Список литературы

1 *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 736 с.

2 *Кошляков, Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М. : Высш. шк., 1970. – 712 с.

3 *Карслоу, Х* Операционные методы в задачах прикладной математики / Х. Карслоу, Д. Егер. – М. : Издательство иностранной литературы, 1948. – 290 с.

4 *Трантер, К. Дж.* Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. – М. : Гостехиздат, 1956. – 204 с.

УДК 517.920.7:517.443

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С НЕОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

С. А. ДУДКО, И. М. ДЕРГАЧЕВА, А. И. ПРОКОПЕНКО
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Рассмотрим решение 1-й краевой задачи на полуплоскости для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \text{ где } -\infty < x < \infty,\ \ 0 < y < \infty,\ \ t > 0 \tag{1}$$

с нулевым начальным условием $u(x, y, 0) = 0,$ но неоднородным краевым условием

$$u(x, 0, t) = \mu(x, t),\ -\infty < x < \infty,\ \ t > 0. \tag{2}$$

Переходим к синус-образам Фурье в обеих частях уравнения (1). Синус-образ Фурье 2-й производной $\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} \doteqdot -\omega_1{}^2 U_s(\omega_1, \omega_2, t).$ Для 2-й производной по переменной *y* находим фурье-образ, с учетом неоднородного краевого условия (2) следующим образом, исходя непосредственно из синус-преобразования Фурье:

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \doteqdot \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_1 x}dx\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2}\sin\omega_2 y dy. \tag{3}$$

При вычислении внутреннего интеграла по переменной y используем условие ограниченности функции $u(x,y,t)$, т. е.

$$\lim_{y\to\infty} u(x,y,t) = \lim_{y\to\infty}\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y} = 0.$$

Дважды используя метод интегрирования по частям, получаем

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\sin\omega_2 y dy = \int_0^\infty \sin\omega_2 y d\,\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y} =$$

$$= -\omega_2\int_0^\infty \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\cos\omega_2 y dy = -\omega_2\int_0^\infty \cos\omega_2 y du(x,y,t) =$$

$$= -\omega_2\left(-u(x,0,t) + \omega_2\int_0^\infty u(x,y,t)\sin\omega_2 y dy\right) =$$

$$= \omega_2\mu(x,t) - \omega_2^2\int_0^\infty u(x,y,t)\sin\omega_2 y dy.$$

Тогда, возвращаясь к равенству (3), находим требуемый синус-образ Фурье:

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \div \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega_1 x}\left(\omega_2\mu(x,t) - \omega_2^2\int_0^\infty u(x,y,t)\sin\omega_2 y\right)dydx =$$

$$= \frac{\omega_2}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \mu(x,t)e^{-i\omega_1 x}dx - \frac{\omega_2^{\ 2}}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty u(x,y,t)e^{-i\omega_1 x}\sin\omega_2 y dxdy =$$

$$= \frac{\omega_2}{\pi}\mu(\omega_1,t) - \omega_2^2 U_s(\omega_1,\omega_2,t),$$

где мы ввели синус-образ Фурье функции $\mu(x,t)$ из краевого условия (2)

$$\mu(\omega_1,t) = \int_{-\infty}^\infty \mu(x,t)e^{-i\omega_1 x}dx.$$

Как следствие, уравнение (1) после перехода к образам Фурье примет вид

$$\frac{dU_s(\omega_1,\omega_2,t)}{dt} = -a^2\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)U_s(\omega_1,\omega_2,t) + \frac{a^2\omega_2}{\pi}\mu(\omega_1,t),$$

с начальным условием $U_s(\omega_1,\omega_2,0) = 0.$

Решаем полученную задачу Коши методом вариации и находим требуемый синус-образ Фурье:

$$U_s(\omega_1,\omega_2,t)=\frac{a^2\omega_2}{\pi}e^{-a^2\left(\omega_1{}^2+\omega_2{}^2\right)t}\int_0^t \mu(\omega_1,\tau)e^{a^2\left(\omega_1{}^2+\omega_2{}^2\right)\tau}d\tau=$$

$$=\frac{a^2\omega_2}{\pi}\int_0^t \mu(\omega_1,\tau)e^{-a^2\left(\omega_1{}^2+\omega_2{}^2\right)(t-\tau)}d\tau.$$

Далее находим решение поставленной краевой задачи, используя полученный синус-образ Фурье:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}U_s(\omega_1,\omega_2,t)e^{i\omega_1 x}\sin\omega_2 y d\omega_1 d\omega_2=$$

$$=\frac{a^2}{\pi^2}\int_0^t \mu(\omega_1,\tau)e^{-a^2\left(\omega_1{}^2+\omega_2{}^2\right)(t-\tau)}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega_1 x}d\omega_1\int_0^{\infty}\omega_2\sin\omega_2 y d\omega_2=$$

$$=\frac{a^2}{\pi^2}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\mu(\xi,\tau)e^{-i\omega_1\xi}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega_1{}^2(t-\tau)}e^{i\omega_1 x}d\omega_1\int_0^{\infty}e^{-a^2\omega_2{}^2(t-\tau)}\omega_2\sin\omega_2 y d\omega_2=$$

$$=\frac{a^2}{\pi^2}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\mu(\xi,\tau)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega_1{}^2(t-\tau)}e^{i\omega_1(x-\xi)}d\omega_1\int_0^{\infty}e^{-a^2\omega_2{}^2(t-\tau)}\omega_2\sin\omega_2 y d\omega_2.$$

Интеграл по переменной ω_1 был вычислен в статье «Решение краевых задач для уравнений параболического типа. Метод интегрального преобразования Фурье»

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega_1{}^2(t-\tau)}e^{i\omega_1(x-\xi)}d\omega_1=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right).$$

Интеграл по переменной ω_2 вычисляем, интегрируя по частям:

$$\int_0^{\infty}\omega_2 e^{-a^2\omega_2{}^2(t-\tau)}\sin\omega_2 y d\omega_2=-\frac{1}{2a^2(t-\tau)}\int_0^{\infty}\sin\omega_2 y de^{-a^2\omega_2{}^2(t-\tau)}=$$

$$=-\frac{1}{2a^2(t-\tau)}\left(\lim_{\omega_2\to\infty}e^{-a^2\omega_2{}^2(t-\tau)}\sin\omega_2 y-y\int_0^{\infty}e^{-a^2\omega_2{}^2(t-\tau)}\cos\omega_2 y d\omega_2\right)=$$

$$=\frac{y}{2a^2(t-\tau)}\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{y^2}{4a^2(t-\tau)}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}y}{4a^3(t-\tau)\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{y^2}{4a^2(t-\tau)}\right).$$

С учетом найденных интегралов по переменным ω_1 и ω_2 получаем решение поставленной краевой задачи:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\exp\left(-\frac{y^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\xi.$$

Итак, решение неоднородной краевой задачи 1-го рода окончательно представим в следующем виде

$$u(x,y,t)=\frac{y}{4\pi a^2}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mu(\xi,\tau)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\xi.$$

При полной постановке краевой задачи 1-го рода для уравнения теплопроводности с начальным условием $u(x,y,0)=\varphi(x,y)$ $(-\infty<x<\infty,$ $0<y<\infty)$ и краевым условием $u(x,0,t)=\mu(x,t),$ $(-\infty<x<\infty,\ t>0)$ находим решение задачи, суммируя оба полученных решения.

Аналогичным образом можно получить решение 2-й краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\ -\infty<x<\infty,\ \ 0<y<\infty,\ \ t>0,$$

с начальным условием $u(x,y,0)=\varphi(x,y)$, $-\infty<x<\infty,$ $0<y<\infty,$ и краевым условием $\dfrac{\partial u(x,0,t)}{\partial y}=\mu(x,t),$ $-\infty<x<\infty,$ $t>0$, применяя двумерное преобразование Фурье с ядром,

$$K(x,y,\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-i\omega_1 x}\cos\omega_2 y.$$

Решение 2-й краевой задачи имеет следующий вид:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\varphi(\xi,y)\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(\varsigma-y)^2}{4a^2t}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(\varsigma+y)^2}{4a^2t}\right)\right)d\xi d\varsigma-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{t}\frac{d\tau}{t-\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\mu(\xi,\tau)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\xi.$$

УДК 517.4:621.3.011.7

ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

С. А. ДУДКО, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК, А. В. ВОРОЖУН
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Операционный метод нашел широчайшее применение при решении различных задач прикладной математики, механики, электротехники. Прежде всего это относится к теории линейных электрических цепей, где операционный метод стал основным математическим аппаратом при рассмотрении переходных процессов в электрических цепях с сосредоточенными параметрами. Широкое применение операционный метод нашел при рассмотрении задач теории колебаний в системах с распределенными и сосредоточенными массами [1]. В задачах теории линейных электрических цепей помимо ситуации цепей с сосредоточенными параметрами операционный метод оказался также эффективным средством исследования процессов в цепях с распределенными параметрами [2]. В этой статье мы рассмотрим задачу исследования переходных процессов в цепях с распределенными параметрами и получим основные уравнения.

Для линии с распределенными параметрами напряжение u и ток i зависят не только от времени t, но и от координаты x, измеряющей длину линии, т. е. являются функциями $u(x, t)$ и $i(x, t)$. Если линия состоит из двух параллельных проводов, то токи $i(x, t)$ в точках обоих проводов с одинаковой координатой x равны по величине, но направлены в противоположные стороны. Функци $u(x, t)$ определяет разность потенциалов между проводами в точке x.

Пусть R, L, C и G – величины сопротивления, индуктивности, емкости и утечки на единицу длины линии соответственно. Для рассматриваемой