УДК 517.929.7:517.443

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

С. А. ДУДКО, И. М. ДЕРГАЧЕВА, А. И. ПРОКОПЕНКО
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Методы интегральных преобразований давно стали мощным инструментом решения задач математической физики. К сожалению, в классических, фундаментальных руководствах по математической физике этот раздел либо четко не выделяется, как, например, в [1], либо изложение носит довольно сложный и фрагментарный характер, что существенно усложняет восприятие излагаемого материала среднестатистическим студентом [2]. Что касается специальных руководств по методам интегральных преобразований в задачах математической физики [3, 4], то они имеют явно монографический характер и тем более крайне тяжелы для восприятия студентами. Авторы статьи постарались исправить этот пробел в учебной литературе студенческого уровня в своем учебно-методическом пособии «Численные и аналитические методы современной математики. Метод Z-преобразований», где есть целая глава, излагающая решение одномерных краевых задач на полупрямой для уравнения теплопроводности. В этой статье мы хотим обобщить изложенный в учебно-методическом пособии материал на решение многомерных краевых задач для уравнения теплопроводности, продемонстрировав эффективность и в то же время простоту метода интегрального преобразования Фурье.

Рассмотрим 1-ю краевую задачу на полуплоскости

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \text{где } -\infty < x < \infty,\ 0 < y < \infty,\ t > 0. \\ \text{Начальное условие } u(x,\ y,\ 0) = \varphi(x,\ y),\ -\infty < x < \infty,\ 0 < y < \infty. \\ \text{Краевое условие сначала возьмем однородным, т. е. } u(x,\ 0,\ t) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Для решения краевой задачи (1) введем двумерное преобразование Фурье с ядром:

$$K(x,\ y,\ \omega_1,\ \omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-i\omega_1 x}\sin\omega_2 y = \frac{1}{\pi}e^{-i\omega_1 x}\sin\omega_2 y.$$

Как следствие, синус-образ Фурье неизвестной функции $u(x, y, t)$ будет иметь вид

$$U_s(\omega_1, \omega_2, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} u(x, y, t)e^{-i\omega_1 x}\sin\omega_2 y dxdy,$$

а обращение двумерного синус-преобразования Фурье будет даваться формулой

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} U_s(\omega_1, \omega_2, t)e^{i\omega_1 x}\sin\omega_2 y d\omega_1 d\omega_2 \qquad (2)$$

(мы будем использовать операторное обозначение $u(x, y, t) \doteqdot U_s(\omega_1, \omega_2, t)$ для соответствия функции-оригинала и отвечающего ей фурье-образа). Синус-образы Фурье для производных 2-го порядка имеют вид $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteqdot -\omega_1^2 U_s(\omega_1, \omega_2, t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \doteqdot -\omega_2^2 U_s(\omega_1, \omega_2, t)$ (при нулевом краевом условии их можно получить, дважды дифференцируя равенство (2) по x и y).

Переходим к фурье-образам в обеих частях уравнения для функции $u(x, y, t)$ в задаче (1) и получаем следующую задачу Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка

$$\frac{\partial U_s(\omega_1, \omega_2, t)}{\partial t} = -a^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)U_s(\omega_1, \omega_2, t),$$

с начальным условием $U_s(\omega_1, \omega_2, 0) = F_s(\omega_1, \omega_2)$, где функция $F_s(\omega_1, \omega_2)$ – синус-образ Фурье функции начального условия $\varphi(x, y)$, т. е.

$$F_s(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \varphi(\xi, \eta)e^{-i\omega_1\xi}\sin\omega_2\eta d\xi d\eta. \qquad (3)$$

Решение задачи Коши имеет вид

$$U_s(\omega_1, \omega_2, t) = F_s(\omega_1, \omega_2)e^{-a^2(\omega_1^2+\omega_2^2)t}.$$

Подставляем полученное соотношение в равенство (2), с учетом формулы (3) для синус-образа Фурье $F_s(\omega_1, \omega_2)$ получаем

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} F_s(\omega_1, \omega_2)e^{-a^2(\omega_1^2+\omega_2^2)t}e^{i\omega_1 x}\sin\omega_2 y dxdy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\varphi(\xi, \eta)e^{-i\omega_1\xi}\sin\omega_2\eta d\xi d\eta \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-a^2(\omega_1^2+\omega_2^2)t}e^{i\omega_1 x}\sin\omega_2 y d\omega_1 d\omega_2 =$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega_1^2 t}e^{i\omega_1(x-\xi)}d\omega_1\int_0^{\infty}e^{-a^2\omega_2^2 t}\sin\omega_2\eta\sin\omega_2 y d\omega_2 .$$

Внутренние интегралы по переменным ω_1 и ω_2 вычисляем, используя известный интеграл

$$\int_0^{\infty}e^{-\alpha^2\omega^2}\cos\beta\omega d\omega=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}} .$$

Для интеграла по переменной ω_1 получаем, используя свойство четность-нечетность подынтегральной функции

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega_1^2 t}e^{i\omega_1(x-\xi)}d\omega_1=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\omega_1^2 t}\left(\cos\omega_1(x-\xi)+i\sin\omega_1(x-\xi)\right)d\omega_1=$$

$$=2\int_0^{\infty}e^{-a^2\omega_1^2 t}\cos\omega_1(x-\xi)d\omega_1=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right).$$

Интеграла по переменной ω_2 вычисляем, используя тригонометрическое соотношение

$$\int_0^{\infty}e^{-\alpha^2\omega_2^2 t}\sin\omega_2\eta\sin\omega_2 y d\omega_2=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-\alpha^2\omega_2^2}\left(\cos\omega_2(\eta-y)-\cos\omega_2(\eta+y)\right)d\omega_2=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{t}}\left[\exp\left(-\frac{(\eta-y)^2}{4a^2 t}\right)-\exp\left(-\frac{(\eta+y)^2}{4a^2 t}\right)\right].$$

Используя полученные интегралы по переменным ω_1 и ω_2, находим решение поставленной краевой задачи:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{\pi^2}\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\varphi(\xi,\eta)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right)\times$$

$$\times\left[\exp\left(-\frac{(\eta-y)^2}{4a^2 t}\right)-\exp\left(-\frac{(\eta+y)^2}{4a^2 t}\right)\right]d\xi d\eta=$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\varphi(\xi,\eta)\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2}{4a^2 t}\right)-\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(\eta+y)^2}{4a^2 t}\right)\right]d\xi d\eta.$$

Список литературы

1 *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 736 с.

2 *Кошляков, Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М. : Высш. шк., 1970. – 712 с.

3 *Карслоу, Х* Операционные методы в задачах прикладной математики / Х. Карслоу, Д. Егер. – М. : Издательство иностранной литературы, 1948. – 290 с.

4 *Трантер, К. Дж.* Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. – М. : Гостехиздат, 1956. – 204 с.

УДК 517.920.7:517.443

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С НЕОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

С. А. ДУДКО, И. М. ДЕРГАЧЕВА, А. И. ПРОКОПЕНКО
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Рассмотрим решение 1-й краевой задачи на полуплоскости для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \text{ где } -\infty < x < \infty, \;\; 0 < y < \infty, \;\; t > 0 \tag{1}$$

с нулевым начальным условием $u(x, y, 0) = 0,$ но неоднородным краевым условием

$$u(x, 0, t) = \mu(x, t), \; -\infty < x < \infty, \;\; t > 0. \tag{2}$$

Переходим к синус-образам Фурье в обеих частях уравнения (1). Синус-образ Фурье 2-й производной $\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} \doteqdot -\omega_1{}^2 U_s(\omega_1, \omega_2, t).$ Для 2-й производной по переменной *y* находим фурье-образ, с учетом неоднородного краевого условия (2) следующим образом, исходя непосредственно из синус-преобразования Фурье:

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \doteqdot \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_1 x}dx\int_{0}^{\infty}\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2}\sin\omega_2 y dy. \tag{3}$$