянии  $CD = AB = h$ , уравновешенные системы сил  $\{\bar{P}_1; \bar{Q}_2\}$  и  $\{\bar{P}_2; \bar{Q}_1\}$ , удовлетворяющих условию  $P_1 = P_2 = Q_1 = Q_2 = F_1 = F_2$ .

Переносим силы  $\bar{Q}_1$  и  $\bar{F}_1$ , а также  $\bar{Q}_2$  и  $\bar{F}_2$  в точки пересечения их линий действия  $N$  и  $L$  и там заменяем равнодействующими:

$$\bar{R}_1 = \bar{F}'_1 + \bar{Q}'_1; \quad \bar{R}_2 = \bar{F}'_2 + \bar{Q}'_2.$$

Полученные силы  $\bar{R}_1$  и  $\bar{R}_2$  равны по модулю и направлены вдоль одной диагонали  $LN$  ромба  $KLMN$  в противоположные стороны, поэтому они уравновешивают друг друга и могут быть отброшены.

Таким образом, исходная пара сил  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  оказалась эквивалентной паре  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$ , плечо которой равно плечу исходной пары, а модули сил  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$  равны модулям заданных сил. Поэтому можно сказать, что пара сил оказалась повернутой на произвольный угол (так как точки  $C$  и  $D$  выбраны произвольно).

*2 Не изменяя действия пары на твердое тело, можно менять величину входящей в нее силы и длину плеча, но так, чтобы момент пары оставался неизменным.*

Доказательство.

Пусть к телу приложены две равные по модулю противоположно направленные силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ , составляющие пару, плечо которой  $h_1$  (рисунок 5.6).

Приложим к точкам  $A$  и  $B$  уравновешенную систему сил  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$ .

Определим равнодействующие систем сил, приложенных к точкам  $A$  и  $B$ :

$$\bar{R}_1 = \bar{F}_1 + \bar{P}_1; \quad \bar{R}_2 = \bar{F}_2 + \bar{P}_2.$$

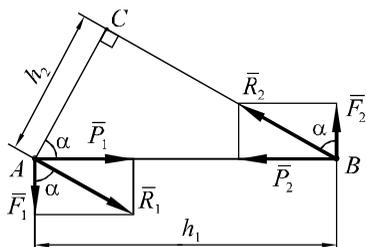


Рисунок 5.6

Силы  $\bar{R}_1$  и  $\bar{R}_2$  равны по модулю и параллельны, следовательно, они составляют пару. Вычислим момент этой пары

$$M(\bar{R}_1; \bar{R}_2) = R_1 h_2.$$

Поскольку  $R_1 = \frac{F_1}{\cos \alpha}$  и  $h_2 = h_1 \cos \alpha$ , то

$$M(\bar{R}_1; \bar{R}_2) = \frac{F_1}{\cos \alpha} h_1 \cos \alpha = F_1 h_1.$$

Следовательно,  $F_1 h_1 = R_1 h_2$ , что и требовалось доказать.

3 Не изменяя действия пары на абсолютно твердое тело, можно менять плоскость пары на любую параллельную ей плоскость.

Доказательство.

Пусть к телу в плоскости  $\Pi_1$  приложена пара сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  (рисунок 5.7). Приложим в плоскости  $\Pi_2$  уравновешенные силы  $\vec{P}_1$  и  $\vec{Q}_2$ ;  $\vec{P}_2$  и  $\vec{Q}_1$ , параллельные силам  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , так, чтобы расстояние между их линиями действия было равно расстоянию  $AB$ , причем должно выполняться условие  $P_1 = P_2 = Q_1 = Q_2 = F_1 = F_2$ .

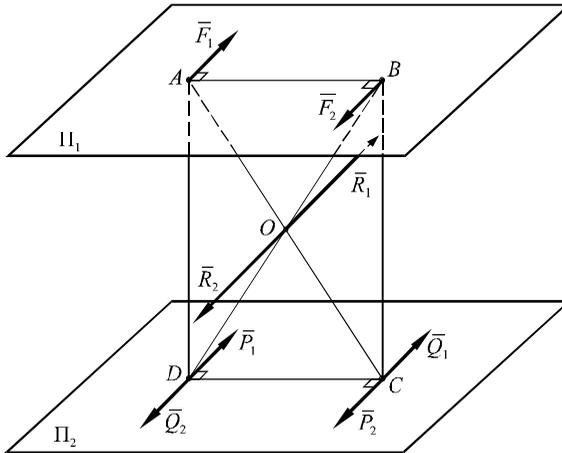


Рисунок 5.7

Определим равнодействующие силы

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{Q}_1; \quad \vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{Q}_2.$$

Обе они приложены к точке  $O$  пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$ , равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны, поэтому их можно отбросить. Оставшиеся силы  $\vec{P}_1$  и  $\vec{P}_2$  образуют пару, момент которой по модулю равен моменту исходной пары. Поскольку плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  параллельны, то векторы моментов этих пар равны между собой.

Как следует из трех доказанных свойств, две пары эквивалентны, если векторы моментов этих пар равны между собой. Поэтому единственной количественной и качественной характеристикой, полностью определяющей действие пары сил на тело, является вектор момента пары.

Этот вектор не имеет ни определенной точки приложения, ни линии действия, а задается лишь своей величиной и направлением. Такие векторы называют свободными.

В механике наряду с понятием вектор момента пары сил используют термины “сосредоточенный момент”, а также просто “момент”.

### 5.3 Теорема о сложении пар сил

Совокупность пар, как угодно расположенных в пространстве, статически эквивалентна одной паре с моментом, равным векторной сумме моментов слагаемых пар.

Доказательство.

Сложим две пары с моментами  $\vec{M}_1$  и  $\vec{M}_2$ , действующие в плоскостях  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , линия пересечения которых  $l$  (рисунок 5.8).

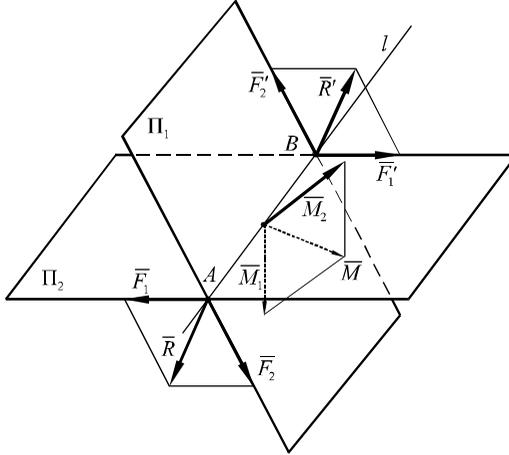


Рисунок 5.8

Приведем обе пары к плечу  $AB$ , то есть, подберем значения сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_1'$ ;  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_2'$  так, чтобы они удовлетворяли соотношениям:

$$M_1 = F_1 \cdot AB ; M_2 = F_2 \cdot AB .$$

Определим равнодействующие силы

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 ; \vec{R}' = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' .$$

Они равны по модулю и параллельны, поэтому образуют пару. Вычислим ее момент относительно произвольной точки  $O$ :

$$\vec{M}_O(\vec{R}; \vec{R}') = \vec{M}_O(\vec{R}) + \vec{M}_O(\vec{R}') .$$

По теореме Вариньона о моменте равнодействующей системы сходящихся сил

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) ; \vec{M}_O(\vec{R}') = \vec{M}_O(\vec{F}_1') + \vec{M}_O(\vec{F}_2') .$$

Тогда

$$\vec{M}_O(\vec{R}; \vec{R}') = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_1') + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \vec{M}_O(\vec{F}_2') = \vec{M}_O(\vec{F}_1; \vec{F}_1') + \vec{M}_O(\vec{F}_2; \vec{F}_2') .$$

Поскольку  $\vec{M}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1; \vec{F}_1')$ ;  $\vec{M}_2 = \vec{M}_O(\vec{F}_2; \vec{F}_2')$ , то  $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ , что и требовалось доказать.

## 6 УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СИСТЕМ СИЛ

### 6.1 Лемма о переносе силы на параллельную линию действия (метод Пуансо)

*Сила, приложенная к какой-либо точке твердого тела, эквивалентна такой же силе, приложенной к любой другой точке этого тела, и паре сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения.*

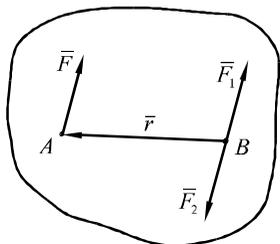


Рисунок 6.1

*Доказательство.*

Пусть на точку  $A$  твердого тела действует сила  $\vec{F}$  (рисунок 6.1). Приложим к произвольной точке  $B$  систему взаимно уравновешивающихся сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , параллельных  $\vec{F}$  и равных ей по модулю. В соответствии с аксиомой 3 статики движение тела при этом не изменится. Поэтому сила  $\vec{F}$  эквивалентна системе сил  $\{\vec{F}; \vec{F}_1; \vec{F}_2\}$ .

Силы  $\vec{F}$  и  $\vec{F}_2$  образуют пару, которую называют присоединенной. Ее момент равен моменту силы  $\vec{F}$  относительно точки  $B$ .

Таким образом, лемма доказана.

### 6.2 Теорема о приведении системы сил к центру (теорема Пуансо). Главный вектор и главный момент системы сил

*Произвольная система сил, действующая на твердое тело, эквивалентна одной силе, приложенной к какой-либо точке тела (центру приведения) и равной главному вектору данной системы сил, и одной паре сил, момент которой равен главному моменту всех сил относительно выбранного центра приведения.*

Пусть к твердому телу приложена система сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , произвольно расположенных в пространстве (рисунок 6.2). Приведем эту систему сил к некоторой точке  $O$ , называемой центром приведения. То есть, все силы перенесем в точку  $O$  в соответствии с методом Пуансо.

Каждая из сил  $\vec{F}_i$ , составляющих систему, эквивалентна той же силе, перенесенной в точку  $O$ , и присоединенной паре сил, момент которой

$$\vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Поэтому в результате приведения получаем систему сходящихся сил и систему присоединенных пар сил.

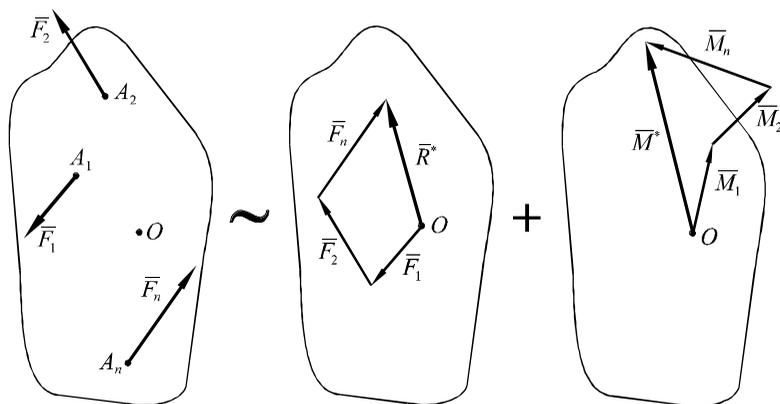


Рисунок 6.2

Складывая силы, перенесенные в точку  $O$ , получаем:

$$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Вектор  $\vec{R}^*$ , равный геометрической сумме всех сил, приложенных к телу, называют **главным вектором** системы сил.

Система присоединенных пар сил в соответствии с теоремой об их сложении сводится к результирующей паре сил, момент которой

$$\vec{M}_O^* = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i).$$

Вектор  $\vec{M}_O^*$ , равный геометрической сумме моментов всех сил, приложенных к телу, относительно центра  $O$ , называется **главным моментом** системы сил относительно точки  $O$ .

Теорема доказана.

**Замечание.** Главный вектор отличается от равнодействующей силы тем, что он не эквивалентен данной системе сил, то есть без главного момента не может заменить действие всей системы сил.

В зависимости от наличия не равного нулю главного вектора и главного момента различают частные случаи приведения системы сил к центру. Они подробно рассмотрены в подразд. 10.3.

### 6.3 Условия равновесия тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил

**Теорема.** Для равновесия тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы были равны нулю, то есть

$$\begin{aligned}\bar{R}^* &= \sum \bar{F}_i = 0; \\ \bar{M}_O^* &= \sum \bar{M}_O(\bar{F}_i).\end{aligned}$$

Доказательство.

1 Необходимость.

Пусть заданная система сил  $\{\bar{F}_1; \bar{F}_2; \dots; \bar{F}_n\}$  находится в равновесии.

Тогда в соответствии с теоремой Пуансо эта система сил может быть приведена к силе  $\bar{R}^*$  и паре сил с моментом  $\bar{M}_O^*$ .

Выберем силы, составляющие пару, равными  $\bar{P}$  и  $\bar{P}'$ . Приложим силу  $\bar{P}$  в центре приведения и сложим ее с силой  $\bar{R}^*$ :  $\bar{Q} = \bar{P} + \bar{R}^*$  (рисунок 6.3).

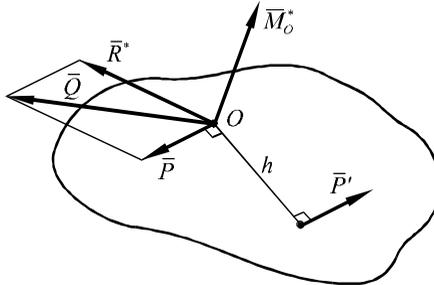


Рисунок 6.3

В результате получаем, что исходная система сил эквивалентна системе двух сил  $\{\bar{Q}; \bar{P}'\}$ . В соответствии с аксиомой о двух силах эти силы будут составлять уравновешенную систему, только если они имеют общую линию действия, и выполняется равенство:  $\bar{Q} = -\bar{P}'$ . Поэтому

$$\bar{R}^* = \bar{Q} + \bar{P}' = 0,$$

а линия действия силы  $\bar{P}'$  должна пройти через точку  $O$ , соответственно

$$\bar{M}_O^* = \bar{M}_O(\bar{P}') + \bar{M}_O(\bar{Q}) = 0,$$

что и требовалось доказать.

## 2 Достаточность.

Пусть заданная система сил  $\{\bar{F}_1; \bar{F}_2; \dots; \bar{F}_n\}$  преобразована в эквивалентную систему сил  $\{\bar{Q}; \bar{P}'\}$ , для которой выполняются условия

$$\bar{R}^* = \bar{Q} + \bar{P}' = 0; \quad \bar{M}_O^* = \bar{M}_O(\bar{P}') + \bar{M}_O(\bar{Q}) = 0.$$

Из первого условия следует, что силы  $\bar{P}$  и  $\bar{Q}$  равны по модулю и противоположно направлены, то есть они образуют пару сил. Второе соотношение выполнимо только в случае, если плечо пары сил равно нулю, а следовательно, силы  $\bar{P}$  и  $\bar{Q}$  имеют общую линию действия.

В соответствии с аксиомой о двух уравновешивающихся силах рассматриваемая система находится в равновесии, что и требовалось доказать.

Проецируя выражения главного вектора и главного момента на оси координат, получаем условия равновесия в аналитической форме.

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum F_{iz} = 0; \\ \sum M_{Ox} = 0; \\ \sum M_{Oy} = 0; \\ \sum M_{Oz} = 0. \end{cases}$$

Таким образом, для равновесия тела, находящегося по действию произвольной пространственной системы сил, необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю суммы проекций всех сил на оси координат и суммы моментов всех сил относительно этих осей.

### 6.4 Условия равновесия тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил

В случае, если все векторы сил, входящих в систему, лежат в плоскости  $xOy$ , проекции всех сил на ось  $Oz$ , а также их моменты относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  обращаются в нуль. Поэтому:

Для равновесия тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил, необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на две координатные оси, лежащие в этой плоскости, и ал-

гебраическая сумма моментов всех сил относительно произвольной точки плоскости равнялись нулю, то есть:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum M_{i_o} = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Возможны также другие формы уравнений равновесия:

– равенство нулю алгебраических сумм моментов всех сил относительно любых трех точек, не лежащих на одной прямой:

$$\begin{cases} \sum M_{i_A} = 0; \\ \sum M_{i_B} = 0; \\ \sum M_{i_C} = 0 \quad (A \notin BC); \end{cases} \quad (6.2)$$

– равенство нулю алгебраических сумм моментов всех сил системы относительно двух любых точек и алгебраической суммы их проекций на ось, не перпендикулярную прямой, проходящей через две выбранные точки:

$$\begin{cases} \sum M_{i_A} = 0; \\ \sum M_{i_B} = 0; \\ \sum F_{ix} = 0 \quad (x \text{ неперпендикулярна } AB). \end{cases} \quad (6.3)$$

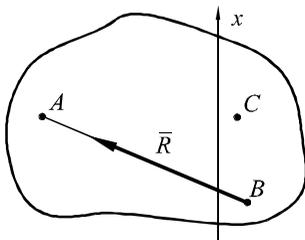


Рисунок 6.4

Докажем возможность применения двух последних форм уравнений равновесия.

Из первых двух равенств систем уравнений (6.2) и (6.3) вытекает, что если система сил имеет равнодействующую, то ее линия действия проходит через точки A и B, как это показано на рисунке 6.4. Выполнение третьих уравнений говорит о том, что эта равнодействующая равна нулю.

При решении задач могут быть составлены дополнительные уравнения моментов и проекций, но они будут являться следствием уравнений (6.1)–(6.3). Поэтому их нельзя использовать для поиска дополнительных неизвестных величин, но можно применять для проверки правильности решения.

### Пример решения задачи.

К концу  $E$  стержня  $BE$ , укрепленного в точке  $B$  с помощью шарнира, подвешен груз веса  $G$  (рисунок 6.5). В точках  $C$  и  $D$  к стержню прикреплена гибкая нить, переброшенная через идеальный блок  $A$ .

Считая, что заданы углы  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $BC = CD = DE$  и  $AC = AD$ , определить реакции нити и шарнира. Весом стержня и трением пренебречь.

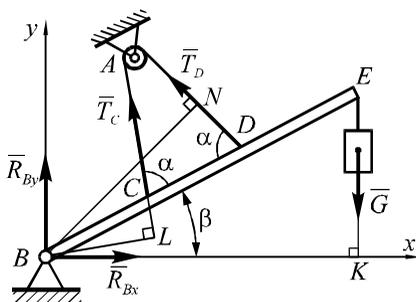


Рисунок 6.5

### Решение.

Поскольку на тело действует произвольная плоская система сил, составим три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0; \quad R_{Bx} - T_C \cos(180^\circ - \alpha - \beta) - T_D \cos(\alpha - \beta) &= 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \quad R_{By} + T_C \sin(180^\circ - \alpha - \beta) + T_D \sin(\alpha - \beta) - G &= 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \quad T_C \cdot BL + T_D \cdot BN - G \cdot BK &= 0. \end{aligned}$$

Нить  $CAD$  перекинута через идеальный блок. Поэтому  $T_C = T_D = T$ .

Таким образом, получена система трех линейных уравнений с тремя неизвестными силами  $R_{Bx}$ ,  $R_{By}$  и  $T$ . Решая ее, получаем:

$$T(BL + BN) = G \cdot BK;$$

$$BL = BC \sin \alpha; \quad BN = BD \sin \alpha = 2BC \sin \alpha; \quad BK = BE \cos \beta = 3BC \cos \beta;$$

$$T = \frac{G \cdot BK}{BL + BN} = \frac{G \cdot 3BC \cos \beta}{BC \sin \alpha + 2BC \sin \alpha} = \frac{G \cos \beta}{\sin \alpha};$$

$$R_{Bx} = T \cos(\alpha - \beta) - T \cos(\alpha + \beta) = 2T \sin \alpha \sin \beta = 2G \sin \beta \cos \beta = G \sin 2\beta;$$

$$R_{By} = G - T \sin(\alpha + \beta) - T \sin(\alpha - \beta) = G - 2T \sin \alpha \cos \beta = G - 2G \cos^2 \beta = -G \cos 2\beta.$$

### 6.5 Учет распределенных сил при составлении уравнений равновесия тел

До сих пор рассматривались силы, приложенные к какой-либо одной точке. Их называют **сосредоточенными**. Но силы всегда действуют на какую-либо часть объема тела или его поверхности, или — на некоторую часть линии. Они называются **распределенными**.

Распределенные силы характеризуются **интенсивностью**, то есть силой, приходящейся на единицу объема (она измеряется в  $\text{Н/м}^3$ ), поверхности ( $\text{Н/м}^2$ ) или длины линии ( $\text{Н/м}$ ).

При решении задач теоретической механики распределенные силы, как правило, заменяются сосредоточенными. Рассмотрим случаи, наиболее часто встречающиеся на практике.

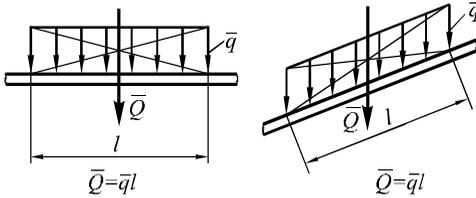


Рисунок 6.6

Пусть на участке прямой линии, имеющем длину  $l$ , распределены параллельные силы, интенсивность  $q$  которых постоянна (рисунок 6.6). Величина равнодействующей распределенной нагрузки определится путем умножения величины  $q$  на расстояние  $l$ , а приложить ее необходимо в точке пересечения диагоналей изображенного на рисунке параллелограмма. Направляется сила  $\bar{Q}$  так же, как и силы нагрузки.

Если распределенная нагрузка изменяется по закону треугольника (рисунок 6.7), то величина равнодействующей определяется формулой  $Q = \frac{q_{\max} l}{2}$ , а прикладывается она в точке пересечения медиан треугольника, изображающего закон изменения нагрузки.

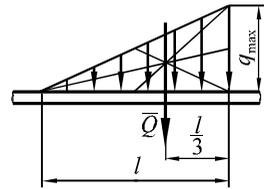


Рисунок 6.7

При более сложных случаях распределения сил равнодействующую силу и ее точку приложения обычно определяют путем интегрирования и применения теоремы Вариньона.

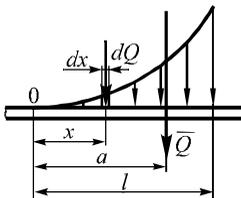


Рисунок 6.8

Например, в случае квадратичного закона изменения нагрузки  $q = kx^2$  из рассмотрения сил, действующих на элемент балки длины  $dx$  (рисунок 6.8), получаем:

$$Q = \int_{(l)} dQ = \int_0^l q \cdot dx = \int_0^l kx^2 dx = \frac{kl^3}{3};$$

$$M_o(\bar{Q}) = \int_{(l)} dQ \cdot x = \int_0^l qx \cdot dx = \int_0^l kx^3 dx = \frac{kl^4}{4}.$$

С другой стороны,  $M_o(\bar{Q}) = Q \cdot a$ , поэтому расстояние от начала координат до линии действия равнодействующей

$$a = \frac{M_o(\bar{Q})}{Q} = \frac{3}{4}l.$$

## **7 РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМ ТЕЛ**

### **7.1 Равновесие систем тел**

Под **системой тел** понимается конструкция, состоящая из нескольких твердых тел, взаимодействующих между собой через какие-либо связи, допускающие относительные перемещения этих тел (они могут соединяться шарнирами, гибкой нитью, опираться друг на друга и т.д.).

При равновесии системы тел как каждое тело, так и вся система в целом находятся в равновесии. В связи с этим имеется два способа решения задач, связанных с исследованием равновесия системы тел.

1 Поскольку каждое тело системы находится в равновесии, то составляются уравнения равновесия каждого из тел (тогда уравнения равновесия системы в целом могут быть использованы для проверки правильности решения).

2 Сначала записываются уравнения равновесия системы в целом, а затем уравнения равновесия отдельных тел системы (в этом случае нет необходимости в составлении уравнений равновесия по крайней мере одного из тел системы, но они могут быть применены для проверки).

#### **Замечания**

1 При составлении уравнений равновесия всей системы в целом она рассматривается как абсолютно твердое тело, поэтому в эти уравнения не войдут силы взаимодействия между отдельными телами системы.

2 Силы, которыми действуют друг на друга тела системы, в соответствии с аксиомой о действии и противодействии равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны.

Если несколько тел взаимодействуют в одной точке, то суммы проекций всех сил, действующих на эту точку со стороны контактирующих с ней тел, а также суммы моментов соответствующих пар сил должны быть равны нулю.

3 Если внешняя сила приложена к точке контакта исследуемых тел, ее следует относить только к одному из тел системы.

### **7.2 Равновесие гибких элементов сооружений, нагруженных силами собственного веса**

Под гибкими элементами различных конструкций, называемых также нитями, подразумевают тросы, канаты и цепи, несущие поперечную нагрузку и принявшие из-за этого криволинейную форму.

В технике они встречаются в виде проводов линий электропередач, несущих цепей висячих мостов и др.

Целями исследования являются определение формы изгиба нити и наибольших растягивающих сил, которые могут привести к ее разрыву.

Предположим, что точки  $A$  и  $B$  нити находятся на одной высоте, и нагрузка, приходящаяся на единицу длины нити,  $q = \text{const}$  (рисунок 7.1).

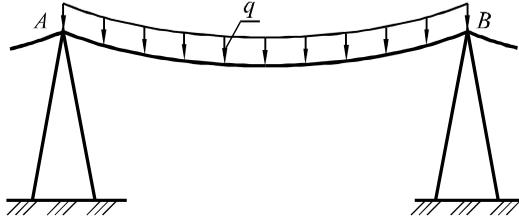


Рисунок 7.1

Тогда нить окажется симметричной относительно своей середины. Поэтому рассмотрим равновесие ее половины (рисунок 7.2).

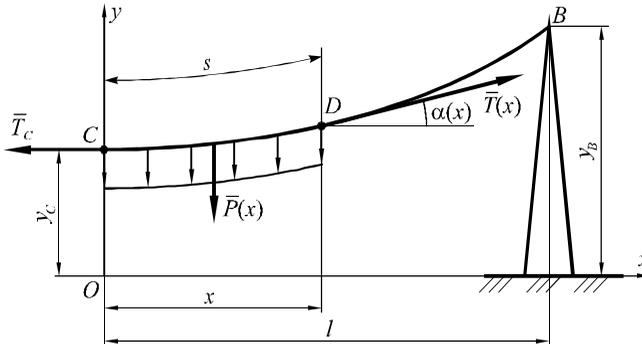


Рисунок 7.2

На участок  $CD$  нити действуют силы  $\bar{T}_C$ ,  $\bar{T}(x)$  и  $\bar{P}(x)$ . Применив аксиому о затвердевании, можно считать нить абсолютно твердым телом.

Уравнения равновесия рассматриваемого участка имеют вид

$$\sum F_{ix} = 0; \quad T \cos \alpha - T_C = 0; \quad (7.1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad T \sin \alpha - P(x) = 0. \quad (7.2)$$

Величина сосредоточенной силы  $\bar{P}(x)$ , соответствующей распределенной нагрузке, находится по формуле

$$P(x) = sq,$$

где  $s$  – длина дуги  $CD$ .

После подстановки из (7.1) и (7.2) получаем:

$$T = \frac{T_C}{\cos \alpha}; \quad \frac{T_C}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha = sq; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{sq}{T_C}.$$

С другой стороны, из геометрического смысла производной следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}.$$

Обозначая  $\frac{q}{T_C} = k$ , получаем

$$\frac{dy}{dx} = ks. \quad (7.3)$$

Длина дуги  $ds$  выражается через координаты зависимостью

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Соответственно

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Продифференцируем (7.3) по переменной  $x$ :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k \frac{ds}{dx} = k \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Для решения полученного дифференциального уравнения используем подстановку  $\xi = \frac{dy}{dx}$ .

Тогда

$$\frac{d\xi}{dx} = k \sqrt{1 + \xi^2}.$$

Далее получаем

$$\frac{d\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} = k dx;$$

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \int k dx; \quad \ln \left( \xi + \sqrt{1 + \xi^2} \right) = kx + C_1.$$

Поскольку при  $x = 0$  имеем  $\alpha = 0$ , то  $\xi(0) = \frac{dy}{dx}(0) = \operatorname{tg}(\alpha) = 0$ .

Следовательно,  $C_1 = \ln 1 = 0$ .

В результате последующих преобразований определяем

$$\xi + \sqrt{1 + \xi^2} = e^{kx}; \quad \sqrt{1 + \xi^2} = e^{kx} - \xi; \quad 1 + \xi^2 = e^{2kx} - 2\xi e^{kx} + \xi^2;$$

$$\xi = \frac{e^{2kx} - 1}{2e^{kx}} = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = \operatorname{sh} kx;$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} kx;$$

$$y = \frac{\operatorname{ch} kx}{k} + C_2.$$

Подберем положение осей координат так, чтобы  $C_2 = 0$ . Тогда

$$y_C = \frac{T_C}{q} \operatorname{ch} \frac{qx}{T_C}.$$

Таким образом, форма изгиба нити, нагруженной только силами собственного веса, представляет собой гиперболический косинус.

Для выражения  $T_C$  через длину половины нити подставим в формулу (7.3) найденное решение:

$$s = \frac{1}{k} \frac{dy}{dx}(l) = \frac{1}{k} \operatorname{sh} kl = \frac{T_C}{q} \operatorname{sh} \frac{ql}{T_C}.$$

Решение полученного нелинейного уравнения может быть выполнено любым известным численным методом.

Теперь определим максимальную силу натяжения нити  $T_{\max}$ .

Из (7.1) и (7.2) получаем:

$$T_{\max} \cos \alpha = T_C ; T_{\max} \sin \alpha = P ;$$

$$T_{\max}^2 = T_C^2 + P^2.$$

В соответствии с полученным выражением сила натяжения максимальна там, где наибольшее значение имеет сила  $\bar{P}$ , то есть в наивысшей точке нити. В таком случае

$$P = qs = T_C \operatorname{sh} \frac{ql}{T_C};$$

$$T_{\max}^2 = T_C^2 \left( 1 + \operatorname{sh}^2 \frac{ql}{T_C} \right) = T_C^2 \operatorname{ch}^2 \frac{ql}{T_C}.$$

Окончательно имеем:

$$T_{\max} = T_C \operatorname{ch} \frac{ql}{T_C}.$$

Найденное значение силы  $T_{\max}$  может быть использовано для проверки выполнения условия прочности нити.

### 7.3 Статически определимые и статически неопределимые системы

Для любой системы сил, действующих на твердое тело в одной плоскости, имеются только три независимых уравнения равновесия, каждое из которых не является следствием двух других.

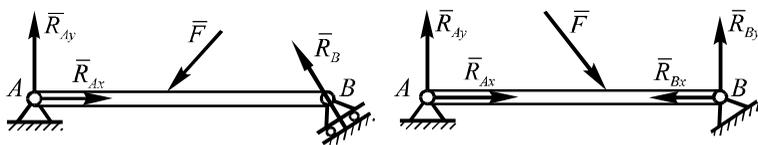
Следовательно, для произвольной плоской системы сил из уравнений равновесия можно найти не более трех неизвестных величин (сил, моментов, углов, расстояний и т. д.); аналогично, для произвольной пространственной системы сил – не более шести.

Если в какой-либо задаче число неизвестных окажется больше числа независимых уравнений равновесия, соответствующих действующей на тело системе сил, то такую задачу нельзя решить методами статики без рассмотрения деформаций тела, то есть без отказа от гипотезы абсолютно твердого тела.

Задачи, в которых число неизвестных равно или меньше числа независимых уравнений равновесия для данной системы сил, приложенных к твердому телу, называют **статически определенными**, а соответствующие им конструкции – **статически определимыми**. В противном случае задача становится **статически неопределенной**, а конструкция – **статически неопределимой**.

#### Пример.

Рассмотрим балки, закрепленные в точках  $A$  и  $B$  так, как это показано на рисунке 7.3. Если в первом случае в точке  $B$  располагается связь – опора без трения, то во втором в ней расположен шарнир. В результате приходим к выводам, представленным на рисунке 7.3.



Три неизвестные силы.

Статически определимая конструкция

Четыре неизвестные силы.

Статически неопределимая конструкция

Рисунок 7.3

Однако при рассмотрении некоторых задач могут встретиться ситуации такого рода: число уравнений равновесия равно числу неизвестных, но при решении системы уравнений оказывается, что ей либо удовлетворяет бесконечно большое количество значений, либо таких значений нет вовсе.

Попытаемся рассчитать, например, реакции связей изображенной на рисунке 7.4 конструкции, особенность которой состоит в том, что линия действия силы  $\vec{S}$  проходит через ось шарнира  $A$ .

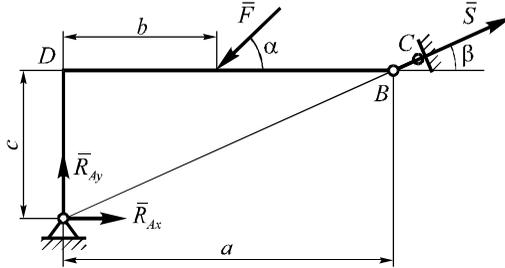


Рисунок 7.4

На нее действует произвольная плоская система сил, поэтому составляются три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} - F \cos \alpha - S \cos \beta = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Ay} - F \sin \alpha + S \sin \beta = 0;$$

$$\sum M_{iA} = 0; \quad -F \sin \alpha \cdot b + F \cos \alpha \cdot c + S \sin \beta \cdot a - S \cos \beta \cdot c = 0.$$

Из уравнения моментов находим:

$$-F(b \sin \alpha - c \cos \alpha) + S(a \sin \beta - c \cos \beta) = 0. \quad (7.4)$$

Соответственно

$$S = F \frac{b \sin \alpha - c \cos \alpha}{a \sin \beta - c \cos \beta}. \quad (7.5)$$

Рассматривая треугольник  $ABD$ , получаем  $\operatorname{tg} \beta = \frac{c}{a}$ . Отсюда следует, что  $a \sin \beta - c \cos \beta = 0$ . Данный факт может повлечь за собой два следующих варианта.

1 Если числитель формулы (7.5) не равен нулю, то получается, что величина силы  $\vec{S}$  стремится к бесконечно большому значению. Такая сила должна была разрушить конструкцию. Однако на практике этого не происходит. Следовательно, представленный теоретический расчет, основанный на применении гипотезы об абсолютно твердом теле оказывается здесь неприемлемым, а для определения величины силы  $\vec{S}$  надо допустить возможность деформирования как рассчитываемого тела, так и наложенных на него связей. Методы подобных расчетов разрабатывают иные науки (сопротивление материалов, строительная механика и др.).

Величины деформаций элементов конструкции здесь не могут считаться пренебрежимо малыми, так как они существенно влияют на ее геометрические параметры. Расчет реакций связей в рассматриваемом случае неразрывно связан с определением значений деформаций. Причем, в положении равновесия конструкция лишается той особенности, о которой речь шла в начале расчета. Из рисунка 7.5 видно, что линия действия силы  $\bar{S}$  уже не проходит через точку  $A$  (положение равновесия показано штрих-пунктирной линией). Конструкции с такими свойствами называют **мгновенно изменяемыми** [2].

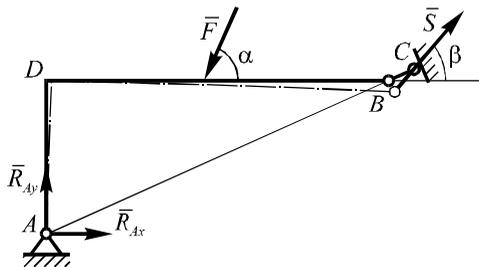


Рисунок 7.5

2 Если же в выражении (7.5) и числитель, и знаменатель равны нулю, то величина силы  $\bar{S}$  описывается неопределенностью вида  $0/0$  (это может иметь место при  $\operatorname{tg} \alpha = c/b$ , то есть, если линия действия силы  $\bar{F}$  проходит через точку  $A$ ). Из уравнения (7.4) при этом следует, что  $S$  может принимать любые значения. Соответственно и величины сил  $\bar{R}_{Ax}$  и  $\bar{R}_{Ay}$  могут оказаться всякими, так как они выражаются через  $S$ . То есть равновесное состояние тела может иметь место при различных наборах значений сил реакций связей. Такая неопределенность решения задачи вызвана тем, что действующие на конструкцию силы оказались сходящимися при трех неизвестных силах. А равновесие тела в этом случае описывается только двумя независимыми уравнениями. Конструкция из мгновенно изменяемой превратилась в статически неопределимую.

Из рассмотренных вариантов видно, что уйти от статической неопределенности и получить однозначное решение задачи можно лишь в результате изменения угла наклона стержня  $BC$  и с ним – линии действия силы  $\bar{S}$ . Причем, положение векторов заданных активных сил не оказывает влияния на возможность решения задачи методами статики абсолютно твердого тела. Она определяется видом и расположением механических связей.

Следовательно, при анализе статической определимости конструкции важно учитывать расположение не столько всех сил, сколько реакций связей и неизвестных активных сил. Поэтому приведем уточненную формулировку:

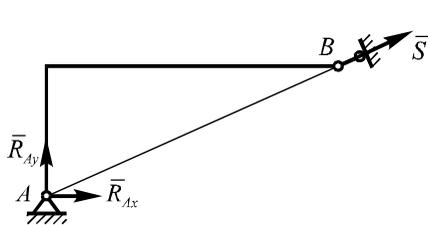
**Статически неопределенными** являются задачи с числом неизвестных, превышающим число независимых уравнений равновесия, соответствующих системе сил, образуемой *реакциями связей и неизвестными активными силами*.

Число независимых уравнений равновесия, соответствующих той или иной системе сил, может быть определено с помощью таблицы 7.1.

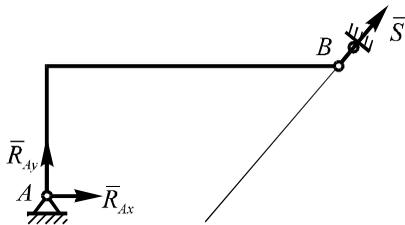
**Таблица 7.1 – Уравнения равновесия тел, находящихся под действием различных систем сил**

Вид системы сил	Число независимых уравнений	Уравнения равновесия
Сходящиеся силы на плоскости	2	$\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0$
Сходящиеся силы в пространстве	3	$\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0; \sum F_{iz} = 0$
Произвольная плоская	3	$\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0; \sum M_{iO} = 0$
Произвольная пространственная	6	$\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0; \sum F_{iz} = 0;$ $\sum M_{ix} = 0; \sum M_{iy} = 0; \sum M_{iz} = 0$

Например, для рассматриваемой конструкции при различных вариантах расположения связей получаем ситуации, представленные на рисунке 7.6.



Система сходящихся сил: число уравнений равновесия – 2; число неизвестных – 3.  
Вывод: задача статически неопределенная



Произвольная плоская система сил: число уравнений равновесия – 3; число неизвестных – 3. Вывод: конструкция статически определима

Рисунок 7.6

Если требуется проанализировать статическую определимость системы тел, то здесь надо учесть, что уравнения равновесия могут быть составлены для каждого из тел. Поэтому следует общее число неизвестных (внешних и внутренних сил) следует сравнивать с суммарным количеством уравнений равновесия тел.

## 8 РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ

### 8.1 Понятие о ферме

**Фермой** называется конструкция, состоящая из стержней, которые образуют геометрически неизменяемую систему (рисунок 8.1).

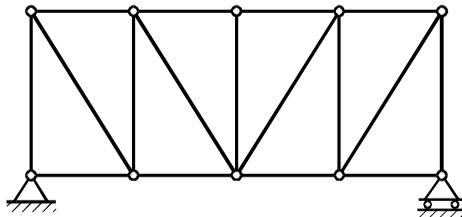


Рисунок 8.1

Места соединения двух или более стержней фермы называют **узлами**. В приближенных расчетах можно допустить, что в узлах фермы находятся шарниры.

Простейшей плоской фермой является стержневой треугольник, содержащий три узла.

Простая плоская ферма получается из простейшей путем последовательного присоединения к ней каждого нового узла при помощи двух новых стержней (рисунок 8.2).

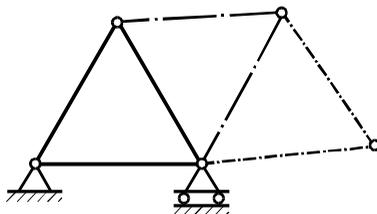


Рисунок 8.2

Обозначим число стержней  $n$ , а число узлов –  $m$ . Тогда количество стержней, добавленных к простейшей ферме  $n - 3$ , а число добавленных узлов  $m - 3$ . В соответствии с определением простой плоской фермы первое значение в два раза больше второго, следовательно

$$n - 3 = 2 \cdot (m - 3);$$

$$n = 2m - 3.$$

Полученное выражение, отражающее связь между числом стержней и узлов, называют **формулой простой плоской фермы**.

### 8.2. Допущения, применяемые при расчете ферм

При расчете сил, действующих на узлы ферм обычно исходят из следующих упрощающих предположений:

- внешние силы приложены только к узлам фермы;
- веса стержней пренебрежимо малы (их можно учесть, разнося по узлам соответствующих стержней);
- трение в шарнирах отсутствует.

При таких допущениях силы, действующие на узлы фермы со стороны стержней, всегда направлены вдоль линий, проходящих через концы стержней. Если стержни фермы прямолинейные, то они при этом либо растягиваются, либо сжимаются.

Для каждого из узлов плоской фермы, поскольку на них действуют системы сходящихся сил, могут быть составлены два уравнения равновесия. Поэтому их общее число  $2m$ . В свою очередь в простой плоской ферме неизвестными являются  $n$  реакций стержней и три реакции внешних связей. Таким образом при числе стержней  $n = 2m - 3$  расчет сил может быть полностью выполнен методами статики твердого тела.

При  $n < 2m - 3$  конструкция становится *геометрически изменяемой*.

Если  $n > 2m - 3$  ферма *статически неопределима*.

Расчет ферм включает две задачи: определение реакций внешних связей и вычисление сил реакций стержней. Как правило, вначале выполняется вычисление реакций внешних связей. К основным методам расчета внутренних сил относятся способы вырезания узлов и сечений.

### 8.3 Определение внутренних сил фермы способом вырезания узлов

Ферма может быть представлена как система тел – узлов, соединенных между собой связями – стержнями. Поэтому для ее расчета справедливы правила, изложенные в п. 2.7.7. Поскольку на каждый узел действует система сходящихся сил, то для него могут быть составлены только два независимых уравнения равновесия, из которых можно найти только две неизвестные силы. В связи с этим расчет следует начинать с того узла, к которому приложены только две неизвестные внутренние силы.

Рассматривая узлы в таком порядке, чтобы в каждом последующем было не более двух неизвестных сил, выполняем расчет всех реакций внутренних связей. Причем следует учитывать, что в соответствии с аксиомой о действии и противодействии силы, которыми стержень действует на взаимодействующие с ним узлы, равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Для удобства будем обозначать их  $\bar{S}_i$  и  $\bar{S}'_i$ .

**Замечание:** для вычисления всех реакций стержней нет необходимости рассматривать все узлы. Последний узел может быть использован для проверки правильности решения.

Достоинство метода – он легко поддается программированию на ЭВМ.

Недостаток: ошибка на начальной стадии расчета ведет к необходимости повторного полного перерасчета.

**Пример** (рисунок 8.3).

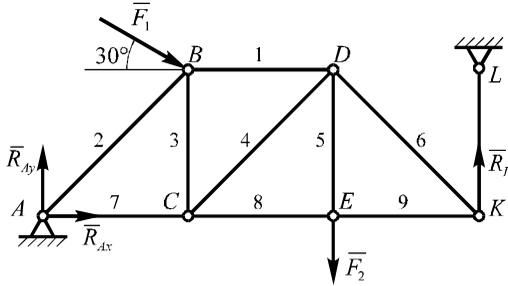


Рисунок 8.3

Дано:

$$F_1 = 6 \text{ кН}; F_2 = 3 \text{ кН}; \\ AC = BC = CE = EK.$$

**Решение.**

Определяем реакции внешних связей: шарнира  $A$  –  $\bar{R}_{Ax}$  и  $\bar{R}_{Ay}$ , а также стержня  $LK$  –  $\bar{R}_K$  (в точке  $L$  нет соединения стержней, поэтому она не является узлом фермы; именно поэтому стержень  $LK$  выступает здесь в качестве внешней связи).

Решая систему уравнений равновесия всей фермы

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0; \quad F_1 \cos 30^\circ + R_{Ax} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \quad -F_1 \sin 30^\circ + R_{Ay} - F_2 + R_K = 0; \\ \sum M_{iA} = 0; \quad R_K \cdot AK - F_2 \cdot AE - F_1 \cos 30^\circ \cdot BC - F_1 \sin 30^\circ \cdot AC = 0, \end{aligned}$$

получаем  $R_{Ax} = -5,20 \text{ кН}$ ;  $R_{Ay} = 1,27 \text{ кН}$ ;  $R_K = 4,73 \text{ кН}$ .

Теперь переходим к расчету внутренних сил (реакций стержней). Как отмечалось ранее, начинать нужно с узла, к которому приложено не более двух неизвестных сил. Этому требованию отвечают узлы  $A$  и  $K$ .

Из рассмотрения узла  $A$  (рисунок 8.4) определяем реакции второго  $\bar{S}_2$  и седьмого  $\bar{S}_7$  стержней:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \quad S_2 \cos 45^\circ + R_{Ax} + S_7 = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \quad R_{Ay} + S_2 \sin 45^\circ = 0. \end{cases}$$

$$S_2 = -1,79 \text{ кН}; S_7 = 6,46 \text{ кН}.$$

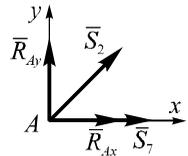


Рисунок 8.4

Теперь по две неизвестные силы действуют на узлы  $B$  и  $K$ .

Для узла  $B$  (рисунок 8.5) с учетом того, что  $S'_2 = S_2$ ,

получаем:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \quad -S_2 \cos 45^\circ + S_1 + F_1 \cos 30^\circ = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \quad -S_2 \sin 45^\circ - F_1 \sin 30^\circ - S_3 = 0. \end{cases}$$

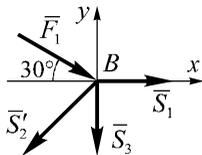


Рисунок 8.5

Отсюда  $S_1 = -6,46 \text{ кН}$ ;  $S_3 = -1,73 \text{ кН}$ .

Рассматривая последующие узлы (например, в таком порядке:  $C, D, E$ ), получаем:  $S_4 = 2,45$  кН;  $S_5 = 3,00$  кН;  $S_6 = -6,69$  кН;  $S_8 = 4,73$  кН;  $S_9 = 4,73$  кН. Уравнения равновесия узла  $K$  могут быть использованы для проверки правильности решения задачи.

Поскольку значения сил  $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$  и  $\bar{S}_6$  получились отрицательными, то их действительные направления противоположны изображенным на рисунках.

### 8.4 Расчет простых плоских ферм способом сечений

В качестве отдельного тела, составляющего ферму, может быть принята часть конструкции, включающая два и более узлов. В этом случае внутренние силы, действующие между частями системы тел, уже не будут сходиться в одной точке. Для такой системы сил можно составить три независимых уравнения равновесия, из которых будут определены три неизвестные силы.

Причем для получения уравнения с одной неизвестной силой составляют суммы моментов относительно точек пересечения линий действия двух других неизвестных реакций стержней. Если линии действия каких-либо двух сил параллельны, то составляется сумма проекций сил на ось, перпендикулярную указанным линиям действия.

Достоинство метода: можно определить значение реакции конкретного стержня, не рассчитывая другие внутренние силы.

#### Пример.

Рассечем ферму, рассмотренную в подразд. 8.3, по стержням 1, 3, 7.

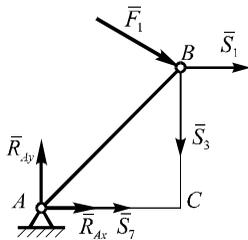


Рисунок 8.6

Из рисунка 8.6 видно, что линии действия сил  $\bar{S}_1$  и  $\bar{S}_3, \bar{S}_3$  и  $\bar{S}_7$  пересекаются в точках  $B$  и  $C$  соответственно, а линии действия сил  $\bar{S}_1$  и  $\bar{S}_7$  параллельны. Поэтому составляем следующие уравнения равновесия:

$$\sum M_{iB} = 0; \quad R_{Ax} \cdot BC - R_{Ay} \cdot AC + S_7 \cdot BC = 0;$$

$$\sum M_{iC} = 0; \quad -R_{Ay} \cdot AC - S_1 \cdot BC - F_1 \cos 30^\circ \cdot BC = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Ay} - S_3 - F_1 \sin 30^\circ = 0.$$

Из них получаем:  $S_7 = 6,46$  кН;  $S_1 = -6,46$  кН;  $S_3 = -1,73$  кН.

Теперь выполним расчет реакций стержней 5, 6, 8:

В этом случае линии действия искомых сил сходятся в точках  $D, E, K$  (рисунок 8.7). Поэтому составляем три уравнения моментов:

$$\sum M_{iD} = 0; \quad R_K \cdot EK - S_8 \cdot DE = 0;$$

$$\sum M_{iE} = 0; \quad R_K \cdot EK + S_6 \cos 45^\circ \cdot EK = 0;$$

$$\sum M_{iK} = 0; \quad F_2 \cdot EK - S_5 \cdot EK = 0.$$

Отсюда определяем  $S_5, S_6$  и  $S_8$ .

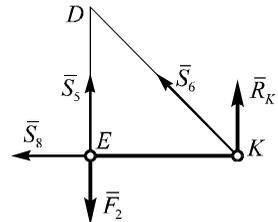


Рисунок 8.7

## 8.5 Графический метод определения внутренних сил в стержнях простой плоской фермы (метод Максвелла – Кремоны)

Выше представлены аналитические способы расчета реакций стержней фермы. Однако при расчете ферм с большим количеством стержней их применение требует значительно больших затрат, чем использование графического метода, заключающегося в построении диаграммы Максвелла – Кремоны. Этот способ является графическим вариантом рассмотренного ранее способа вырезания узлов и состоит в построении замкнутых силовых многоугольников для каждого узла фермы. Его особенностью является метод обозначения сил. Он состоит в следующем. Место, занимаемое фермой, разбивается стержнями фермы и приложенными к ней внешними силами на области (зоны). Каждая сила тогда находится на границе зон и обозначается буквами, соответствующими названиям пограничных областей.

Построение диаграммы выполняется в следующем порядке.

1 Изображается в масштабе ферма, показываются все внешние силы (в том числе и определенные ранее реакции связей) с учетом их действительных направлений так, чтобы их векторы выходили за контур фермы.

2 Буквами обозначаются области, ограниченные линиями действия внешних сил и стержнями контура фермы.

3 Буквами обозначаются внутренние области, ограниченные стержнями фермы.

4 Строится силовой многоугольник внешних сил, приложенных к ферме. Записывается уравнение равновесия фермы в векторной форме: первое слагаемое соответствует одной из внешних сил, последующие получаются при обходе наружного контура фермы, например, по ходу часовой стрелки. В масштабе изображаются все векторы сил. Их начала и концы обозначаются буквами, соответствующими наименованиям зон. При правильном построении силовой многоугольник внешних сил должен быть замкнутым.

5 Выбирается узел, в котором имеется не более двух стержней, реакции которых неизвестны. Составляется уравнение его равновесия в векторной форме. Порядок следования векторов соответствует обходу узла в принятом ранее направлении. В соответствии с условием равновесия достраиваются недостающие стороны силового многоугольника.

6 Выполняются построения, описанные в пункте 5, до того момента, пока не будут определены все искомые силы. Полученная в результате построения фигура носит название диаграммы Максвелла–Кремоны.

Правильность ее построения проверяется по совпадению направлений линии действия последней определяемой внутренней силы и соответствующего стержня при рассмотрении предпоследнего узла.

7 Величины сил реакций стержней определяются путем измерения соответствующих отрезков на диаграмме и умножения на масштабный коэффициент.

Чтобы определить, сжат либо растянут рассматриваемый стержень, необходимо проверить, куда направлен соответствующий вектор силы. Если сила, действующая на узел, направлена от узла фермы – стержень растянут; иначе – сжат.

**Пример.**

Построим диаграмму для фермы, реакции внешних связей которой определены ранее.

Начинаем с изображения фермы и обозначения малыми буквами областей (для удобства они обведены кружками) (рисунок 8.8).

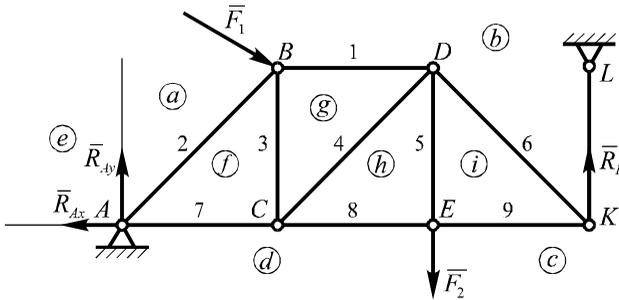


Рисунок 8.8

Запишем условие равновесия фермы под действием внешних сил:

$$\vec{F}_1 + \vec{R}_K + \vec{F}_2 + \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay} = 0 .$$

Обозначим силы буквами, соответствующими наименованиям пограничных зон:

$$\vec{F}_1 = \overline{ab}; \vec{R}_K = \overline{bc}; \vec{F}_2 = \overline{cd};$$

$$\vec{R}_{Ax} = \overline{de}; \vec{R}_{Ay} = \overline{ea} .$$

Тогда условие равновесия фермы перепишется в виде:

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} + \overline{ea} = 0 .$$

Изобразим на рисунке 8.9 соответствующий векторный многоугольник.

Теперь рассмотрим равновесие узла A. При обходе его по ходу часовой стрелки получаем векторное соотношение

$$\overline{af} + \overline{fd} + \overline{de} + \overline{ea} = 0 .$$

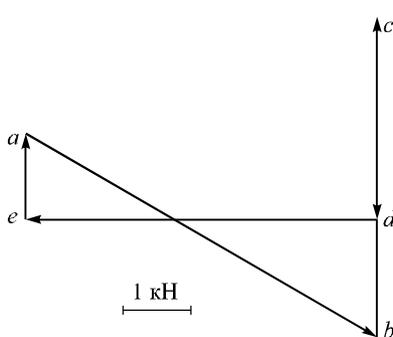


Рисунок 8.9

Здесь векторы  $\overline{af}$  и  $\overline{fd}$  соответствуют силам  $\overline{S}_2$  и  $\overline{S}_7$ . Их величины на начальной стадии построения неизвестны, но заданы направления. Поэтому из точек  $a$  и  $d$  проводим прямые, параллельные стержням 2 и 7 соответственно (рисунок 8.10). На их пересечении получаем точку  $f$ .

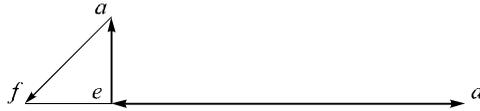


Рисунок 8.10

Аналогично выполняем построения (рисунок 8.11) для следующих узлов в соответствии с векторными равенствами:

$$\text{узел } B: \overline{bg} + \overline{gf} + \overline{fa} + \overline{ab} = 0; \text{ узел } C: \overline{df} + \overline{fg} + \overline{gh} + \overline{hd} = 0;$$

$$\text{узел } D: \overline{bi} + \overline{ih} + \overline{hg} + \overline{gb} = 0.$$

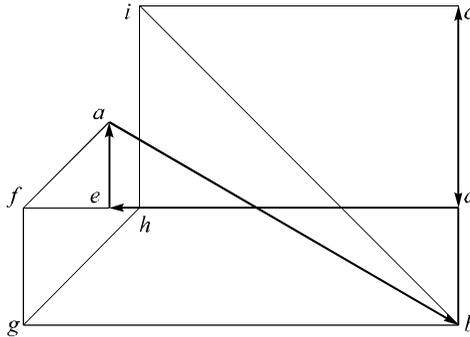


Рисунок 8.11

Правильность построения подтверждает рассмотрение узла  $E$ :  $\overline{cd} + \overline{dh} + \overline{hi} + \overline{ic} = 0$ . Вектор  $\overline{ic}$  параллелен стержню 9.

По результатам расчетов изображаем ферму и показываем действительные направления сил, действующих на ее узлы (рисунок 8.12).

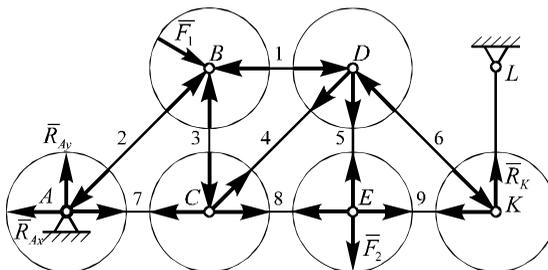


Рисунок 8.12

## 8.6 Решение задач о расчете ферм на ЭВМ

Вычислительная техника может быть применена при решении задач статики для определения корней систем линейных и нелинейных уравнений равновесия, а также в случае выполнения многократных расчетов с целью подбора наиболее рациональных параметров конструкции.

Решение указанных задач может осуществляться как с помощью известных языков программирования (Паскаль, Фортран, Си и т. д.), так и на базе специализированных математических программ: MathCad, MathLab, Mathematica и др. [4, 5]

В наибольшей степени преимущества вычислительной техники сказываются при расчетах конструкций, состоящих из большого числа однотипных элементов, например, ферм. Рассмотрим алгоритм решения такой задачи.

Сначала составляются уравнения равновесия каждого из узлов фермы. Решая их на ЭВМ, определяем искомые значения сил. Причем особенность компьютерного способа расчета состоит в том, что здесь нет необходимости в предварительном определении реакций внешних связей, поскольку они также находятся непосредственно из решения системы уравнений равновесия узлов фермы.

В качестве примера разберем схему расчета изображенной на рисунке 8.13 конструкции.

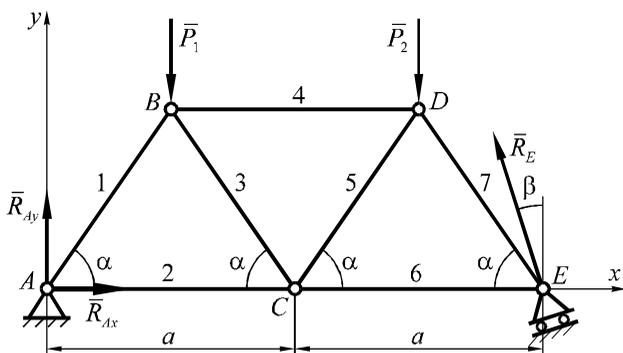


Рисунок 8.13

На каждый узел действует система сходящихся сил, для которой составляется два уравнения равновесия. Поэтому общее число уравнений равно удвоенному количеству узлов (в рассматриваемом случае их десять).

В число неизвестных величин входят семь реакций стержней и три реакции внешних связей. Таким образом, нет необходимости в составлении уравнений равновесия фермы как единого целого.

Уравнения равновесия узлов оформим в виде таблицы 8.1. В каждой ее строке указаны коэффициенты при неизвестных силах и (в последнем столбце) слагаемое, появляющееся за счет действия активных сил. Например, в первой строке записано уравнение суммы проекций всех сил, приложенных к узлу  $A$ , на ось  $x$ :

$$\sum F_{ix} = 0; \quad S_1 \cdot \cos \alpha + S_2 \cdot 1 + R_{Ax} \cdot 1 + R_{Ay} \cdot 0 = 0.$$

Наличие пустой клетки говорит о том, что сила, указанная в названии столбца, не действует на рассматриваемый узел.

Таблица 8.1 – Матрица коэффициентов уравнений равновесия фермы

Узел	Ось	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$R_{Ax}$	$R_{Ay}$	$R_E$	$P_i$
$A$	$x$	$\cos \alpha$	1						1	0		
$A$	$y$	$\sin \alpha$	0						0	1		
$B$	$x$	$-\cos \alpha$		$\cos \alpha$	1							0
$B$	$y$	$-\sin \alpha$		$-\sin \alpha$	0							$-P_1$
$C$	$x$		-1	$-\cos \alpha$		$\cos \alpha$	1					
$C$	$y$		0	$\sin \alpha$		$\sin \alpha$	0					
$D$	$x$				-1	$-\cos \alpha$		$\cos \alpha$				0
$D$	$y$				0	$-\sin \alpha$		$-\sin \alpha$				$-P_2$
$E$	$x$						-1	$-\cos \alpha$			$-\sin \beta$	
$E$	$y$						0	$\sin \alpha$			$\cos \beta$	

Получаемая система линейных уравнений решается на ЭВМ. В результате определяются значения всех искомых сил.

Особенно удобно применение описанного способа в случаях изменения внешней нагрузки. При этом нужно лишь изменить содержимое последнего столбца таблицы, а коэффициенты, зависящие только от геометрических параметров конструкции, останутся неизменными. Таким образом, время повторного расчета оказывается значительно меньше первоначального за счет сокращения стадии подготовки данных.

Отметим, что алгоритм, в соответствии с которым работают программы конечноэлементного моделирования конструкций ANSYS, NASTRAN, ABAQUS и др., использует аналогичный принцип построения систем уравнений, на основе которых осуществляется определение внутренних сил и деформаций в рассматриваемых объектах.

## 9 РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПРИ УЧЕТЕ ТРЕНИЯ

### 9.1 Силы трения скольжения

Если два тела взаимодействуют друг с другом, соприкасаясь между собой, то силу  $\vec{R}$ , действующую со стороны одного тела на другое, можно разложить на две составляющие: перпендикулярную поверхности (нормальную)  $\vec{N}$  и  $\vec{F}_{\text{тр}}$  – силу трения, лежащую в касательной плоскости.

Сила трения препятствует скольжению одного тела по поверхности другого и, соответственно, направляется в сторону, противоположную возможному относительному смещению взаимодействующих точек соприкасающихся тел.

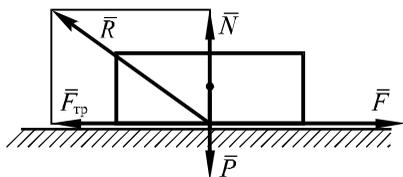


Рисунок 9.1

Рассмотрим тело, находящееся на неподвижной плите (рисунок 9.1). Приложим к нему горизонтальную силу  $\vec{F}$ . Если она недостаточна для того, чтобы сдвинуть тело, то справедливы следующие уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad F - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad N - P = 0.$$

Таким образом, пока тело находится в покое, сила трения остается равной силе  $\vec{F}$ . Обозначим через  $\vec{F}_{\text{тр max}}$  силу трения в критический момент, при котором тело теряет равновесие и начинает скользить по плите.

Тогда, если тело находится в равновесии:

$$F_{\text{тр}} \leq F_{\text{тр max}}. \quad (9.1)$$

Как показывает опыт, максимальная сила трения приблизительно пропорциональна нормальной силе взаимодействия между телами

$$F_{\text{тр max}} = fN.$$

Это соотношение называется **законом Кулона – Амонтона**.

Безразмерный коэффициент  $f$  называется **коэффициентом трения скольжения**. Его значение определяется физическими свойствами материалов тел и величиной неровностей поверхностей и не зависит от площади соприкосновения тел.

Неравенство (9.1) таким образом приводится к виду

$$F_{\text{тр}} \leq fN.$$

Строгое равенство соответствует максимальному значению силы трения. Поэтому силу трения можно вычислить по формуле  $F_{\text{тр}} = fN$  только в тех случаях, когда заранее известно, что имеет место предельное равновесие. Во всех остальных ситуациях силу трения следует определять из уравнений равновесия.

## 9.2 Угол трения. Конус трения

Рассмотрим тело, находящееся на шероховатой поверхности (рисунок 9.2). Будем считать, что в результате действия активных сил и сил реакций тело находится в предельном равновесии.

Предельная реакция  $\bar{R}$  равна геометрической сумме векторов  $\bar{N}$  и  $\bar{F}_{\text{тр max}}$ .

Угол  $\varphi$  между предельной реакцией  $\bar{R}$  и нормалью к поверхности называется **углом трения**.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\text{тр max}}}{N} = \frac{fN}{N} = f.$$

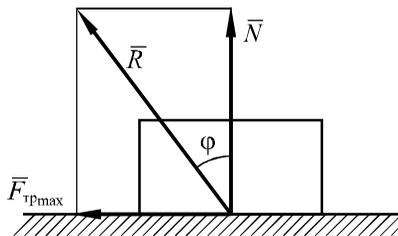


Рисунок 9.2

В зависимости от действия активных сил направление предельной реакции может меняться. Геометрическое место всех возможных направлений предельной реакции  $\bar{R}$  образует коническую поверхность, называемую **конусом трения**.

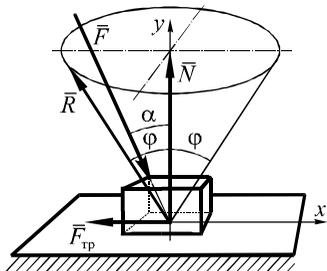


Рисунок 9.3

Рассмотрим случай, при котором активные силы, действующие на тело, приводятся к равнодействующей  $\bar{F}$ , составляющей угол  $\alpha$  с нормалью к поверхности (рисунок 9.3).

Определим, при каких значениях угла  $\alpha$  тело будет находиться в равновесии.

$$\sum F_{ix} = 0; \quad F \sin \alpha - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad N - F \cos \alpha = 0,$$

откуда  $N = F \cos \alpha; \quad F_{\text{тр}} = F \sin \alpha.$

Но при равновесии

$$F_{\text{тр}} \leq fN;$$

$$F \sin \alpha \leq fF \cos \alpha$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varphi.$$

Следовательно, при равновесии  $\alpha \leq \varphi$ .

Таким образом, если равнодействующая активных сил находится внутри конуса трения, увеличением ее модуля нельзя нарушить равновесие тела.

Физический смысл полученного результата состоит в следующем. При увеличении силы  $\bar{F}$  растет величина силы  $\bar{N}$  и с ней – силы трения; соответственно максимальное значение силы трения остается большим проекции силы  $\bar{F}$  на касательную к поверхности.

Полученное условие применяется при проектировании самотормозящихся механизмов.

### 9.3 Трение гибких тел

Пусть невесомый трос охватывает неподвижный круглый цилиндр (рисунок 9.4). Требуется определить силу натяжения  $\bar{P}$ , достаточную для уравновешивания силы  $\bar{Q}$ , приложенной ко второму концу троса, если между тросом и цилиндром имеется трение.

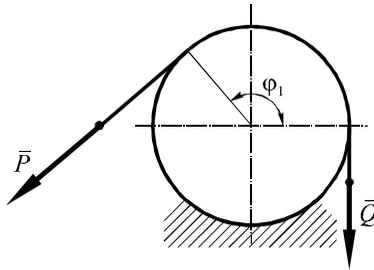


Рисунок 9.4

Рассмотрим критическое состояние, при котором небольшое увеличение силы  $\bar{Q}$  вызывает движение троса относительно цилиндра. Силы трения в таком случае будут пропорциональны соответствующим нормальным реакциям.

Выделим элемент троса длины  $ds = rd\varphi$  (рисунок 9.5).

Спроецируем силы на оси  $Ox$  и  $Oy$ :

$$\sum F_{ix} = 0; T \cos \frac{d\varphi}{2} - dF_{\text{тр}} - T_1 \cos \frac{d\varphi}{2} = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; -T \sin \frac{d\varphi}{2} - T_1 \sin \frac{d\varphi}{2} + dN = 0.$$

Для малых углов

$$\sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}; \quad \cos \frac{d\varphi}{2} = 1.$$

Поскольку  $T_1 = T + dT$ , и величиной произведения  $dT \cdot d\varphi$  можно пренебречь, как величиной более высокого порядка малости по сравнению с  $Td\varphi$ , то:

$$-dF_{\text{тр}} - dT = 0; \quad T \cdot d\varphi = dN.$$

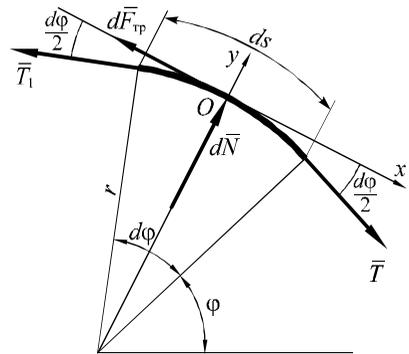


Рисунок 9.5

Учитывая, что рассматривается предельный случай, получаем

$$dF_{\text{тр}} = fdN ; -dT = fTd\varphi ; \frac{dT}{T} = -fd\varphi .$$

Интегрируем полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными в пределах от 0 до  $\varphi_1$ .

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = - \int_0^{\varphi_1} fd\varphi ; \ln P - \ln Q = -f\varphi_1 ;$$

$$P = Qe^{-f\varphi_1} .$$

Таким образом, вычислена минимальная сила  $\bar{P}$ , уравновешивающая силу  $\bar{Q}$  при учете трения между тросом и цилиндром. Если  $P < Qe^{-f\varphi_1}$ , то трос начинает скользить в сторону силы  $\bar{Q}$ .

Определим теперь максимальное значение силы  $\bar{P}$ , при котором не начнется скольжение по направлению этой силы.

В этом случае направление силы трения меняется на противоположное, что приводит к изменению знака перед коэффициентом трения

$$P_{\text{max}} = Qe^{f\varphi_1} .$$

Таким образом, трос будет находиться в равновесии, если величина силы  $\bar{P}$  удовлетворяет двойному неравенству

$$Qe^{-f\varphi_1} \leq P \leq Qe^{f\varphi_1} .$$

## 9.4 Трение верчения

В отличие от абсолютно твердых тел, которые могут соприкасаться в одной точке, соприкосновение прижатых друг к другу реальных тел происходит всегда по некоторой площадке (рисунок 9.6). Приведению одного из тел во вращение по другому препятствуют силы трения скольжения, распределенные по площадке соприкосновения и определяющие в своей совокупности **трение верчения**.

Эти распределенные силы могут быть приведены к паре, которая уравновешивается парой сил, приложенной к телу и стремящейся повернуть его вокруг оси, перпендикулярной к площадке соприкосновения.

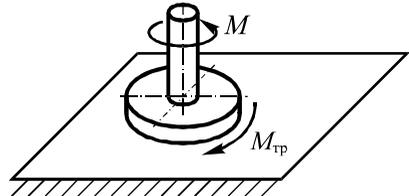


Рисунок 9.6

Определение предельной величины момента пары трения вращения представляет собой сложную задачу, так как этот момент зависит от распределения давлений по площадке соприкосновения, а последнее в свою очередь зависит от формы поверхностей и упругих свойств прижатых друг к другу тел.

Предельную величину момента трения вращения принимают пропорциональной прижимающей силе  $\bar{N}$  и определяют формулой:

$$M_{\max} = \mu N,$$

где  $\mu$  – коэффициент трения вращения, имеющий размерность длины. Этот коэффициент, в свою очередь, зависит от коэффициента трения скольжения  $f$ .

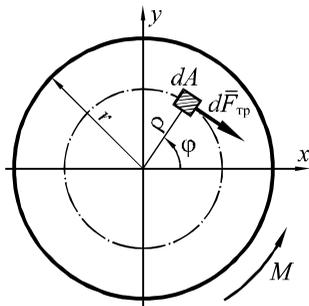


Рисунок 9.7

Определим коэффициент трения вращения круглого диска о поверхность с допущением о том, что силы взаимодействия диска с поверхностью равномерно распределены по площадке контакта.

Предположим, что диск вращается вокруг оси  $z$ , перпендикулярной плоскости рисунка 9.7. Выделим на нем бесконечно малый элемент площадью  $dA$ , движущийся по окружности радиуса  $\rho$ .

На него действует элементарная сила трения

$$dF_{\text{тр}} = f dN .$$

Значение силы  $dN$  может быть определено по формуле

$$dN = q dA ,$$

где  $q$  – величина равномерно распределенной по поверхности нагрузки

$$q = \frac{N}{\pi r^2} .$$

Тогда

$$dF_{\text{тр}} = f \frac{N}{\pi r^2} dA = \frac{fN}{\pi r^2} \rho d\rho d\varphi .$$

Момент этой силы относительно оси  $z$

$$dM_{\text{тр}} = dF_{\text{тр}} \cdot \rho = \frac{fN}{\pi r^2} \rho^2 d\rho d\varphi .$$

Интегрируя по всей площади соприкосновения, получаем:

$$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \frac{fN}{\pi r^2} \rho^2 d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{fN}{\pi r^2} \frac{r^3}{3} d\varphi = \frac{fNr}{3\pi} 2\pi = \frac{2fr}{3} N.$$

Величина  $\mu = \frac{2fr}{3}$  является коэффициентом трения верчения.

Для случая, при котором трение верчения получается в результате соприкосновения сферической поверхности с плоской площадкой, на основании соотношений теории упругости в [3] получена формула:

$$\mu = \frac{3\pi}{16} fa,$$

где  $a$  – радиус круговой площадки, образующейся при соприкосновении тел (он зависит от величины силы прижатия тел и упругих свойств контактирующих поверхностей).

### 9.5 Равновесие тела при учете трения качения

Пусть к катку радиуса  $r$ , перпендикулярно его оси вращения приложена горизонтальная сила  $\bar{F}$ . Кроме того, на каток действует сила тяжести  $\bar{P}$ . Вследствие деформации катка и поверхности они касаются друг друга не в одной точке, а по некоторой площадке (рисунок 9.8). Поэтому линия действия составляющей  $\bar{N}$  реакции поверхности смещается на некоторое расстояние  $\delta$  от оси катка.

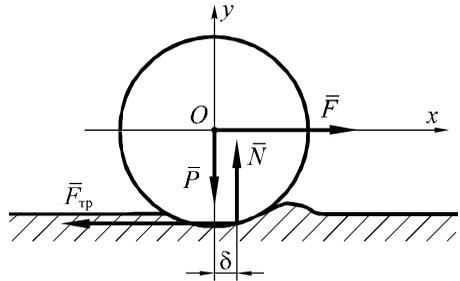


Рисунок 9.8

При равновесии катка должны выполняться следующие уравнения равновесия:

При равновесии катка должны выполняться следующие уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0; & \quad F - F_{\text{тр}} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; & \quad N - P = 0; \\ \sum M_{iO} = 0; & \quad N \cdot \delta - F_{\text{тр}} \cdot r = 0. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Поскольку при равновесии катка  $F = F_{\text{тр}}$ , то силы  $\bar{F}$  и  $\bar{F}_{\text{тр}}$  образуют пару, момент которой

$$M(\bar{F}; \bar{F}_{\text{тр}}) = F_{\text{тр}} \cdot r.$$

Аналогично пару образуют силы  $\bar{N}$  и  $\bar{P}$ . Ее момент

$$M(\bar{N}; \bar{P}) = N \cdot \delta.$$

Как следует из уравнения (9.2), моменты этих пар равны между собой.

Пара сил  $\bar{N}$  и  $\bar{P}$  оказывает сопротивление движению при качении тела, поэтому ее момент называют моментом трения качения.

Размер  $\delta$  называют **коэффициентом сопротивления качению**, если его величина соответствует случаю, при котором  $F = F_{\max}$ . Опыт показывает, что величина этого коэффициента пропорциональна радиусу цилиндра и, кроме того, зависит от физических свойств соприкасающихся тел.

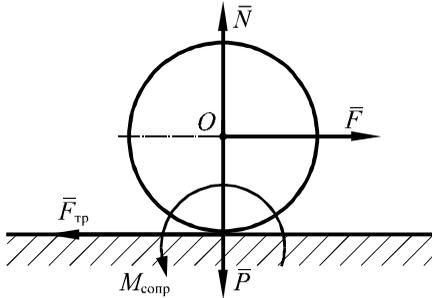


Рисунок 9.9

При расчете тел с учетом трения качения нормальную реакцию  $\bar{N}$  показывают приложенной по оси катка, но дополнительно изображают момент пары сил сопротивления качению (рисунок 9.9), вычисляемый в критическом случае по формуле

$$M_{\text{сопр}} = \delta N.$$

### Пример.

Определим минимальную силу  $\bar{F}$ , удерживающую каток в равновесии (рисунок 9.10).

$$\sum F_{iy} = 0; \quad N - P \cos \alpha = 0;$$

$$\sum M_{iC} = 0; \quad P \cdot r \sin \alpha - F \cdot 2r - M_{\text{сопр}} = 0.$$

Поскольку  $N = P \cos \alpha$  и  $M_{\text{сопр}} = \delta N$ , то получаем

$$F = \frac{Pr \sin \alpha - P\delta \cos \alpha}{2r}.$$

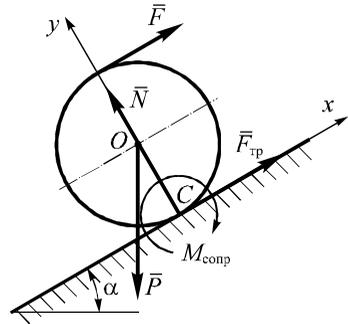


Рисунок 9.10

Отметим, что данное решение соответствует случаю отсутствия про-скальзывания катка по поверхности. При проверке возможности скольжения, для чего дополнительно потребуется спроецировать силы на ось  $x$ , следует учесть, что при некоторых исходных данных сила трения может поменять направление на противоположное.

## 10 ПРИВЕДЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

### 10.1 Инварианты системы сил

Пусть к твердому телу приложена произвольная пространственная система сил  $\{\bar{F}_1; \bar{F}_2; \dots; \bar{F}_n\}$ . Тогда в соответствии с основной теоремой статики она может быть сведена к эквивалентной системе, которая характеризуется главным вектором и главным моментом в виде:

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i;$$

$$\bar{M}_O^* = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_i) = \sum (\bar{r}_i \times \bar{F}_i).$$

Приведем заданную систему к новому центру приведения  $O_1$ .

**Главный вектор системы сил** в таком случае не изменится. В связи с этим говорят, что он представляет собой **инвариант** пространственной системы сил по отношению к положению центра приведения.

Главный же момент относительно нового центра приведения в общем случае изменится, так как момент каждой из сил относительно новой точки станет другим (рисунок 10.1):

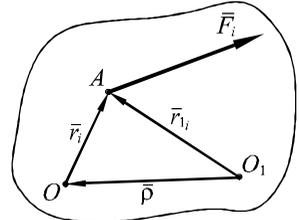


Рисунок 10.1

$$\bar{M}_{O_1}^* = \sum (\bar{r}_{i_1} \times \bar{F}_i).$$

Поскольку  $\bar{r}_{i_1} = \overline{O_1O} + \overline{OA} = \bar{\rho} + \bar{r}_i = \bar{r}_i + \bar{\rho}$ , то

$$\begin{aligned} \bar{M}_{O_1}^* &= \sum (\bar{r}_{i_1} \times \bar{F}_i) = \sum (\bar{r}_i + \bar{\rho}) \times \bar{F}_i = \\ &= \sum (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) + \sum (\bar{\rho} \times \bar{F}_i) = \sum (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) + \bar{\rho} \times \sum \bar{F}_i = \bar{M}_O^* + \bar{\rho} \times \bar{R}^*. \end{aligned}$$

Таким образом, *при изменении центра приведения главный момент изменяется на величину, равную моменту главного вектора относительно нового центра приведения:*

$$\bar{M}_{O_1}^* = \bar{M}_O^* + \bar{\rho} \times \bar{R}^*.$$

Умножим скалярно последнее выражение на главный вектор системы сил.

$$\bar{R}^* \cdot \bar{M}_{O_1}^* = \bar{R}^* \cdot \bar{M}_O^* + \bar{R}^* \cdot (\bar{\rho} \times \bar{R}^*).$$

Но  $\vec{R}^* \cdot (\vec{p} \times \vec{R}^*) = 0$ , так как в смешанном произведении векторов присутствуют два одинаковых вектора. Поэтому

$$\vec{R}^* \cdot \vec{M}_{O_1}^* = \vec{R}^* \cdot \vec{M}_O^* = \text{const}.$$

Следовательно, **скалярное произведение главного вектора на главный момент есть величина постоянная для данной системы сил, не зависящая от положения центра приведения.** Поэтому оно является **вторым инвариантом** системы сил.

## 10.2 Динамический винт

Совокупность силы с моментом, коллинеарным силе, называется **динамическим (силовым) винтом.**

**Теорема.** Если скалярное произведение главного вектора на главный момент системы сил не равно нулю, пространственную систему сил можно привести к динамическому винту.

Доказательство.

Пусть при приведении к произвольной точке  $O$  система сил оказалась эквивалентной силе, равной главному вектору  $\vec{R}^*$ , и паре сил с моментом, равным главному моменту  $\vec{M}_O^*$  (рисунок 10.2).

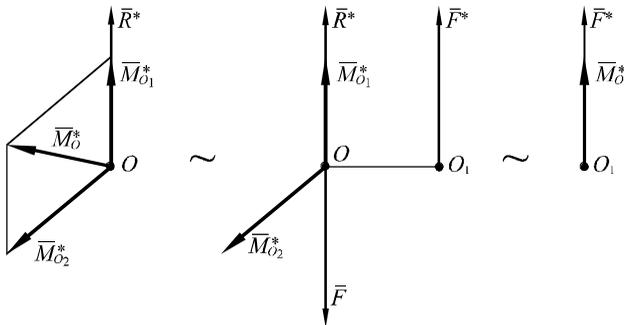


Рисунок 10.2

Так как по условию теоремы  $\vec{R}^* \cdot \vec{M}_O^* \neq 0$ ;  $\vec{R}^* \neq 0$ ;  $\vec{M}_O^* \neq 0$ , то векторы  $\vec{R}^*$  и  $\vec{M}_O^*$  не перпендикулярны.

Разложим главный момент на две составляющие: направленные по главному вектору  $\vec{M}_{O_1}^*$  и перпендикулярно ему  $\vec{M}_{O_2}^*$ . Составляющая  $\vec{M}_{O_2}^*$  пред-

ставляет собой момент пары сил, расположенной в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{M}_{O_1}^*$ . Выберем силы, составляющие эту пару, равными по модулю главному вектору  $\vec{R}^*$ , и приложим силу  $\vec{F}$  к центру приведения. Система сил  $\{\vec{R}^*; \vec{F}\}$ , эквивалентная нулю, может быть отброшена. Так как момент  $\vec{M}_{O_1}^*$  – вектор свободный, то его можно перенести из точки  $O$  в точку  $O_1$ . Таким образом, при приведении заданной системы к точке  $O_1$  получены сила  $\vec{F}$  и пара сил с моментом  $\vec{M}_{O_1}^*$ , коллинеарным силе, то есть получен динамический винт, что и требовалось доказать.

Сила  $\vec{F}$  увлекает тело вдоль некоторой прямой, называемой винтовой осью, а момент  $\vec{M}_{O_1}^*$  вращает его вокруг названной оси. Следовательно, под действием динамического винта тело совершает винтовое движение.

### 10.3 Частные случаи приведения системы сил

1. Из доказательства теоремы в пункте 10.2 следует, что момент  $\vec{M}_{O_1}^* = 0$ , если главный момент перпендикулярен главному вектору. Поэтому, если главный вектор  $\vec{R}^* \neq 0$ , а  $\vec{R}^* \cdot \vec{M}_O^* = 0$ , то рассматриваемая система приводится к *равнодействующей силе*.

2. Пусть при приведении к центру  $O$   $\vec{R}^* = 0$ , а  $\vec{M}_O^* \neq 0$ . Поскольку главный вектор не зависит от положения центра приведения, то главный момент не будет изменяться при его перемене. Таким образом, в этом случае система сил приводится к *эквивалентной паре*.

Различные варианты приведения систем сил приведены в таблице 10.1.

Таблица 10.1 – Случаи приведения системы сил

Главный вектор	Главный момент	$\vec{R}^* \cdot \vec{M}_O^*$	Случай приведения
$\vec{R}^* \neq 0$	$\vec{M}_O^* \neq 0$	$\vec{R}^* \cdot \vec{M}_O^* \neq 0$	Динамический винт
$\vec{R}^* \neq 0$	$\left. \begin{array}{l} \vec{M}_O^* = 0 \\ \vec{M}_O^* \neq 0 \end{array} \right\}$	$\vec{R}^* \cdot \vec{M}_O^* \neq 0$	Равнодействующая сила
$\vec{R}^* = 0$	$\vec{M}_O^* \neq 0$	$\vec{R}^* \cdot \vec{M}_O^* = 0$	Эквивалентная пара сил
$\vec{R}^* = 0$	$\vec{M}_O^* = 0$	$\vec{R}^* \cdot \vec{M}_O^* = 0$	Система сил эквивалентна нулю (тело находится в равновесии)

# 11 ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ И ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

## 11.1 Центр параллельных сил

Пусть к твердому телу приложена совокупность параллельных сил  $\{\bar{F}_1; \bar{F}_2; \dots; \bar{F}_n\}$ , приводящаяся к равнодействующей. Считаем, что положения точек приложения сил фиксированы, то есть они не меняются при одновременном повороте линий действия данных параллельных сил на один и тот же угол в одном и том же направлении.

Тогда равнодействующая повернется на тот же угол вокруг некоторой точки, называемой **центром параллельных сил**. Определим его положение.

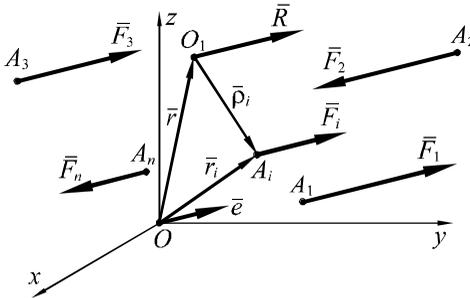


Рисунок 11.1

Пусть точка  $O_1$  лежит на линии действия равнодействующей системы параллельных сил. Вычислим главный момент системы сил относительно произвольно выбранного полюса  $O$  (рисунок 11.1).

Поскольку точка  $O_1$  лежит на линии действия равнодействующей, то сумма моментов всех сил относительно нее равна нулю.

Соответственно

$$\begin{aligned} \sum \bar{M}_{O_i} &= \sum \bar{\rho}_i \times \bar{F}_i = \sum (\bar{r}_i - \bar{r}) \times \bar{F}_i = \sum (\bar{r}_i \times \bar{F}_i - \bar{r} \times \bar{F}_i) = \\ &= \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i - \bar{r} \times \sum \bar{F}_i = 0, \end{aligned}$$

где  $\bar{r}$  – радиус-вектор точки  $O_1$  относительно полюса  $O$ ;

$\bar{r}_i$  – радиус-вектор точки приложения силы  $\bar{F}_i$ .

Введем в рассмотрение единичный вектор  $\bar{e}$ , параллельный линиям действия сил. Тогда любая сила может быть представлена в виде

$$\bar{F}_i = F_i \bar{e}.$$

Следует учесть, что в последнем выражении  $\bar{F}_i$  могут быть положительными (если векторы  $\bar{F}_i$  и  $\bar{e}$  сонаправлены) и отрицательными (в противном случае).

Соответственно

$$\begin{aligned} \sum \bar{M}_{O_i} &= \sum (\bar{r}_i \times F_i \bar{e}) - \bar{r} \times \sum F_i \bar{e} = \sum (\bar{r}_i F_i) \times \bar{e} - \bar{r} \times \bar{e} \sum F_i = \\ &= (\sum (\bar{r}_i F_i - \bar{r} \sum F_i)) \times \bar{e} = 0 \end{aligned}$$

Полученное равенство выполняется при *любом* направлении вектора  $\vec{e}$  при условии:

$$\sum \bar{r}_i F_i - \bar{r} \sum F_i = 0.$$

Последнее уравнение имеет единственное решение относительно радиуса-вектора  $\bar{r}$ , определяющего такую точку приложения равнодействующей, которая не меняет своего положения при повороте линий действия сил:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum \bar{r}_i F_i}{\sum F_i}.$$

Проецированием этого выражения (2.13) на оси декартовой системы координат получим координаты центра параллельных сил:

$$x_C = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i} = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2 + \dots + x_n F_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n};$$

$$y_C = \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i} = \frac{y_1 F_1 + y_2 F_2 + \dots + y_n F_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n};$$

$$z_C = \frac{\sum z_i F_i}{\sum F_i} = \frac{z_1 F_1 + z_2 F_2 + \dots + z_n F_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}.$$

Выражения  $\sum x_i F_i$ ;  $\sum y_i F_i$ ;  $\sum z_i F_i$  называют **статическими моментами** системы сил относительно координатных плоскостей  $yOz$ ;  $xOz$ ;  $xOy$  соответственно.

## 11.2 Центр тяжести

**Центром тяжести тела** называется точка приложения его силы тяжести. Силы тяжести элементов тела представляют собой систему сходящихся сил, линии действия которых пересекаются в центре Земли. Однако углы между этими линиями настолько малы, что в технических расчетах ими пренебрегают. Поэтому центр тяжести тела можно рассматривать как центр системы параллельных сил, образуемых силами тяжести его элементов.

Если на  $i$ -ю часть тела действует сила тяжести  $\bar{P}_i$ , то координаты центра тяжести тела определяются формулами, аналогичными полученным в предыдущем пункте:

$$x_C = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}; \quad y_C = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i}; \quad z_C = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i}, \quad (11.1)$$

где  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  – координаты центров тяжести частей.

Разбивая тело на бесконечно малые элементы, в пределе получаем:

$$x_C = \frac{\int x dP}{P}; \quad y_C = \frac{\int y dP}{P}; \quad z_C = \frac{\int z dP}{P}.$$

Силу тяжести отдельной части однородного тела можно вычислить по формуле

$$P_i = \rho g V_i,$$

где  $V_i$  – объем  $i$ -й части;

$\rho$  – плотность материала тела;

$g$  – ускорение свободного падения.

Поэтому формулы (11.1) преобразуются к виду

$$x_C = \frac{\sum x_i V_i}{\sum V_i}; \quad y_C = \frac{\sum y_i V_i}{\sum V_i}; \quad z_C = \frac{\sum z_i V_i}{\sum V_i}$$

или в интегральной форме:

$$x_C = \frac{\int x dV}{V}; \quad y_C = \frac{\int y dV}{V}; \quad z_C = \frac{\int z dV}{V}.$$

Если тело представляет собой однородную пластину постоянной толщины  $\delta$ , то объем его части

$$V_i = \delta \cdot A_i,$$

где  $A_i$  – площадь  $i$ -го элемента.

Тогда

$$x_C = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}; \quad y_C = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}; \quad z_C = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i}$$

или

$$x_C = \frac{\int x dS}{S}; \quad y_C = \frac{\int y dS}{S}; \quad z_C = \frac{\int z dS}{S}.$$

Для одномерных однородных тел, у которых два размера малы по сравнению с третьим, получаем:

$$x_C = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i}; \quad y_C = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i}; \quad z_C = \frac{\sum z_i l_i}{\sum l_i},$$

где  $l_i$  – длина элемента линии.

Соответственно

$$x_C = \frac{\int x dl}{L}; \quad y_C = \frac{\int y dl}{L}; \quad z_C = \frac{\int z dl}{L},$$

где  $L$  – суммарная длина линии.

### 11.3 Методы определения положения центра тяжести

#### 1 Случай симметрии.

У однородного тела, имеющего плоскость, ось или центр симметрии, центр тяжести находится соответственно в плоскости, на оси или в центре симметрии.

#### 2 Метод разбиения на части.

Если тело имеет сложную форму, его разбивают на части, положения центров тяжести которых известны, а положение центра тяжести тела определяют по формулам подпункта 11.2.

#### 3 Метод отрицательных сил тяжести.

При нахождении центра тяжести тела, имеющего вырезы, полости и т. п., используется метод разбиения на части, причем считается, что полости (их площади, объемы) имеют отрицательные веса.

### 11.4 Центры тяжести отдельных тел

#### Центр тяжести треугольника.

Разобьем треугольник на бесконечно малые элементы, имеющие вид трапеций с двумя основаниями, параллельными стороне  $AC$  треугольника (рисунок 11.2). Центр тяжести каждого такого элемента находится в его центре, следовательно, лежит на медиане  $BD$ .

Выполняя аналогичное построение от сторон  $AB$  и  $BC$ , получаем, что центр тяжести тре-

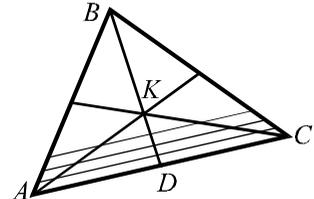


Рисунок 11.2

угольника лежит в точке пересечения его медиан. Соответственно  $BK = \frac{2}{3}BD$ .

#### Центр тяжести дуги окружности радиуса $R$ с центральным углом $2\alpha$ .

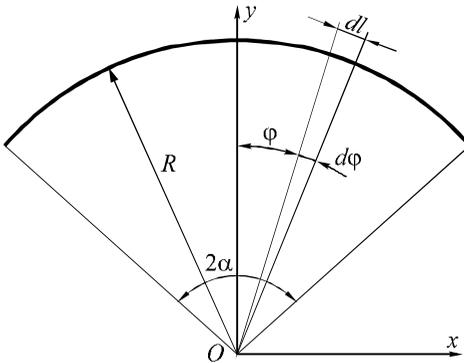


Рисунок 11.3

В силу симметрии центр тяжести лежит на биссектрисе центрального угла, которую примем за ось  $Oy$  (рисунок 11.3).

Выделим бесконечно малый элемент дуги длиной  $dl$ .

В таком случае

$$y_c = \frac{\int y dl}{l}.$$

Поскольку

$$y = R \cos \phi; \quad dl = R d\phi; \quad l = 2R\alpha,$$

то, интегрируя, получаем:

$$y_C = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \varphi \cdot R d\varphi}{2R\alpha} = \frac{R^2}{2R\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = \frac{R}{2\alpha} \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2R \sin \alpha}{2\alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

### Центр тяжести кругового сектора.

Разбиваем сектор на элементарные секторы с центральными углами  $d\varphi$  (рисунок 11.4). Центр тяжести такого сектора (его можно рассматривать как треугольник с высотой  $R$  и основанием  $Rd\varphi$ ) лежит на расстоянии  $\frac{2}{3}R$  от центра круга.

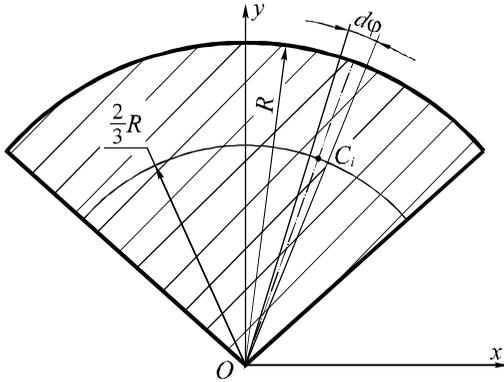


Рисунок 11.4

Остается найти центр тяжести дуги круга радиуса  $\frac{2}{3}R$  в соответствии с предыдущим случаем:

$$y_C = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

Полученные соотношения могут быть применены для вычисления площадей поверхностей и объемов различных тел при использовании теорем Паппа – Гюльдина.

**Пример.** Определим координаты центра тяжести изображенной на рисунке 11.5 пластины.

Чтобы найти площадь заштрихованной фигуры, нужно от площади полукруга отнять площади вырезов (прямоугольника и треугольника). Именно эти элементы являются частями фигуры, на которые ее удобнее всего разбить для решения задачи. Их центры тяжести обозначим через  $C_i$ .

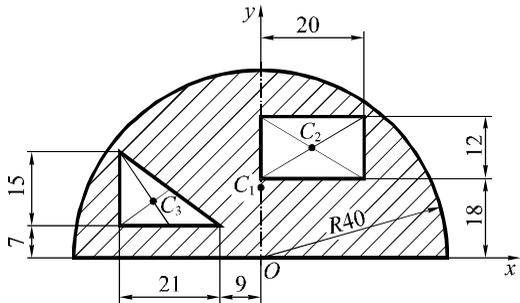


Рисунок 11.5

Далее определим площади и координаты центров тяжести частей.

1 Полукруг.

$$A_1 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3,14 \cdot 40^2}{2} = 2513,3 \text{ мм}^2; \quad x_1 = 0; \quad y_1 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 40}{3\pi} = 17,0 \text{ мм}.$$

2 Прямоугольник.

$$A_2 = -12 \cdot 20 = -240 \text{ мм}; \quad x_2 = \frac{20}{2} = 10 \text{ мм}; \quad y_2 = 18 + \frac{12}{2} = 24 \text{ мм}.$$

3 Треугольник.

$$A_3 = \frac{15 \cdot 21}{2} = 157,5 \text{ мм}^2; \quad x_3 = -9 - \frac{2}{3} \cdot 21 = -23 \text{ мм}; \quad y_3 = 7 + \frac{1}{3} \cdot 15 = 12 \text{ мм}.$$

Подставляем найденные значения в формулы для определения положения центра тяжести пластины:

$$x_C = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{2513,3 \cdot 0 + (-240) \cdot 10 + (-157,5) \cdot (-23)}{2513,3 + (-240) + (-157,5)} = 0,7 \text{ мм};$$

$$y_C = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{2513,3 \cdot 16,98 + (-240) \cdot 24 + (-157,5) \cdot 12}{2513,3 + (-240) + (-157,5)} = 16,6 \text{ мм}.$$

### 11.5 Теорема Паппа – Гюльдина об объеме тела вращения

Возьмем плоскую фигуру, площадь которой равна  $A$ . Выберем в плоскости фигуры какую-либо ось  $z$ , не пересекающую контур фигуры. При вращении фигуры вокруг оси  $z$ , получим тело, называемое **телом вращения** (рисунок 11.6). Вычислим его объем.

Разобьем всю площадь  $A$  на бесконечно малые площадки с площадями  $\Delta A_i$  ( $A = \sum \Delta A_i$ ).

При вращении фигуры вокруг оси  $z$   $i$ -я элементарная площадка опишет кольцо, радиус которого  $x_i$ . Тогда объем этого кольца  $\Delta V_i = 2\pi x_i \Delta A_i$ .

Объем всего тела равен сумме объемов всех колец, описанных рассматриваемыми площадками, то есть

$$V = \sum \Delta V_i = \sum 2\pi x_i \Delta A_i = 2\pi \sum x_i \Delta A_i.$$

Поскольку координаты центра тяжести рассматриваемой плоской фигуры

$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta A_i}{\sum \Delta A_i} = \frac{\sum x_i \Delta A_i}{A}, \text{ то } \sum x_i \Delta A_i = x_C A.$$

Отсюда

$$V = 2\pi x_C A.$$

Таким образом, *объем тела вращения, описанного плоской фигурой, вращающейся вокруг оси, расположенной в плоскости фигуры и не пересекающей ее контура, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описанной ее центром тяжести.*

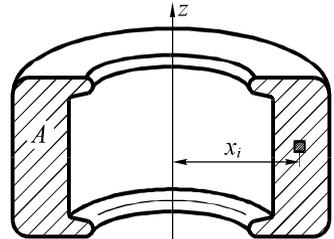


Рисунок 11.6

## 11.6 Теорема Паппа – Гюльдина о площади поверхности тела вращения

Представим поверхность, полученную вращением дуги  $BC$  некоторой плоской кривой вокруг оси  $z$ , лежащей в плоскости этой кривой и не пересекающей дугу  $BC$  (рисунок 11.7). Определим площадь  $A$  этой поверхности.

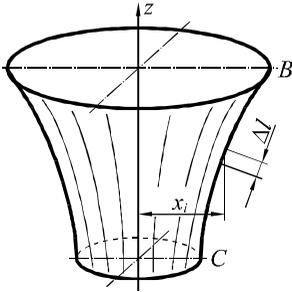


Рисунок 11.7

Разобьем кривую  $BC$  на бесконечное число бесконечно малых элементов длины  $\Delta l_i$  (тогда длина всей кривой  $BC$   $l = \sum \Delta l_i$ ).

При вращении кривой  $BC$  вокруг оси  $z$  все элементы этой кривой опишут кольцеобразные поверхности. Площадь поверхности, описанной элементом длины  $\Delta l_i$ :

$$\Delta A_i = 2\pi x_i \Delta l_i.$$

Площадь всей поверхности вращения равна сумме площадей, образованных всеми кольцами, то есть

$$A_i = \sum \Delta A_i = \sum 2\pi x_i \Delta l_i = 2\pi \sum x_i \Delta l_i.$$

Поскольку координата  $x_C$  центра тяжести кривой удовлетворяет соотношению

$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta l_i}{\sum \Delta l_i} = \frac{\sum x_i \Delta l_i}{l} \text{ и } \sum x_i \Delta l_i = x_C l,$$

то окончательно получаем:

$$A = 2\pi x_C l.$$

*Площадь поверхности, полученной вращением некоторой плоской линии вокруг оси, лежащей в плоскости этой линии и ее не пересекающей, равна произведению длины этой линии на длину окружности, описанной ее центром тяжести.*

**Пример.** Определим объем и площадь поверхности тора (рисунок 11.8).

Если радиус трубы тора  $r$ , а радиус тора  $R$ , то координата  $x_C = R - r$ . Соответственно площадь сечения трубы  $A_{\text{тр}} = \pi r^2$ , а длина ее окружности  $l = 2\pi r$ .

Тогда в соответствии с доказанными теоремами получаем:

$$V_{\text{тора}} = 2\pi(R - r)\pi r^2 = 2\pi^2 r^2 (R - r);$$

$$A_{\text{тора}} = 2\pi(R - r)2\pi r = 4\pi^2 r(R - r).$$

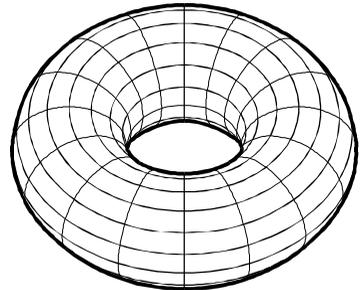


Рисунок 11.8

## 12 ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ СТАТИКИ

### 12.1 Понятие о возможных перемещениях

В аналитической статике, являющейся частью аналитической механики, предлагаются дополнительные способы решения задач о равновесии тел и систем тел, которые в некоторых случаях могут быть более эффективными, чем решение путем составления уравнений равновесия в классической форме. Один из таких способов связан с использованием возможных перемещений.

**Действительными** называются такие элементарные перемещения точек механической системы, которые не противоречат связям и *происходят с течением времени под действием заданных сил*. Таким образом, действительные перемещения соответствуют реально происходящему закону движения системы.

**Возможными (виртуальными)** называются такие *бесконечно малые* воображаемые перемещения точек системы, которые не противоречат связям и *соответствуют фиксированному момент времени*.

Для иллюстрации различия между действительными и возможными перемещениями рассмотрим пример (рисунок 12.1). Стержень находится в равновесии под действием сил  $\vec{F}$  и  $\vec{G}$ . Следовательно, действительные перемещения его точек равны нулю. С другой стороны, наложенная на стержень связь (шарнир  $O$ ) допускает поворот стержня. Поэтому его возможное перемещение определяется углом  $\delta\varphi$ .

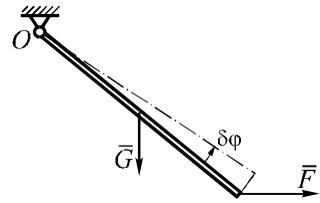


Рисунок 12.1

Помимо углового перемещения  $\delta\varphi$  в задачах механики используются и линейные возможные перемещения  $\delta s$ .

В общем случае, механическая система может иметь много и даже бесконечно большое число возможных перемещений.

**Числом степеней свободы** материальной системы называется число независимых возможных перемещений, которые можно сообщить точкам этой системы в фиксированный момент времени.

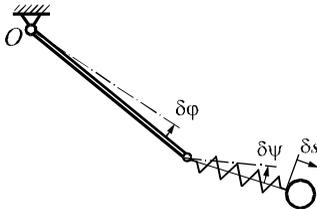


Рисунок 12.2

Например, в изображенной на рисунке 12.2 системе независимо друг от друга могут изменяться углы наклона стержня и оси пружины, а также ее длина. Если все три параметра зафиксировать, то движение оказывается невозможным. Таким образом рассматриваемая система имеет три степени свободы.

Свободная точка имеет три степени свободы, а независимыми возможными перемещениями в этом случае являются вариации координат  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ .

Если точка движется по поверхности, уравнение которой  $f(x, y, z) = 0$ , то  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  связаны соотношением:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0.$$

В этом выражении  $\delta z$  может быть вычислено, если заданы  $\delta x$ ,  $\delta y$ , поэтому число степеней свободы при движении точки по поверхности равно двум.

Свободное твердое тело помимо трех поступательных перемещений может совершать повороты вокруг каждой из трех декартовых осей координат. Следовательно, оно имеет шесть степеней свободы.

В деформируемых телах каждой точке можно сообщить свое независимое возможное перемещение. Поэтому деформируемые тела имеют бесконечное число степеней свободы.

## 12.2 Элементарная работа силы на возможном перемещении.

### Идеальные связи

Элементарной работой силы на возможном перемещении называется скалярное произведение силы  $\vec{F}$  на возможное перемещение точки ее приложения  $\delta \vec{r}$

$$\delta A = \vec{F} \delta \vec{r} = F \delta s \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между вектором силы и направлением перемещения.

Величина работы при этом зависит от выбора возможного перемещения системы.

При действии на тело пары сил ее работа рассчитывается по формуле

$$\delta A = M \delta \varphi.$$

Из приведенных формул следует, что работа силы и момента положительны, если они способствуют перемещению, и отрицательны, если они ему препятствуют.

Если рассматривается некоторая механическая система, к точкам которой приложены  $n$  сил, то результирующая работа всех сил  $\vec{F}_i$  определяется путем алгебраического суммирования

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i,$$

где  $\delta \vec{r}_i$  – возможное перемещение точки приложения  $i$ -й силы.

Понятие работы силы на возможном перемещении позволяет в аналитической механике дать строгое определение идеальной связи.

Связь называется **идеальной**, если для любого возможного перемещения системы сумма работ реакций этой связи равна нулю:

$$\sum_{j=1}^m \bar{R}_j \delta \bar{r}_j = 0,$$

где  $\bar{R}_j$  – реакция связи, соответствующая  $j$ -й точке системы.

Примеры идеальных связей:

1 Связи между точками абсолютно твердого тела, поскольку расстояния между точками этого тела неизменны и соответствующие возможные перемещения равны отсутствуют.

2 Закрепленные точки системы (шарниры, заделки), поскольку для них возможное перемещение равно нулю  $\delta \bar{r}_j = 0$ .

3 Гладкая поверхность. Поскольку ее реакция и возможное перемещение в этом случае перпендикулярны ( $\bar{R}_j \perp \delta \bar{r}_j$ ).

4 Гибкие нерастяжимые связи, типа нитей, так как и в этом случае реакция и возможное перемещение перпендикулярны.

5 Шероховатая поверхность для тел, катящихся по этой поверхности без проскальзывания (при отсутствии трения качения). В этом случае возможное перемещение точки приложения силы трения оказывается равным нулю.

### 12.3 Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)

Принцип возможных перемещений содержит необходимое и достаточное условие равновесия некоторых механических систем.

*Для равновесия механической системы, на которую наложены только идеальные связи, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любых возможных перемещениях системы*

$$\sum \delta A_i = \sum \bar{F}_i \Delta \bar{r}_i = 0. \quad (12.1)$$

Доказательство:

а) необходимость. Докажем, что если система в равновесии, то активные силы удовлетворяют (12.1).

Если система находится в равновесии, то для каждой точки системы выполняется равенство:

$$\bar{F}_i + \bar{R}_i = 0.$$

Умножая это равенство скалярно на возможное перемещение  $\Delta r_i$  и суммируя по всем точкам системы, получаем

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \Delta \bar{r}_i + \sum_{i=1}^n \bar{R}_i \Delta \bar{r}_i = 0.$$

Поскольку все связи идеальны, то  $\sum_{i=1}^n \bar{R}_i \Delta \bar{r}_i = 0$ , следовательно

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \Delta \bar{r}_i = \sum \delta A_i = 0.$$

б) достаточность. Докажем, что при выполнении (12.1), система находится в равновесии.

Предположим, что при соблюдении всех условий теоремы, система вышла из равновесия. Тогда по крайней мере, для одной из точек системы не будет выполняться условие равновесия

$$\bar{F}_i + \bar{R}_i \neq 0. \quad (12.2)$$

Дадим системе возможность перемещения. В качестве возможного примем действительное перемещение. Скорости точек системы в рассмотренный момент  $t = 0$ , поэтому элементарные действительные перемещения направлены по ускорениям точек, то есть по равнодействующим силам. Умножим (12.2) скалярно на  $\Delta \bar{r}_i$ :

$$(\bar{F}_i + \bar{R}_i) \Delta \bar{r}_i \neq 0.$$

Последнее условие должно выполняться хотя бы для 1-й точки системы. Суммируя по всем точкам системы, получаем:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \Delta \bar{r}_i + \sum_{i=1}^n \bar{R}_i \Delta \bar{r}_i \neq 0$$

По условию идеальных связей  $\sum_{i=1}^n \bar{R}_i \Delta \bar{r}_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \Delta \bar{r}_i \neq 0$ , что противоречит условию (12.1).

**Замечание.** В принцип возможных перемещений реакции связей не входят, но его можно применять для определения неизвестных реакций связей. Более подробно соответствующая методика описана в пункте 12.4. Иногда неидеальную связь заменяют идеальной, компенсируя неидеальность соответствующими силами.

Таким образом, в принцип возможных перемещений входят не только активные силы, а все силы, приложенные к точкам системы, кроме реакций идеальных связей, которые не требуется определять по условию задачи.

Порядок решения задач с применением принципа возможных перемещений.

1 Изображается механическая система с приложенными к ней внешними активными силами (при наличии неидеальных связей показываются векторы соответствующих реакций).

2 В случае необходимости определения какой-либо реакции связи показывается ее вектор.

3 Системе сообщается возможное перемещение.

4 Записывается выражение суммы работ всех сил, изображенных на рисунке, на возможном перемещении системы. В соответствии с принципом возможных перемещений эта работа равна нулю.

5 Перемещения всех точек приложения сил, а также углы поворота звеньев, к которым приложены моменты, выражаются через одно возможное перемещение.

6 Подставляя полученные выражения перемещений в уравнение суммы работ, получаем соотношение, из которого определяем искомые величины.

**Замечание.** Если рассматриваемая система имеет несколько степеней свободы, то для решения задачи следует сообщить возможные перемещения, соответствующие каждой степени свободы. Поэтому для получения ответа потребуется решить систему уравнений, число которых равно числу степеней свободы.

**Задача.** При каком значении момента пары сил  $M$  изображенный на рисунке 12.3,  $a$  механизм будет находиться в равновесии, если известны размер  $OA$  и силы тяжести  $G_1, G_2, G_3$  всех звеньев механизма.

Решение.

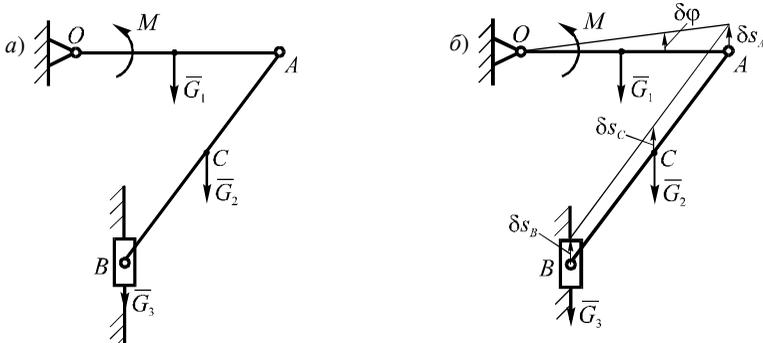


Рисунок 12.3

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы. Шарнир  $O$  допускает только вращение стержня. Поэтому, чтобы изобразить возможное перемещение, мысленно поворачиваем стержень  $OA$  на угол  $\delta\varphi$ . Тогда точка  $A$  переместится вверх на расстояние  $\delta s_A$ , что приведет к перемещению вверх стержня  $AB$  вместе с ползуном (см. рисунок 12.3, б).

Выражение суммы работ активных сил на возможном перемещении системы приобретает вид

$$\sum \delta A_i = M \delta \varphi - G_1 \frac{\delta s_A}{2} - G_2 \delta s_C - G_3 \delta s_B = 0.$$

Выразим все возможные перемещения через  $\delta \varphi$ . Учитывая, что этот угол бесконечно мал, получаем  $\delta s_A = OA \cdot \delta \varphi$ . С другой стороны,  $\delta s_A = \delta s_B = \delta s_C$ , так как перемещения точек параллельны (звено движется поступательно). Тогда подстановка в уравнение работ дает

$$M \delta \varphi - G_1 \frac{OA}{2} \delta \varphi - G_2 OA \delta \varphi - G_3 OA \delta \varphi = 0$$

или

$$\left( M - G_1 \frac{OA}{2} - G_2 OA - G_3 OA \right) \delta \varphi = 0.$$

Поскольку  $\delta \varphi \neq 0$ , то полученное уравнение справедливо при условии

$$M - G_1 \frac{OA}{2} - G_2 OA - G_3 OA = 0.$$

Отсюда окончательно находим

$$M = G_1 \frac{OA}{2} + G_2 OA + G_3 OA.$$

## 12.4 Применение принципа возможных перемещений для определения реакций связей<sup>1)</sup>

Выше отмечалось, что в принцип возможных перемещений не входят реакции связей, но его можно использовать для их нахождения. При этом рассматриваемая механическая система освобождается от связи, а ее действие заменяется реакцией, которую относят к активным силам. Далее решение строится также, как и в предыдущем пункте.

**Задача.** С помощью принципа возможных перемещений определить реакции внешних связей составной конструкции, находящейся под действием сосредоточенной силы  $F = 5$  кН, равномерно распределенной силы интенсивностью  $q_{\max} = 2$  кН/м и пары сил с моментом  $M = 6$  кН·м (рисунок 12.4).

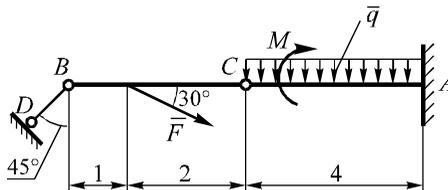


Рисунок 12.4

<sup>1)</sup> Материал подготовлен совместно со старшим преподавателем Краковой И. Е.

Решение.

Равномерно распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой:

$$Q = ql = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН.}$$

В точке  $A$  на раму наложена механическая связь – заделка, ей соответствуют реакции  $\bar{R}_{Ax}$ ,  $\bar{R}_{Ay}$  и момент  $M_A$ . В точке  $B$  конструкция опирается на невесомый стержень  $BD$ , реакция которого  $\bar{S}$  направляется вдоль стержня.

Определим реакцию  $S$ . Отбросим связь – невесомый стержень, приложив силу  $S$ , направленную по стержню. Тогда сила  $S$  перейдет в разряд активных, а точка  $B$  получит возможность перемещаться. Зададим системе возможное перемещение. Так как в точке  $A$  находится заделка, то часть конструкции  $CA$  неподвижна. Возможным перемещением является поворот части  $BC$  на угол  $\delta\varphi$  относительно шарнира  $C$ . При этом точки  $B$  и  $E$  получают возможные перемещения  $\delta s_B$  и  $\delta s_E$ , как показано на рисунке 12.5.

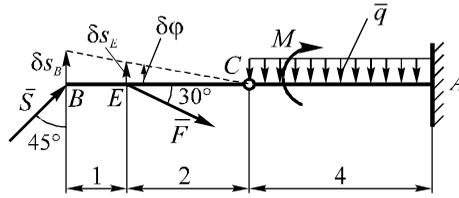


Рисунок 12.5

Запишем уравнение работ сил на возможном перемещении

$$S \cdot \delta s_B \cos 45^\circ - F \cdot \delta s_E \cos 60^\circ = 0. \quad (12.3)$$

Выражаем возможные перемещения через угол  $\delta\varphi$ :

$$\delta s_B = BC \delta\varphi, \quad \delta s_E = EC \delta\varphi.$$

Подставляем в уравнение (12.3)

$$S \cdot BC \delta\varphi \cos 45^\circ - F \cdot EC \delta\varphi \cos 60^\circ = 0,$$

$$\delta\varphi \neq 0, \quad S \cdot BC \cos 45^\circ - F \cdot EC \cos 60^\circ = 0.$$

Отсюда находим

$$S = \frac{F \cdot EC \cos 60^\circ}{BC \cos 45^\circ} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 0,5}{3 \cdot 0,707} = 2,36 \text{ кН.}$$

Определим вертикальную реакцию заделки  $\bar{R}_{Ay}$ . Заменим заделку ползуном, который может двигаться по вертикальной поверхности и приложим силу  $\bar{R}_{Ay}$ . Зададим системе возможное перемещение: ползун переместим по вертикали на  $\delta s_A$ , при этом часть  $AC$  переместится вместе с ним, а точки  $C$  и

$K$  (точка приложения силы  $Q$ ) получат возможные перемещения  $\delta s_C$  и  $\delta s_K$ . Часть  $BC$  повернется вокруг точки  $B$  (ее называют мгновенным центром перемещений – МЦП) на угол  $\delta\varphi$  (рисунок 12.6).

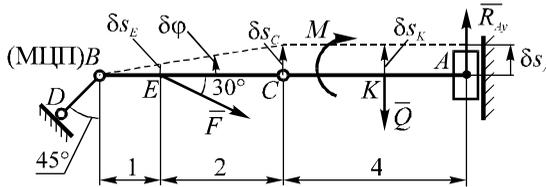


Рисунок 12.6

Запишем уравнение работ сил на возможном перемещении системы:

$$R_{Ay} \cdot \delta s_A - Q \cdot \delta s_K - F \cdot \delta s_E \cos 60^\circ = 0. \quad (12.4)$$

Стержень  $AC$  перемещается поступательно, следовательно  $\delta s_A = \delta s_C = \delta s_K$ . Перемещение точки  $C$   $\delta s_C = BC \delta\varphi$ , поэтому

$$\delta\varphi = \frac{\delta s_C}{BC};$$

Соответственно

$$\delta s_E = BE \delta\varphi = \frac{\delta s_C}{BC} BE = \delta s_C \frac{1}{3}.$$

Подстановка полученных выражений в уравнение (12.4) дает:

$$R_{Ay} \delta s_C - Q \delta s_C - F \delta s_C \frac{1}{3} \cos 60^\circ = 0;$$

$$\delta s_C \neq 0, \quad R_{Ay} - Q - F \frac{1}{3} \cos 60^\circ = 0.$$

Отсюда находим

$$R_{Ay} = Q + F \frac{1}{3} \cos 60^\circ = 8 + 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5 = 8,83 \text{ кН}.$$

Определим горизонтальную реакцию заделки  $\bar{R}_{Ax}$ . Для этого заменим заделку ползуном, который может двигаться по горизонтальной поверхности и приложим силу  $\bar{R}_{Ax}$ . Зададим системе возможное перемещение: ползун переместим по вертикали на  $\delta s_A$ , при этом часть  $AC$  переместится вместе с ним поступательно, а точки  $C$  и  $K$  (точка приложения силы  $Q$ ) получат возможные перемещения  $\delta s_C$  и  $\delta s_K$ .

Стержень  $BD$ , поворачиваясь вокруг точки  $D$ , определяет направление перемещения  $\delta s_B$  точки  $B$  под прямым углом к этому стержню. Таким обра-

зом оказываются известными направления перемещений точек  $C$  и  $B$ . Для нахождения положения точки, вокруг которой происходит поворот стержня  $BC$ , находим точку пересечения перпендикуляров к векторам перемещений точек  $C$  и  $B$ . На рисунке 12.7 она обозначена буквой  $P$ . Угол, на который поворачивается часть  $BC$ , обозначен  $\delta\varphi$ .

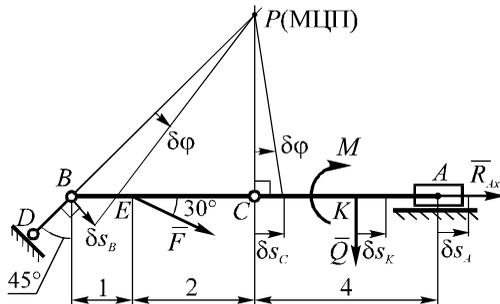


Рисунок 12.7

Теперь следует записать уравнение работ сил на возможном перемещении системы. При этом работу силы  $F$  найдем путем умножения момента этой силы на угол  $\delta\varphi$ . Величину этого момента определяем по теореме Вариньона. Таким образом получаем:

$$R_{Ax} \cdot \delta s_A - Q \cdot \delta s_K \cos 90^\circ + (F \cdot EC \cos 60^\circ + F \cdot PC \cos 30^\circ) \delta\varphi = 0. \quad (12.5)$$

Перемещения точек  $A$ ,  $K$ ,  $C$  стержня  $AC$  одинаковы ( $\delta s_A = \delta s_C = \delta s_K$ ). Выразим  $\delta s_C$  через  $\delta\varphi$  из прямоугольного равнобедренного треугольника  $BSP$ :

$$\delta s_C = PC \cdot \delta\varphi, \text{ где } PC = BC = 3 \text{ м.}$$

Поэтому  $\delta s_A = \delta s_C = \delta s_K = 3\delta\varphi$ .

Подставляем полученные выражения в уравнение (12.5):

$$R_{Ax} \cdot 3\delta\varphi + F \cdot EC \cos 60^\circ \delta\varphi + F \cdot PC \cos 30^\circ \delta\varphi = 0;$$

$$R_{Ax} \cdot 3\delta\varphi + F \cdot 2 \cos 60^\circ \delta\varphi + F \cdot 3 \cos 30^\circ \delta\varphi = 0;$$

$$\delta\varphi \neq 0, \quad 3R_{Ax} + 2F \cos 60^\circ + 3F \cos 30^\circ = 0.$$

Следовательно,

$$R_{Ax} = -\frac{2F \cos 60^\circ + 3F \cos 30^\circ}{3} = -\frac{2 \cdot 5 \cdot 0,5 + 3 \cdot 5 \cdot 0,866}{3} = -6,00 \text{ кН.}$$

Определим момент заделки. Для этого заделку заменим цилиндрическим шарниром и приложим момент  $M_A$ . При этом часть  $AC$  получает возможность поворота вокруг точки  $A$ . Зададим системе возможное перемещение. Сначала повернем стержень  $AC$  на угол  $\delta\varphi$ , что приводит к перемещению соединительного шарнира на величину  $\delta s_C$ . В таком случае мгновенный

центр перемещений части  $BC$  оказывается в точке  $B$ , а сама часть поворачивается вокруг нее на угол  $\delta\varphi_2$ , как это показано на рисунке 12.8.

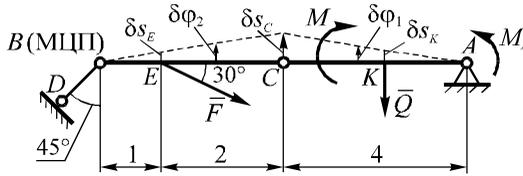


Рисунок 12.8

Запишем уравнение работ сил на возможном перемещении системы

$$-M_A \cdot \delta\varphi_1 + M \cdot \delta\varphi_1 - Q \cdot AK \delta\varphi_1 - F \cos 60^\circ \cdot BE \delta\varphi_2 = 0. \quad (12.6)$$

Выразим  $\delta\varphi_2$  через  $\delta\varphi_1$ :

$$\delta s_C = AC \cdot \delta\varphi_1 = BC \cdot \delta\varphi_2; \quad \delta\varphi_2 = \frac{AC}{BC} \delta\varphi_1 = \frac{4}{3} \delta\varphi_1.$$

Подстановка в уравнение (12.6) дает

$$-M_A \cdot \delta\varphi_1 + M \cdot \delta\varphi_1 - Q \cdot AK \delta\varphi_1 - F \cos 60^\circ \cdot BE \cdot \frac{4}{3} \delta\varphi_1 = 0;$$

$$\delta\varphi_1 \neq 0, \quad -M_A + M - Q \cdot AK - F \cos 60^\circ \cdot BE \cdot \frac{4}{3} = 0;$$

$$M_A = M - Q \cdot AK - F \cos 60^\circ \cdot BE \cdot \frac{4}{3} = 6 - 8 \cdot 2 - 5 \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} = -13,33 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Выполним проверку правильности расчетов. Для этого составим три уравнения равновесия конструкции, изображенной на рисунке 12.9.

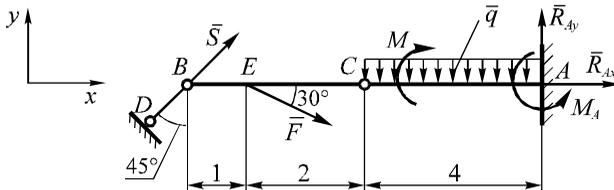


Рисунок 12.9

$$\sum F_{ix} = 0; \quad S \cos 45^\circ + F \cos 30^\circ + R_{Ax} = 0;$$

$$2,36 \cdot 0,707 + 5 \cdot 0,866 - 6 = 0 \text{ (верно);}$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad S \cos 45^\circ - F \sin 30^\circ - Q + R_{Ay} = 0;$$

$$2,36 \cdot 0,707 - 5 \cdot 0,5 - 8 + 8,83 = 0 \text{ (верно);}$$

$$\sum M_{Ei} = 0; \quad -Q \cdot 4 - M - S \cos 45^\circ \cdot 1 + R_{Ay} \cdot 6 + M_A = 0;$$

$$-2,36 \cdot 0,707 \cdot 1 - 8 \cdot 4 - 6 + 8,83 \cdot 6 - 13,33 = -0,02 \approx 0 \text{ (верно).}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 *Дубко, А. Н.* Развитие механики как основы инженерного дела / А. Н. Дубко, Д. В. Комнатный. – Гомель : БелГУТ, 2017. – 278 с.

2 *Дарков, А. В.* Строительная механика : учеб. / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – 11-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2008. – 655 с.

3 *Лойцянский, Л. Г.* Курс теоретической механики : учеб. пособие : в 2 т. Т. 1. Статика и кинематика / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – 9-е изд., испр. и доп. – М. : Дрофа, 2006. – 447 с.

4 *Язев, В. А.* Численные методы в Mathcad : учеб. пособие для вузов / В. А. Язев, И. С. Лукьяненко. – СПб. : Лань, 2022. – 116 с.

5 *Голубева, Л. Л.* Компьютерная математика. Символьный пакет Mathematica : курс лекций / Л. Л. Голубева, А. Э. Малевич, Н. Л. Щеглова. – Минск : БГУ, 2005. – 103 с.

6 Математическая энциклопедия. Т. 1. – М. : Советская Энциклопедия, 1977. – 1152 стб.

Учебное издание

*ШИМАНОВСКИЙ Александр Олегович*

**Статика твердого тела**

Учебно-методическое пособие

Технический редактор *В. Н. Кучерова*

Корректор *Т. А. Пугач*

Подписано в печать 13.05.2023 г. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.  
Усл. печ. л. 5,11. Уч.-изд. л. 4,31. Тираж 200 экз.  
Зак. № 956. Изд. № 11.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Белорусский государственный университет транспорта.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий  
№ 1/361 от 13.06.2014.  
№ 2/104 от 01.04.2014.  
№ 3/1583 от 14.11.2017.  
Ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель